arXiv:1905.00476v1 [math.NA] 1 May 2019

加权空间上斯托克斯投影的稳定性及应用

RICARDO G. DUR´AN、ENRIQUE OT´AROLA 和 ABNER J . SALGADO

Abstract. 我们证明，在二维或三维的凸多胞体上，有限元斯托克斯投影在加权空间 $W^{1,p}_{,0}(\omega,\Omega)\times L^p(\omega,\Omega)$ 中是稳定的，其中权属于某个 Muckenhoupt类，且可积性指标可以不同于二。我们说明如何应用这一估计，获得带有奇异源的 Stokes问题解的近似误差估计。

1. Introduction

本文将研究有限元斯托克斯投影在加权范数下的稳定性与逼近性质。具体而言，设 $d\in\{2,3\}$ 和 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为一个凸多胞体。假设 $\mathbb{T}=\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 是 Ω 的一族准一致三角剖分，其参数为网格尺寸 $h>0$，且 $\mathbf{V}_h\times\mathcal{P}_h$ 是一对基于网格 $\mathcal{T}_h$ 构造的有限元空间。为说明本文要探讨的问题，令 $(\mathbf{u},\pi)\in\mathbf{W}^{1,1}_0(\Omega)\times L^1(\Omega)/\mathbb{R}$，其中 $\mathbf{u}$ 为无散函数（记号见第2节），并定义 $(\mathbf{u}_h,\pi_h)\in\mathbf{V}_h\times\mathcal{P}_h$ 为其 Stokes投影，即数对 $(\mathbf{u}_h,\pi_h)$ 满足

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega[\nabla\mathbf{u}_h:\nabla\mathbf{v}_h-\pi_h\operatorname{div}\mathbf{v}_h]\,\mathrm{d}x=\int_\Omega[\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}_h-\pi\operatorname{div}\mathbf{v}_h]\,\mathrm{d}x & \forall\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h,\\ \displaystyle\int_\Omega q_h\operatorname{div}\mathbf{u}_h\,\mathrm{d}x=0 & \forall q_h\in\mathcal{P}_h.\end{cases}\tag{1.1}$$

采用上述记号，本文的主要结果是：对于一定范围的可积性指标 p 以及某一类 Muckenhoupt 权重 ω，有

$$\|\nabla\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}+\|\pi_h\|_{L^p(\omega,\Omega)}\lesssim\|\nabla\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}+\|\pi\|_{L^p(\omega,\Omega)}.\tag{1.2}$$

我们研究 Stokes问题的主要动机，是发展这类估计。

$$\begin{cases}-\Delta\mathbf{u}+\nabla\pi=\mathbf{f}, & \text{in }\Omega,\\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0, & \text{in }\Omega,\\ \mathbf{u}=0, & \text{on }\partial\Omega,\end{cases}\tag{1.3}$$

在允许强迫项 $\mathbf{f}$ 为奇异函数的情况下。实质上，通过引入一个权，我们可以允许满足 $\mathbf{f}\notin\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)$ 的力。特别是，

2010 *Mathematics Subject Classification.*主要分类号：35Q35、35Q30、35R06、65N15、65N30、76Dxx。第一作者部分获得了 ANPCyT 项目 PICT 2014-1771、CONICET 项目 11220130100006CO 以及布宜诺斯艾利斯大学项目 20020120100050BA 的资助。第二作者部分获得了 FONDECYT 项目 11180193 的资助。第三作者部分获得了 NSF 项目 DMS-1720213 的资助。

我们的理论将允许以下特定例子。对于固定的 $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^d$，我们可以令 $\mathbf{f} = \mathbf{F}\delta_z$，其中 δ_z 表示支集位于 Ω 内部点 $z \in$ 的狄拉克 δ 函数。类似地，如果 Γ 表示包含于 Ω 中且没有边界的光滑曲线或曲面，我们可以允许 $\mathbf{f}$ 的分量是支集位于 Γ 中的测度。

虽然 Stokes问题在能量类范数下的稳定性和逼近性质已有丰富的研究历史，且如今已得到充分确立，但在非能量范数下推导这些性质则更为微妙。据我们所知，最早探讨这些问题在非能量情形下的研究是 [13, 18]。在这些文献中，作者证明了在二维情形下，L^∞-范数几乎稳定（相差对数因子）。后来，鉴于 [17], 的散度算子解的加权先验估计，[18] 的结果被推广到三维；讨论见 [17, 第 3] 节。我们还想提及参考文献 [8]，其中给出了关于边界光滑区域的结果。无对数因子的结果最早由 [25], 证明，不过需要对区域内角作出某些限制。最后，这一假设在 [24]中被去除。简而言之，最新结果表明：如果区域 Ω 是凸多胞体，那么 Stokes投影在 $\mathbf{W}^{1,\,p}_{0}(\Omega) \times L^p(\Omega)/\mathbb{R}$ 上对 $p \in (1, \infty]$ 稳定。

必须指出，在偏微分方程文献中，引入权以处理奇异源的思路如今已十分成熟。大量文献研究了椭圆方程及方程组解的加权先验估计，以及比（1.3）更一般的不可压缩流体模型；例如参见 [6]。然而，在这些工作中，大多通常假设区域至少是 C^1，这不利于有限元方法。两个例外是 [14, 35]。在 [14] 中，对于所有 $p \in (1, \infty)$ 和 $\omega \in A_p$，只要 Ω 是凸多胞体，就证明了 Poisson问题在 $W^{1,\,p}_{0}(\omega, \Omega)$ 中适定。此外，还得到了 Ritz投影在 $p \in [2, \infty)$ 和 $\omega \in A_1$，以及在 $p = 2$ 和 $\omega^{-1} \in A_1$ 上的稳定性。另一方面，[35] 研究了一般的 Lipschitz 域，并证明 Poisson问题和Stokes问题是适定的，前提是将取决于区域的 p 限制在 2 的某个邻域内，并且权在边界附近是正则的（按该文献的记号，即 $\omega \in A_p(\Omega)$）。

从上述讨论可以清楚地看出，Stokes 投影的稳定性问题尚未解决，而且鉴于其应用，这一问题亟待解决。这是我们工作的主要贡献。

本文的组织如下。我们在第2节中设定记号，同时回顾 Muckenhoupt 权重的定义，并引入后文所使用的加权空间。此外，在第2.2节中，我们在加权空间中引入 Stokes问题 (1.3) 的鞍点形式，并回顾其适定性结果。第3节介绍我们所采用的离散框架。第4节专门讨论如何获得加权空间中有限元斯托克斯投影的稳定性；这是本文的亮点之一。作为一个直接应用，第5节研究速度场误差逼近的 L^p–误差估计。我们还将这些结果具体化，研究右端项为 Dirac测度线性组合时 Stokes问题的逼近。前述各节的所有推导都建立在关于有限元速度–压力对的一系列假设之上。因此，在最后的第6节中，我们推导出连续加权 inf–sup 条件，并研究一些满足本理论全部基础假设的合适有限元对。

2. Notation and preliminaries

我们首先固定记号以及所采用的框架。在全文中，$d \in \{2,3\}$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开、有界且凸多胞体。若$\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{Z}$ 是 Banach函数空间，我们记 $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{Z}$ 表示 $\mathcal{W}$ 连续嵌入于 $\mathcal{Z}$。我们分别用 $\mathcal{W}'$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ 表示 $\mathcal{W}$的对偶空间和范数。

对于 $E \subset \Omega$ 为开集且 $f\colon E \to \mathbb{R}$，我们定义

$$\fint_E f \,\mathrm{d}x = \frac{1}{|E|}\int_E f \,\mathrm{d}x.$$

对于 $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，Hardy–Littlewood 极大算子定义为

$$\mathcal{M}w(x) = \sup_{Q \ni x} \fint_Q |w(y)| \,\mathrm{d}y, \tag{2.1}$$

其中，上确界取遍所有包含 Q 的立方体。

给定 $p \in (1,\infty)$，我们用 p' 表示其 H¨older 共轭，即满足 $1/p + 1/p' = 1$ 的实数。用 $a \lesssim b$ 表示 $a \le Cb$，其中常数 C 与 a、b 以及离散化参数无关。C 的值可能在每次出现时有所变化。

2.1. 权与加权 Sobolev 空间。权是指定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的局部可积非负函数。如果 ω 是一个权且 $E \subset \mathbb{R}^d$，我们令

$$\omega(E) = \int_E \omega \,\mathrm{d}x.$$

我们尤其关注所谓的 Muckenhoupt A_p 权 [12, 32,40]。

定义 2.1（Muckenhoupt类 A_p）。设 $p \in [1,\infty)$，若权 $\omega \in A_p$ 满足

$$\begin{aligned} [\omega]_{A_p} &:= \sup_B \left(\fint_B \omega \,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_B \omega^{1/(1-p)} \,\mathrm{d}x\right)^{p-1} < \infty, \quad p \in (1,\infty), \\ [\omega]_{A_1} &:= \sup_B \left(\fint_B \omega \,\mathrm{d}x\right) \sup_{x \in B} \frac{1}{\omega(x)} < \infty, \quad p = 1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{R}^d$ 中所有的球 B。此外，$A_\infty := \bigcup_{p>1} A_p$。对于 $p \in [1,\infty)$，我们称 $[\omega]_{A_p}$ 为 ω 的 Muckenhoupt特征。

注意到，相对于 H¨older 共轭指数，A_p 类具有某种对称性。若 $\omega \in A_p$，则其共轭 $\omega' := \omega^{1/(1-p)} \in A_{p'}$ 且

$$[\omega']_{A_{p'}} = [\omega]_{A_p}^{1/(p-1)}.$$

我们还要指出，根据 [12, 第 7 章1], , $\omega \in A_1$ 的一个等价刻画是：对于几乎处处的 x，

$$\mathcal{M}\omega(x) \lesssim \omega(x). \tag{2.3}$$

A_p 权类由 Muckenhoupt 在 [32] 中引入，他证明了 A_p 权恰好是 Hardy-Littlewood 极大算子在带权 Lebesgue 空间上有界的那些权；见 [32] 和 [12, 定理 7.3]。

到低维对象的距离是 Muckenhoupt 权的典型例子。特别地，如果 $\mathcal{K} \subset \Omega$ 是一个维数为 $k \in [0, d) \cap \mathbb{Z}$ 的光滑紧子流形， [2] 由于 [21, 引理 2.3(vi)], ，我们有函数

$$\mathsf{d}_{\mathcal{K}}^{\alpha}(x) = \operatorname{dist}(x, \mathcal{K})^{\alpha} \tag{2.4}$$

属于类 A_p provided

$$\alpha \in (-(d-k), (d-k)(p-1)) .$$

这使我们能够确定三个特例：

（i）设 $d > 1$ and $z \in \Omega$，则权 $\mathsf{d}_z^{\alpha} \in A_2$ 当且仅当 $\alpha \in (-d, d)$。（ii）设 $d \geq 2$ and $\gamma \subset \Omega$ 是一条没有自交的光滑闭曲线。我们有 $\mathsf{d}_{\gamma}^{\alpha} \in A_2$ 当且仅当 $\alpha \in$ (–$(d-1)$ $d-1$)。（iii）最后，若 $d = 3$ and $\Gamma \subset \Omega$ 是一个无边界的光滑曲面，则 $\mathsf{d}_{\Gamma}^{\alpha} \in A_2$ 当且仅当 $\alpha \in (-1, 1)$。

首先需要注意，在上述所有示例中，权或其逆权（即 A_2 类中的共轭权重）属于 A_1。其次，由于低维对象严格包含于 Ω 中，因此存在 $\partial\Omega$ 的一个邻域，在该邻域内权不存在退化或奇异性。事实上，它是连续且严格为正的。这一观察促使我们定义一个受限的 Muckenhoupt 权重类，该类对于后续分析至关重要。下一个定义受 [21, Definition 2.5] 的启发。

定义 2.2（类 $A_p(D)$）。设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 为一个 Lipschitz 域。对于 $p \in (1, \infty)$，如果存在一个开集 $\mathcal{G} \subset D$以及正常数 $\varepsilon > 0$ 和 $\omega_l > 0$，使得：我们称 $\omega \in A_p$ 属于 $A_p(D)$。

(a) $\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial D) < \varepsilon\} \subset \mathcal{G}$,
(b) $\omega \in C(\mathcal{G})$，且 (c) 对所有 $x \in \mathcal{G}$,
均有 $\omega_l \leq \omega(x)$。

注意，(i)–(iii) 中描述的权属于受限 Muckenhoupt 类 $A_2(\Omega)$。研究 [35]时已证明，后者至关重要，因为它保证了问题 (1.3) 在我们下面定义的加权 Sobolev 空间中的适定性。

设 $p \in (1, \infty)$， $\omega \in A_p$，且 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为一个开集。我们将 $L^p(\omega, E)$ 定义为相对于测度 $\omega \mathrm{d}x$ 的 Lebesgue p 可积函数空间。我们还将加权 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\omega, E)$ 定义为由函数 $v \in L^p(\omega, E)$ 组成的集合，其中弱导数 $D^{\alpha} v \in L^p(\omega, E)$ 对于 $|\alpha| \leq 1$ 均存在。函数 $v \in W^{1,p}(\omega, E)$ 的范数定义为

$$\|v\|_{W^{1,p}(\omega,E)} := \left(\|v\|_{L^p(\omega,E)}^p + \|\nabla v\|_{L^p(\omega,E)}^p \right)^{1/p} . \tag{2.5}$$

我们还将 $W^{1,}{}_{0}{}^{p}(\omega, E)$ 定义为 $C_0^{\infty}(E)$ 在 $W^{1,}{}^{p}(\omega, E)$ 中的闭包。值得注意的是，经典 Sobolev 空间的大多数性质都有其带权对应形式。这并不是因为权的具体形式，而是因为权 ω 属于 Muckenhoupt类 A_p。如果 $p \in (1, \infty)$ 且 ω属于 A_p，那么 $L^p(\omega, E)$ 和 $W^{1,}{}^{p}(\omega, E)$ 是巴拿赫空间 [40, 命题 2.1。2] ，且光滑函数在其中稠密 [40, 推论 2.1。6]；另见 [27, 定理1]。此外， [20, 定理 1。3] 保证了一个带权 Poincar´e 不等式，而该不等式

进而意味着，在 $W^{1,\ p}_{\ 0}(\omega, E)$ 上，半范数 $\|\nabla v\|_{L^p(\omega,\ E)}$ 是与 (2.5) 中定义的范数等价的范数。

向量值函数空间以粗体表示，即

$$\mathbf{W}_0^{1,p}(\omega, E) = [W_0^{1,p}(\omega, E)]^d, \quad \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,E)} := \left(\sum_{i=1}^{d} \|\nabla v^i\|^p_{\mathbf{L}^p(\omega,E)} \right)^{1/p},$$

其中 $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^d)^\intercal$。

为便于后续使用，我们回顾加权空间之间的一个特定 Sobolev 型嵌入定理。一般情形请参见 [7, 22, 30] 和 [34, 第 6] 节。

命题 2.3（加权空间中的嵌入）。设 $p \in (1, \infty)$ 且 $\omega \in A_p$。假设对于所有 $x \in \Omega$ 和 $0 < r \le R$，都有

$$\frac{r^{p+d}}{R^{p+d}} \frac{\omega(B(x,R))}{\omega(B(x,r))} \lesssim 1,$$

然后 $W^{1,\ p}(\omega,\ \Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 和 $W^{1,\ p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\omega',\ \Omega)$。

2.2. 加权空间中的Stokes问题。我们首先给出使用权的动机。我们假设(1.3)是在全空间 $\mathbb{R}^d$ 上提出的，并且$\mathbf{f} = \mathbf{F}\delta_z$ 对某个 $z \in \mathbb{R}^d$成立。 [23, 第IV.2] 节的结果因此给出了问题(1.3)的解$(\mathbf{u}\ \pi)$在点z附近的如下渐近行为：

$$|\nabla \mathbf{u}(x)| \approx |x - z|^{1-d} \quad \text{and} \quad |\pi(x)| \approx |x - z|^{1-d}, \tag{2.6}$$

因此 $|\nabla \mathbf{u}|, \pi \notin L^2(\mathbb{R}^d)$。然而，基本计算表明，对于每个球$B$,

$$\alpha \in (d-2, \infty) \implies \int_B \mathsf{d}_z^\alpha |\nabla \mathbf{u}|^2 \, \mathrm{d}x < \infty, \quad \int_B \mathsf{d}_z^\alpha |\pi|^2 \, \mathrm{d}x < \infty.$$

这一启发式思路表明，我们应在加权 Sobolev 空间[6, 35]中寻求问题 (1.3) 的解。下文将严谨地论证这些考量。

令 $\omega \in A_p$。给定 $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\omega, \Omega)$，我们要寻找 $(\mathbf{u}\ \pi) \in \mathbf{W}^{1,\ p}_{\ 0}(\omega, \Omega) \times L^p(\omega, \Omega)/\mathbb{R}$，使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \pi) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,p'}(\omega', \Omega), \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in L^{p'}(\omega', \Omega)/\mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中，$\langle \cdot\cdot \rangle$ 表示 $\mathbf{W}^{-1,\ p}(\omega, \Omega) := \mathbf{W}_0^{1\ p'}(\omega', \Omega)'$ 与 $\mathbf{W}_0^{1\ p'}(\omega', \Omega)$ 之间的对偶配对。最后，为简化记号，本文在此处及下文中设

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, \mathrm{d}x, \qquad b(\mathbf{v}, q) = -\int_\Omega q \, \mathrm{div}\, \mathbf{v} \, \mathrm{d}x.$$

在 Lipschitz 域中，(2.7) 的适定性已在 [35, 定理17] 中研究。主要结果总结如下。

命题 2.4（加权空间中的适定性）。设 $d \in \{2, 3\}$ 且 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$为一个 Lipschitz 域。存在 $\epsilon = \epsilon(d, \Omega) \in (0, 1]$ 使得，若 $P = 2 + \epsilon, p \in (P', P)$，且 $\omega \in A_p(\Omega)$，则问题 (2.7) 适定。换言之，对于所有 $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,\ p}(\omega, \Omega)$，问题 (2.7) 都有唯一解 $(\mathbf{u}\ \pi) \in \mathbf{W}^{1,\ p}_{\ 0}(\omega, \Omega) \times L^p(\omega, \Omega)/\mathbb{R}$，并且满足以下稳定性估计

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(\omega,\Omega)}. \tag{2.8}$$

注 2.5（$p < 2$）。严格来说，[35, 定理 17] 仅证明了 $p \geq 2$上的适定性。然而，利用 [4, 定理 2.1], 给出的通过 inf–sup 条件刻画适定性的等价表述（另见 [19, 练习 2.14], ），可以推知 (2.7) 在 $p \in (P', 2)$ 上也适定。

请注意，命题 2.4 仅假设区域是 Lipschitz 的。如果能获得更多关于区域的信息，则可以得到更精细的结果。由于我们研究的是凸多胞体，因此有如下结果；参见 [31, 推论 1.8]。

命题 2.6（L^p–正则性）。设 $d \in \{2, 3\}$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个凸多胞体。若 $p \in (1, 2]$ 且 $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$，则方程 (1.3) 的解满足

$$\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega), \qquad \pi \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R},$$

并且有相应的估计。

3. Finite element approximation

现在我们介绍将要使用的离散框架。首先介绍一些术语、若干基本要素以及适用于所有方法的假设。

3.1. 三角剖分与有限元空间。我们用 $\mathscr{T}_h = \{T\}$ 表示 Ω 上由闭单纯形 T 构成的协调划分（或网格），其尺寸为 $h_T = \operatorname{diam}(T)$，并定义 $h = \max_{T \in \mathscr{T}_h} h_T$。我们假设 $\mathbb{T} = \{\mathscr{T}_h\}_{h>0}$ 是一族协调且准一致的网格 [9, 19]。对于 $T \in \mathscr{T}_h$，我们将与单元 T 相关联的星形邻域或补丁定义为

$$\mathcal{S}_T := \bigcup \{T' \in \mathscr{T}_h : T \cap T' \neq \emptyset\}. \tag{3.1}$$

文献中已提出并分析了多种有限元逼近，用于在动量方程的驱动项不奇异时逼近 Stokes问题 (2.7) 的解；例如，参见 [19, 第 4]，[26, 章 II], 及其中的参考文献。起初，我们不具体限定所采用的有限元逼近类型，只陈述离散空间需要满足的一组假设。给定网格 $\mathscr{T}_h \in \mathbb{T}$，我们分别用 $\mathbf{V}_h$ 和 $\mathcal{P}_h$ 表示在 $\mathscr{T}_h$ 上构造、用于逼近速度场和压力的有限元空间。我们假设，对于每个$p \in (1, \infty)$ 和 $\omega \in A_p$,

$$\mathbf{V}_h \subset \mathbf{W}_0^{1,\infty}(\Omega) \subset \mathbf{W}_0^{1,p}(\omega, \Omega), \qquad \mathcal{P}_h \subset L^\infty(\Omega)/\mathbb{R} \subset L^p(\omega, \Omega)/\mathbb{R}.$$

此外，我们要求，$\mathbf{V}_h$ 和 $\mathcal{P}_h$ 中的函数分别是次数至少为一和零的局部多项式。此外，我们还需要假设这些空间是相容的，即它们满足经典 LBB 条件 [19, Proposition 4.13]的加权版本。具体而言，我们假设，若 $\omega \in A_p$，则存在一个正常数 $\beta = \beta([\omega]_{A_p})$，使得对所有 $\mathscr{T}_h \in \mathbb{T}$,

$$\begin{cases} \inf\limits_{q_h \in \mathcal{P}_h} \sup\limits_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \dfrac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega', \Omega)} \|q_h\|_{L^p(\omega, \Omega)}} \geq \beta, \\ \inf\limits_{q_h \in \mathcal{P}_h} \sup\limits_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \dfrac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^{p}(\omega, \Omega)} \|q_h\|_{L^{p'}(\omega', \Omega)}} \geq \beta. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2. 准插值算子。由于我们旨在逼近粗糙函数，经典的拉格朗日插值算子并不适用。因此，我们可以考虑 [34]中分析的一种准插值算子变体。其构造受到 Cl´ement [10], Scott 和 Zhang[38], 以及 Dur´an 和 Lombardi [15]所提出思想的启发：该算子基于星形邻域上的局部平均，因此对局部可积函数有良好定义；同时，它还具有最优逼近性质。

对于 $\mathscr{T}_h \in \mathbb{T}$，我们令 X_h 为网格 $\mathscr{T}_h$ 上由分片线性连续函数构成的空间。对于 $w \in L^1(\Omega)$，我们定义 $\Pi_{X_h} w \in X_h$ 为将 [34] 插值到分片线性函数上的插值算子。定义 $\mathbf{X}_h = [X_h \cap H_0^1(\Omega)]^d$。对于 $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,1}(\Omega)$，我们令$\Pi_{\mathbf{V}_h}\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \subset \mathbf{V}_h$ 为算子 Π_{X_h}，并将其逐分量应用且作相应修改，以保持边界条件。

为了定义到压力空间 $\mathcal{P}_h$ 上的插值函数，我们区分两种情况。如果$\mathcal{P}_h$ 包含分片常数，那么对于 $q \in L^1(\Omega)/\mathbb{R}$，我们只需定义 $\Pi_{\mathcal{P}_h} q \in \mathcal{P}_h$ 为 q 的局部平均值。另一方面，如果 $\mathcal{P}_h$ 包含分片线性函数$\Pi_{\mathcal{P}_h} q = \Pi_{X_h} q + c_q$，其中 $c_q \in \mathbb{R}$ 的选取满足 $\Pi_{\mathcal{P}_h} q \in \mathcal{P}_h$。

为简化记号，在不会引起混淆的情况下，我们将用 Π_h 不加区分地表示 $\Pi_{\mathbf{V}_h}$ 或 $\Pi_{\mathcal{P}_h}$。Π_h 的性质总结如下。证明请参见 [34, 第 5] 节。

命题 3.1（稳定性与插值估计）。设 $p \in (1,\infty)$、$\omega \in A_p$ 和 $T \in \mathscr{T}_h$。那么，对于每个 $v \in W^{1,p}(\omega, \mathcal{S}_T)$，我们有局部稳定性界

$$\|\nabla \Pi_h v\|_{\mathbf{L}^p(\omega,T)} \lesssim \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\mathcal{S}_T)} \tag{3.3}$$

以及插值误差估计

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^p(\omega,T)} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\mathcal{S}_T)}. \tag{3.4}$$

式 (3.3) 和 (3.4) 中的隐藏常数与 v、T 和 h 无关。

该算子还具有以下逼近性质 [34, 第 6] 节。

命题 3.2（不同度量下的插值）。假设 $\omega \in A_p$ 满足命题 2.3 的条件。那么，对于每个 $v_p \in W^{1,p}(\omega, \mathcal{S}_T)$，我们有

$$\|v_p - \Pi_h v_p\|_{L^p(T)} \lesssim h_T^{1+d/p} \omega(\mathcal{S}_T)^{-1/p} \|\nabla v_p\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\mathcal{S}_T)}.$$

类似地，对于 $v_{p'} \in W^{1,p'}(\mathcal{S}_T)$，我们有

$$\|v_{p'} - \Pi_h v_{p'}\|_{L^{p'}(\omega',T)} \lesssim h_T^{1-d/p'} \omega'(\mathcal{S}_T)^{1/p'} \|\nabla v_{p'}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\mathcal{S}_T)}.$$

前述不等式中的隐藏常数与被插值的函数、单元 T 以及 h 无关。

3.3. 近似格林函数。设 $z \in \Omega$ 满足 $z \in T_z$ 对某个$T_z \in \mathscr{T}_h$。设 δ_z 为满足以下性质的正则化狄拉克δ函数：

1. $\delta_z \in C_0^\infty(T_z)$; 2. $\int_\Omega \delta_z \mathrm{d}x = 1$;
3. $\|\delta_z\|_{L^\infty(T_z)} \lesssim h_{T_z}^{-d}$; 4. $\int_\Omega \delta_z \mathbf{v}_h \,\mathrm{d}x = \mathbf{v}_h(z)$ 对所有 $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ 均成立。

关于此类函数的构造，请参阅 [39] 和 [5, 练习 8.1] 。注意，若 $\mathbf{v}_h = (v_h^1, \dots, v_h^d)^\intercal \in \mathbf{V}_h$ 且 $j \in \{1, \dots, d\}$，则有

$$\partial_{x_i} \mathbf{v}_h^j(z) = \int_\Omega \partial_{x_i} \mathbf{v}_h^j \tilde{\delta}_z \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathbf{v}_h^j \partial_{x_i} \tilde{\delta}_z \, \mathrm{d}x, \quad i \in \{1, \dots, d\}.$$

有了这些要素，我们将正则化 Green 函数 $(\mathbf{G}\ Q)$ 定义为下述问题的解：求 $(\mathbf{G}\ Q) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$，使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{G}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, Q) = \displaystyle\int_\Omega \tilde{\delta}_z \partial_{x_i} \mathbf{v}^j \, \mathrm{d}x & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ b(\mathbf{G}, q) = 0 & \forall q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 i、$j \in \{1, \cdots, d\}$。注意，函数 $\mathbf{G}$ 和 Q 取决于 z 以及指标 i 和 j。不过，为简化记号，我们将省略这种依赖关系。

我们还定义 $(\mathbf{G}_h, Q_h)$，即 $(\mathbf{G}\ Q)$ 的 Stokes投影，将其定义为以下离散问题的解：求 $(\mathbf{G}_h, Q_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathcal{P}_h$，使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{G}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, Q_h) = \displaystyle\int_\Omega \tilde{\delta}_z \partial_{x_i} \mathbf{v}_h^j \, \mathrm{d}x & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{G}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in \mathcal{P}_h. \end{cases} \tag{3.6}$$

¯设 R 为一个固定的正数，使得对于任意 $x \in \Omega$，球 $B(x, R)$ 都包含 Ω。对于 $y \in \Omega$，我们定义由 Natterer[33]，引入的权函数 σ_y，其形式为

$$\sigma_y(x) = \left(|x - y|^2 + (\kappa h)^2 \right)^{1/2}, \tag{3.7}$$

其中，$\kappa > 1$ 是一个与 h 无关但满足 $\kappa h \leq R$的参数；参见 [24, 第 17]节。我们回顾一下，该权满足 [25, 不等式（0.18）]

$$\int_\Omega \sigma_y^{-d-\lambda} \, \mathrm{d}x \lesssim h^{-\lambda}, \quad \lambda \in (0, 1). \tag{3.8}$$

我们假设，若 $\nu \in (0,\ 1/2)$、$0 < \lambda < \nu/2$、$\mu = d + \lambda$，且 $\mathscr{T}_h$ 是拟一致的，则存在 $\kappa_1 > 1$，使得对于所有 $\kappa \geq \kappa_1$ 以及满足 $\kappa h \leq R$的所有网格尺寸$h > 0$，都有

$$\sup_{y \in \Omega} \left\| \sigma_y^{\frac{\mu}{2}} \nabla (\mathbf{G} - \mathbf{G}_h) \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim h^{\lambda/2}. \tag{3.9}$$

下面将给出满足这一假设的空间示例。

4. Discrete stability estimates in weighted spaces

设 $p \in (1, \infty)$、$\omega \in A_p$、$(\mathbf{u}\ \pi) \in \mathbf{W}^1_{,\ 0}{}^p(\omega, \Omega) \times L^p(\omega, \Omega)/\mathbb{R}$，其中 $\mathbf{u}$ 无散，并且 $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathcal{P}_h$ 是 $(\mathbf{u}\ \pi)$ 的有限元逼近。本节的目标是基于加权相容条件 (3.2) 推导加权稳定性估计 (1.2)。为此，我们必须对可积性 p 和权 ω的取值范围施加一些限制。我们将这些限制归纳为以下假设

$$\begin{cases} p \in (2, \infty) & \implies \omega \in A_1, \\ p = 2 & \implies \omega \in A_1, \text{ or } \omega^{-1} \in A_2(\Omega) \cap A_1, \\ p \in (P', 2] & \implies \omega' \in A_{p'}(\Omega) \cap A_1, \end{cases} \tag{S}$$

其中 P 如命题 2.4 所述， P' 是其 H¨older 共轭。

定理 4.1（加权稳定性估计）。设 $d \in \{2,3\}$ 和 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开凸多面体。假设 (S) 成立，且 $(\mathbf{u}\ \pi) \in \mathbf{W}^{1,}{}_0{}^{p}(\omega,\Omega) \times L^p(\omega,\Omega)/\mathbb{R}$，其中 $\mathbf{u}$ 无散。设 $(\mathbf{u}_h,\pi_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathcal{P}_h$ 是其有限元斯托克斯投影。若空间 $(\mathbf{V}_h,\mathcal{P}_h)$ 满足 (3.2) 和 (3.9)，则估计 (1.2) 成立。该估计中的隐含常数与 $(\mathbf{u}\ \pi)$、$(\mathbf{u}_h,\pi_h)$ 及 h 无关。

证明。首先注意到，由稠密性，只需证明在假设 $\mathbf{u}$ 和 π 光滑的情况下该估计成立。

我们将证明分为几个步骤。

1. 假设我们已经证明

$$\|\nabla \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\omega,\Omega)}. \tag{4.1}$$

利用 (3.2) 的第一个离散 inf–sup 条件以及 $(\mathbf{u}_h,\pi_h)$ 求解 (1.1)，可得

$$\|\pi_h\|_{L^p(\omega,\Omega)} \lesssim \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h,\pi_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega',\Omega)}} = \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h} \frac{a(\mathbf{u},\mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h,\pi)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega',\Omega)}},$$

由此立即得到

$$\|\pi_h\|_{L^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\omega,\Omega)} + \|\nabla \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}.$$

结合 (4.1)，这意味着 $\|\pi_h\|_{L^p\ (\omega,\ \Omega)}$ 的所需界。

2. 假设 $p \geq 2$ 和 $\omega \in A_1$。在 (3.6) 中令 $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$，可得

$$a(\mathbf{G}_h,\mathbf{u}_h) = \int_\Omega \tilde{\delta}_z \partial_{x_i} \mathbf{u}_h^j \,\mathrm{d}x = \partial_{x_i}\mathbf{u}_h^j(z).$$

现在在 (1.1) 中令 $\mathbf{v}_h = \mathbf{G}_h$，并利用 $b(\mathbf{G}_h,q_h) = 0$ 对所有 $q_h \in \mathcal{P}_h$ 均成立，可得

$$a(\mathbf{u}_h,\mathbf{G}_h) = a(\mathbf{u},\mathbf{G}_h) + b(\mathbf{G}_h,\pi). \tag{4.2}$$

利用 $b(\mathbf{G}\ \pi) = 0$，我们因此可以得出恒等式

$$a(\mathbf{u}_h,\mathbf{G}_h) = a(\mathbf{u},\mathbf{G}_h) + b(\mathbf{G}_h,\pi) = a(\mathbf{u},\mathbf{G}_h-\mathbf{G}) + b(\mathbf{G}_h-\mathbf{G},\pi) + a(\mathbf{u},\mathbf{G}).$$

由于双线性型 a 具有对称性，我们..... ave

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}\mathbf{u}_h^j(z) &= a(\mathbf{u},\mathbf{G}_h-\mathbf{G}) + b(\mathbf{G}_h-\mathbf{G},\pi) + a(\mathbf{u},\mathbf{G})\\ &= a(\mathbf{u},\mathbf{G}_h-\mathbf{G}) + b(\mathbf{G}_h-\mathbf{G},\pi) + \int_\Omega \tilde{\delta}_z \partial_{x_i}\mathbf{u}^j \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意，这里我们使用了关于 $\mathbf{u}$ 的光滑性假设，从而可以断言这是(3.5)中的一个可容许检验函数。

现在令 $\mathbf{E} = \mathbf{G} - \mathbf{G}_h$。由前面的等式可知

$$\begin{aligned}\int_\Omega \omega|\partial_{x_i}\mathbf{u}_h^j|^p \,\mathrm{d}z &\lesssim \int_\Omega \omega\left[\int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{E}\,\mathrm{d}x\right]^p \mathrm{d}z\\ &\quad + \int_\Omega \omega\left[\int_\Omega \pi \operatorname{div}\mathbf{E}\,\mathrm{d}x\right]^p \mathrm{d}z + \int_\Omega \omega\left[\fint_{T_z} |\nabla\mathbf{u}|\,\mathrm{d}x\right]^p \mathrm{d}z =: \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\tilde{\delta}_z$ 的支集包含于 T_z，以及 $\|\tilde{\delta}_z\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim h^{-d}$。

我们借助 (3.9)、与证明 [14, 定理 3.1]，中所采用的类似论证，以及受 [36] 启发的修改来估计项 I 、 II 和 III。我们首先控制项 III。由于权 $\omega \in A_1 \subset A_p$,

我们利用 Hardy–Littlewood 极大算子 $\mathcal{M}$ 从$L^p(\omega,\mathbb{R}^d)$ 到 $L^p(\omega,\mathbb{R}^d)$ 连续这一性质，得到

$$\mathrm{III}=\int_\Omega \omega\left[\fint_{T_z}|\nabla \mathsf{u}|\,\mathrm{d}x\right]^p\,\mathrm{d}z\lesssim\int_\Omega \omega\mathcal{M}(|\nabla \mathsf{u}|)^p\,\mathrm{d}z\lesssim\int_\Omega \omega|\nabla \mathsf{u}|^p\,\mathrm{d}z.$$

现在我们控制了 I 和 II。利用在 (3.7) 中定义的权 σ_z 及其性质 (3.8)，可知对于任意 $\lambda\in(0,1)$

$$\int_\Omega \nabla \mathsf{u}:\nabla\mathbf{E}\,\mathrm{d}x\lesssim h^{-\lambda(p-2)/(2p)}\left(\int_\Omega \sigma_z^{-d-\lambda}|\nabla \mathsf{u}|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega \sigma_z^{d+\lambda}|\nabla\mathbf{E}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

and

$$\int_\Omega \pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}\,\mathrm{d}x\lesssim h^{-\lambda(p-2)/(2p)}\left(\int_\Omega \sigma_z^{-d-\lambda}|\pi|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega \sigma_z^{d+\lambda}|\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

因此，我们有

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}\lesssim h^{-\lambda(p-2)/2}\int_\Omega \omega\left(\int_\Omega \sigma_z^{d+\lambda}|\nabla\mathbf{E}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{p/2}\left(\int_\Omega \frac{|\nabla \mathsf{u}|^p+|\pi|^p}{\sigma_z^{d+\lambda}}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}z.$$

现在假设 $0<\lambda<\nu/2$，其中 $\nu\in(0,1/2)$。此时，估计式 (3.9) 立即给出

$$h^{-\lambda(p-2)/2}\left(\int_\Omega \sigma_z^{d+\lambda}|\nabla\mathbf{E}|^2\,\mathrm{d}x\right)^{p/2}\lesssim h^\lambda.$$

此外，证明 [14, 定理 3.1] 中所用的论证可得

$$\int_\Omega \frac{h^\lambda\omega(z)}{(|x-z|^2+(\kappa h)^2)^{(d+\lambda)/2}}\,\mathrm{d}z\lesssim\mathcal{M}\omega(x)\lesssim\omega(x),$$

其中，最后一步用到了 (2.3)。综上，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}+\mathrm{II}&\lesssim\int_\Omega\int_\Omega \frac{\omega(z)h^\lambda}{(|x-z|^2+(\kappa h)^2)^{(d+\lambda)/2}}\,\mathrm{d}z\,(|\nabla \mathsf{u}(x)|^p+|\pi(x)|^p)\,\mathrm{d}x\\&\lesssim\int_\Omega \omega(x)\,(|\nabla \mathsf{u}(x)|^p+|\pi(x)|^p)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对项 I、II 和 III 的估计汇总后，当 $p\geq 2$ 时即可得到 (4.1)。3. 接下来考虑 $p\in(P',2]$，其中 $\omega'\in A_{p'}(\Omega)\cap A_1$。注意到 $p'=p/(p-1)\geq 2$，因此，如 [14, 推论 3.3]，中所述，我们将把讨论简化为前一种情况。由于 $p'\in[2,P)$ 且 $\omega'\in A_{p'}(\Omega)$，根据命题 2.4，对于每个 $\mathsf{g}\in \mathsf{W}^{-1,\,p'}(\omega',\Omega)$，我们得出 Stokes问题

$$\begin{cases}-\Delta\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}}+\nabla\psi_{\mathbf{g}}=\mathbf{g}, & \text{in }\Omega,\\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}}=0, & \text{in }\Omega,\\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}}=0, & \text{on }\partial\Omega,\end{cases}$$

在 $\mathsf{W}_0^{1\,p'}(\omega',\Omega)\times L^{p'}(\omega',\Omega)/\mathbb{R}$ 中适定。因此我们有如下估计

$$\|\nabla\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega',\Omega)}+\|\psi_{\mathbf{g}}\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}\lesssim\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)}.$$

设 $(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g},h},\psi_{\mathbf{g},h}) \in \mathbf{V}_h \times \mathcal{P}_h$ 为 $(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}},\psi_{\mathbf{g}})$ 的 Stokes投影，则有

$$\begin{aligned}\|\nabla \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} &= \sup_{\mathbf{g}\in\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)} \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{u}_h\rangle}{\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)}}\\ &= \sup_{\mathbf{g}\in\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)} \frac{a(\mathbf{u}_h,\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}})+b(\mathbf{u}_h,\psi_{\mathbf{g}})}{\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)}}\\ &= \sup_{\mathbf{g}\in\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)} \frac{a(\boldsymbol{\varphi}_{h,\mathbf{g}},\mathbf{u}_h)+b(\mathbf{u}_h,\psi_{h,\mathbf{g}})}{\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)}}\\ &= \sup_{\mathbf{g}\in\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)} \frac{a(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi}_{h,\mathbf{g}})+b(\mathbf{u},\psi_{h,\mathbf{g}})}{\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\omega',\Omega)}}.\end{aligned}$$

Stokes投影在 $\mathbf{W}^{1,\ p'}(\omega',\Omega)\times L^{p'}(\omega',\Omega)$ 中的稳定性以及 $(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}},\psi_{\mathbf{g}})$ 上的界给出

$$\|\nabla \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}.$$

至此，证明完毕。 □

通常，先验估计 (1.2) 蕴含一个类似 Cea 的最佳逼近结果 `。

推论4.2（最佳逼近）。在定理 4.1 的条件下，进一步假设 $p\in(P',P)$，且 $\omega\in A_p(\Omega)$。则有

$$\begin{aligned}\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}+\|\pi-\pi_h\|_{L^p(\omega,\Omega)} \lesssim \inf_{\mathbf{w}_h\in\mathbf{V}_h}\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h)\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}\\ +\inf_{r_h\in\mathcal{P}_h}\|\pi-r_h\|_{L^p(\omega,\Omega)},\end{aligned}$$

其中隐藏常数与 $(\mathbf{u}\ \pi)$、$(\mathbf{u}_h,p_h)$ 和 h 无关。

证明。该证明相当标准，但为完整起见，我们在此重述。注意，若 $\mathbf{w}_h\in\mathbf{V}_h$ 与 $r_h\in\mathcal{P}_h$ 任意，由 (1.1) 的线性性可得，对所有 $(\mathbf{v}_h,q_h)\in\mathbf{V}_h\times\mathcal{P}_h$，我们有

$$\begin{cases}a(\mathbf{u}_h-\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h)+b(\mathbf{v}_h,\pi_h-r_h)=a(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h,\mathbf{v}_h)+b(\mathbf{v}_h,\pi-r_h),\\ b(\mathbf{u}_h-\mathbf{w}_h,q_h)=b(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h,q_h).\end{cases}$$

现令 $(\boldsymbol{\varphi},\psi)\in\mathbf{W}^{1,\ p}_{,0}(\omega,\Omega)\times L^p(\omega,\Omega)/\mathbb{R}$ 为如下问题的唯一解

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},\psi)=a(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h,\mathbf{v})+b(\mathbf{v},\pi-r_h), & \forall\mathbf{v}\in\mathbf{W}_0^{1,p'}(\omega',\Omega),\\ b(\boldsymbol{\varphi},q)=b(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h,q), & \forall q\in L^{p'}(\omega',\Omega)/\mathbb{R}.\end{cases}$$

如命题 2.4 所示，关于可积性指标与权的假设使我们得以断定该问题是适定的，并且我们有估计

$$\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}+\|\psi\|_{L^p(\omega,\Omega)}\lesssim\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h)\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}+\|\pi-r_h\|_{L^p(\omega,\Omega)}. \tag{4.3}$$

现注意到 $(\mathbf{u}_h-\mathbf{w}_h,\pi_h-r_h)\in\mathbf{V}_h\times\mathcal{P}_h$ 正是 $(\boldsymbol{\varphi},\psi)\in\mathbf{W}^{1,\ p}_{,0}(\omega,\Omega)\times L^p(\omega,\Omega)/\mathbb{R}$的有限元逼近。这一点结合定理 4.1 与 (4.3) 即得

$$\begin{aligned}\|\nabla(\mathbf{u}_h-\mathbf{w}_h)\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}+\|\pi_h-r_h\|_{L^p(\omega,\Omega)}\lesssim\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{w}_h)\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}\\ +\|\pi-r_h\|_{L^p(\omega,\Omega)}.\end{aligned}$$

由三角不等式即可得出结论。 □

5. Error estimates

现在我们给出速度场误差近似的 $L^p(\Omega)$–误差估计。为此，显然需要假设命题 2.3 成立，从而使得 $u \in L^p(\Omega)$。

下文中，对于一个权 ω，我们用 $\omega(h)$ 表示 $=\sup^{T\in\mathcal{T}_h}\omega(T)$。主要误差估计如下所示。

定理 5.1（误差估计）。设 $p \in [2, P)$ 和 $\omega \in A_p(\Omega)$ 满足条件 (S)。此外，假设命题 2.3 成立所需的相容条件也成立。设 $(u\ \pi) \in W^{1,p}_{,0}(\omega, \Omega) \times L^p(\omega, \Omega)/\mathbb{R}$，其中 u 为无散的；并设 $(u_h, \pi_h) \in V_h \times \mathcal{P}_h$ 为其 Stokes 投影，该投影定义为 (1.1) 的解。在此情形下，我们有

$$\|u - u_h\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \lesssim h^{1+d/p}\omega(h)^{-1/p}\left(\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\omega,\Omega)}\right), \tag{5.1}$$

其中，隐藏常数与 $(u\ \pi)$、(u_h, π_h) 和 h 无关。

证明。我们基于对偶论证分几个步骤进行。

1. 首先回顾一下，由于命题 2.6，对于每个 $t \in (1, 2]$，若 $g \in L^t(\Omega)$，则 Stokes 问题：求 $(\boldsymbol{\varphi}_g, \psi_g) \in W^{1,t}_{0,}(\Omega) \times L^t(\Omega)/\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{\varphi}_g, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \psi_g) = \displaystyle\int_\Omega g \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}x & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,t'}_0(\Omega), \\ b(\boldsymbol{\varphi}_g, q) = 0 & \forall q \in L^{t'}(\Omega)/\mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.2}$$

适定，$(\boldsymbol{\varphi}_g, \psi_g) \in W^{2,t}(\Omega) \times W^{1,t}(\Omega)$，并且

$$\|\boldsymbol{\varphi}_g\|_{\mathbf{W}^{2,t}(\Omega)} + \|\psi_g\|_{W^{1,t}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{\mathbf{L}^t(\Omega)}. \tag{5.3}$$

2. 由于 $p \geq 2$ 和 $\omega \in A_p(\Omega)$ 满足命题 2.3 的相容条件，我们可以结合 $t = p'$ 使用上一步的结果，并利用命题 2.3 的嵌入结果，得出

$$(\boldsymbol{\varphi}_g, \psi_g) \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega) \cap \mathbf{W}^{1,p'}_0(\omega', \Omega) \times W^{1,p'}(\Omega) \cap L^{p'}(\omega', \Omega)$$

并且有如下估计。

3. 令 $g = |u - u_h|^{p-2}(u - u_h)$，并注意到 $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|u - u_h\|^{p-1}_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$，根据关于 ω 的假设以及命题 2.3 的嵌入结果，这一量是有限的。

4. 固定这一对 g 的选择后，我们希望在 (5.2) 中令 $v = u - u_h$，从而得到

$$\|u - u_h\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = a(u - u_h, \boldsymbol{\varphi}_g) + b(u - u_h, \psi_g). \tag{5.4}$$

然而，由于 $p \geq 2$，$u - u_h \notin W^{1,p}_{,0}(\Omega)$，因此必须通过稠密性论证来证明 (5.4)。具体而言，令 $w_n \in C^\infty_0(\Omega)$ 满足 $w_n \to u - u_h$ $W^{1,p}_{,0}(\omega, \Omega)$。由于 $w_n \in C^\infty_0(\Omega) \subset W^{1,p}_{,0}(\Omega)$，我们在 (5.2) 中令 $v = w_n$，得到

$$a(\mathbf{w}_n, \boldsymbol{\varphi}_g) + b(\mathbf{w}_n, \psi_g) = \int_\Omega |u - u_h|^{p-2}(u - u_h) \cdot \mathbf{w}_n\,\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

现在，由于 $\boldsymbol{\varphi}_g \in W^{1,p'}_{0,}(\omega', \Omega)$，

$$|a(u - u_h, \boldsymbol{\varphi}_g) - a(\mathbf{w}_n, \boldsymbol{\varphi}_g)| \leq \|\nabla\boldsymbol{\varphi}_g\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega',\Omega)}\|\nabla(u - u_h - \mathbf{w}_n)\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \to 0$$

当 $n \uparrow \infty$ 时。类似的论证表明， $|b(\mathsf{u} - \mathsf{u}_h, \psi_{\mathbf{g}}) - b(\mathsf{w}_n, \psi_{\mathbf{g}})| \to 0$ 当$n \uparrow \infty$。最后，鉴于 $\mathsf{W}^{1}_{,0}{}^{p}(\omega, \Omega)$ 连续嵌入 $\hookrightarrow \mathsf{L}^p(\Omega)$，(5.5) 右端收敛到 $\|\mathsf{u} - \mathsf{u}^h\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$。这些论证得出 (5.4)。

5. 由（5.4）和（1.1），对于任意一对 $(\mathsf{w}_h, r_h) \in \mathsf{V}_h \times \mathcal{P}_h$，

$$\|\mathsf{u} - \mathsf{u}_h\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = a(\mathsf{u} - \mathsf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} - \mathbf{w}_h) - b(\mathsf{u}_h, \psi_{\mathbf{g}} - r_h) - b(\mathbf{w}_h, \pi - \pi_h),$$

其中我们还用到了 \(u\) 是无散的。现令 \(\mathsf{w}^h = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g},h}\) 与 \(r_h = \psi_{\mathbf{g},h}\)，即 \((\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}}, \psi_{\mathbf{g}})\) 的 Stokes投影。Galerkin正交性再次给出

$$\|\mathsf{u} - \mathsf{u}_h\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = a(\mathsf{u}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g},h}) + b(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g},h}, \pi).$$

因此

$$\|\mathsf{u} - \mathsf{u}_h\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \lesssim \|\nabla(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g},h})\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega',\Omega)} \left(\|\nabla \mathsf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} + \|\pi\|_{L^p(\omega,\Omega)} \right).$$

6. 最后一步，我们必须对前一个估计右侧的第一项进行界定。注意，对于 $t = p' < 2$ 和 $\varrho := \omega'$，我们正在尝试的是

g

待估计的是 Stokes投影 的速度分量 i n

$\mathsf{W}^{1}_{0}{}^{t}$，(ϱ,Ω)。这意味着，由于 $t < 2$，我们可以应用推论4.2，得到 d

条件 (S) 成立，即

$$\rho' \in A_{t'}(\Omega) \Leftrightarrow (\omega')^{-t'/t} \in A_{p''}(\Omega) \Leftrightarrow (\omega^{-p'/p})^{-p/p'} \in A_p(\Omega) \Leftrightarrow \omega \in A_p(\Omega),$$

and

$$\varrho' \in A_1 \Leftrightarrow (\omega')^{-t'/t} \in A_1 \Leftrightarrow \left(\omega^{-p'/p}\right)^{-p/p'} \in A_1 \Leftrightarrow \omega \in A_1,$$

这由假设可知成立。推论4.2的最佳逼近结果、命题 3.2 的插值估计以及(5.3)中给出的正则性估计，进而得到

$$\|\nabla(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g}} - \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{g},h})\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega',\Omega)} \lesssim h^{1-d/p'} \omega'(h)^{1/p'} \|\mathsf{u} - \mathsf{u}_h\|^{p-1}_{\mathbf{L}^p(\Omega)}.$$

注意到，由于 $\omega \in A_p$，因此我们有

$$\omega'(T)^{1/p'} \lesssim h^d \omega(T)^{-1/p}, \quad \forall T \in \mathscr{T}_h.$$

证明完毕 □

5.1. 应用：带狄拉克源的 Stokes问题。现在，作为一项应用，我们来说明如何将定理 5.1 应用于第 2.1 节第 i 项中描述的奇异力情形。假设 $\mathcal{Z} \subset \Omega$ 且 $\#\mathcal{Z} < \infty$，即它是一个有限点集。现在我们定义

$$\mathbf{f}_{\mathcal{Z}} = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mathbf{F}_z \delta_z, \tag{5.6}$$

其中 $\mathsf{F}_z \in \mathbb{R}^d$。我们首先建立合适的函数分析框架。

命题 5.2（$\mathsf{f}_{\mathcal{Z}} \in \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{d}^{\alpha}_{\mathcal{Z}}, \Omega)$）。假设 $\alpha \in (d-2, d)$，则 $\mathsf{d}^{\alpha}_{\mathcal{Z}} \in A_2(\Omega)$、$\mathsf{d}^{-\alpha}_{\mathcal{Z}} \in A_2(\Omega) \cap A_1$，且 $\mathsf{f}_{\mathcal{Z}} \in \mathsf{H}^{-1}(\mathsf{d}^{\alpha}_{\mathcal{Z}}, \Omega)$。

证明。α 上的界保证了 $\mathsf{d}^{\alpha}_{\mathcal{Z}} \in A_2(\Omega)$ 和 $\mathsf{d}^{-\alpha}_{\mathcal{Z}} \in A_2(\Omega)$。此外，由于 $d - 2 \geq 0$，我们有 $\mathsf{d}^{-\alpha}_{\mathcal{Z}} \in A_1$。

现在，由于 [28, 备注 21.19]，紧支集拉东测度 ν属于 $H^1_0(\omega, \Omega)$的对偶空间，当且仅当

$$\int_{\Omega} \int_0^r \frac{t^2 \nu(B(x,t))}{\omega(B(x,t))} \frac{\mathrm{d}t}{t} \, \mathrm{d}\nu(x) < \infty$$

对于某个 $r>0$。令 $\nu=\sum_{z\in\mathcal{Z}}\delta_z$ 且 $\omega=\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^{-\alpha}$，我们得到

$$\int_\Omega\int_0^r \frac{t^2\nu(B(x,t))}{\omega(B(x,t))}\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}\nu(x)\lesssim\sum_{z\in\mathcal{Z}}\int_0^r\frac{t}{t^{d-\alpha}}\,\mathrm{d}t,$$

当 $d-2<\alpha$ 时，该量有限。 □

前述结果表明，若 $\mathsf{f}=\mathsf{f}_{\mathcal{Z}}$ in (1.3)，则该问题存在唯一解 $(\mathsf{u},\pi)\in\mathrm{H}_0^1(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)\times L^2(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)/\mathbb{R}$。下面的结果是通过定理 5.1 获得误差估计所缺少的关键环节。

命题 5.3（嵌入）。若 $\alpha\in(d-2,2)$，则 $\mathrm{H}_0^1(\mathsf{d}_z^\alpha,\Omega)\hookrightarrow\mathrm{L}^2(\Omega)$。

证明。我们只需验证命题 2.3 的条件。在这种情况下，我们有

$$\frac{r^{2+d}}{R^{2+d}}\frac{\mathsf{d}_z^\alpha(B(x,R))}{\mathsf{d}_z^\alpha(B(x,r))}\approx\frac{r^{2+d}}{R^{2+d}}\frac{R^{d+\alpha}}{r^{d+\alpha}}=\left(\frac{r}{R}\right)^{2-\alpha}.$$

α 上给出的界保证该比值一致有界。 □

现在我们可以得到一个误差估计。注意，由于 $\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^{-\alpha}\in A_2(\Omega)\cap A_1$，定理 4.1 和推论4.2的结果适用。

推论 5.4（误差估计）。设 $\alpha\in(d-2,2)$，且 $(\mathsf{u},\pi)\in\mathrm{H}_0^1(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)\times L^2(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)/\mathbb{R}$ 是满足 (1.3) 的解，其中 $\mathsf{f}=\mathsf{f}_{\mathcal{Z}}$。设 (u_h,π_h) 为 (u,π) 的有限元近似。在定理 5.1 的设定下，对每个 $\varepsilon>0$,

$$\|\mathsf{u}-\mathsf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\lesssim h^{2-d/2-\varepsilon}\left(\|\nabla\mathsf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)}+\|\pi\|_{L^2(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)}\right),$$

其中隐藏常数与 u、π 和 h 无关，但当 $\varepsilon\downarrow0$ 时会趋于无穷。

证明。命题 5.2 保证存在唯一一对 $(\mathsf{u},\pi)\in\mathrm{H}_0^1(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)\times L^2(\mathsf{d}_{\mathcal{Z}}^\alpha,\Omega)/\mathbb{R}$，满足 (1.3)。此外，命题 5.3 保证 $\mathsf{u}\in\mathrm{L}^2(\Omega)$。其余部分只需应用定理 5.1。在这种情况下，我们有

$$h^{1+d/2}\omega(h)^{-1/2}=h^{1+d/2}h^{-d/2-\alpha/2}=h^{1-\alpha/2}$$

and

$$\alpha\in(d-2,2)\implies1-\frac{\alpha}{2}\in\left(0,2-\frac{d}{2}\right).$$

常数会爆增，是因为在极限情形下，嵌入 $\mathrm{H}_0^1(\mathsf{d}_z^\alpha,\Omega)\hookrightarrow\mathrm{L}^2(\Omega)$ 不再成立。□

最后说明，利用类似的技巧，我们可以考虑第 2.1 节中条目 ii 和 iii 所述的情形。

6. Examples of suitable pairs

为了总结我们的分析，我们研究一些满足假设 (3.2)、(3.9) 的配对，使得上述理论适用于这些配对。

我们首先给出一个连续加权 inf–sup 条件，它直接源于散度算子的右逆的存在性。

引理 6.1（连续加权 inf–sup 条件）。设 $p \in (1,\infty)$ 和 $\omega \in A_p$。对于所有 $q \in L^{p'}(\omega',\Omega)/\mathbb{R}$，我们有

$$\|q\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)} \lesssim \sup_{\mathbf{v}\in \mathbf{W}_0^{1,p}(\omega,\Omega)} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}}, \tag{6.1}$$

其中，隐藏常数仅依赖于 Ω 和 $[\omega]_{A_p}$，而不依赖于 q。

证明。令 $q \in L^{p'}(\omega',\Omega)/\mathbb{R}$，并定义 $\tilde{r} = \omega' |q|^{p'/p} \operatorname{sign}(q)$。注意，

$$\|\tilde{r}\|_{L^p(\omega,\Omega)}^p = \int_\Omega \omega |\tilde{r}|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \omega^{1-p'} |q|^{p'} \,\mathrm{d}x = \|q\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}^{p'},$$

因此 $\tilde{r} \in L^p(\omega,\Omega)$，并且由于 Ω 有界，$\tilde{r} \in L^1(\Omega)$。因此，我们可以令$r = \tilde{r} - \fint_\Omega \tilde{r}\,\mathrm{d}x$，从而得出 $r \in L^p(\omega,\Omega)/\mathbb{R}$，其中

$$\|r\|_{L^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|q\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}^{p'-1}.$$

最后一个初步观察是，由于 q 的均值为零，

$$\int_\Omega qr \,\mathrm{d}x = \int_\Omega q\tilde{r} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |q|^{p'} \omega' \,\mathrm{d}x = \|q\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}^{p'}.$$

现在回想一下，存在 $\mathbf{w} \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\omega,\Omega)$，使得

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = r, \qquad \|\nabla \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|r\|_{L^p(\omega,\Omega)},$$

其中估计中的常数与 r 无关；证明见 [16, 定理 3.1], [37,定理 1], [11, 定理 5.2], 或 [1, 定理 2.8] 。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbf{v}\in \mathbf{W}_0^{1,p}(\omega,\Omega)} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} &\geq \frac{b(\mathbf{w},q)}{\|\nabla \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} = \frac{\|q\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}^{p'}}{\|\nabla \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} \\ &\gtrsim \frac{\|q\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}^{p'}}{\|r\|_{L^p(\omega,\Omega)}} \gtrsim \|q\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}.\end{aligned}$$

这正是我们要证明的。 □

6.1. 迷你元。对于非加权情形，[3], [19, 第 4.2 节4] 讨论了这一对，其定义如下:

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) : \ \forall T \in \mathscr{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in [\mathbb{P}_1(T) \oplus \mathbb{B}(T)]^d \right\} \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{6.2}$$

$$\mathcal{P}_h = \left\{ q_h \in L^2(\Omega)/\mathbb{R} \cap C(\bar{\Omega}) : \ \forall T \in \mathscr{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \right\}, \tag{6.3}$$

其中 $\mathbb{B}(T)$ 表示由局部泡函数张成的空间。

我们必须立即指出，对于 $d \in \{2,3\}$，假设 (3.9) 已在[24, 定理 12] 和 [25, 定理 8.1]中得到证明。因此，我们将重点放在加权 LBB 条件 (3.2) 上。这将借助辅助的连续 inf–sup 条件 (6.1) 得到。

定理 6.2（离散 inf–sup 条件）。设 $p \in (1,\infty)$ 与 $\omega \in A_p$。若 $\mathbf{V}_h$ 与 $\mathcal{P}_h$ 分别由 (6.2) 和 (6.3) 定义，则我们有

$$\beta \|q_h\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v}_h\in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h,q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h, \tag{6.4}$$

其中隐含常数与 $\mathscr{T}_h$ 无关。

证明。我们的论证将基于 (6.1) 以及所谓 Fortin 算子的构造 [19, 引理 4.19]。给定 $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1}_{,0}{}^{p}(\omega, \Omega)$，我们将构造 $\mathcal{F}_h\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ 使得

$$b(\mathbf{v}, q_h) = b(\mathcal{F}_h\mathbf{v}, q_h) \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h, \quad \|\nabla \mathcal{F}_h\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}, \tag{6.5}$$

其中隐藏常数与 h 无关。为完成这一任务，我们首先注意到，若 $q_h \in \mathcal{P}_h$，则对所有 $T \in \mathscr{T}_h$、$\nabla q_{h|T} \in \mathbb{R}^d$ 都有。因此，通过分部积分可知，$\mathcal{F}_h\mathbf{v}$ 必须满足

$$\int_T \mathbf{v}\,\mathrm{d}x = \int_T \mathcal{F}_h\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \quad \forall T \in \mathscr{T}_h. \tag{6.6}$$

令 Π_h 表示第 3.2 节中引入的拟插值算子。定义

$$\mathcal{F}_h\mathbf{v} = \Pi_h\mathbf{v} + \sum_{T\in\mathscr{T}_h}\sum_{i=1}^{d} \gamma_T^i \mathbf{e}_i b_T.$$

这里，$\{\mathbf{e}_1、\cdots、\mathbf{e}_d\}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的标准基，$\gamma_T^i \in \mathbb{R}$；$i \in \{1,\dots,d\}$，而 b_T 是与 T 相关联的泡函数。因此，离散函数$\mathcal{F}_h\mathbf{v}$ 满足（6.6），当且仅当

$$\gamma_T^i = \frac{\int_T (\mathbf{v} - \Pi_h\mathbf{v})\,\mathrm{d}x}{\int_T b_T\,\mathrm{d}x}, \quad i \in \{1,\cdots,d\}, \quad T \in \mathscr{T}_h.$$

因此，只需证明稳定性界 $\|\nabla \mathcal{F}_h\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}$。记

$$\|\nabla \mathcal{F}_h\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \le \|\nabla \Pi_h\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} + \left\|\nabla\left(\sum_{T\in\mathscr{T}_h}\sum_{i=1}^{d}\gamma_T^i\mathbf{e}_i b_T\right)\right\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} = \mathrm{I} + \mathrm{II},$$

并注意到，局部稳定性估计 (3.3) 和星形邻域的有限重叠性质可得

$$\mathrm{I} = \|\nabla \Pi_h\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \lesssim \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}.$$

为了估计 II，我们利用插值估计 (3.4) 以及泡函数的性质得到

$$\begin{aligned}
|\gamma_T^i| &\lesssim |T|^{-1} h_T \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\mathcal{S}_T)} \left(\int_T \omega'\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim h_T^{1-d+d/p'} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\mathcal{S}_T)} \left(\fint_T \omega'\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\lesssim \sum_{T\in\mathscr{T}_h}\sum_{i=1}^{d} |\gamma_T^i| \|\nabla b_T\|_{\mathbf{L}^p(\omega,T)} \\
&\lesssim \sum_{T\in\mathscr{T}_h} h_T^{1-d+d/p'} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\mathcal{S}_T)} \left(\fint_T \omega'\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} h_T^{\frac{d}{p}-1} \left(\fint_T \omega\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

由于 $(1 - d + d/p') + d/p - 1 = 0$ 形状正则性，我们可以得出结论：

$$\mathrm{II} \lesssim \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\mathcal{S}_T)} \left[\left(\fint_T \omega\,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_T \omega'\,\mathrm{d}x\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim [\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)},$$

其中我们使用了 (2.2) 和星形邻域的有限重叠性质。对 I 和 II 得到的估计汇总后可得

$$\|\nabla \mathcal{F}_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)} \lesssim (1+[\omega]_{A_p}^{\frac{1}{p}}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}.$$

因此，Fortin 算子已构造完成，证明也就此结束。 □

6.2. Taylor–Hood 对。最低阶 Taylor–Hood 元 [29], [42],[19, 第 4.2 节5]定义为

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) : \ \forall T \in \mathscr{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}_2(T)^d \right\} \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{6.7}$$

$$\mathcal{P}_h = \left\{ q_h \in L^2(\Omega)/\mathbb{R} \cap C(\bar{\Omega}) : \ \forall T \in \mathscr{T}_h, q_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \right\}. \tag{6.8}$$

在二维中，该对的估计式 (3.9) 也见于 [24, 定理 12]和 [25, 定理 8。1]。在三维中，这些文献仅对某些网格类别证明了这一结果。因此，我们将重点讨论 (3.2)。请注意，与非加权情形一样，证明方法必须不同于第 6.1 节所用的方法。我们将遵循 [41, 第 3] 节的思路；另见 [19, 第 4.2 节5]。

我们从一个准备步骤开始。

引理 6.3（扰动）。设 $p \in (1,\infty)$ 和 $\omega \in A_p$。假设所有 $\{\mathscr{T}_h\}_{h>0}$ 均满足：每个 $T \in \mathscr{T}_h$ 在 Ω 中至少有 d 条边，并且 V_h 和 $\mathcal{P}_h$ 分别按 (6.7) 和 (6.8) 定义。那么我们有

$$h\|\nabla q_h\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)} \lesssim \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h,$$

其中隐含常数不依赖于 h。

证明。记 $\mathscr{E}_h$、$\mathscr{V}_h$ 和 $\mathscr{M}_h$ 分别为 $\mathscr{T}_h$ 的内部边、内部顶点和内部边中点集合。令 $\mathsf{e} \in \mathscr{E}_h$，并设 $\boldsymbol{\tau}_\mathsf{e}$ 为沿 e 方向的单位向量。注意，$\mathscr{E}_h$ 与 $\mathscr{M}_h$ 之间存在一一对应关系。

对于 $q_h \in \mathcal{P}_h$，我们定义 $\mathrm{w}_h \in \mathrm{V}_h$ 如下

$$\mathbf{w}_h(\mathrm{v}) = 0, \quad \forall \mathrm{v} \in \mathscr{V}_h,$$

and

$$\mathbf{w}_h(\mathrm{m}) = -|\mathsf{e}|^{p'} \boldsymbol{\tau}_\mathsf{e} \operatorname{sign}(\partial_{\boldsymbol{\tau}_\mathsf{e}} q_h) |\partial_{\boldsymbol{\tau}_\mathsf{e}} q_h|^{p'-1} \frac{\omega'(T)}{|T|}, \quad \forall \mathrm{m} \in \mathscr{M}_h.$$

令 $\{\phi_\mathrm{m}\}_{\mathrm{m}\in\mathscr{M}_h} \cup \{\phi_\mathrm{v}\}_{\mathrm{v}\in\mathscr{V}_h}$ 为 $\mathscr{T}_h$ 上分片二次函数的拉格朗日节点基。将 $\mathbf{w}_h$ 按此基展开后，我们可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{w}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}^p &= \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \int_T \omega \left| \sum_{\mathrm{m}\in\mathscr{M}_h : \mathrm{m}\in T} \mathbf{w}_h(\mathrm{m}) \nabla \phi_\mathrm{m} \right|^p \mathrm{d}x \\
&\lesssim h^{p'} \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \frac{\omega(T)\,[\omega'(T)]^p}{|T|^p} \sum_{\mathrm{m}\in\mathscr{M}_h : \mathrm{m}\in T} |\partial_{\boldsymbol{\tau}_\mathsf{e}} q_h|^{p'} \\
&\lesssim h^{p'} [\omega]_{A_p} \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \omega'(T) |\nabla q_h|^{p'} \lesssim h^{p'} \|\nabla q_h\|_{\mathbf{L}^{p'}(\omega',\Omega)}^{p'}.
\end{aligned}$$

回顾一下（见 [19, 表 8.2 和 8.3]），对于 $d \in \{2,3\}$，单位单纯形上存在一种对二次多项式精确的求积公式，其支集为

单纯形的顶点和边中点，且中点处的权为正。设 $\{\varrho_{\mathtt{m}}\}$ 为该公式的权，则有

$$\begin{aligned} b(\mathbf{w}_h, q_h) &= -\sum_{T\in\mathscr{T}_h} \nabla q_h \cdot \int_T \mathbf{w}_h \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \omega'(T)\nabla q_h \cdot \sum_{\mathtt{m}\in\mathscr{M}_h:\mathtt{m}\in T} \varrho_m \boldsymbol{\tau}_{\mathtt{e}} |e|^{p'} \operatorname{sign}(\partial_{\boldsymbol{\tau}_{\mathtt{e}}} q_h) |\partial_{\boldsymbol{\tau}_{\mathtt{e}}} q_h|^{p'-1} \\ &\gtrsim h^{p'} \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \omega'(T) \sum_{\mathtt{e}\in\mathscr{E}_h:\mathtt{e}\subset T} |\partial_{\boldsymbol{\tau}_{\mathtt{e}}} q_h|^{p'} \gtrsim h^{p'} \sum_{T\in\mathscr{T}_h} \omega'(T) |\nabla q_h|^{p'}, \end{aligned}$$

其中，在最后一步中，我们利用网格假设得出：对于任意单元 T，集合 $\{\boldsymbol{\tau}_{\mathtt{e}}\}_{\mathtt{e}\in\mathscr{E}_h:\mathtt{e}\subset T}$ 张成 $\mathbb{R}^d$。最后回顾一下，∇q_h在 T上为常数。□

有了这一结果，我们现在证明 Taylor–Hood 对的 (3.2)。

定理 6.4（离散 inf–sup 条件）。在引理 6.3 的设定下，我们有

$$\|q_h\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)} \lesssim \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h, \tag{6.9}$$

其中，隐含常数与 h无关。

证明。给定 $q_h \in \mathcal{P}_h \subset L^{p'}(\omega', \Omega)/\mathbb{R}$，设 $\mathrm{w}_{q_h} \in \mathrm{W}^1_{,0}{}^p(\omega, \Omega)$ 为在 (6.1) 的证明过程中构造的函数，且 Π_h 为第 3.2 节所述的到 V_h 上的插值。Π_h 的性质以及与 (6.1) 的证明中相同的论证表明

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} &\geq \frac{b(\Pi_h \mathbf{w}_{q_h}, q_h)}{\|\nabla \Pi_h \mathbf{w}_{q_h}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} \\ &\gtrsim \|q_h\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)} + \frac{b\left(\Pi_h \mathbf{w}_{q_h} - \mathbf{w}_{q_h}, q_h\right)}{\|\nabla \mathbf{w}_{q_h}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}}. \end{aligned}$$

分部积分以及 Π_h 的性质表明

$$\begin{aligned} \frac{b\left(\Pi_h \mathbf{w}_{q_h} - \mathbf{w}_{q_h}, q_h\right)}{\|\nabla \mathbf{w}_{q_h}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} &\geq -\frac{\|\nabla q_h\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)} \|\mathbf{w}_{q_h} - \Pi_h \mathbf{w}_{q_h}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}}{\|\nabla \mathbf{w}_{q_h}\|_{\mathbf{L}^p(\omega,\Omega)}} \\ &\gtrsim -h \|\nabla q_h\|_{L^{p'}(\omega',\Omega)}. \end{aligned}$$

引理 6.3 使我们得以得出结论。□

References

[1] G. Acosta 与 R. G. Dur´an, *Divergence operator and related inequalities*, Springer数学简报, Springer, 纽约, 2017 3618122 . MR H. Aimar, M. Carena, R. Duran, 与 M. Toschi, [2] ´ *Powers of distances to lower dimensional sets as Muckenhoupt weights* **143** 2014 1, 119 137 , Acta Math. Hungar. ( ), no. – . 3215609 MR[3] *A stable finite element for the Stokes equations* D. N. Arnold, F. Brezzi, 与 M. Fortin, , Calcolo **21** 1984 4, 337 344 1985 799997 ( ), no. – ( ). MR C. Bernardi, C. Canuto, 与 Y. [4] *Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem* **25** 1988 6, 1237 1271 , SIAM J. Numer. Anal. ( ), no. – . MR 972452[5] S. C. Brenner 与 L. R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, 第三版, 应用数学教材, vol. 15, 2008 2373954 Springer, 纽约, . MR M. Bul˘cek, J. [6] ´ Burczak, 与 S. Schwarzacher, *A unified theory for some non-Newtonian fluids under singular forcing* **48** 2016 6, 4241 4267 3582412 , SIAM J. Math. Anal. ( ), no. – . MR

[7] S. Chanillo 和 R. L. Wheeden, *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions* **107** 1985 5, 1191 1226 , 《美国数学杂志》（），第 期，–。805809 MR[8] *Pointwise error estimates for finite element solutions of the Stokes problem* H. Chen, , 《SIAM 数值分析杂志》 **44** 2006 1, 1 28 2217368 （），第 期，–。MR P. G. Ciarlet, , 《SIAM》，宾夕法尼亚州费城，2002 年。MR 1930132[10] Ph. Cl´ement, *Approximation by finite element functions using local regularization*, 《法国自动化、信息学与运筹学杂志》，第 9 辑（1975），第 R-2 期，77–84。MR 0400739[11] L. Diening、M. R ̊u ̃zi ̃cka 和 K. Schumacher, *A decomposition technique for John domains*, 《芬兰科学院数学年刊》 **35** 2010 1, 87 114 2643399 （），第 期，–。MR J. Duoandikoetxea, , 《数学研究生丛书》第 29 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001 年，由 David Cruz-Uribe 从 1995 年西班牙文原版翻译并修订。MR 1800316[12] *Fourier analysis*
[13] R. Duran、R. H. Nochetto 和 J. P. Wang, *Sharp maximum norm error estimates for finite element approximations of the Stokes problem in 2-D* **51** 1988 , 《数学计算》（），第 184 期，491 506 935076 –。MR[14] R. G. Dur´an、I. Drelichman 和 I. Ojea, , （）, ArXiv: arXiv: 。。[15] R. G. Dur´an 和 A. L. Lombardi, , 《数学计算》（），第 期，–。MR[16] R. G. Duran 和 F. Lopez Garcıa, *Solutions of the divergence and Korn inequalities on domains with an external cusp* **35** 2010 2, 421 438 , 《芬兰科学院数学年刊》（），第 期，–。MR 2731700[17] R. G. Dur´an 和 M. A. Muschietti, , 《数学研究》（），第 期，–。MR[18] R. G. Duran 和 R. H. Nochetto, *for the Stokes problem* **54** 1990 189, 63 79 , 《数学计算》（），第 期，–。MR[19] *Theory and practice of finite elements* A. Ern 和 J.-L. Guermond, 《应用数学科学丛书》第 159, 2004 2050138 卷，施普林格出版社，纽约，。MR E. B. Fabes、C. E. Kenig 和 R. P. Serapioni, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations* **7** 1982 1, 77 116 , 《偏微分方程通讯》（），第 期，–。643158 MR[21] *Weighted L^q-theory for the Stokes resolvent in exterior domains* R. Farwig 和 H. Sohr, 《日本数学会杂志》 **49** 1997 2, 251 288 1601373 （），第 期，–。MR B. Franchi、C. E. Gutierrez 和 R. L. Wheeden, *and Harnack inequality for a class of degenerate elliptic operators* , 《林琴国家科学院院刊：物理、数学与自然科学部》（ 9 **5** 1994 2, 167 175 1292572 ）数学与应用（），第 期，–。[22] *Two-weight Sobolev-Poincaré inequalities*
[23] *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations* MR G. P. Galdi, 《》，第 2 版，《施普林格数学专著》，施普林格，纽约，2011 年。MR 2808162[24] V. Girault、R. H. Nochetto 和 L. R. Scott, *Stokes approximations in convex polyhedra* **131** 2015 4, 771 822 , 《数值数学》（），第 期，–。MR 3422453[25] V. Girault、R. H. Nochetto 和 R. Scott, *Maximum-norm stability of the finite element Stokes projection* 9 **84** 2005 3, 279 330 , 《纯粹与应用数学杂志》（）（），第 期，–。MR[26] *Finite element methods for Navier-Stokes equations* V. Girault 和 P.-A. Raviart, 《》，《施普林格计算数学丛书》第 5 卷，施普林格出版社，柏林，1986 年，理论与算法。MR[27] V. Gol’dshtein 和 A. Ukhlov, *Weighted Sobolev spaces and embedding theorems*, 《美国数学会汇刊》 **361** 2009 7, 3829 3850 2491902 （），第 期，–。MR J. Heinonen、T. Kilpelainen 和 O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations* 2006, 1993 , Dover Publications, Inc., 纽约州米尼奥拉，原版的完整重印本。MR 2305115[29] P Hood 和 C Taylor, *Navier-Stokes equations using mixed interpolation*, 《流动问题中的有限元方法》（1974），121–132。[30] F. I. Mamedov 和 R. A. Amanov, *On some nonuniform cases of weighted Sobolev and Poincaré inequalities* **20** 2008 3, 163 186 , 《代数与分析》（），第 期，–。2454455 MR[31] M. Mitrea 和 M. Wright, *Boundary value problems for the Stokes system in arbitrary Lipschitz domains* 2012 344, +241 2987056 , 《星丛》（），第 viii 期。MR

[32] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, 《美国数学学会汇刊》165（1972），207–226。MR 0293384[33] F. Natterer, *Über die punktweise Konvergenz finiter Elemente*, 《数值数学》25（1975/76），第 1, 67 77 0474884 – 卷。MR R. H. Nochetto、E. Otarola 和 A. J. Salgado, [34] *Piecewise polynomial interpolation in Muckenhoupt weighted Sobolev spaces and applications* **132** 2016 1, 85 130 ，《数值数学》（），第 – 卷。MR 3439216[35] E. Ot´arola 和 A. J. Salgado, *The Poisson and Stokes problems on weighted spaces in Lipschitz domains and under singular forcing* **471** 2019 1, 599 612 ，《数学分析及其应用杂志》（），第 – 卷，[36] R. Rannacher 和 R. Scott, *Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations* **38** 1982 158, 437 445 ，《计算数学》（），第 – 卷。MR 645661[37] *Solutions to the equation* K. Schumacher，div *u* = *f* *in weighted Sobolev spaces*，《抛物型方程与Navier–Stokes方程》第二部分，《数学中心出版物》第81卷，波兰科学院数学研究所，华沙，2008年，第433–440页。MR 2548872[38] L. Ridgway Scott 和 Shangyou Zhang, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions* **54** 1990 190, 483 493 ，《计算数学》（），第 – 卷。MR 1011446[39] *Finite element convergence for singular data* **21** 1973 74 317 R. Scott，，《数值数学》（/），–327。MR 0337032[40] B. O. Turesson, *Nonlinear potential theory and weighted Sobolev spaces*，《数学讲义》第 1736, 2000 1774162 卷，施普林格出版社，柏林，。MR R. [41] Verfurth, *Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations*，《数值分析评论》（），第 – 卷。MR R. Verfurth，《数值数学》55（1989），第3期，309–325。MR 993474

IMAS (UBA-CONICET) and Departamento de Matemática Facultad de Ciencias Ex- , , actas y Naturales Universidad de Buenos Aires Buenos Aires Argentina.
,,*E-mail address*: rduran@dm.uba.arDepartamento de Matemática,
Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso,
Chile.
E-mail address: enrique.otarola@usm.cl

epartment of Mathematics, University of Tennessee, Knoxville, TN 37996, USA.
E-mail address: asalgad1@utk.edu