arXiv:1905.00471v1 [math.OA] 1 May 2019

Classifying Module Categories for Generalized Temperley-Lieb-Jones $*$-2-Categories

GIOVANNI FERRER波多黎各大学数学系（Mayag¨uez）
电子邮箱：giovanni.ferrer@upr.edu

RobertoHern´andez Palomares俄亥俄州立
大学数学系 电子邮箱:
hernandezpalomares.1@osu.edu

Abstract. 与加权双向图相关的广义 Temperley-Lieb-Jones（TLJ）2-范畴由 Morrison 和 Walker 在未发表的工作中引入。我们将这些广义 TLJ 2-范畴的酉模定义为映入由行有限可分双分次希尔伯特空间构成的 $*$ 2-范畴的强 $*$-伪函子。我们按照 Yamagami 对 TLJ 范畴上纤维函子的分类，以及 DeCommer 和 Yamashita 对 Rep(SU$_q$(2)) 酉模的分类思路，用加权双向公平平衡图对这些模进行分类，分类结果视 $*$-等价而定。

1. Introduction

Temperley-Lieb-Jones（TLJ）代数起源于 Temperley 和 Lieb 关于统计力学中冰型格子的论文 [TL71], ，Jones 在研究有限指数 II$_1$ 子因子[Jon83]时对其进行了形式化。Jones 随后利用这些代数，通过马尔可夫迹定义了著名的结多项式[Jon85]。Kauffman 展示了如何通过缠结理论定义琼斯多项式 [HK87], ，后来又有人证明，可以将 TLJ(δ) 视为带状张量范畴，从而得到琼斯多项式 [RT90]。

连接 TLJ范畴与量子群表示范畴的桥梁是所谓的纤维函子，它们是强幺半函子 TLJ(δ) $\to$ Vec，即到有限维向量空间范畴的函子。在 [Yam04], Yamagami 对所有纤维函子 TLJ(δ) $\to$Vec 进行了分类，其方法是利用某些相关（正）线性映射的谱。

现在，每个纤维函子 TLJ(δ) $\to$ Vec 都赋予 Vec 一个 TLJ(δ)[EGNO15, §7] 模范畴的结构。事实上，TLJ(δ) 的模范畴已被分类为映入 BigVec（双分次向量空间构成的刚性张量范畴）的广义纤维函子，并以带有双线性型的图来描述 [EO04]。在酉情形下，DeCommer 和 Yamashita（[DCY13b] 和 [DCY13a]）对 SU(2) 的模C*-范畴进行了分类；这些范畴可以看作形如 $\mathcal{F}$: Rep(SU$_q$(2)) $\to$ BigHilb 的酉纤维函子，其中 BigHilb 是双分次希尔伯特空间构成的刚性C*-张量范畴（RC*TC），并由公平平衡加权图来描述。（关于双分次希尔伯特空间的更多细节，请参阅定义2.18；关于 RC*TC 的更多细节，请参阅[JP17] 以及 [HPT16] 的第 2.1 节。）请注意，选择适当的 δ 后，TLJ(δ) 是一个与 Rep(SU$_q$(2)) 酉等价的 RC*TC。

在预印本 [MW10], 中，Morrison 和 Walker 引入了 TLJ范畴 的一种广义概念（参见其中的定义 3.1、3.2 和 3.3）。双向加权图由一个可数局部有限有向图 Γ、一个权函数 δ : $E(\Gamma) \to (0,\infty)$，以及一个记作 $\cdot$ 的边的对合构成。该对合会反转边，并满足对每条边 $e \in E(\Gamma)$，都有 $\delta(e) = \delta(\overline{e})$。对于一个固定的双向加权图 $(\Gamma, \delta, \cdot)$，我们构造 $*$-2-范畴 TLJ(Γ)，其中张量积由 Γ 中路径的路径拼接决定（更多细节见定义 2.8）。这些 TLJ $*$-2-范畴推广了普通TLJ范畴；事实上，取如下的 Γ，即可得到各种 TLJ RC*TC:

- 单个顶点和单个自对偶环得到无阴影无定向TLJ,
- 一个带有两条对偶边的单个顶点可恢复无阴影定向TLJ，并且
- 两个顶点之间有两条对偶边，由此可得到 2-着色TLJ。

更多详情请参阅例 2.10。

本文对与加权双向图（Γ、δ、 $\cdot$）相关联的 $*$-2-范畴 TLJ(Γ) 的广义纤维函子和模范畴进行了分类。也就是说，我们将 $*$-伪函子 [NLa18b] 分类为 $*$-2-范畴的可分／可数双分次希尔伯特空间 BigHilb（见定义 2.19）。然而，很快便会遇到由该 2-范畴的非严格性所产生的困难，因此我们引入严格的 $*$-2-范畴 UCat：其对象为酉可数半单范畴，1-态射为 $*$-函子，2-态射为一致有界自然变换（见定义 2.15）；该范畴与 BigHilb $*$-2-等价。在此背景下，我们研究严格的 $*$-伪函子 $\mathcal{F}$: TLJ(Γ) $\to$ UCat。它们由其在 TLJ(Γ) 的生成元上的作用无歧义地确定，而这些生成元的像在 [DCY13a] 中被称为 q-基本解（共轭方程的解）。严谨的表述请参见命题 3.3。

为了对这些酉模进行分类，我们首先将公平平衡图 [DCY13a] 的概念推广到平衡 Γ-公平图 [MW10], ，后者可以直观地视为普通公平平衡图的 E(Γ)-分次版本。

定义 4.3：我们称带有图同态 π : $\Lambda \to \Gamma$ 的加权有向图（Λ, w, π）为Γ-公平图，当且仅当 π 映满 V（Γ），并且对 E（Γ）中的每个 e : $a \to b$ 以及每个顶点 $\alpha \in \pi^{-1}(a)$

$$\sum_{\substack{\{\epsilon \mid \operatorname{source}(\epsilon)=\alpha \\ \text{and } \pi(\epsilon)=e\}}} w(\epsilon) = \delta_e.$$

本定义中一个值得注意的例子出现在边权来自顶点权d : V（Λ）$\to$（0, ∞）作为比值 w（$\alpha \to \beta$）$= d$（α）$/d$（β）时。（可与 [MW10]第 3 页底部的讨论相比较。）在第 4 节中，我们将更仔细地探讨这一概念与 Γ-公平性的比较。此外，还可以要求 Γ-公平图具有一些额外的理想性质，例如存在平衡对合：

定义 4.6：我们称一个 Γ-公平图（Λ、w、π）是平衡的，当且仅当在 E(Λ) 上存在一个对合（$\cdot$），它交换源与目标，并且对于每个 $\epsilon \in E(\Lambda)$

$$w(\epsilon)w(\overline{\epsilon}) = 1 \quad \text{and}$$
$$\pi(\overline{\epsilon}) = \overline{\pi(\epsilon)}.$$

注意，正如 [DCY13a，第 2 页注释 1] 中所述，这样的对合的存在是一种性质，而不是额外的结构。

现在我们已经具备介绍主要结果的条件。

定理4.15：每个平衡的 Γ-公平图都来源于 BigHilb 中的一个 Γ-基本解。此外，平衡的 Γ-公平图的同构类与强 $*$-伪函子 TLJ(Γ) $\to$ BigHilb 的酉同构类之间存在一个等价。

通过取 Γ 为单个顶点和自对偶环，我们恢复了 [DCY13a] 中关于 Rep(SU_q(2)) 的命题2.3（$q < 0$），这给出了无阴影无定向TLJ。我们在例 2.10 中给出更多细节。

现在，我们为读者简要概述本文的内容。第 2 节建立基本框架，并严格定义我们所使用的大多数基本概念。我们正式介绍双向加权图，并说明如何构造我们的原型 $*$-2-范畴 TLJ(Γ)。随后，我们引入抽象的 $*$-2-范畴，从而概述 UCat 与 BigHilb 之间的 $*$-2-等价。

在第 3 节中，我们研究强 $*$-伪函子 $\mathcal{F}$: TLJ(Γ) $\to \mathcal{C}$ 的酉等价，其中 $\mathcal{C}$ 是一个严格 $*$-2-范畴（见定义 3.4），这需要 3-范畴的语言。本着 [Yam04,§2] 与 [DCY13a, Def. 1.3], 的精神，我们将 $\mathcal{C}$ 中的 Γ-基本解（定义 3.1）定义为共轭方程（亦称之字形方程）之解的推广。当 $\mathcal{C}$ 为严格时， Γ-基本解确定唯一的（严格）酉模。事实上，每一个这样的强 $*$-伪函子 TLJ(Γ) $\to \mathcal{C}$ 都酉等价于一个严格伪函子，如命题 3.5 所述。基于这一结果，只需对严格 $*$-伪函子进行分类。借助 $*$-2-等价 BigHilb $\simeq$ UCat，我们将分类转化为 $\mathcal{C} =$ BigHilb 的情形，以理解 Γ-基本解的酉等价

在 BigHilb 中。我们遵循 [DCY13a], 中引入的技术来结束本节，将严格 $*$-伪函子的酉等价（或 BigHilb 中 Γ- 基本解的酉等价）用共轭反线性算子来表述。

最后，在第 4 节中，我们证明上述主分类定理。为此，我们从 BigHilb 中的一个 Γ-基本解 $S = (V, E, C)$ 构造一个平衡的 Γ-公平图。这需要利用与映射 $\{C^e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 相关联的反线性形式所产生的谱数据。反过来，我们展示如何从任意给定的平衡 Γ-公平图构造一个强 $*$-伪函子 $\mathcal{F}$: TLJ(Γ) $\to$ BigHilb。最后，我们证明这两个过程互为逆过程，从而建立所需的等价。

在证明这一结果的过程中，我们探讨了 Morrison 和 Walker [MW10] 提出的问题，即满足 Perron-Frobenius 型条件的加权图问题。（见注4.9。）为此，我们给出平衡的 Γ-公平图属于 Morrison 和 Walker 所考虑类型的充要条件。最后，我们在本节末尾指出， [CHPS18] 中的推论B（涉及右主 pivotal 循环 TLJ(d)-模）与我们在 Morrison 和 Walker 的研究范畴内所做的工作之间存在关联。

1.1. 致谢。我们衷心感谢 David Penneys 和 Corey Jones 热情地分享想法与技巧，并为本项目的开展倾注心力、给予指导。若非他们慷慨地投入时间，并乐于讨论本文中的大多数想法和证明，这项分类工作便不可能完成。我们也非常感谢波多黎各大学马亚圭斯校区和俄亥俄州立大学的数学系，为促成两系之间的合作提供了条件。最后，我们要感谢美国国家科学基金会；David Penneys 的 NSF CAREER 资助项目 1654159 以及 SAMMS 项目为我们提供了全额经费支持。SAMMS 项目由俄亥俄州立大学和波多黎各大学马亚圭斯校区组织。

2. Background

2.1. 图生成的Temperley-Lieb-Jones范畴。

记号 2.1. 对于图 Γ，我们分别用 $V(\Gamma)$ 和 $E(\Gamma)$ 表示 Γ 的顶点集和边集。

定义 2.2. [MW10] 一个加权双向图（Γ，δ，$\cdot$）是一个可数局部有限有向图，并配备一个权函数

$$\delta : E(\Gamma) \to (0, \infty)$$

以及一个称为对偶性的对合，该对合由映射给出

$$\overline{\cdot} : E(\Gamma) \to E(\Gamma).$$

对偶性反转源和目标，且权函数具有如下性质：$\delta(e) = \delta(\overline{e})$。注意，源和目标相同的边可能是自对偶的，因为 Γ允许存在环。为简单起见，我们将（Γ，δ，$\cdot$）记为 Γ，并将 $\delta(e)$ 记为 δ_e。

例 2.3。 这里，我们给出一个双向图的例子，其中边 d 和 e是自对偶的 .

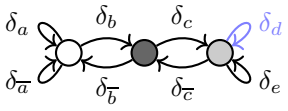
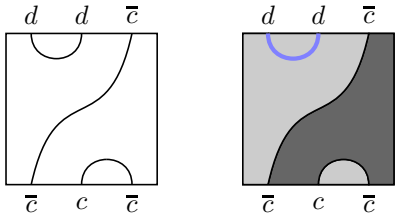


Figure 2.1. 加权双向图 Γ

注释 2.4。在本文中，我们只考虑连通局部有限图。

定义 2.5。设 Γ 为一个加权双向图，并设 $a = (a_i)_{i=1}^n$ 和 $b = (b_j)_{j=1}^m$ 为 $E(\Gamma)$中的有限有序序列，它们定义了 Γ中的路径。也就是说，如果 e、f 是任一路径中相邻的元素，那么 f 的源等于 e的目标。考虑单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$，其底边和顶边上分别标出了 n 个点和 m 个点。我们将底边上的 i^{th} 个点从左到右依次对应于 a_i，并将顶边上的 j^{th}个点对应于 b_j。从 a 到 b 的 Γ-Temperley-Lieb-Jones (TLJ(Γ)) 图由若干不相交光滑弧组成，这些弧从与 Γ 的一条边 e 相对应的点出发，终止于同一单位正方形边上与 $\overline{e}$相对应的点，或终止于对侧单位正方形边上与 e相对应的点。

- 图中的一条弦表示 Γ （来自例 2.3）中的一条边，其中弦左侧区域的阴影表示其源，而右侧区域的阴影表示其目标。



- 通过从每个源和目标相同的对偶对中选择一条边，我们指定定向，以便区分表示它们的弦。

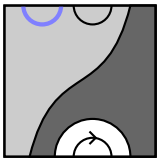
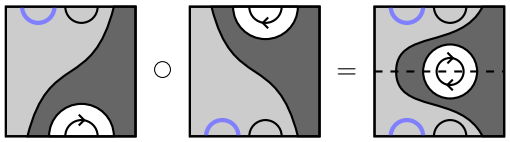


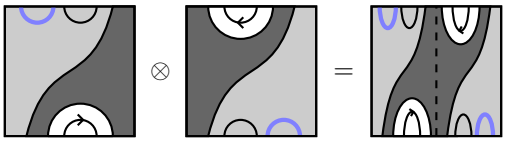
Figure 2.2. TLJ(Γ) 图示例

• TLJ(Γ)-图的垂直复合和水平复合分别通过垂直堆叠和水平并置给出。我们注释说，只有当给定图的顶端和底端都标记为 Γ中的同一路径时，才能进行垂直复合；而仅当第一个图右下角（右上角）最后一条边的目标与第二个图左下角（左上角）第一条边的源相匹配时，才能进行水平复合。

(2.1)

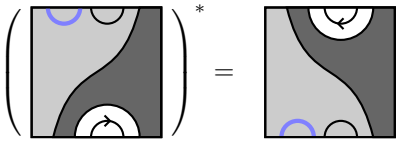


(2.2)



• TLJ(Γ)-图的对合可通过关于水平轴反射并反转任意弦的方向来定义。

(2.3)



注释 2.6. 与标准的考夫曼图类似，这些 TLJ(Γ)-图由杯与帽构成的族通过垂直复合和水平复合生成。

注释 2.7. 通过这些图生成范畴，可以得到任意简单的 Temperley-Lieb 类图，并可具有任意数量的弦阴影、定向和区域阴影。

定义 2.8. [MW10] 设 Γ 为一个加权双向图。我们将由 Γ生成的 Temperley-Lieb Jones 范畴 TLJ(Γ) 定义为如下的 ∗-2-范畴：

• 对象是 Γ 的顶点

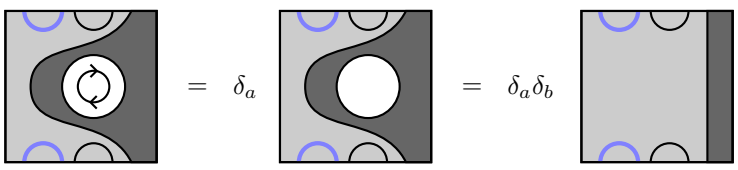
• 1-态射是 Γ 上的路径。特别地，对于 $a, b \in V(\Gamma)$,

$$\text{从 } a \text{ 出发并以 } b\}\,.\text{为终点的 } \Gamma \text{ 中的路径：} \hom(a,b) := \{$$

也就是说，先前定义的对象与这一组 1-态射共同构成由 Γ. 生成的自由范畴。请注意，当第一条路径的终点与第二条路径的起点相同时，1-复合即为路径拼接；否则，1-复合无定义。

从路径 a 到路径 b 的• 2-态射是由从 a 到 b 的简单 TLJ(Γ)-图构成的形式 $\mathbb{C}$-线性组合，并模去 δ_e-等价关系；该关系将闭合的 e-环和 $\overline{e}$-环替换为标量 δ_e。

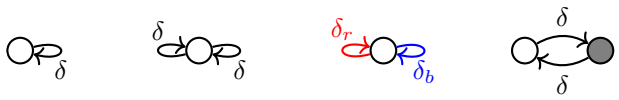
(2.4)



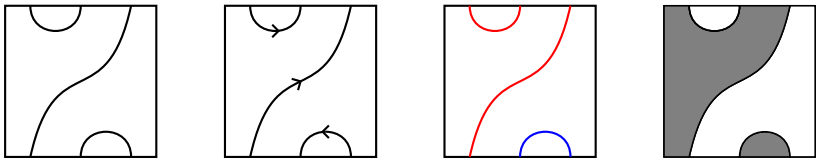
此外，我们将 2-态射的水平复合和垂直复合分别定义为 TLJ(Γ)-图的水平堆叠和垂直堆叠的线性扩张；并将 TLJ(Γ) 中 2-态射上的对合 $*$ 定义为 TLJ(Γ)-图上对合的反线性扩张。

注释 2.9。提醒读者，这只是一个 ∗-2-范畴，与具有额外解析性质（例如为 C*/W*）的 2-范畴不同。

例 2.10。标准 Temperley-Lieb-Jones 范畴 TLJ(δ)、带定向弦的 Temperley-Lieb-Jones 范畴以及阴影 TLJ，分别由以下加权双向图 Γ_0、 Γ_1、 Γ_2 和 Γ_3 生成：



我们列出与前述各图对应的 TLJ(Γ)-图示例：



2.2. TLJ(Γ) 的酉模。

记号 2.11. 本文中，我们不加区分地使用双范畴和 2-范畴这两个术语。因此，我们不对 2-范畴的严格性作任何一般性假设。必要时，我们会明确说明所作的严格性假设。我们用 $\otimes$ 表示 1-态射的复合，也用它表示 2-态射的水平复合。我们用 $\circ$ 表示 2-态射的垂直复合。

定义 2.12. $*$-2-范畴是一个以 dagger 范畴为富集范畴的范畴。具体而言，对于任意 1-态射A, B, C 以及每一对 $\eta \in 2\text{hom}(A \Rightarrow B)$、 $\kappa \in 2\text{hom}(B \Rightarrow C)$，我们有 $(\kappa \circ \eta)^* = \eta^* \circ \kappa^*$ 和 $(\kappa \otimes \eta)^* = \kappa^* \otimes \eta^*$，只要这些 2-态射可以复合。（关于 dagger/ C^*-范畴的详细讨论，请参见 [JP17] 的第 2 节。）

定义 2.13. 给定 2-范畴 $\mathcal{C}$与 $\mathcal{D}$，伪函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$由三元组 $(\mathcal{F}, \mu, \iota)$ 构成，定义如下：

- 对每个 0-态射 $x \in \mathcal{C}$，一个 0-态射 $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{D}$;
- 对 $\mathcal{C}$ 中的每个 hom 范畴 $C(x, y)$，一个函子 $\mathcal{F}_{x,y}\colon \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(\mathcal{F}(x)\ \mathcal{F}(y))$;
- 对 $\mathcal{C}$ 的每个 0-态射 x，一个可逆 2-态射（或 2-同构） $\iota_x\colon \text{id}_{\mathcal{F}(x)} \Rightarrow \mathcal{F}_{x,x}(\text{id}_x)$。
- 张量ator 是一个自然同构 μ，由形如$\mu_{\varphi,\psi}\colon \mathcal{F}(\varphi) \otimes \mathcal{F}(\psi) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi \otimes \psi)$ 的一组 2-同构给出，其中 φ、 ψ 是 $\mathcal{C}$ 中的 1-态射。

我们仅指出其中涉及若干相干公理，但此处不予详述。相反，我们请感兴趣的读者参阅 nLab 中的描述。[NLa18b]此外，若 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$ 是 $*$-2-范畴，则对每个 0-态射 $x \in \mathcal{C}$，我们有 ι_x 是酉的；对 $\mathcal{C}$ 中的每一对 1-态射 φ、 ψ，张量ator $\mu_{\varphi,\psi}$ 是酉的；并且若 $\mathcal{F}(\varphi^*) = \mathcal{F}(\varphi)^*$ 在 $\mathcal{C}$ 中成立，则我们称 $\mathcal{F}$ 为 $*$-伪函子。我们以提醒读者结束本定义：在 $*$-2-范畴中，2-态射 u 的酉性意味着 $u^* = u^{-1}$.

记号 2.14。我们将“酉范畴”和“可数半单 C^*-范畴”这两个术语不加区分地使用。关于 C^*-范畴的详细说明，请参见 [JP17]。

定义 2.15。令 UCat 为一个 2-范畴，其 0-态射由酉范畴组成，1-态射为 $*$-函子，2-态射为（一致）有界自然变换。我们按如下方式将 UCat 赋予 $*$-2-范畴结构。设 $\alpha\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ 是 UCat 中的一个 2-态射，其中 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $*$-函子。也就是说， $\alpha = \{\alpha_c\colon \mathcal{F}(c) \to \mathcal{G}(c)\}_{c\in\mathcal{C}}$ 是一个由 $\mathcal{C}$ 的对象指标化的 $\mathcal{D}$ 中的态射族。于是，我们在 UCat 中定义对合 $*$ 为 $\alpha^* := \{\alpha_c^{*_\mathcal{D}}\colon \mathcal{G}(c) \to \mathcal{F}(c)\}_{c\in\mathcal{C}}$，其中 $*_\mathcal{D}$ 是酉范畴 $\mathcal{D}$ 中的对合。

注释 2.16。注意，UCat 是严格的，因为 1-态射的张量积由函子的复合给出。我们还将省略所有结合子和单位子。

记号 2.17. 对于任意给定的 2-范畴 $\mathcal{C}$，例如 TLJ(Γ) 或 UCat，我们将记 $f \in 1\mathcal{C}$，仅表示 f 是 $\mathcal{C}$ 中两个对象之间的一个 1-态射，而不必指明具体对象。对于 2-态射，我们也采用类似的记号。

从现在起，我们将重点分类那些酉 TLJ(Γ)-模，这些模表示为强 $*$-2-函子 $\mathcal{F}\colon$ TLJ(Γ) $\to$ UCat。为此，我们引入一个辅助的 $*$-2-范畴，它与 UCat $*$-2-等价，从而可以按照 [Yam04] 和 [DCY13a] 的思路使用线性代数工具。

定义2.18. 设 J 和 K 是可数集。我们将由 $J\times K$分次希尔伯特空间构成的范畴记为 $\mathbf{Hilb}_f^{J\times K}$

$$\mathscr{H}=\bigoplus_{\substack{v\in J\\ w\in K}}\mathscr{H}_{vw}$$

使得 $\sup_v\sum_w\dim(\mathscr{H}_{vw})<\infty$。换言之，对于每一对 v、w，$\mathscr{H}_{vw}$ 都是有限维的；固定第一个指标时，其中只有有限多个非平凡。（可以将其想象为由有限维希尔伯特空间构成的“行有限”矩阵。）于是，态射定义为有界算子

$$f=\bigoplus_{\substack{v\in J\\ w\in K}}f_{vw}:\mathscr{H}\to\mathscr{G},$$

其中 $f_{vw}\colon\ \mathscr{H}_{vw}\to\mathscr{G}_{vw}$ 是 $\mathbf{Hilb}_{f.d.}$中的态射。态射 f、$g\in$ 之间的复合 $\mathbf{Hilb}_f^{J\times K}$ 按分量复合定义，即

$$g\circ f:=\bigoplus_{\substack{v\in J\\ w\in K}}g_{vw}\circ f_{vw}. \tag{2.5}$$

定义 2.19. 我们将 BigHilb 定义为由双分次希尔伯特空间构成的 $*$-2-范畴，其 0-态射为可数集，且 $\hom(J,K)=\mathbf{Hilb}_f^{J\times K}$。对于 $\mathscr{H}\colon J\to K$和 $\mathscr{G}\colon K\to L$，1-态射的复合记为 $\otimes$，其定义为

$$\mathscr{H}\otimes\mathscr{G}:=\bigoplus_{\substack{v\in J\\ w\in L}}\bigoplus_{k\in K}\mathscr{H}_{vk}\otimes\mathcal{G}_{kw}$$

其中右侧的 $\otimes$ 是希尔伯特空间的张量积。该运算类似于矩阵乘法。注意，对每个对象 J，单位1-态射id_J 由下式给出

$$\mathrm{id}_J=\bigoplus_{v,w\in J}\delta_{v,w}\cdot\mathbb{C},$$

其中当 $v=w$ 时，$\delta_{v,w}:=1$，否则$\delta_{v,w}:=0$。回顾一下，2-态射的复合已在式(2.5)中定义。我们按如下方式将BigHilb变为一个 $*$-2-范畴。对每个2-态射 $f=\bigoplus_{v,w}f_{vw}\colon\ \mathscr{H}\to\mathscr{G}$，我们定义其伴随 $f^*:=\bigoplus_{v,w}f_{vw}^*\colon\ \mathscr{G}\to\mathscr{H}$，其中 f_{vw}^* 是 f_{vw} 作为有界线性算子的伴随。

专家们熟知，半单线性范畴的2-范畴2-等价于双分次向量空间的2-范畴。类似地，可数半单的C*-范畴的W*-2-范畴 $*$-2-等价于W*-2-范畴BigHilb。我们仅提供后者的证明概要，因为在此证明这些陈述会使我们离题太远。

命题 2.20. 存在一个酉的 $*$-2-范畴等价 $\Theta^{-1}\colon$ UCat $\to$BigHilb。

证明概要。对于 $\mathcal{C}\in$ UCat，根据可数半单性和选择公理，存在一个可数集合 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，它定义了$\mathcal{C}$. 中单对象同构类的完全代表集。现在，若 $\mathcal{C},\mathcal{D}\in$ UCat，对于 $\mathcal{F}\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，即 U-Cat 中的一个 1-态射，我们如下构造范畴 $\mathbf{HilbIrr}_f$ $^{(\mathcal{C})\times\ \ (\mathcal{D})}\mathrm{Irr}$：对于 $e_j\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ $f_i\in\mathrm{Irr}(\mathcal{D})$，我们利用半双线性形式 $\langle\varphi,\psi\rangle:=\psi^*\circ\varphi\in\mathrm{End}(f_i)=\mathbb{C}$，将 i,j向量空间分量 $\mathscr{H}_{i,j}:=\mathcal{D}(f_i\to\mathcal{F}(e_j))$ 变为希尔伯特空间，该半双线性形式定义了一个内积。最后，若 $\eta\colon\ \mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{G}$ 是 UCat 中的一个 2-态射，由函数族 $\eta=\{\eta_a\}_{a\in\mathcal{C}}$ 表示，我们利用表达式 $\eta_{e_{j_i}}\circ-:=(\mathcal{D}(f_i,\mathcal{F}(e_j))_{i,j}\Rightarrow(\mathcal{D}(f_i,\mathcal{G}(e_j))_{i,j}$，在 BigHilb 中构造一个 2-态射。关于结构映射为何为酉，以及 Θ^{-1} 在对象上本质满且完全忠实，从而成为 2-范畴等价的一部分，其余细节从略。□

3. Equivalences of Pseudofunctors

在本节中，我们将发展对 TLJ(Γ) 的酉模进行分类所需的工具。随后，我们将用某些反线性算子重新表述酉模的等价，并陈述一些有用的性质。

定义 3.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个不必严格的 $*$-2-范畴。我们把 $\mathcal{C}$中的 Γ-基本解定义为三元组 $S=(V,E,C)$，具体如下： $V=\{V^a\}_{a\in V(\Gamma)}$ 是 $\mathcal{C}$ 中由Γ的顶点标引的 0-态射， $E=\{E^e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 是 $\mathcal{C}$ 中由 Γ的边标引的 1-态射，而 $C=\{C^e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 是 $\mathcal{C}$中的 2-态射，其中 $C^e:\mathrm{id}_{V^a}\Rightarrow E^e\otimes E^{\overline{e}}$ 对每个 $e\in E$(Γ)满足如下之字形关系

(1) $\left((C^e)^*\otimes \mathrm{id}_{E^e}\right)\circ\left(\mathrm{id}_{E^e}\otimes C^{\overline{e}}\right)=\mathrm{id}_{E^e}$ and
(2) $(C^e)^*\circ C^e=\delta_e\cdot\mathrm{id}_{V^a}$

其图示如下：

(3.1)



例 3.2. 给定一个双向加权图 Γ，我们将描述 BigHilb 中的 Γ-基本解，记为 (J,H,C)。这里，$J=\{J^a\}_{a\in V(\Gamma)}$ 是标引 Γ的顶点的一族（分次）集合， $H=\{\mathscr{H}^e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 是由 Γ 的边分次的一族双分次希尔伯特空间，使得 $\mathscr{H}^e\in \mathrm{Hilb}_f^{J^a\times J^b}$，而$C=\{C^e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 是 BigHilb 中的一族 2-态射，使得 $C^e=\bigoplus_v\sum_w C^e_{vw}$. 为进一步解释这一记号技巧，对每个 $(e:\ a\to b)\in E$(Γ)，对每个固定的 $v\in J^a$，对 $w\in J^b$ 求和会收集对应于三元组 (e,v,w) 的所有杯，并且当 v遍历整个集合 J^a时，直和将 C^e_{vw} 个杯的每种相应组合放入适当的对角槽中。这里，映射 C^e 是形如下式的线性映射的集合

$$C^e_{vw}:\mathbb{C}\to\mathscr{H}^e_{vw}\otimes\mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv},$$

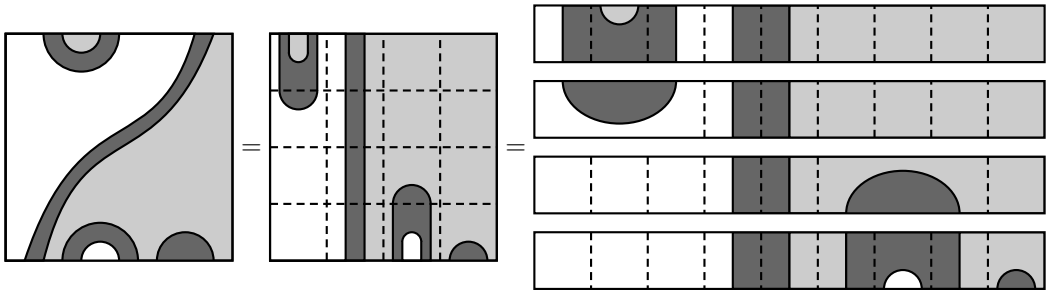
其中 $v\in J^a$ 且 $w\in J^b$. 它们按如下方式构成上述方程 (1) 和 (2) 的解 :
(1) $\left((C^e_{vw})^*\otimes \mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}}\right)\circ\left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}}\otimes C^{\overline{e}}_{wv}\right)=\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}}$ 且 (
2) $(C^e_{vw})^*C^e_{vw}=\delta_e\cdot 1_{vv}$.此处， $1_{vv}\in \mathrm{id}_v^{J^a}{}_{,v}=(\delta_{v,w}\cdot\mathbb{C})_{v,v}$
是复数一。

命题 3.3. 严格 $*$-2-范畴 $\mathcal{C}$中的一个 Γ-基本解 $S=(V,E,C)$ 唯一确定一个典范的严格 $*$-伪函子 $\mathcal{F}_S:\mathrm{TLJ}(\Gamma)\to\mathcal{C}$，使得对每个顶点 a， $\mathcal{F}_S(a)=V^a$，对每条边 e， $\mathcal{F}_S(e)=E^e$，并且对 TLJ(Γ) 中的每个杯， $\mathcal{F}_S(^e\cup^{\overline{e}})=C^e$。

证明。令 S 如上所述。在 0-态射层面， $\mathcal{F}_S$ 已在陈述中得到完整描述。对于 1-态射，注意到对于 Γ 中任意路径 $f=(f_i)_i$，我们可以无歧义地定义$\mathcal{F}_S(f)=\mathcal{F}_S(\otimes_i f_i):=\otimes_i\mathcal{F}(f_i)$，因为 $\mathcal{C}$ 是严格的。最后，TLJ(Γ) 中的每个 2-态射都由杯 $\{^e\cup^{\overline{e}}\}$ 的伴随与水平、垂直复合，以及单股线和空图的和生成，因此我们现在将利用这一性质来说明如何定义 $\mathcal{F}_S$ 在 2-态射上的作用。对于空图 id_{id_a}，我们将 $\mathcal{F}_S$ 平凡地定义为 $\mathcal{F}_S(id_{id_a}):=id_{\mathcal{F}_S(id_a)}:=id_{id_{\mathcal{F}_S(a)}}=id_{id_{V^a}}$。类似地，对于带有一条单股线 id_e 的图，我们令 $\mathcal{F}_S$ 按 $\mathcal{F}_S(id_e):=id_{\mathcal{F}_S(e)}=id_{E^e}$ 作用。令 g 为 Γ 中任意路径，令 $\alpha\in 2\mathrm{TLJ}(\Gamma)(f\Rightarrow g)$ 为任意考夫曼图。由 TLJ(Γ) 的严格性，我们可以自由地重新调整 g 或 f 中的括号。我们为两者选取一种括号排列方式，使得若 α 包含杯或帽，那么对于任意给定的杯/帽，其定义域/陪域所涉及的 g 或 f 中的两条边都以关联的方式出现。此外，若 α 包含嵌套的杯或帽，则根据同痕，可以在任意两个嵌套的杯或帽之间叠放足够多由竖直弦的水平复合和/或（带颜色的）真空构成的考夫曼图，从而将它们“竖直分开”。我们将所得图中的每个水平带记为 ${}_k\alpha:=\bigotimes_{i_k=1}^{T_k}{}_k\alpha_{i_k}$。此处，每个 ${}_k\alpha_{i_k}$ 必定是空图、一条弦、一个杯或一个帽。

因此，我们将考夫曼图表示为 $\alpha = \circ_{k=1}^{L} {}_k\alpha$，这规定了将 α 分解为一个网格，其中包含（带颜色的）空图、单个杯、单个帽和竖直线段，且每个方格内至多出现其中一种。以下示例对此作了逐步说明：

(3.2)



此后，我们可以定义 $\mathcal{F}_S(\alpha) := \circ_{k=1}^{L}\mathcal{F}_S({}_k\alpha) := \circ_{k+1}^{L} \otimes_{i_k=1}^{T_k} \mathcal{F}_S({}_k\alpha_{i_k})$，由于 S 是一个 Γ-基本解，因此它完全确定了 $\mathcal{F}$在 2-态射上的作用。伪函子的定义数据要求：对于每个 0-态射$a \in$TLJ(Γ)，需要一个可逆 2-态射 ι_a：$\mathcal{F}_S(id_a) \Rightarrow id_{\mathcal{F}_S(a)}$；对于每一对可复合的 1-态射$f, g \in$ TLJ(Γ)，需要一个自然可逆2-态射 $\mu_{f,g}$：$\mathcal{F}_S(f) \otimes \mathcal{F}_S(g) \Rightarrow \mathcal{F}_S(f \otimes g)$。通过令 ι和 μ均为恒等态射，$\mathcal{F}_S$ 显然满足成为伪函子所需的条件，即 ι 与 μ 之间的相干公理。尽管我们在此不陈述这些条件，但有兴趣的读者可参阅 [NLa18b]。□

下面的命题将使我们能够简化分类问题，断言只需理解（严格） $*$-2-范畴之间的严格 $*$-伪函子就足够了，而不是更大的强 $*$-伪函子族。在陈述下一个结果之前，我们需要引入2-范畴之间的伪函子等价这一概念。为此，我们必须上升一个层次，考虑3-范畴2Cat。（参见 [BG88] 以了解该范畴构造的更多细节。）

定义 3.4. 考虑 2-范畴 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$之间的伪函子 $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$。我们称 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 等价，当且仅当存在伪自然同构 $\theta: \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ 和 $\kappa: \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$，以及 2Cat 中的可逆修正 $M: \theta \circ \kappa \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ 和 $M': \kappa \circ \theta \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$。。当 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$是 $*$-2-范畴，且 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是 $*$-伪函子时，我们还要求 M 和 M' 中的 2-胞是酉的，并且对 $\mathcal{C}$. 中的每个 1-态射 e，2-态射 θ_e, κ_e 也都是酉的。关于修正的更详细概述，请参见 [Lei98] 。此外，我们也请读者参阅 nLab 上关于伪自然变换 [NLa18a] 和修正 [NLa18c] 的条目。

命题 3.5. 从 TLJ(Γ) 到严格 $*$-2-范畴 $\mathcal{C}$ 的每个强 $*$-伪函子 $(\mathcal{F}, \mu)$ 都酉等价于由如下定义的基本解 $S = (J, H, C)$ 生成的典范严格 $*$-伪函子 $\mathcal{F}_S$：

$$\begin{aligned} J^a &:= \mathcal{F}(a), \text{ for every } a \in V(\Gamma), \\ \mathscr{H}^e &:= \mathcal{F}(e) \text{ and} \\ C^e &:= \mu_{e,\overline{e}}^{-1} \circ \mathcal{F}({}^e\cup^{\overline{e}}), \text{ for every } e \in E(\Gamma). \end{aligned}$$

证明。我们将构造定义 3.4 中的自然变换 θ和 κ，以及前面提到的它们之间的修正和相应的恒等变换。对于任意对象 $a \in$ TLJ(Γ)，我们定义 $\theta_a := \mathrm{id}_{\mathcal{F}(a)}$，以及 $\kappa_a := \mathrm{id}_{\mathcal{F}_S(a)} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(a)}$ · 现在考虑 TLJ(Γ) 中任意的 1-态射 $e = \otimes_{i=1}^{N} e_i$。根据 $\mathcal{C}$ 的严格性假设以及 TLJ(Γ) 中的严格性，展开路径 e 或其在 $\mathcal{F}_S$ 下的像时，任选一种优先括号化都不会失去一般性。在下面的计算中，我们选择了最右侧的分组，得到：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\bigotimes_{i=1}^{N} e_i\right) &= \mathcal{F}\left(e_1 \otimes \bigotimes_{i=2}^{N} e_i\right) \\
&\cong \mu_{e_1,\bigotimes_2^N e_i}\left(\mathcal{F}(e_1) \otimes \mathcal{F}\left(\bigotimes_{i=2}^{N} e_i\right)\right) \\
&\cong \mu_{e_1,\bigotimes_2^N e_i}\left(\mathcal{F}(e_1) \otimes \mu_{e_2,\bigotimes_3^N e_i}\left(\mathcal{F}(e_2) \otimes \mathcal{F}\left(\bigotimes_{i=3}^{N} e_i\right)\right)\right) \\
&\vdots \\
&\cong \mu_{e_1,\bigotimes_2^N e_i}\left(\mathcal{F}_S(e_1) \otimes \mu_{e_2,\bigotimes_3^N e_i}\left(\mathcal{F}_S(e_2) \otimes \mu_{e_3,\bigotimes_4^N e_i} \dots \mu_{e_{N-1},e_N}\left(\mathcal{F}_S(e_{N-1}) \otimes \mathcal{F}_S(e_N)\right)\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

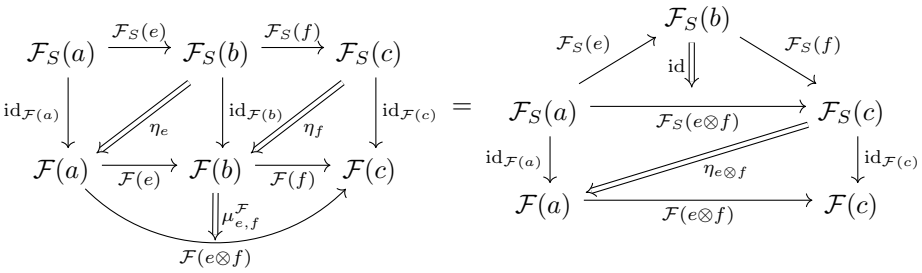
由此计算，我们得到如下所述的 2-态射族：

$$
\begin{aligned}
\eta_e &:= \eta_{e_1,e_2,\dots,e_N} : \mathcal{F}_S(e) \Rightarrow \mathcal{F}(e), \text{ defined by} \\
\eta_{e_1,e_2,\dots,e_N} &:= \mu_{e_1,\otimes_2^N e_i} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_1)} \otimes \mu_{e_2,\otimes_3^N e_i}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_1)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_2)} \otimes \mu_{e_3,\otimes_4^N e_i}) \circ \dots \\
&\quad \dots \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_1)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_2)} \otimes \dots \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_{N-3}} \otimes \mu_{e_{N-2},e_{N-1}\otimes e_N}) \circ \\
&\quad \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_1)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_2)} \otimes \dots \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(e_{N-2})} \otimes \mu_{e_{N-1},e_N}).
\end{aligned}
$$

通过为 $a \in V(\Gamma)$ 定义 $(\eta_a : \mathcal{F}_S(a) \to \mathcal{F}(a)) := (\mathrm{id}^{\mathcal{F}(a)})$，我们得到一个伪自然变换$\eta \in 2\mathsf{Cat}(\mathcal{F}_S \Rightarrow \mathcal{F})$。我们将简要勾勒这一断言的证明。此外，由于 η 的所有分量都是可逆的，这定义了从 $\mathcal{F}_S$ 到 $\mathcal{F}$. 的伪自然等价。注意，所有 η_e 显然都是酉的——因为我们只是在单位上对酉2-态射 μ 进行张量积和复合——并且 $\eta_{e_1,\dots e_N}$ 对沿路径 e的每个 e_i 都是自然的。现在我们给出验证 η 是伪自然等价的完整提纲。需要证明 η 是幺半的（相对于 1-态射的复合）、保持单位，并且是自然的（关于 2-态射）。我们将按此顺序进行：

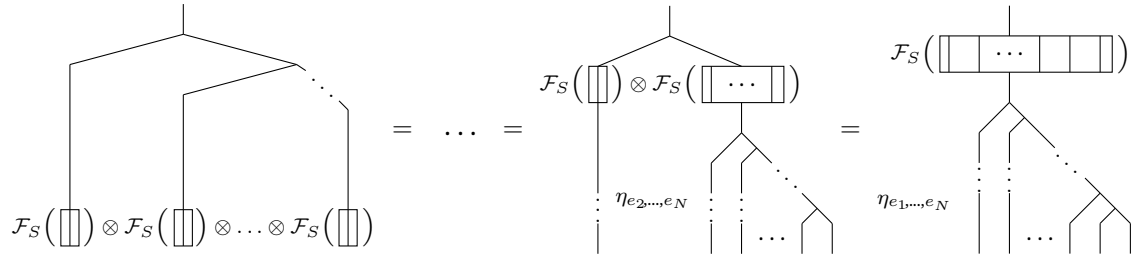
为证明 η 关于一元复合是幺半的，我们需要验证对于 $\mathcal{C}$中任意可复合的1-态射 e、 f ，下列等式成立：

(3.3)



然而，这可由以下图形计算立即得出：

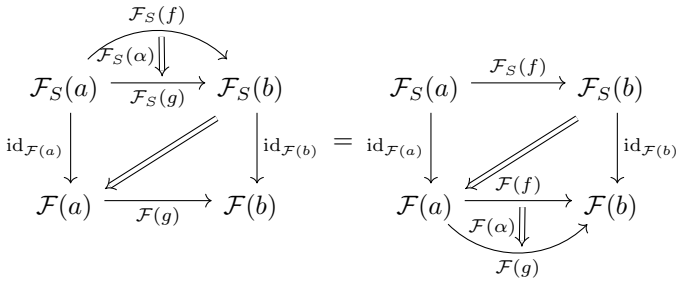
(3.4)



Th关于单位，显然有：若 $g \in E(\Gamma)$，则 $\eta_g = \mathrm{id}^{\mathcal{F}(g)}$ 是张量单位 .

最后，为了证明 η 是自然的，设 $g=\otimes_1^N g_i$ 和 $f=\otimes_1^M f_j$ 是 TLJ(Γ) 中的 1-态射，并且 $\alpha: f\Rightarrow g\in$ 2TLJ(Γ)($f\Rightarrow g$) 是从 f 到 g 的任意 TLJ(Γ) 图。我们将验证以下恒等式成立：

(3.5)



为此，我们按照命题 3.3 的证明分解 α，得到 $\alpha=\circ_{k=1}^{L}\otimes_{i_k=1}^{T_k}{}_k\alpha_{i_k}$。请注意，每个 ${}_k\alpha_{i_k}$ 要么为空，要么是单条弦，要么是单个杯/帽。由于 $\mathcal{F}_S$ 是严格函子，证明 η 的自然性便归结为证明等式 3.5 对每个 ${}_k\alpha_{i_k}$. 都成立。对于（带颜色的）空图或单条弦图的情形，等式显然成立。对于杯/帽的情形，等式由 ($\mathcal{F}$, $\mu^{\mathcal{F}}$) 中给定的“张量ator”数据的自然性推出。

现在我们将 θ 和 κ 定义为

$$\theta:=\eta \text{ and } \kappa:=\eta^{-1},$$

因此，它们自动都是酉伪自然等价 $\theta: \mathcal{F}_S\Rightarrow\mathcal{F}$ 和 $\kappa: \mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{F}_S$。现在我们可以给出修正 $M: \kappa\circ\theta\Rightarrow \mathrm{id}^{\mathcal{F}_S}$ 和 $M': \theta\circ\kappa\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. 的数据。对于每个对象 $a\in$TLJ(Γ)，我们注意到 $(\kappa\circ\theta)_a=\mathrm{id}^{\mathcal{F}(a)}\circ\mathrm{id}^{\mathcal{F}(a)}=\mathrm{id}^{\mathcal{F}(a)}$，且 $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}(a)=\mathrm{id}^{\mathcal{F}(a)}$, 因此我们定义

$$M_a:(\kappa\circ\theta)_a\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{F}(a)},\ by$$
$$M_a:=\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{F}(a)}}.$$

类似地，我们定义

$$M'_a:(\theta\circ\kappa)_a\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{F}_S(a)},\ by$$
$$M'_a:=\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{F}_S(a)}}=\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{F}(a)}}.$$

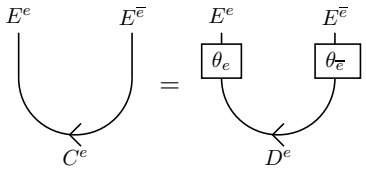
容易验证，这些数据定义了一个修正。（提醒读者，我们明确省略了所有左、右单位子。）由于这些都是同构，我们得出结论： M 和 M' 描述了所需的等价，从而完成证明。□

命题 3.6. 设 (V,E,C) 和 (W,I,D) 是 UCat 中的两个 Γ-基本解，并分别设 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{G}$为由它们确定的唯一酉模。此外，假设我们有以下数据：

- 对于每个 $a\in V$(Γ)，都有 $\mathcal{F}(a)=V^a=W^a=\mathcal{G}(a)$，以及 UCat 中的平凡 1-态射： $\theta_a=\kappa_a=\mathrm{id}_{V^a}$, 和 $M_a=M'_a=\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{V^a}}$;
- 对于每条边 $e\in I$TLJ(Γ)($a\to b$)，UCat 中都有两族酉 2-态射： $\theta_e: I^e\Rightarrow E^e$ 和$\kappa_e: E^e\Rightarrow I^e$，满足 and $(\kappa_e)^*=\theta_e$，并且满足条件 $\theta_{\mathrm{id}_{V^a}}=\kappa_{\mathrm{id}_{V^a}}=\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{V^a}}$。（注释：$\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{V^a}}$ 也充当张量单位。）

那么，当且仅当对于每条边 $e\in I$TLJ(Γ)($a\to b$)，我们都有 UCat 中满足 $(\theta_e\otimes\theta_{\overline{e}})\circ D^e=C^e$ 的酉 2-态射 θ_e, κ_e 时， $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 可通过伪自然同构 $\theta: \mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{G}$ 和 $\kappa:\mathcal{G}\Rightarrow\mathcal{F}$ 以及可逆修正 $M':(\kappa\circ\theta)\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ 等价。其图示如下：

(3.6)

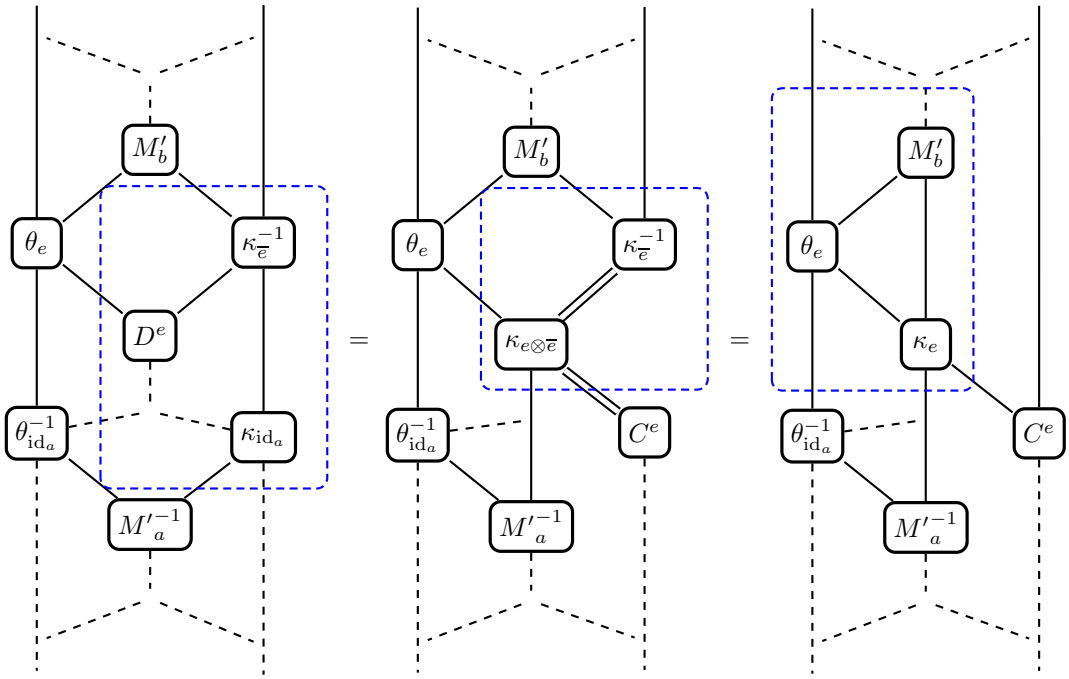


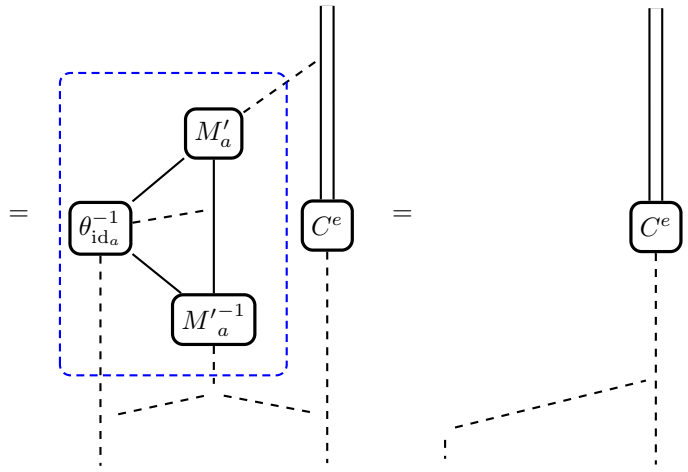
证明。我们先证明正向。考虑陈述中所述的伪自然变换 θ 和 κ 以及修正 M'。对于每个 $e \in 1\mathbf{TLJ}(\Gamma)(a \to b)$，我们在 UCat 中定义一个二态射：$H^e := (M'_b) \circ (\theta_e \otimes \kappa_{\overline{e}}^*)$，它显然是酉的。随后得到以下一连串等式，这些等式的推导大量借助了 UCat 中的图形演算：

$$\begin{aligned} H^e \circ (\mathrm{id}_{\theta_a} \otimes D^e \otimes \mathrm{id}_{\kappa_a}) \circ (H^{\mathrm{id}_a})^* &= H^e \circ (\mathrm{id}_{\theta_a} \otimes \kappa_{e\otimes\overline{e}}) \circ (\mathrm{id}_{\theta_a} \otimes \mathrm{id}_{\kappa_a} \otimes C^e) \circ ({\theta_{\mathrm{id}_a}}^* \otimes \mathrm{id}_{\kappa_a}) \circ (M'_a)^* \\ &= (\mathrm{id}_{E^e} \otimes M'_b \otimes \mathrm{id}_{E^{\overline{e}}}) \circ (\theta_e \otimes \mathrm{id}_{\kappa_b} \otimes \mathrm{id}_{E^{\overline{e}}}) \circ (\mathrm{id}_{\theta_a} \otimes \kappa_e \otimes \mathrm{id}_{E^{\overline{e}}}) \circ \\ &\quad \circ (\mathrm{id}_{\theta_a} \otimes \mathrm{id}_{\kappa_a} \otimes C^e) \circ ({\theta_{\mathrm{id}_a}}^* \otimes \mathrm{id}_{\kappa_a}) \circ (M'_a)^* \\ &= (M'_a \otimes \mathrm{id}_{E^e} \otimes \mathrm{id}_{E^{\overline{e}}}) \circ (\mathrm{id}_{\theta_a} \otimes \mathrm{id}_{\kappa_a} \otimes C^e) \circ ({\theta_{\mathrm{id}_a}}^* \otimes \mathrm{id}_{\kappa_a}) \circ (M'_a)^* \\ &= C^e, \end{aligned}$$

这表明 C^e 与 D^e 是酉共轭。现在，由于我们假设 $\theta_a = \mathrm{id}_{V^a} = \kappa_a$ 与 $M'_a = \mathrm{id}^{\mathrm{id}_{V^a}}$，酉的 H^e 可以显式表示为 $H^e = \theta_e \otimes \kappa_{\overline{e}}^*$，从而得到所需关系。

(3.7)





反之，我们将由给定数据构造所需的伪自然变换与修正。首先，若 $e = \otimes e_i$ 是 Γ中的一条路径，我们可以把 e 视为TLJ(Γ)中的一个1-态射，作为一个约化字；即其中不含需借助左或右单位子消去的恒等元。然后我们可以定义 $\theta_e := \otimes\theta_{e_i}$，并延拓到TLJ(Γ)中的每一个1-态射。我们对 κ作类似处理，从而对TLJ(Γ)中的每一个1-态射 e 得到UCat中的一个酉2-态射。现在我们将验证 θ 是一个伪自然同构。由于按定义它保持单位，并且关于1-复合是幺半的，剩下只需看出它对2-态射是自然的。然而，要看出这一点，只需像我们在前一命题的证明中所做的那样，对作为单股线的单个杯检验自然性。因此， θ 与 κ 是自然的这一点可由简单计算得出，其中用到$(\theta_e \otimes \theta_{\overline{e}}) \circ D^e = C^e$。

最后， M'定义了一个修正 $M' \colon (\kappa \circ \theta) \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$，这直接由假设 $(\kappa_e)^* = \theta_e$ 对 Γ 中的每条边成立推出，因为它直接对应于修正定义中的交换二胞腔。证明至此完成。□

由于 UCat 与 BigHilb 是 ∗-2-等价的，在前一个命题的假设下，对 BigHilb 中的 Γ 基本解进行分类，等价于对伪函子 TLJ(Γ) → UCat 进行分类。由命题 2.20 中描述的范畴等价以及命题 3.6，可得以下推论：

推论 3.7. 设 BigHilb 中有两个 Γ 基本解 $S = (J, H, C)$ 和 $T = (J, H, C)$，使得对每个 $a \in V(\Gamma)$，都有 $\mathscr{H}_{\mathrm{id}_a} = \widetilde{\mathscr{H}}_{\mathrm{id}^a}$，并且 $C^{\mathrm{id}_a} = \widetilde{C}^{\mathrm{id}_a}$. 此外，利用命题 2.20 中引入的等价 Θ 将这些解推前，可得到 UCat 中的 Γ 基本解 $\Theta[S] := \widetilde{\quad\quad}(\Theta[J], \Theta[\mathscr{H}], \Theta[C])$ 和 $\Theta[T] := (\Theta[J], \Theta[\mathscr{H}], \Theta[C])$，它们定义了相应的 UCat 中的严格 ∗ 伪函子，记为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$。

于是， $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 为酉等价模，当且仅当对每条边 $e \in E(\Gamma)$，存在酉$\widetilde{\quad}$同构 $U^e \in 2\,\mathrm{BigHilb}(\mathscr{H}^e \Rightarrow \mathscr{H}^e)$，使得

$$C^e = (U^e \otimes U^{\overline{e}}) \circ \widetilde{C}^e.$$

证明。易见 $\Theta[S]$ 与 $\Theta[T]$ 在UCat中定义了 Γ-基本解，而这由 Θ. 的幺半性可得。因此，由命题(3.3)，我们分别得到与 $\Theta[S]$ 和 $\Theta[T]$相关联的典范严格 ∗-伪函子 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$。

对于其余断言，我们首先假设 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 经由酉伪自然变换 $\theta \colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$. 酉等价。这为我们提供了一族酉算子 $\theta_e \in 2\,\mathrm{UCat}(\Theta(\mathscr{H}^e) \Rightarrow \sim_{\Theta(\mathscr{H}^e)})$。因此，由命题 3.6，对每个 $e \in E(\Gamma)$，我们得到关系 $\Theta(C^e) = (\theta_e \otimes \theta_{\overline{e}}) \circ (\Theta(C^e))$。于是，定义 $U^e := \Theta^{-1}(\theta_e)$，我们便在BigHilb中得到所求的一族酉算子，用以见证所求的等价。

对于反向方向，请注意，命题 3.6 的逆命题中的假设通过给定的由酉算子组成的族 U^e. 得以满足。这提供了所需的修正和酉伪自然同构。因此，证明完成。□

注释 3.8。请注意，在前一个推论中，我们要求索引集 S 和 T 相同。然而，这并不总是如此。假设我们有 $S = (J, H, C)$ 和 $T = (J, H, C)$，它们确定了$\widetilde{\quad}$等价的酉模。可以证明，对于每个 $a \in V(\Gamma)$，都存在一个双射 $\varphi^a \colon J^a \to J^a$.$\widetilde{\quad\quad}$。于是我们可以引入 $\varphi^{-1}[T] := (\{J^a\} = \{(\varphi^a)^{-1}[J^a]\}_{a \in V(\Gamma)}\ \{\mathscr{H}_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}\}, \{C^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}\})$，并注意到这仍然是 BigHilb 中的一个 Γ-基本解。通过这样做，我们成功地将 S 和 $\varphi^{-1}[T]$ 切换为相匹配的索引集，而不考虑对此类集合进行重新标记。

在本节余下部分，我们将介绍另一种方法，通过希尔伯特空间之间的反线性映射来描述酉模的等价：

$$\Phi^e_{vw} : \mathscr{H}^e_{vw} \to \mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}$$

定义为

$$\Phi^e_{vw}(\xi) := (\xi^* \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}})(C^e_{vw}(1)), \tag{3.8}$$

其中 $\xi^* := \langle \cdot, \xi \rangle$。

我们现在休息 根据这些相关反线性算子来刻画酉模之间的等价性 rs.

~ ~ ~命题3.9。考虑 BigHilb 中的两个 Γ-基本解 $S=(J,H,C)$ 和 $T=(J,H,C)$，使得对于每个 $a\in V(\Gamma)$，我们都有 $\mathscr{H}_{\mathrm{id}_a}=\widetilde{\mathscr{H}}^{\mathrm{id}^a}$ 以及 $C^{\mathrm{id}_a}=\widetilde{C}^{\mathrm{id}_a}$，其相关反线性映射分别为 $\{\Phi^e_{vw}\}$、$\{\Psi^e_{vw}\}$。此外，设 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 是分别与 $\Theta[S]$ 和 $\Theta[T]$ 相关联的酉模。那么，当且仅当对于每个顶点 $a\in V(\Gamma)$，存在一个双射$\sim\varphi^a\colon J^a\to J^a$，并且对于每条边 $e\colon a\to b$，存在一个酉

$$U^e_{vw}:\widetilde{\mathscr{H}}^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}\to\mathscr{H}^e_{vw}$$

使得

$$\Phi^e_{vw}=U^{\overline{e}}_{wv}\circ\Psi^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}\circ(U^e_{vw})^*. \tag{3.9}$$

换言之，对于每个 $e\in E(\Gamma)$，都存在酉算子使得下图交换

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathscr{H}}^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)} & \xrightarrow{\Psi^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}} & \widetilde{\mathscr{H}}^{\overline{e}}_{\varphi^a(w)\varphi^b(v)}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle U^e_{vw}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle U^{\overline{e}}_{wv}}\\ \mathscr{H}^e_{vw} & \xrightarrow[\Phi^e_{wv}]{} & \mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}\end{array} \tag{3.10}$$

证明。首先，假设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 通过伪自然同构 θ. 酉等价。对于每条~边 $e\in E(\Gamma)$，我们有 2 BigHilb 中由 $\Theta^{-1}(\theta_e)\colon\mathscr{H}^e\to\mathscr{H}^e$. 给出的酉 2-态射（提醒读者，记号 2 BigHilb 仅用于表示一个 BigHilb 2-态射空间，而不指定其底层 1-态射，正如记号 2.17 中所引入的）。因此，对于每个 $a\in V(\Gamma)$ 以及每个$v\in J^a$，存在唯一的 $\varphi^a(v)\in\widetilde{J}^a$，使得 $U^e_{vw}:=[\Theta^{-1}(\theta_e)]_{vw}\colon\mathscr{H}^e_{vw}\to\widetilde{\mathscr{H}}^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}$ 定义了希尔伯特空间之间的酉算子。此外，对应关系 φ^a 必然是双射，因为 $\Theta^{-1}(\theta_e)$ 是双分次希尔伯特空间之间的酉同构。此外，由推论 3.7 可得$\sim C^e_{vw}=(U^e_{vw}\otimes U^{\overline{e}}_{wv})\circ C^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}$。现在，对于任意向量 ξ，将每个 $C^e_{vw}(1)$ 按照为每个希尔伯特空间任意选定的基展开，可得以下等式链：

$$\begin{aligned}\Phi^e_{vw}\circ U^e_{vw}(\xi)&=(\langle\cdot,U^e_{vw}(\xi)\rangle\otimes\mathrm{id})\big(C^e_{vw}(1)\big)\\&=\big[\langle\cdot,U^e_{vw}(\xi)\rangle\otimes\mathrm{id}\,\big]\Big(\sum_i a_i\otimes b_i\Big)\\&=\sum_i\langle a_i,U^e_{vw}(\xi)\rangle\cdot b_i\\&=\sum_i U^{\overline{e}}_{wv}\big[\langle\cdot,\xi\rangle\otimes\mathrm{id}\,\big]\big[((U^e_{vw})^*a_i)\otimes((U^{\overline{e}_{wv}})^*b_i)\big]\\&=U^{\overline{e}}_{wv}\big[(\langle\cdot,\xi\rangle\otimes\mathrm{id})\big]\big[(U^e_{vw})^*\otimes(U^{\overline{e}}_{wv})^*\big]\Big(\sum_i a_i\otimes b_i\Big)\\&=U^{\overline{e}}_{wv}\big[(\langle\cdot,\xi\rangle\otimes\mathrm{id})\big]\big(\widetilde{C}^e_{vw}(1)\big)\\&=U^{\overline{e}}_{wv}\circ\Psi^e_{vw}(\xi).\end{aligned}$$

这就证明了正向。

反过来，通过计算可得：为每个希尔伯特空间选取一组标准正交基，并应用推论 3.7 的逆命题即可。□

通过与 [DCY13a], 中类似的论证，我们得到以下必要且充分条件，用以判断反线性映射族是否与基本解相关联，从而可以在二者之间来回转换。

命题 3.10. 假设我们有一个 Γ-基本解 $S=(J,\mathscr{H},C)$，以及公式 (3.8) 中的 $\{\Phi\}$。那么算子族 $\{\Phi^e_{vw}\}^{e\in E(\Gamma)}_{vw}$ 满足

$$\Phi^{\overline{e}}_{wv}\Phi^e_{vw}=\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}}\ \ and \tag{3.11}$$

$$\sum_{w\in J^b}\mathrm{Tr}\left((\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}\right)=\delta_e,\ \textit{for every}\ v\in J^a. \tag{3.12}$$

反过来，若一组反线性算子 $\{\Phi^e_{vw}\}$ 满足这些条件，则由 $C^e_{vw}(1):=\sum_i \xi_i\otimes\Phi(\xi_i)$ 定义的算子族 $\{C^e_{vw}\}$ 满足之字形关系（定义 3.1），其中 $\{\xi_i\}$ 是标准正交基。（我们注释， C^e_{vw} 的定义与标准正交基 $\{\xi_i\}$ 的选取无关。）

证明。我们 首先检查 (3.11) 是否成立。展开 Φ^e_{vw} 的定义，对于任意 $\xi\in\mathscr{H}^e_v$，我们有 w

$$\Phi^{\overline{e}}_{wv}\Phi^e_{vw}(\xi)=\Phi^{\overline{e}}_{wv}\left[(\xi^*\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e})(C^e_{vw}(1))\right]=\left((C^{\overline{e}}_{wv})^*\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{H}^{\overline{e}}}\right)(\xi\otimes C^e_{vw}(1)).$$

利用例 3.2 中的第一个等式，我们得到右边等于 $\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}}$。现在验证公式 (3.12)。首先选取希尔伯特空间 $\mathscr{H}^e_{vw}$ 的标准正交基 $(\xi_i)_i$。于是

$$\begin{aligned}\sum_w (C^e_{vw})^*C^e_{vw}&=\sum_w\sum_i\left((\xi_i^*\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{H}^{\overline{e}}})C^e_{vw}\right)^*\left((\xi_i^*\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{H}^{\overline{e}}})C^e_{vw}\right)\\&=\sum_w\sum_i\langle\Phi^e_{vw}\xi_i,\Phi^e_{vw}\xi_i\rangle\\&=\sum\mathrm{Tr}((\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}).\end{aligned}$$

根据例 3.2 中的第二个等式，对于每个 v，^{w} 我们有 $\sum_w \mathrm{Tr}((\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw})=\delta_e$。反过来，类似地，对每个 C^e_{vw} 取满足公式 (3.8) 关于 Φ^e_{vw} 成立的唯一映射，即可证明其逆命题。□

注 3.11。上述条件意味着，对于每个 v、w 以及边 $e\in E(\Gamma)$， $\mathscr{H}^e_{vw}$ 和 $\mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}$ 的维数相同，因为 Φ^e_{vw} 可逆。

4. Classification of Unitary TLJ-modules by Graphs

我们利用上一节中的等价关系，根据边着色有向加权图，对图生成的 Temperley-Lieb 范畴的某些酉模进行分类。首先介绍记号和基本定义。本节中，我们令 Γ 为一个固定但任意的加权双向图，如定义 2.2 所述。我们保留符号 $S=(J,H,C)$ 表示 BigHilb 中的一个 Γ-基本解。此外，我们将 S 的相关反线性映射记为 $\{\Phi^e_{vw}\}$，定义见 (3.8)。我们还保留 e 表示 Γ 中的边，并用 ϵ 表示用于对酉模进行分类的图中的边。

记号 4.1. 令 $(\lambda_k^{(e,vw)})_k$ 表示有界线性变换 $[(\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}]:\mathscr{H}^e_{vw}\to\mathscr{H}^e_{vw}$ 的特征值，并按重数计数。

现在，我们利用这些算子的谱数据构造一个有向加权图。

定义 4.2。我们将 BigHilb 中一个 Γ-基本解 S 生成的图 (Λ_S,w_S,π_S) 定义为如下有向加权图：其顶点集为 $V(\Lambda_S):=\sqcup J$（集合 $J^a\in J$的不交并构成集合族中各集合内所有点的指标化集合 J）；对于每条边 e: $a\to b$ inΓ，我们从 $v\in J^a$ 到 $w\in J^b$ 画出 $\dim(\mathscr{H}^e_{vw})$ 个箭头 $\{\epsilon_k^{(e)}\}_k$，其权为 $(\lambda_k^{(e,vw)})_k$，由 $[(\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}]$的谱给出，并按重数计数。注意，这确定了一个权函数 $w_S:E(\Lambda_S)\to(0,\infty)$。然后，将 $\pi_S:\Lambda_S\to\Gamma$ 定义为图同态，它将每个 $v\in J^a$ 映到 a，并将每个 $\epsilon_k^{(e)}$ 映到 e。

现在我们举一个简单的例子，来说明上一段中不交并为何重要。设 $J=\{J^a=\{v,w\},J^b=\{w,z\}\}$. 于是我们有 $\sqcup J=\{v_a,w_a,w_b,z_b\}\neq\{v,w,z\}=\cup J.$。注意，采用不交并的好处在于，它会“记住”每个元素的来源。

定义 4.3. 我们称带有图同态 $\pi:\Lambda\to\Gamma$ 的加权有向图 (Λ,w,π) 为Γ-公平图，当且仅当对于每个 $e:a\to b\in E(\Gamma)$ 以及每个顶点 $\alpha\in\pi^{-1}(a)$

$$\sum_{\substack{source(\epsilon)=\alpha\\ \pi(\epsilon)=e}} w(\epsilon)=\delta_e.$$

注释 4.4. 我们注意到，如果 (Λ,w,π) 是一个 Γ-公平图，那么必然有 π 满射到 $E(\Gamma)$，否则定义 4.3 中的求和条件将给出一条边 $e\in E(\Gamma)$，满足 $\delta_e=0$，这与 Γ 是加权双向图的初始假设相矛盾。

定义 4.5. 我们称两个 Γ-公平图 (Λ_1, w_1, π_1) 和 (Λ_2, w_2, π_2) 同构，当且仅当存在一个图同构 $\varphi\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$，使得 $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ 且 $w_1 = w_2 \circ \varphi$。

定义 4.6. 我们称 Γ-公平图 (Λ, w, π) 是平衡的，当且仅当存在 $E(\Lambda)$ 上的一个对合 $(\ \cdot\ )$，它交换源和目标，使得对每个 $\epsilon \in E(\Lambda)$

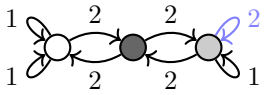
$$w(\epsilon)w(\overline{\epsilon}) = 1, \ and$$
$$\pi(\overline{\epsilon}) = \overline{\pi(\epsilon)}.$$

注意，最后一个等式左边的对合是 Λ 的对合，而右边的对合是 Γ 上的对合。我们在此定义中补充说明，存在这样的对合是一种性质，而非额外结构，正如 ([DCY13a], p2 注释 1) 中所述。

我们为选定的双向图 Γ 提供一个平衡的 Γ-公平图的例子。

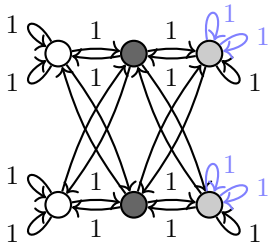
例 4.7. 令 Γ_1 为以下加权双向图。

(4.1)



那么，下方所示的加权双向图 Λ_1 是一个平衡的 Γ_1-公平图。

(4.2)



注释 4.8. 当 Γ 只有一个顶点和一条边时，成为平衡的 Γ-公平图，与成为公平且平衡的 δ-图相同，如 [DCY13a] 中所述。

注 4.9. 此时，重要的是提及 [MW10]，中研究的图，我们称之为 MW型图。考虑一个图同态 $\pi\colon \Lambda \to \Gamma$ onto $E(\Lambda)$，其中 Λ 配备了关于 π, $d\colon V(\Lambda) \to (0, \infty)$ 的 Perron-Frobenius维数数据，并满足以下两个条件：对于每个 $(e\colon a \to b) \in E(\Gamma)$，我们有

$$\delta_e = \sum_{(\alpha \to \beta) \in \pi^{-1}[e]} \frac{d(\beta)}{d(\alpha)},$$

对于每个 $\alpha \in \pi^{-1}[a]$，并且

$$\delta_e = \sum_{(\alpha \to \beta) \in \pi^{-1}[e]} \frac{d(\alpha)}{d(\beta)}$$

对于每个 $\beta \in \pi^{-1}[b]$。

很容易看出，MW型图连同上面列出的所有信息构成平衡的 Γ-公平图的实例。然而，正如我们将在下述命题中看到的，这些条件并不完全等价。该命题基于 [HN18] 第 12 页页首的讨论。

命题 4.10. 设 (Λ, w, π) 是一个平衡的 Γ-fair 图，并且对于 Λ 中的每个环 $\alpha_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \beta_0 = \alpha_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \beta_1 = \alpha_2 \xrightarrow{\epsilon_2} \ldots \xrightarrow{\epsilon_n} \beta_n = \alpha_0$，都有 $\Pi_{i=0}^{n} w(\epsilon_i) = 1.$。那么 $\pi\colon \Lambda \to \Gamma$ 给出一个 MW型图。

证明。首先在 $V(\Lambda)$ 的所有元素上定义维数函数 d。先固定任意顶点 $\alpha \in V(\Lambda)$，并定义 $d(\alpha) = 1.$ 现在，如果 $(\epsilon\colon \alpha \to \beta) \in E(\Lambda)$，我们只需定义 $d(\beta) = d(\alpha) \cdot w(\epsilon)$。接下来我们将证明，可以将此函数扩展到任意顶点 $\beta \in V(\Lambda)$。设 $l = (\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ 是 Λ 中一条从 α 出发并以 β 结束的路径。于是定义 $d(\beta) := \Pi_{i=0}^{n} w(\epsilon_i)$。注意，这确实给出了一个

在 $V(\Lambda)$ 上定义良好的函数，这是由上文所述的环路条件保证的；也就是说，$d(\beta)$ 的定义与连接 α 和 β 的路径选择无关。现在立即可得，函数 d 确实是一个 Perron-Frobenius 维数函数。□

命题 4.11。设 S 是 BigHilb 中的一个基本解。那么由 S 生成的图 (Λ_S, w_S, π_S) 是一个平衡的 Γ-公平图。

证明。根据命题 3.10，对于每个 $v \in J^a$，我们有

$$\sum_{\substack{source(\epsilon)=v \\ \pi_S(\epsilon)=e}} w(\epsilon) = \sum_w \sum_k \lambda_k^{(e,vw)} = \sum_w \mathrm{Tr}\left((\Phi^e_{vw})^* \Phi^e_{vw}\right) = \delta_e.$$

此外，如果不存在从 v 到 w 的箭头，那么 $\dim(\mathscr{H}^e_{vw}) = 0$。由命题 3.10 后的注释可知，$\dim(\mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}) = 0$ 也成立，因此从 w 到 v 也不存在边。现在假设我们不处于这个平凡情形。我们考虑映射 $\Phi^e_{vw} = V^e_{vw}|\Phi^e_{vw}|$ 的左极分解，从而

$$V^e_{vw} : \mathscr{H}^e_{vw} \to \mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}$$

是等距反线性映射，并且

$$|\Phi^e_{vw}| : \mathscr{H}^e_{vw} \to \mathscr{H}^e_{vw}$$

是正线性映射。由 $\dim(\mathscr{H}^e_{vw}) = \dim(\mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv})$，我们知道 V^e_{vw} 是一个反酉算子，因为它是反线性等距映射。现在由命题 3.10 中的第一个方程可得

$$\begin{aligned}
\Phi^{\overline{e}}_{wv} &= (\Phi^e_{vw})^{-1} \\
&= |\Phi^e_{vw}|^{-1}(V^e_{vw})^{-1} \\
&= \underbrace{(V^e_{vw})^*}_{\text{anti-unitary}} \underbrace{V^e_{vw}|\Phi^e_{vw}|^{-1}(V^e_{vw})^*}_{\text{positive}}
\end{aligned}$$

由左极分解的唯一性可得

$$\begin{aligned}
U^{\overline{e}}_{wv} &= (U^e_{vw})^*, \\
|\Phi^{\overline{e}}_{wv}| &= U^e_{vw}|\Phi^e_{vw}|^{-1}(U^e_{vw})^*.
\end{aligned}$$

考虑按重数计数的 $(\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}$ 的谱。我们发现

$$\begin{aligned}
\sigma\left((\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}\right) &= \sigma\left(\left((\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}\right)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \sigma\left(\left(|\Phi^e_{vw}|\right)^{-1}\left(|\Phi^e_{vw}|^*\right)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \sigma\left((\Phi^{\overline{e}}_{wv})^*\Phi^{\overline{e}}_{wv}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

利用上文找到的 Φ^e_{vw} 和 $\Phi^{\overline{e}}_{wv}$ 的极分解之间的关系。首先，注意上面的每一项都有定义，因为它们都是可逆算子。其次，注意我们使用谱定理是合理的，因为这里涉及的是有界自伴算子。因此，对于每条满足 $\pi(\epsilon) = e$的边 $\epsilon : v \to w$in Λ_S，都存在另一条边 $\epsilon' : w \to v$，满足 $\pi(\epsilon') = \overline{e}$，使得$w(\epsilon)w(\epsilon') = 1$。因此，$\Lambda_S$ 是一个平衡的 Γ-公平图。□

定义 4.12. 给定一个平衡的 Γ-公平图 (Λ, w, π)，我们按如下方式在 BigHilb 中生成一个基本解 S_Λ：

- 对每个 $a \in V(\Gamma)$，取 $J^a := \pi^{-1}(a)$。
- 我们定义 $\mathscr{H}^e_{vw} := \mathbb{C}[\{(\epsilon : v \to w) \in E(\Lambda) \mid \pi(\epsilon)$，并取其形式复线性张成。将边视为正交归一基后，$\mathscr{H}^e_{vw}$ 便成为一个希尔伯特空间。现在取$\mathscr{H}^e := \oplus_{vw}\mathscr{H}^e_{vw}$。我们注释道，由于 Λ 是一个平衡的 Γ-公平图，$\mathscr{H}^e$ 必定行有限且列有限。因此 $\mathscr{H}^e \in \mathrm{Hilb}_f^{J^a \times J^b}$。
- 令 $\overline{\cdot}$为 $E(\Lambda)$ 上一个固定但任意的对合，满足定义 4.6 中的条件，其存在性由假设保证。注意到，该对合自然扩展为一个定义良好的反线性映射 $\cdot : \mathscr{H}^e_{vw} \to \mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}$，对此我们仍使用相同的记号。类似地

令 $\Phi^e_{vw}:\ \mathscr{H}^e_{vw}\to\mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}$ 为唯一的反线性映射，其在标准基向量上的定义为$\epsilon\mapsto w(\epsilon)^{1/2}\,\overline{\epsilon}$。现在我们得到

$$\begin{aligned}\Phi^{\overline{e}}_{wv}\Phi^e_{vw}\epsilon &= \Phi^{\overline{e}}_{wv}w(\epsilon)^{\frac{1}{2}}\,\overline{\epsilon}\\ &= w(\overline{e})^{\frac{1}{2}}w(\epsilon)^{\frac{1}{2}}\epsilon\\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

因此 $\Phi^{\overline{e}}_{wv}\Phi^e_{vw}=\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e}$。此外，对于每条边 $e\in E(\Gamma)$，我们有

$$\sum_{w\in J^b}\mathrm{Tr}\left((\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}\right)=\sum_{\substack{source(\epsilon)=v\\ \pi(\epsilon)=e}}w(\epsilon)=\delta_e.$$

由命题（3.10）可知，族 $\{\Phi^e_{vw}\}$ 唯一确定满足之字形关系的 $\{C^e_{vw}\}$。

注4.13。我们注意到，如果在给定的 Γ-公平平衡图（Λ,w,π）上有两个平衡对合 $\tau(\cdot^1)$ 和 $(\cdot^2)$，则与之关联的 Γ-基本解以及反线性映射族 $\{\Phi^e_{vw}\}$ 和$\{\Psi^e_{vw}\}$ 确定了从 TLJ(Γ) 到 UCat 的同构规范严格 $*$-伪函子。要看出这一点，只需在（基）边上验证即可。考虑关联的希尔伯特空间 $\mathscr{H}^e_{vw}$。若假设 $e=\overline{e}$ 和$v=w$，我们需要构造一个酉 $U^e_{vv}:\ \mathscr{H}^e_{vv}\to\mathscr{H}^e_{vv}$，使得 $\Phi^e_{vv}=U^e_{vv}\circ\Psi^e_{vv}\circ(U^e_{vv})^*$。注意，若 $\{\epsilon_i:\ \alpha\to\alpha\}_{i=1}^M$ 是 Λ 中从 $\alpha\in V(\Lambda)$ 出发并投影到 Γ 中的 e 的所有环，我们可以从不动边（$\overline{\epsilon_i}^1=\epsilon_i$）开始将它们重新编号为 $\{\epsilon_{i_0}\}_{i_0\in I_0}$，其余边则以如下方式编号：$\overline{\epsilon_{2i-1}}^1=\epsilon_{2i}$。因此，我们可以表示 $\{\epsilon_i\}_{i=1}^M=\{\epsilon_{i_0}\}_{i_0\in I_0}\bigsqcup\{\epsilon_{i_1}\}_{i_1\in I_1}\bigsqcup\{\epsilon_{i_x}\}_{i_x\in I_x}\bigsqcup\ldots\bigsqcup\{\epsilon_{i_z}\}_{i_z\in I_z}$，它们对应于权的纤维。这里 $1<x<\ldots<z$，此外，I_0 表示被（$\cdot^1$）固定的边。注意，两个对合都只是置换这些集合，同时保持按权划分的结构。因此，我们将对合表示为对换的不交乘积：

$$\begin{aligned}(\overline{\cdot}^1):\ &\underbrace{(1)(2)\ldots(n_1-1)}_{\text{fixed points (weight 1)}}\cdot\underbrace{(n_1\ n_1+1)\ldots(n_x-2\ n_x-1)}_{\text{weight 1}}\cdot\\ &\cdot\underbrace{(n_x\ n_x+1)(n_x+2\ n_x+3)\ldots(n_y-2\ n_y-1)}_{\text{weight } x \text{ or } 1/x}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(n_z\ n_z+1)\ldots(M-1\ M)}_{\text{weight } z \text{ or } 1/z},\end{aligned}$$

以及符号 ξ_k 中的（$\cdot^2$），表示为

$$\begin{aligned}(\overline{\cdot}^2):\ &\underbrace{(\xi_1)(\xi_2)\ldots(\xi_{n_1-1})}_{\text{fixed points (weight 1)}}\cdot\underbrace{(\xi_{n_1}\ \xi_{n_1+1})\ldots(\xi_{n_x-2}\ \xi_{n_x-1})}_{\text{weight 1}}\cdot\\ &\cdot\underbrace{(\xi_{n_x}\ \xi_{n_x+1})(\xi_{n_x+2}\ \xi_{n_x+3})\ldots(\xi_{n_y-2}\ \xi_{n_y-1})}_{\text{weight } x \text{ or } 1/x}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(\xi_{n_z}\ \xi_{n_z+1})\ldots(\xi_{M-1}\ \xi_M)}_{\text{weight } z \text{ or } 1/z}.\end{aligned}$$

对于每个满足 $1<x$ 的权 x，我们记唯一确定的置换为 g_x，使得

$$g_x(\xi_{n_x}\ \xi_{n_x+1})\ldots(\xi_{n_y-2}\ \xi_{n_y-1})g_x^{-1}=(n_x\ n_x+1)\ldots(n_y-2\ n_y-1).$$

现在，我们可以根据 U^e_{vv} 在此有序基上的作用来描述它：对于权为 $x>1$ 的基元，我们直接定义 U^e_{vv} 作用为相应的置换 g_x。现在只剩下权为 1 的边。注意到，如果形如（ξ）（γ）的表达式出现在任一对合中，则可以将其变为与包含所有相同不动点和对换、但包含（$\xi\ \gamma$）的对合酉等价的形式。因此，我们定义 U^e_{vv} 在这些边所生成子空间上的作用如下：首先应用酉矩阵：

$$\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

随后是将该对合中的相应符号切换到另一对合的置换。若 ξ被两个对合都固定，则令 U^e_{vv}在 ξ上平凡作用。这完全确定了 U^e_{vv}，因为我们已描述了它在一个基上的作用。

在任何其他情形下，每当 $e \neq \overline{e}$ 或 $v \neq w$时，我们发现对于每个对偶对 $\{e, \overline{e}\}$ 以及每一对顶点 $\{v, w\}$，我们有

$$\Phi^e_{vw}(\epsilon) = \left[(\overline{\cdot}^{2})^{1} \circ \Psi^e_{vw} \circ \mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}} \right](\epsilon), \text{ and}$$

$$\Phi^{\overline{e}}_{wv}(\epsilon) = \left[\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}} \circ \Psi^{\overline{e}}_{wv} \circ (\overline{\cdot}^{2})^{1})^* \right](\epsilon) = \left[\mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}} \circ \Psi^{\overline{e}}_{wv} \circ (\overline{\cdot}^{1})^{2}) \right](\epsilon).$$

这里，$U^{\overline{e}}_{wv} := (\overline{\cdot}^{2})^{1})$，且 $U^e_{vw} := \mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}}$。

这些情形给出了显式的酉算子，用以见证 Γ-基本解的等价。最后，为了能够使用命题3.9，我们需要验证：对每个 $a \in V(\Gamma)$以及每一对 $v, w \in J^a$，都有 $C^{\mathrm{id}_a}_{vw} = \widetilde{C}^{\mathrm{id}_a}_{vw}$。然而，利用上述酉算子通过计算即可看出这一点，从而完成证明。

下述定理进一步将 $*$-伪函子 $\mathcal{F} : \mathrm{TLJ}(\Gamma) \to \mathrm{BigHilb}$的等价归结为平衡的 Γ-公平图：

定理4.14. 当 S, T 是BigHilb中的 Γ-基本解，且对每个顶点 $a \in V(\Gamma)$有 $\mathscr{H}_{\mathrm{id}_a} = \widetilde{\mathscr{H}}_{\mathrm{id}^a}$ 以及 $C^{\mathrm{id}_a} = \widetilde{C}^{\mathrm{id}_a}$时，相伴的 Γ-公平图$(\Lambda_S, w_S, \pi_S)$与$(\Lambda_T, w_T, \pi_T)$作为 Γ-公平图同构，当且仅当由 $\Theta[S]$ 与 $\Theta[T]$ 诱导的严格 $*$-伪函子$\mathrm{TLJ}(\Gamma) \to \mathrm{UCat}$酉等价。

证明。由命题3.9可知，两个基本解 S、T 及其各自关联的反线性映射 $\{\Phi^e_{vw}\}$ 和 $\{\Psi^e_{vw}\}$，诱导出酉等价的 $*$-伪函子，当且仅当对于每个顶点 $a \in V(\Gamma)^{\sim}$，都存在一个双射 $\varphi^a : J^a \to J^a$，并且对于每条边 e: $a \to b$，都存在一个酉算子

$$U^e_{vw} : \widetilde{\mathscr{H}}^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)} \to \mathscr{H}^e_{vw}$$

使得

$$\Phi^e_{vw} = U^{\overline{e}}_{wv} \Psi^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)} (U^e_{vw})^*.$$

注意，双射的集合 $\{\varphi^a\}_{a \in V(\Gamma)}$，在 $V(\Lambda_S)$ 与 $V(\Lambda_T)$ 之间诱导出一个显然的双射。此外，

$$\sigma\Big((\Phi^e_{vw})^* \Phi^e_{vw}\Big) = \sigma\Big(U^e_{vw} (\Psi^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)})^* \Psi^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)} (U^e_{vw})^*\Big) = \sigma\Big((\Psi^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)})^* \Psi^e_{\varphi^a(v)\varphi^b(w)}\Big)$$

由此可知，Λ_S 和 Λ_T 同构，因为存在一个图同构 $\varphi : \Lambda_S \to \Lambda_T$，满足 $\pi_S = \pi_T \circ \varphi$ 和 $w_S = w_T \circ \varphi$.

现在我们来证明正向。若 Λ_1 和 Λ_2 作为平衡的 Γ-公平图同构，则存在一个图同构 $\varphi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$，使这些图中的数据相互交织。现在考虑分别由 Λ_1 和 Λ_2 生成的基本解 S_{Λ_1} 和 S_{Λ_2}。将 φ 限制到 $J^a := \pi_1^{-1}(a)^{\sim}$，即可得到 J^a 与 J^a 之间的双射，因为 $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$。此外，考虑映射 U^e_{vw}，将其定义为 $\varphi : E(\Lambda_1) \to E(\Lambda_2)$ 在相应顶点上的限制的（酉）线性扩张。于是定义酉算子 $U^e_{vw} : \mathscr{H}^e_{vw} \to \widetilde{\mathscr{H}}^e_{\phi}(v)\phi(w)$。现在注意到，$\varphi^{-1}(\varphi(\cdot)^{2}) = (U^e_{vw})^*(U^e_{vw}(\cdot)^{2})$ 是 Λ_1 上另一个平衡的 Γ-公平对合，显然与 $(\cdot^{2})$ 酉等价。此外，由注4.13，Λ_1 上这个新的对合与 $(\cdot^{1})$ 酉等价。最后，由命题3.9，图 Λ_1 和 S_{Λ_2} 诱导出酉等价的 $*$-伪函子。□

现在我们可以对酉 TLJ(Γ)-模进行分类了。

定理4.15。每个平衡的 Γ-公平图都来自 BigHilb 中的一个 Γ-基本解。此外，平衡的 Γ-公平图的同构类与强 $*$-伪函子 $\mathrm{TLJ}(\Gamma) \to \mathrm{BigHilb}$ 的酉同构类之间存在等价。

证明。设 (Λ, w, π) 是一个固定但任意的平衡 Γ-fair 图。现在我们将构造一个基本解 S in BigHilb，使得 $\Lambda = \Lambda_S$。对于每个 $a \in V(\Gamma)$，取 $J^a := \pi^{-1}(a)$。对于 $e \in E(\Gamma)$，定义 $\mathscr{H}^e_{vw}$为由 Λ 中源为 $v \in J^a$ 且终点为 $w \in J^b$ 的边所张成的向量空间，其中 $\pi(a \to b) = e$；再规定这些边构成标准正交基，从而将其赋予希尔伯特空间结构。然后令 $\mathscr{H}^e := \oplus_{vw} \mathscr{H}^e_{vw}$。由于Λ 是平衡的 Γ-fair 图，$\Lambda$ 中任意顶点的入边数或出边数必定一致有界。为说明这一点，我们首先注意到，$\pi^{-1}(e)$ 中边的权之和必须等于它们的

逆元的权之和；其次， Γ-fair 条件要求 $\pi^{-1}(e)$ 是有限集，因为每个共轭元都会使 e 的权至少增加 1。因此， $\mathscr{H}^e \in \mathrm{Hilb}_f^{J^a \times J^b}$ 是 BigHilb 中的一个 1-态射。最后，我们定义$\Phi^e_{vw} : \mathscr{H}^e_{vw} \to \mathscr{H}^{\overline{e}}_{wv}$ 为唯一的反线性映射，并规定其在标准基向量上的作用为 $\epsilon \mapsto w(\epsilon)^{1/2}\,\overline{\epsilon}$。这里，$(\cdot)$ 是由平衡假设产生的一个固定但任意的对合。注意，根据注4.13，该定义与 $(\cdot)$ 的选择无关。于是可得

$$\begin{aligned}\Phi^{\overline{e}}_{wv}\Phi^e_{vw}(\epsilon) &= \Phi^{\overline{e}}_{wv} w(\epsilon)^{\frac{1}{2}}\,(\overline{\epsilon}) \\ &= w(\overline{e})^{\frac{1}{2}} w(\epsilon)^{\frac{1}{2}} \cdot \epsilon \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

因此 $\Phi^{\overline{e}}_{wv}\Phi^e_{vw} = \mathrm{id}_{\mathscr{H}^e_{vw}}$。此外，

$$\sum_{w \in J^b} \mathrm{Tr}\left((\Phi^e_{vw})^* \Phi^e_{vw}\right) = \sum_{\substack{source(\epsilon)=v \\ \pi(\epsilon)=e}} w(\epsilon) = \delta_e.$$

由命题 3.10 可知，族 $\{\Phi^e_{vw}\}$ 唯一确定满足之字形关系的 $\{C^e_{vw}\}$。因此，我们由 Λ 构造的元组 $S = (J, H, C)$ 是 BigHilb 中的一个 Γ-基本解。现在检查 S 生成 Λ：首先注意到 $V(\Lambda_S) = V(\Lambda)$，并且根据映射 $\{\Phi^e_{vw}\}$ 的构造方式，对于每个 $e \in E(\Gamma)$，都有 $\sigma\big((\Phi^e_{vw})^*\Phi^e_{vw}\big) = \big(w(\epsilon)\big)$，其中两边均按重数计数。由此得出 $\Lambda_S = \Lambda$。

现在我们将证明，对于由 BigHilb 中的基本解$\sim \sim \sim S = (J, \mathscr{H}, C)$生成的平衡 Γ-公平图 (Λ_S, w_S, π_S)，我们从 (Λ_S, w_S, π_S) 构造的基本解 $T_\Lambda = (J, \mathscr{H}, C)$ 与 S酉等价。容易看出 $J = J$ 和 $\mathscr{H} = \mathscr{H}$，因此只需给出 C 与 $C.$ 之间的等价$\widetilde{\ }$。现在我们为 Λ_S 赋予一个对合。根据命题 4.11（的证明），我们知道存在一个平衡的 Γ-公平对合，它定义在 Λ_S 上，并由与 $\{C\}$相关联的映射 Φ 的谱给出。我们将此对合记作 $(\cdot^{-1})$。

现在，为了构造与 T_Λ相关的线性映射 Ψ，我们可以利用 Λ_S上的任意平衡的 Γ-公平对合，记作 $(\cdot^2)$。然而，正如注4.13中所解释的，对于每个 $a \in V(\Gamma)$ 以及每一对 v、$w \in J^a$，我们还有 $C^{\mathrm{id}_a}_{vw} = \widetilde{C}^{\mathrm{id}_a}_{vw}$，由此得到酉等价的映射族 $\{\Phi\}$ 和 $\{\Psi\}$。最后，应用命题3.9即可完成证明。□

在他们的论文中（推论B， [CHPS18]），他们根据满足Perron-Frobenius条件的维数函数，对赋有该函数的二部图进行分类，从而分类右循环 pivotal TLJ（d）C*-模。（与注4.9比较。）显然，这一结果应当能够推广到酉 TLJ（Γ）-模的 $*$-2-范畴背景。我们将这一探索留待今后开展，并仅陈述以下猜想：

猜想4.16. 右循环枢轴酉 TLJ(Γ)-模的等价类对应于 MW-型二分平衡 Γ-公平图。

References

[BG88]Renato Betti 和 Marco Grandis，《2-范畴中的完备理论》，Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques 29 (1988)，第1期，9-57，http://www.numdam.org/item/CTGDC 1988 29 1 9 0/.[CHPS18] Desmond Coles、Peter Huston、David Penneys 和 Srivatsa Srinivas，《通过代数塔实现模嵌入定理》，2018，arXiv:1810.07049.[DCY13a] Kenny De Commer 和 Makoto Yamashita，《紧量子齐性空间的田中–克雷因对偶 II：量子 SU(2) 的量子齐性空间分类》，Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 2015 (2013)，第708卷，143-171，DOI:10.1515/crelle-2013-0074 arXiv:1212.3413v2.[DCY13b] Kenny De Commer 和 Makoto Yamashita，《紧量子齐性空间的田中–克雷因对偶 I：一般理论》，范畴理论与应用 28 (2013)，第31期，1099-1138，arXiv:1211.6552v3.[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik，《张量范畴》，数学调查与专著，第205卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2015，ISBN:9781470420246.[EO04] Pavel Etingof 和 Viktor Ostrik，《(2) 的表示上的模范畴与图》，数学研究快报 11 (2004)，第1期，103-114，DOI:10.4310/MRL.2004.v11.n1.a10 arXiv:math/0302130v1.[HK87] Louis H. Kauffman，《状态模型与琼斯多项式》，拓扑学 26 (1987)，第3期，395-407，DOI: 10.1016/0040-9383(87)90009-7.[HN18] Michael Hartglass 和 Brent Nelson，《非迹自由图冯·诺依曼代数》，2018，arXiv:1810.01922v2.[HPT16]Andr´e Henriques、David Penneys 和 James E. Tener，《编织张量范畴上的模张量范畴的范畴化迹》，数学文献，21 (2016)，1089-1149，arXiv:1509.02937.[Jon83]V.F.R. Jones，《子因子的指标》，数学新进展 72 (1983)，第1期，1-25，DOI:10.1007/BF01389127.[Jon85]Vaughan F.R. Jones，《通过冯·诺依曼代数构造结的多项式不变量》，美国数学会通报 12 (1985)，第1期，103-111，DOI:10.1090/S0273-0979-1985-15304-2.[JP17] Corey Jones 和 David Penneys，《刚性 C*-张量范畴中的算子代数》，数学物理通讯 355 (2017)，第3期，1121-1188，DOI:10.1007/s00220-017-2964-0 arXiv:1611.04620.[Lei98] Tom Leinster，《双范畴基础》，1998，arXiv:math/9810017v1.[MW10] Scott Morrison 和 Kevin Walker，《图平面代数嵌入》，2010，http://tqft.net/gpa.[NLa18a] NLab，《修正》，2018，https://ncatlab.org/nlab/show/modification.[NLa18b] NLab，《伪函子》，2018，https://ncatlab.org/nlab/show/pseudofunctor.[NLa18c] NLab，《伪自然变换》，2018，https://ncatlab.org/nlab/show/pseudonatural

[RT90]N. Yu. 列舍季欣和V.G. 图拉耶夫，源自量子群的带状图及其不变量，《数学物理通讯》**127**（1990年），第1期，1-26，DOI:10.1007/BF02096491。[TL71] H. N. V. 坦珀利和E. H. 利布，“渗流”问题与“着色”问题之间的关系，以及与正则平面格点相关的其他图论问题：关于“渗流”问题的一些精确结果，《英国皇家学会会刊A：数学、物理与工程科学》**322**（1971年），第1549期，251-280，DOI:10.1098/rspa.1971.0067。[Yam04] 山上茂，坦珀利-利布范畴上的纤维函子，2004年，arXiv:math/0405517v2。

+变换。