采用安全设计运动基元的运动规划模块化框架

Marijan Vukosavljev、Zachary Kroeze、Angela P. Schoellig 和 Mireille E. Broucke

arXiv:1905.00495v1 [cs.RO] 1 May 2019

摘要——本文提出一种模块化框架，用于解决一组机器人之间的运动规划问题。该框架利用有限个低层运动基元在网格化工作空间中生成运动。通过机动自动机对允许运动基元序列的约束进行形式化描述。在高层，控制策略决定在网格化工作空间的每个盒中执行哪个运动基元。我们给出运动基元满足的一般条件，以实现可证明正确的行为，从而能够设计安全设计运动基元库。该框架通过在高层和低层均采用反馈策略，实现了高度稳健的设计。我们为多机器人运动规划提供了特定的运动基元和控制策略设计；我们方法的模块化特性使这些组件的设计能够独立定制。我们在一组四旋翼飞行器上对该方法进行了实验验证。

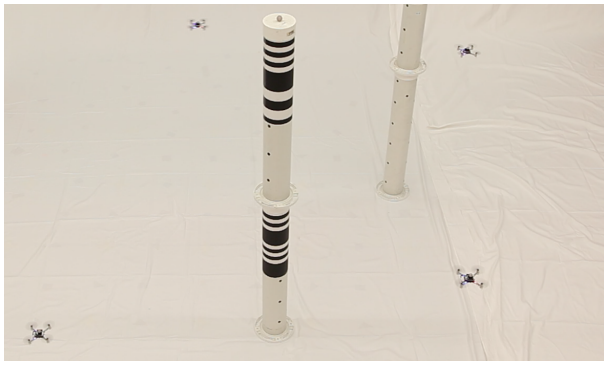


图 1. Crazyflie 四旋翼飞行器在障碍密布的环境中导航。视频结果请见 http://tiny.cc/modular-3alg。

I. 引言

本文提出了一种用于机器人系统运动规划与控制的模块化分层框架。尽管许多研究人员已经对运动规划给予了极大关注，但由于该问题高度复杂，尤其是在杂乱环境中有多个机器人协同工作的情况下，仍然存在重大挑战。分层是一种架构策略，其中控制设计包含多个层级，可用于克服这种复杂性。几乎所有用于运动规划的分层框架都旨在实现以下目标之间的平衡：高层控制规范的灵活性、低层的正确性与安全性保证，以及整体上的计算可行性。

从历史上看，运动规划侧重于高层规划算法，同时在低层抑制有关机器人动态能力的细节 [19]。充分考虑低层动力学，并结合高层规划问题的求解，可能导致计算上不可处理的问题。尽管已有大量研究[3], [9], [17], [28], ，但对于运动规划问题而言，能够将高层与低层紧密集成的计算效率高的解决方案仍然备受追捧。

我们提出一种模块化分层框架，使低层控制器和高层规划算法都能独立地即插即用，从而在高层灵活性、低层安全性与计算可行性之间取得平衡。为使这种方法可定制且可行，我们提出了三个假设。首先，底层动力系统的输出空间具有平移对称性，即位置不变性，这是许多机器人模型都具备的属性 [12]。其次，输出空间被均匀划分为矩形盒。最后，控制能力被离散为有限个运动基元，其中低层负责描述运动基元的实现方式，而高层则负责选择运动基元。综合这些假设可知，运动基元可以针对单个盒进行设计，之后再应用于其他任意盒。

现在，我们概述所采用的特性和技术，并介绍具有这些特性的其他框架。我们针对非线性系统给出运动基元的一般形式，使其能够应用于多机器人系统。我们关注先验已知环境中的到达-避障规范，在这类环境中，系统必须以安全的方式到达期望的配置 [3], [9], [15],[20]。到达-避障行为具有相当丰富的表现力，例如，可以将线性时序逻辑（LTL）的一个片段编码为一系列到达-避障问题 [33],，我们的应用也展示了这一点。

正如我们所提到的，为了利用对称性，我们将输出空间抽象为矩形区域 [28] ，而非更一般的多面体区域 [9], [11], [17], [20] 。运动基元已被以多种方式应用 [15], [28]，我们通过机动自动机 [12]对可行的运动基元序列进行编码。与上述运动基元方法不同，我们对运动基元进行低层控制设计时，基于可达控制理论[4], [27], ，该理论提供了一套高度灵活且直观的设计工具，相较于跟踪方法有两项显著优势：第一，无需寻找可供跟踪的可行开环轨迹；第二，在此期间对系统状态施加的安全约束。

Marijan Vukosavljev、Zachary Kroeze 和 Mireille E. Broucke 任职于加拿大多伦多大学电气与计算机工程系（电子邮箱: mario.vukosavljev@mail.utoronto.ca、zach.kroeze@mail.utoronto.ca、broucke@control.utoronto.ca）。Angela P. Schoellig 任职于加拿大多伦多大学航空航天研究所（UTIAS）（电子邮箱：schoellig@utias.utoronto.ca）。
本研究得到加拿大自然科学与工程研究理事会（NSERC）资助。

运动基元的执行与串接可以通过设计得到保证。最后，高层规划基于标准的最短路径算法 [5], [19] ，应用于由机动自动机的离散部分与输出空间划分所形成的图的同步积所得的图。高层规划会生成控制策略，以在网格化输出空间中选择运动基元。我们方法的模块化特性使其能够采用其他闭环方法，例如势场方法 [9]或向量场整形 [20] 来进行低层控制设计，并使用标准或定制的图搜索算法生成高层规划。

本工作的主要贡献有三点。首先，我们完整阐述了低层控制设计和高层规划的要求，并证明这两个层级能够协同工作，解决到达-避障问题。其次，我们构建了机动自动机的并行组合，以便为由多个独立子系统组成的系统（例如多辆车辆）获得设计即正确的运动基元。最后，我们通过在若干具有代表性的场景中对一组四旋翼飞行器进行实验，验证了该框架的模块化特性和有效性。具体而言，我们提出了一种基于双积分器、新颖且灵活的运动基元设计，并展示了如何利用高层规划生成的可定制性，在解的质量与计算效率之间轻松权衡。本文扩展了我们先前的工作 [31], ，现补充了所有理论细节及正确性证明、并行组合的构造方法、生成控制策略的其他方法，以及更详尽的实验结果。

本文组织如下。下一节将重点介绍相较于现有文献，本文的贡献。第三节给出形式化的问题陈述。第四节介绍模块化框架。我们定义输出转移系统、机动自动机、乘积自动机和高层规划，它们共同构成实现运动规划问题解决方案的基础。第五节证明，我们的整体方法能够解决运动规划问题。第 VI 节介绍运动基元的组合流程。第 VII 节给出适用于双积分器系统的具体运动基元。第 VIII 节探讨生成高层规划的若干方法，并通过四旋翼飞行器实验加以验证。最后，我们在第 IX 节总结全文。

记号。令 $\mathbb{Z}$ 表示整数， $\mathbb{R}$ 表示实数。令 $|\cdot|$ 表示集合的基数。若 A 是一个集合，则将其幂集记为 2^A。若 A 和 B 是集合，则令$A \setminus B$ 表示通常的集合差。若有 n 个集合A_i，令 $\prod_{i=1}^{n} A_i$ 表示通常的笛卡尔积。给定函数 $f\colon A \to B$， $A_1 \subset A$ 在 f 下的像以及 $B_1 \subset B$ 在 f 下的原像按通常方式定义，分别记为 $f(A_1) \subset B$ 和 $f^{-1}(B_1) \subset A$。令 $\mathsf{co}\{v_1, \ldots, v_m\}$ 表示向量v_1、.....、$v_m \in \mathbb{R}^n$的凸包。给定两个向量 v， $w \in \mathbb{R}^n$，我们将逐分量乘法（或 Hadamard积）记为$v \circ w$。令 $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$表示 $\mathbb{R}^n$上的全局Lipschitz向量场集合。

II. 相关文献

运动规划领域的文献浩如烟海，涵盖了众多研究群体。因此，我们对一些常见方法进行了分类，并讨论了它们与本文方法的关系。

A. 图搜索与轨迹规划

运动规划通常被视为离散规划问题，并已有许多标准图搜索算法可供使用 [19]。近期关于多智能体可达性与避障问题的研究，针对制造业和仓库自动化等应用开发了新颖算法，旨在兼顾计算效率与解的质量。例如， [35], 提出一种集中式方法，将工作空间离散为格点，并利用整数线性规划，在机器人高密度通行的情况下最小化其通行总时间。 [10], 利用各机器人的路网，在联合机器人空间中构建基于采样的路网，并证明该方法具有渐近最优性。优先级规划能够安全地协调大量车辆；[6]以集中式和分布式两种方式研究了该方法。子维度扩展主要以分布式方式计算，但当智能体彼此相邻时，会在联合搜索空间中进行坐标协调 [32]。尽管这类方法通常能为所提出的算法提供各种理论保证，但往往没有考虑动力学模型，也未在真实机器人系统上加以应用。

我们框架的模块化具有互补性，因为它有可能使现有关于网格化工作空间的多智能体文献被直接使用，或在与我们所提出的运动基元表述结合使用时加以改编，以生成高层规划。然而，对连续时间动力学的考虑可能从两个方面使离散规划方法的应用变得复杂。首先，我们必须应对连续运动原语上的约束，以使连续时间行为可接受——例如，避免速度的突然变化。其次，我们必须应对向相邻盒的非确定性转移，因为运动基元可能允许到达不止一个下一个盒 [18]——例如，对多机器人系统的联合异步运动能力进行建模。

轨迹跟踪方法也已应用于具有复杂动力学的真实车辆编队变换问题。 [2],提出了一种序列凸规划方法，用于计算数量不多的四旋翼飞行器的离散化无碰撞位置轨迹。最近， [25], 通过先计算一系列基于网格的航路点，再将其细化为更平滑的分段多项式，协调了数量惊人的四旋翼飞行器。然而，由于这些开环轨迹是离线计算的，偏离计算出的轨迹

可能导致碰撞。另一方面，我们的方法更加鲁棒，因为它完全不受时间约束，并根据测得的盒转换，以反应式的方式仔细监控车辆在网格中的进度。

B. 形式化方法

越来越多的研究开始探索将形式化方法用于运动规划。本文尤其受到 [17], 的启发，该文为求解具有线性时序逻辑规范的仿射系统控制问题提供了一个通用框架。他们的方法是在状态空间的多面体划分上构建转移系统；该划分由构成线性时序逻辑规范中原子命题的线性不等式约束所确定。若存在仿射或分段仿射反馈，能够将所有连续时间轨迹从一个多面体区域引导至与其相邻的另一个区域，则转移系统的状态之间便可以发生转移。与 [17] 类似的研究包括 [9], [14], [20], ，后者考虑了更简单的到达-避障问题。不久之后，单机器人和多机器人应用分别见于 [11] 和 [3]。

这些方法的优势在于其通用性，以及能够忠实地描述低层系统的能力。但另一方面，这些方法通常难以扩展至更高维的状态空间，因此在大型多机器人系统中的适用性有限。我们的方法通过利用系统动力学和网格划分中的对称性，对这些思路进行专门化，从而在通用性与计算效率之间取得更好的平衡。具体而言，我们的反馈控制器以运动基元的形式给出，这些基元可以独立于障碍物和目标位置进行设计。

近期的研究也以这些形式化方法为基础，探讨了更复杂、更贴近现实的多机器人问题。例如， [7]研究了在类似城市的环境中，多个汽车机器人在通信约束下处理服务请求的问题。 [13]以分布式方式解决了地面车辆的协作任务，使邻居之间能够共享知识，并实时重新配置运动规划方案。 [26]则将拾取物体等任务与运动要求结合起来进行研究。由于这些研究仅考虑相当简单的车辆动力学，因此更侧重于综合满足任务规范的离散规划。另一方面，本文考虑较简单的到达—避障问题，以便为具有对称性的非线性系统构建运动基元的形式化方法。

C. 运动基元

近年来，运动基元在机器人学中的应用日益普及，因为它们通过使用预定义可执行运动段，简化了运动规划问题。现有许多变体，其中一些利用定时参考轨迹来控制四旋翼飞行器编队 [28], 在状态空间格上的路径以用于移动机器人 [8], [24], ，以及以汽车 [15] 和小型飞机 [22]的参考轨迹为中心的状态空间中的漏斗。

我们的研究受到 [12], 中相关思想的启发，并借用了“机动自动机”这一术语。该文将运动基元定义为轨迹的一个等价类，或两个等价类之间的定时机动；而我们将运动基元定义为状态空间中一个多面体区域上的反馈控制器。在我们的形式化方法中，只有跨越输出空间中连续相邻盒的运动基元才能进行串接，这为串接过程提供了严格的安全保证。此外，正如 [8],所示，这使我们的方法能够将避障简化为针对安全盒的离散规划问题，避免了像 [12]那样使用数值优化技术串接运动基元轨迹的必要。

我们对机动自动机的介绍对运动基元的设计给出了明确约束，使其能够可靠地用于高层规划。我们还引入了机动自动机并行组合的概念，以便为多机器人系统构建运动基元。尽管我们的构造类似于现有的并行组合方法 [30], [34],，但我们进一步证明，该构造保留了所需的属性，从而确保低层与高层之间的一致性。据作者所知，本文首次对定义在均匀网格化输出空间上的基于反馈的运动基元进行了严格处理。

III. 问题陈述

考虑一般的非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x,u), \quad y = h(x), \tag{1}$$

其中， $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态， $u \in \mathbb{R}^\mu$ 是输入， $y \in \mathbb{R}^p$是输出。令 $\phi(\cdot, x_0)$ 和 $y(\cdot, x_0)$ 分别表示系统（1）从初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}^n$出发并施加某种开环控制或反馈控制时的状态轨迹和输出轨迹。

设 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ 为输出空间中的一个可行集，并设 $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$ 为一个目标集。在多车辆运动规划的语境中，$\mathcal{P}$ 表示系统的可行联合输出构型，这些构型可由涉及避障、避碰、通信约束及其他方面的规范产生。我们考虑如下问题。

问题 III.1 （到达-避障）。 给定系统 (1)、一个非空可行集 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ 以及一个非空目标集 $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$。求反馈控制 $u(x)$ 以及一组初始条件 $\mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n$，使得对每个 $x_0 \in \mathcal{X}_0$，我们有

(i)* 避障**：对所有 $t \geq 0$， $y(t, x_0) \notin \mathbb{R}^p \setminus \mathcal{P}$；(ii)* 到达**：存在 $T \geq 0$，使得对所有 $t \geq T$，$y(t, x_0) \in \mathcal{G}$。

我们对系统 (1) 的输出作出一项假设，以便利用对称性；关于具有对称性的非线性控制系统的阐述，见 [12]。

假设 III.1. 首先，我们假设存在一个单射 o：$\{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$，它将每个输出关联到

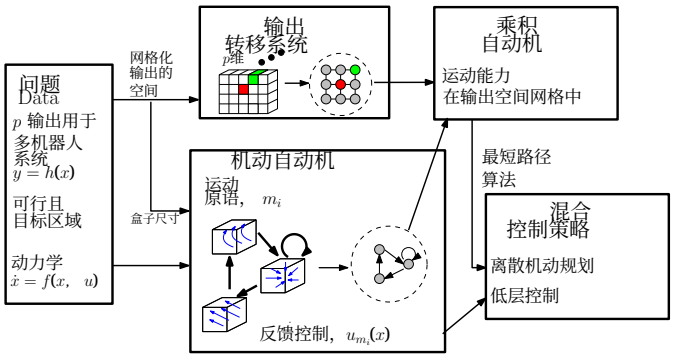


图2. 我们的模块化框架由五个模块组成。

一个不同的状态，使得 $h(x) = (x_{o(1)}, \ldots, x_{o(p)})$。我们将（单射）插入映射 $h_o^{-1}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 定义为 $h_o^{-1}(y) = x$，它满足 $h(x) = y$，并且对所有 $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{o(1) \ldots, o(p)\}$ 都成立。其次，我们假设系统的输出具有平移不变性。也就是说，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$、$u \in \mathbb{R}^\mu$ 和 $y \in \mathbb{R}^p$，都有 $f(x, u) = f(x + h_o^{-1}(y)\ u)$。$\triangleleft$

系统输出是状态子集这一假设用于我们的框架，使我们能够在完整状态空间中设计反馈控制器，从而在输出空间中实现期望的行为。第二个陈述表明，向量场不随输出值变化。在相关文献中，这一条件称为<样式 id='1'>系统的对称性或<样式 id='3'>平移不变性。许多机器人系统都满足这一假设，例如输出为位置时。此外，我们将在第 VII 节中看到，该假设显著简化了控制器设计。

IV. 模块化框架

本节将介绍我们用于解决运动规划问题的方法，该方法以一种分解问题 III.1 的架构为基础。如图 2 所示，该架构由五个主要模块组成。

- 问题数据 包括系统（1），其 p 输出满足假设 III.1，以及一个要在输出空间中执行的到达-避障任务。
- 输出转移系统（*OTS*）是一个有向图，其节点（称为位置）表示网格化输出空间中的 p维盒，其边描述输出空间中哪些盒彼此相邻。
- 混合机动自动机 (MA) 是一种混合系统，其模式对应于所谓的运动基元。通过对 (1) 应用反馈律，每个运动基元都与一个闭环向量场相关联。MA 的边表示可行的连续运动基元。每个运动基元都会在输出空间的一个盒上，为闭环系统的输出轨迹生成某种期望行为。由于输出空间被均匀网格化为多个盒，并且输出具有.....中所述的对称性

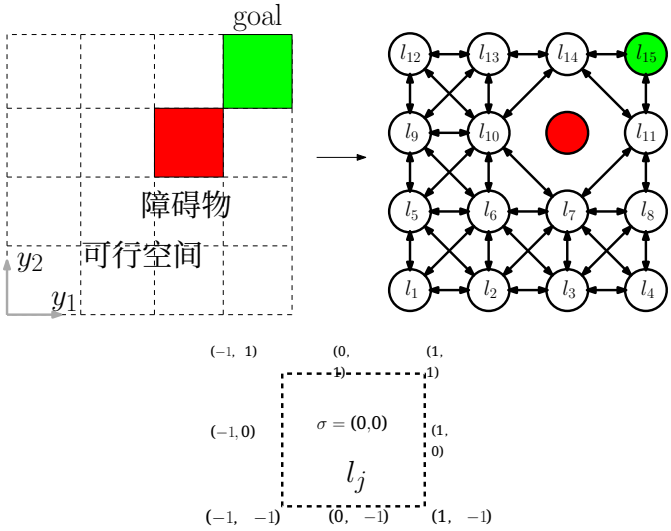


图 3. 一个具有 $p = 2$ 个输出的到达-避障任务示例。左侧展示了可行空间 $\mathcal{P}$，其由 15 个非障碍盒（非红色）和目标区域 $\mathcal{G}$（绿色）组成。右侧展示了输出转移系统（OTS），该系统抽象了盒区域及其邻居连通性。下方展示了指向相邻盒的可能偏移量，并使用 $\Sigma = \{-1, 0, 1\}^2$ 进行了标记。

假设 III.1，由于输出具有对称性，运动基元只需针对一个规范盒 Y^* 进行设计。

- 乘积自动机 （PA）是一个图，它是 OTS 与混合自动机离散部分的同步积。它表示输出空间中可行运动与连续运动原语的组合约束。
- 混合控制策略是由运动原语设计得到的低层控制器与乘积自动机上的高层规划的组合。

接下来，我们将更详细地描述 OTS、混合自动机和乘积自动机。

A. 输出转移系统

OTS 对与系统 (1) 相关联的工作空间或输出空间 给出了抽象描述。它用于刻画系统 (1) 的输出轨迹在网格化输出空间中的可行运动，如图 3 所示。具体而言，我们将输出空间划分为长度为 $d = (d_1, \ldots, d_p)$ 的 p 维盒，其中 $d_i > 0$ 为第 i 条边的长度。我们用有限个盒对可行集 $\mathcal{P}$进行下近似。将这些盒枚举为 $\{Y_1, \ldots, Y_{n_L}\}$ 后，第 j 个盒可表示为 $Y_j := \prod_{i=1}^{p} [\eta_{ji} d_i, (\eta_{ji} + 1) d_i]$ 的形式，其中 $\eta_{ji} \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, p$ 为常数。我们要求 $\bigcup_{j=1}^{n_L} Y_j \subset \mathcal{P}$。在这些盒中，我们假设存在一个非空指标集 $I_g \subset \{1, \ldots, n_L\}$，从而可以类似地将目标区域下近似为 $\bigcup_{j \in I_g} Y_j \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{P}$。我们定义一个典范的 p 维盒，其边长为 $d_i > 0$，由 $Y^* = \prod_{i=1}^{p} [0, d_i]$ 给出。每个盒 $Y_j, j = 1, \ldots, n_L$ 都是将 Y^* 沿第 i 轴平移 $\eta_{ji} d_i$ 所得。

定义 IV.1. 给定长度 d 以及非空目标指标集 I_g，输出转移系统（*OTS*）是一个元组$\mathcal{A}_{\text{OTS}} = (L_{\text{OTS}}, \Sigma, E_{\text{OTS}}, L^g{}_{\text{OTS}})$，其组成部分如下：

状态空间 $L_{\text{OTS}} := \{l_1, \ldots, l_{n_L}\} \subset \mathbb{Z}^p$ 是一个由称为位置的节点组成的有限集合。每个位置 $l_j \in L_{\text{OTS}}$ 都与输出空间中的一个安全盒 $Y_j \subset \mathcal{P}$ 相关联，因此我们记作 $l_j = (\eta_{j1}, \ldots, \eta_{jp})$。

标签 $\Sigma := \{-1, 0, 1\}^p \subset \mathbb{Z}^p$ 是一个由标签组成的有限集合。标签$\sigma \in \Sigma$ 用于标识相邻盒之间的偏移量。

边 $E_{\text{OTS}} \subset L_{\text{OTS}} \times \Sigma \times L_{\text{OTS}}$ 是一组有向边，其中$(l_j, \sigma, l_{j'}) \in E_{\text{OTS}}$ 当 $j \neq j'$、$Y_j \cap Y_{j'} \neq \emptyset$且 $\sigma = l_{j'} - l_j \in \Sigma$时成立。因此，对于每个 $i = 1, \ldots, p$，相邻盒 $l_{j'}$要么是左侧一个盒（$\sigma_i = -1$），要么是同一个盒（$\sigma_i = 0$），要么是右侧一个盒（$\sigma_i = 1$）。通过这种方式，σ 记录了连续相邻盒之间的偏移量。

终止条件 $L^g{}_{\text{OTS}} = \{l_j \in L_{\text{OTS}} \mid j \in I_g\}$ 表示与目标盒相关联的位置集合。

◁

注 IV.1. 我们注意到，*OTS* 是确定性的。也就是说，对于给定的 $l \in L_{\text{OTS}}$ 和 $\sigma \in \Sigma$，至多存在一个 $l' \in L_{\text{OTS}}$ 使得 $(l, \sigma, l') \in E_{\text{OTS}}$。这是由 $\sigma = l' - l$ 记录相邻盒之间偏移量这一事实直接得出的。

图 3 展示了一个简单场景下的 OTS 示例。OTS 位置与 15 个可行盒相关联，其中包括一个用于到达-避障任务的目标盒。OTS边以双向箭头表示；例如，在网格上将 $l_1 = (0, 0)$ 和 $l_6 = (1, 1)$ 解释为网格位置，则 $e = (l_6, (-1, -1), l_1) \in E_{\text{OTS}}$。

B. 机动自动机

机动自动机（MA）是一种混合系统，由有限自动机以及每个离散状态下的连续时间动力学组成。有限自动机的离散状态对应于运动基元，而离散状态之间的转移对应于运动基元之间允许的转移。连续时间动力学由闭环向量场（1）给出，其控制律基于可达控制理论设计（也可以采用其他反馈控制设计方法）。

在介绍 MA 之前，我们首先解释该模块如何用于整体框架。为解决问题 III.1，我们为划分后的输出空间中的盒 Y_j 分配运动基元，使其避开障碍区域并最终到达目标区域。MA 的离散部分对连续运动原语施加的约束进行了编码。这些约束可能源于无抖振要求、连续性要求，或关于在状态空间各区域之间正确切换的要求。关于为盒分配运动基元的动态规划算法将在第 IV-D 节中讨论；现阶段，该算法的关键点在于它只使用 MA 的离散部分。

相比之下，混合自动机的连续时间部分既用于仿真闭环动力学，以验证运动基元设计合理，也用于实时实现低层反馈。为简化设计，运动基元仅定义在规范盒 Y^* 上。由于假设 III.1 所提供的平移对称性，以及每个盒 Y_j 都是 Y^*的平移，因此可以进行这种简化。在仿真中，给定的运动基元可能使输出轨迹到达 Y^*的某些面。如果到达某个面，则将输出轨迹视为重置到相对的面，并选择另一个运动基元，在 Y^* 上实施（当然，实际实验中的输出轨迹不会发生重置，而是在输出空间中连续地从一个盒移动到另一个盒）。下一个运动基元的选择受到前一个运动基元以及到达的 Y^* 的面的共同约束。混合自动机中的离散跃迁对这些约束进行了编码。

定义 IV.2。考虑满足假设 *III.1* 的系统(1) 以及长度为d 的盒Y^* 。机动自动机 （*MA*）是一个元组$\mathcal{H}_{\text{MA}} = (Q_{\text{MA}}, \Sigma, E_{\text{MA}}, X_{\text{MA}}, I_{\text{MA}}, G_{\text{MA}}, R_{\text{MA}}, Q^0{}_{\text{MA}})$，其中

状态空间 $Q_{\text{MA}} = M \times \mathbb{R}^n$ 是混合状态空间，其中 $M = \{m_1, \ldots, m_{n_M}\}$是有限个节点的集合，每个节点对应一个运动基元。

标签 Σ，与 *OTS* 中使用的标签相同。

边 $E_{\text{MA}} \subset M \times \Sigma \times M$ 是有限个边的集合。

向量场 X_{MA}： $M \to \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ 是一个函数，为每个运动基元 $m \in M$指定一个全局利普希茨闭环向量场。也就是说，对每个 $m \in M$，有$X_{\text{MA}}(m) = f(\cdot, u_m(\cdot))$ 其中 $u_m(\cdot)$ 是与 $m \in M$相关联的反馈控制器。

不变集 I_{MA} ： $M \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 为每个 $m \in M$ 分配一个有界不变集 $I_{\text{MA}}(m)$ 。我们要求 $I_{\text{MA}}(m) \subset h^{-1}(Y^*)$。集合 $I_{\text{MA}}(m)$ 定义了向量场 $X_{\text{MA}}(m)$ 的定义区域。请注意，我们不要求不变集是闭集。

使能条件 G_{MA}： $E_{\text{MA}} \to \{g_e\}_{e \in E_{\text{MA}}}$ 为每条边 $e = (m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$分配一个非空的使能条件或守卫条件 $g_e \subset \mathbb{R}^n$。我们要求 $g_e \subset I_{\text{MA}}(m)$。我们还额外要求 g_e 位于由标签 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \Sigma$确定的 Y^* 的某个面上。将与 σ 相关联的面定义为

$$\mathcal{F}_\sigma = \left\{ y \in Y^* \;\middle|\; \begin{cases} y_i = 0, & \text{if } \sigma_i = -1 \\ y_i = d_i, & \text{if } \sigma_i = 1 \\ y_i \in [0, d_i], & \text{if } \sigma_i = 0 \end{cases} \right\},$$

我们还要求 $g_e \subset h^{-1}(\mathcal{F}_\sigma)$。

重置条件 R_{MA}： $E_{\text{MA}} \to \{r_e\}_{e \in E_{\text{MA}}}$ 为每条边 $e = (m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$ 分配一个重置映射 r_e： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。我们要求 $r_e(x) = x - h_o^{-1}(d \circ \sigma)$，其中 $\circ$ 是*Hadamard*积。该定义表明，若 $\sigma_i = -1$，则第 i个输出分量被重置为 Y^*、$x_{o(i)} = d_i$的右面；若 $\sigma_i = 1$，则被重置为左面 $x_{o(i)} = 0$；否则保持不变。总体而言，状态的重置由事件 $\sigma \in \Sigma$ 决定，且仅影响输出

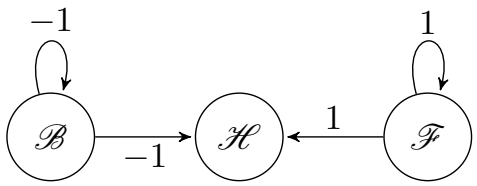


图4. 带 $p = 1$的双积分器动力学的机动自动机边 E_{MA}。共有三个运动基元：保持（$\mathscr{H}$）、前进（$\mathscr{F}$）和后退（$\mathscr{B}$）。

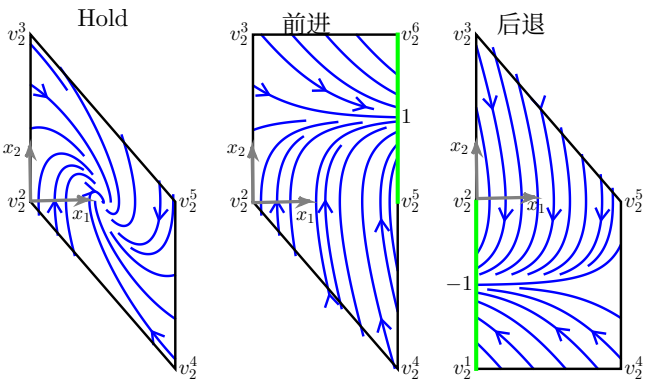


图5. 保持、前进和后退运动基元在 (x_1, x_2) 位置-速度状态空间中的闭环向量场。

坐标，以便将输出轨迹保持在规范盒 Y^*内。

初始条件 $Q^0{}_{\text{混合自动机}} \subset Q_{\text{MA}}$ 是由$Q^0{}_{\text{混合自动机}} = \{(m, x) \in Q_{\text{MA}} \mid x \in I_{\text{MA}}(m)\}$给出的初始条件集合。 ◁

例 IV.1. 设该系统为双积分器，且第一个状态是平移不变输出 y。盒 Y^*只是一条线段。令 $M = \{\mathscr{H}, \mathscr{F}, \mathscr{B}\}$，其中保持 （$\mathscr{H}$）镇定 y，前进 （$\mathscr{F}$）增大 y，后退 （$\mathscr{B}$）减小 y。参见图 *4*，若 $\mathscr{F}$ 为当前运动基元且 y 到达Y^*的右面，则事件 $1 \in \Sigma$ 发生，我们可以选择 $\mathscr{H}$ 或$\mathscr{F}$ 作为下一个运动基元。为了在连续状态空间中正确实现混合自动机的离散演化，必须为每个运动基元关联一个不变集和反馈控制，同时为每条边关联使能条件与重置条件；见图 *5*。形式化细节见第 *VII* 节。

现在，我们针对运动基元提出一些假设，以确保低层的连续时间行为正确，并与高层保持一致。对于每个 $m \in M$，将可能事件的集合定义为

$$\Sigma_{\text{MA}}(m) := \{\sigma \in \Sigma \mid (\exists m' \in M)(m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}\}. \quad (2)$$

假设 IV.1。

(i) 对所有 $m \in M$、 $\varepsilon := (0, \ldots, 0) \notin \Sigma_{\text{MA}}(m)$。 *(ii)* 对所有满足 $e_1 = (m_1, \sigma, m_2)$ 且 $e_2 = (m_1, \sigma, m_3)$ 的 e_1、 $e_2 \in E_{\text{MA}}$， $g_{e_1} = g_{e_2}$。 *(iii)* 对所有满足 $e_1 = (m_1, \sigma_1, m_2)$ 且 $e_2 = (m_1, \sigma_2, m_3)$ 的 e_1、 $e_2 \in E_{\text{MA}}$，若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，则 $g_{e_1} \cap g_{e_2} = \emptyset$。 *(iv)* 对所有满足 $e_1 = (m_1, \sigma_1, m_2)$ 且 $e_2 = (m_2, \sigma_2, m_3)$ 的 e_1、 $e_2 \in E_{\text{MA}}$， $r_{e_1}(g_{e_1}) \cap g_{e_2} = \emptyset$。 *(v)* 对所有 $e = (m_1, \sigma, m_2) \in E_{\text{MA}}$、 $r_e(g_e) \subset I_{\text{MA}}(m_2)$。 *(vi)* 对所有 $m \in M$，若 $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \emptyset$，则对所有 $x_0 \in I_{\text{MA}}(m)$ 及 $t \geq 0$、 $\phi_{\text{MA}}(t, x_0)$, $\in I_{\text{MA}}(m)$。 *(vii)* 对所有 $m \in M$，若 $\Sigma_{\text{MA}}(m) \neq \emptyset$，则对所有 $x_0 \in I_{\text{MA}}(m)$，存在（唯一的） $\sigma \in \Sigma_{\text{MA}}(m)$ 和（唯一的） $T \geq 0$，使得对所有 $e = (m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$，且对所有 $t \in [0, T]$, $\phi_{\text{MA}}(t, x_0) \in I_{\text{MA}}(m)$ 且 $\phi_{\text{MA}}(T, x_0) \in g_e$。 ◁

条件（i）排除了同义反复抖振行为；这种行为源于错误地将轨迹在 Y^* 内部的连续演化解释为 MA 的“离散跃迁”（定义见第五节）。条件（ii）规定守卫集独立于下一个运动基元。由于守卫集是给定运动基元下闭环轨迹从 Y^* 离开的退出点集合，因此这些退出点只取决于当前运动基元 $m \in M$，而不取决于下一个运动基元的选择，这是合理的。条件（iii）规定对应于不同标签的所有守卫集互不重叠。这确保连续轨迹到达守卫集 g_e 时，下一步所经过的 MA 边是明确的，即 $e \in E_{\text{MA}}$。提出条件（v）、（vi）和（vii）是为了保证 MA 非阻塞。这些条件基于文献中的已知结果 [21]；参见引理 V.1。要使条件（vii）有意义，对于 MA 轨迹到达守卫集，必须存在唯一的标签 $\sigma \in \Sigma$ 和唯一的时间 $T \geq 0$。首先，由于向量场是全局利普希茨的，解是唯一的。其次，根据条件（iii），唯一的 MA 轨迹只能到达一个守卫集；这意味着 σ 是唯一的。显然，到达守卫集的时间也是唯一的。条件（vi）和（vii）共同表明，要么所有轨迹都不会离开，要么所有轨迹最终都会离开。参见图 5， $\mathscr{F}$ 不变集内的所有闭环状态轨迹都会到达右侧以绿色标出的守卫集。对于下一个可行运动基元的任一选择，即 $\mathscr{H}$ 或 $\mathscr{F}$，轨迹都会因重置而进入左侧的下一个不变集。最后，条件（iv）排除了潜在的抖振 Zeno行为，参见注释 V.1。

备注 IV.2。 我们对混合自动机再做几点进一步说明。

(i) 混合自动机在如下意义上是非确定性的：给定 $m \in M$ 和 $\sigma \in \Sigma$，可能存在多个 $m' \in M$，使得$(m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$。混合自动机的离散部分在第二种意义上是非确定性的：对于每个 $m \in M$，集合 $\Sigma_{\text{MA}}(m)$ 的基数可能大于一。后一种情形对应于如下事实：对于连续部分的不同初始条件 x_1、 $x_2 \in I_{\text{MA}}(m)$，相关联的输出轨迹可以到达不同的守卫集。本质上，哪个守卫被启用，在高层被解释为一个不可控事件 *[34]*。备注 *IV.3*进一步说明了乘积自动机情形下的这两类非确定性。

(ii) 混合自动机中的事件集合 Σ 对应于*OTS*中的相同事件 Σ 。这种对应关系用于下一节所述的乘积自动机*PA*中，以使混合自动机中的转移与*OTS*中的转移同步。其解释是：当混合自动机的一条连续轨迹（在盒 Y^*上）以标签 $\sigma \in \Sigma$发生重置时，(1) 在盒 Y_j 中的相关联连续轨迹以偏移量 $\sigma = l_{j'} - l_j$进入相邻盒 $Y_{j'}$ 。显然，这一解释假定盒子长度向量 d 在*OTS*和混合自动机中相同。◁

C. 乘积自动机

本节介绍乘积自动机（PA）。它由 OTS 与混合自动机的离散部分的同步积构造而成，即 $(M, \Sigma, E_{\text{MA}})$。PA 的目的在于合并连续运动原语上的约束与 OTS 转移上的约束，以确保运动可行且安全。因此，它刻画了系统整体的可行运动——任何高层规划都必须遵循这些可行运动。

定义 IV.3. 给定一个 *OTS* $\mathcal{A}_{\text{OTS}}$ 和一个满足假设 *IV.1* 的混合自动机 $\mathcal{H}_{\text{MA}}$。我们将乘积自动机（*PA*）定义为元组 $\mathcal{A}_{\text{PA}} = (Q_{\text{PA}}, \Sigma, E_{\text{PA}}, Q^f{}_{\text{PA}})$，其中

状态空间 $Q_{\text{PA}} \subset L_{\text{OTS}} \times M$ 是 *PA* 状态的有限集合。*PA* 状态 $q = (l, m) \in Q_{\text{PA}}$ 满足以下条件：若存在 $\sigma \in \Sigma$ 和 $m' \in M$ 使得 $(m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$，则存在 $l' \in L_{\text{OTS}}$ 使得 $(l, \sigma, l') \in E_{\text{OTS}}$。也就是说，$(l, m) \in Q_{\text{PA}}$ ，若运动原语 $m \in M$ 能够到达的所有面都通向与 *OTS* 位置 $l \in L_{\text{OTS}}$ 关联盒子的相邻盒子。

标签 Σ 与 *OTS* 和混合自动机使用的标签集合相同。

边 $E_{\text{PA}} \subset Q_{\text{PA}} \times \Sigma \times Q_{\text{PA}}$是一个有向边集合，其定义遵循以下规则。设 $q = (l, m) \in Q_{\text{PA}}, q' = (l', m') \in Q_{\text{PA}}$，以及 $\sigma \in \Sigma$。若 $(l, \sigma, l') \in E_{\text{OTS}}$ 且$(m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$，则 $(q, \sigma, q') \in E_{\text{PA}}$。

终止条件 $Q^f{}_{\text{PA}} \subset L^g{}_{\text{OTS}} \times M$ 是乘积自动机终态的集合。◁

备注 IV.3. 形式上，如果存在一个状态，其具有多条标签相同的出边，则称该自动机是非确定性的。该乘积自动机是非确定性的。首先，考虑一个 *PA* 状态 $q = (l, m) \in Q_{\text{PA}}$。由于混合自动机允许存在多个可行的下一个运动基元 m'，使得 $(m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$，乘积自动机也会有多个后续 *PA* 状态 $q' = (l', m')$，使得 $(q, \sigma, q') \in E_{\text{PA}}$。其次，对于某个 $q' \in Q_{\text{PA}}$，可能存在多个标签 $\sigma \in \Sigma$ ，使得 $e = (q, \sigma, q') \in E_{\text{PA}}$ 。因此，*PA* 继承了混合自动机的两种非确定性，这两种非确定性已在备注 *IV.2* 中讨论。例如，考虑 *PA* 图*6*中的片段。对于第一种非确定性，注意存在两条具有相同标签的*PA*边$(q_1, \sigma_1, q_2) \in E_{\text{PA}}$ 和$(q_1, \sigma_1, q_3) \in E_{\text{PA}}$ 。对于第二种类型，注意从q_1出发有两个可能事件 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ ，每个事件都有其自身的一组*PA*边。另请注意一些

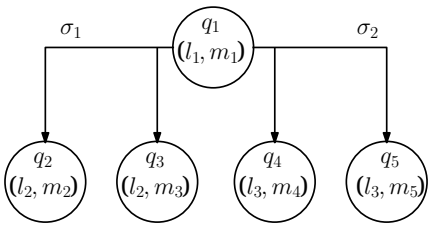


图 6. 一个通用 PA 的片段，展示一个状态及其相邻状态。

附加结构：由于 *OTS* 是确定性的，盒状态在 q_2 和 q_3中均为 l_2 ，对应于 *OTS* 边$(l_1, \sigma_1, l_2) \in E_{\text{OTS}}$。◁

D. 高层规划

本节将阐述 PA 上控制策略的概念，该策略通过选择下一个运动基元，为后续 PA 状态的选择提供规则。简而言之，高层规划的目标是生成一个控制策略，并找到一组初始 PA 状态，使得最终能够到达某个目标 PA 状态。为此，本节还将提出一种适用于 PA 的动态规划原理（DPP）。由于 PA 存在两种类型的非确定性，现有算法无法直接应用 [5], [33]。通过改编 [5],中的算法，我们得到了 DPP 的两种表述，其中一种利用了 PA 的某些结构，计算效率更高；更多细节请参见注释 IV.5。

首先介绍一些有用的记号。回顾式 (2)，给定$m \in M$, $\Sigma_{\text{MA}}(m)$ 是从 m出发的出边 $e \in E_{\text{MA}}$ 上的所有标签 $\sigma \in \Sigma$ 构成的集合。类似地， $\Sigma_{\text{PA}}(q)$ 是从 q出发的出边 $e \in E_{\text{PA}}$ 上的所有标签 $\sigma \in \Sigma$ 构成的集合。也就是说，

$$\Sigma_{\text{PA}}(q) := \{\sigma \in \Sigma \mid (\exists q' \in Q_{\text{PA}})(q, \sigma, q') \in E_{\text{PA}}\}.$$

现在我们形式化 PA 的语义。PA 的一个状态是一个二元组 $q = (l, m) \in Q_{\text{PA}}$ 其中 $l \in L_{\text{OTS}}$ 是 OTS 中的位置，而 $m \in M$ 是一个运动基元。运行 π of $\mathcal{A}_{\text{PA}}$是状态 $\pi = q^0 q^1 q^2 \ldots$的有限或无限序列，其中$q^i = (l^i, m^i) \in Q_{\text{PA}}$ 并且对于每个 i，存在 $\sigma^i \in \Sigma_{\text{PA}}(q^i)$ 使得 $(q^i, \sigma^i, q^{i+1}) \in E_{\text{PA}}$。我们将运行的长度定义为 n_π；对于无限运行， n_π 定义为 ∞。我们考虑从 $q \in Q_{\text{PA}}$ 开始、满足另一项性质的运行子集 $\Pi_{\text{PA}}(q)$。如果运行 π 是无限的，则当 $q^0 = q$时，$\pi \in \Pi_{\text{PA}}(q)$。反之，如果运行 π 是有限的，则当 $q^0 = q$ 且另外， $\Sigma_{\text{PA}}(q^{n_\pi}) = \emptyset$时， $\pi \in \Pi_{\text{PA}}(q)$。后一个要求——有限运行的最后一个 PA 状态在 PA 中不得具有出边——正是我们所关注的。其解释是，我们将 PA 状态之间的事件标签视为不可控的，因此如果任何事件是可能的，那么它最终必然发生。因此不失一般性地，每个运行 $\pi = q^0 q^1 \ldots$ 都是某个运行 $\pi' \in \Pi_{\text{PA}}(q^0)$ 的前缀。更多说明见注 IV.4 (ii)。

给定 $q \in Q_{\text{PA}}$ 和 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$，可容许运动原语的集合 为

$$\mathcal{M}(q,\sigma) := \{m' \in M \mid (\exists q' = (l', m'))\ (q,\sigma,q') \in E_{\text{PA}}\}.$$

更一般地，给定 $q \in Q_{\text{PA}}$ 和 $\Sigma_{\text{PA}}(q) = \{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}$，在 q 处的可容许运动原语集合为

$$\mathcal{M}(q) := \{(m_1,\dots,m_k) \mid m_i \in \mathcal{M}(q,\sigma_i),\, i = 1,\dots,k\},$$

下面我们引入控制策略的概念。给定$q \in Q_{\text{PA}}$和 $\Sigma_{\text{PA}}(q) = \{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}$，在 q 处的可容许控制赋值是一个向量

$$c(q) = (c(q,\sigma_1),\dots,c(q,\sigma_k)),$$

其中 $c(q,\ \sigma_i) \in \mathcal{M}(q,\ \sigma_i)$，或者等价地，$c(q) \in \mathcal{M}(q)$。注意，$c(q)$ 是一个向量，其维数随集合 $\Sigma_{\text{PA}}(q)$ 的基数而变化。可容许控制策略 $c:\ Q_{\text{PA}} \times \Sigma \to M$ 是一个映射，它在每个 $q \in Q_{\text{PA}}$ 处赋予一个可容许控制赋值。因此，对于每个 $q \in Q_{\text{PA}}$ 和 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}$，$c(q,\ \sigma) \in \mathcal{M}(q,\ \sigma)$。所有可容许控制策略的集合记为 $\mathcal{C}$。

考虑一个可容许控制策略 $c \in \mathcal{C}$ 和一个状态$q \in Q_{\text{PA}}$。我们将 $\Pi_{\text{PA}}(q)$中由 c诱导的运行集合记为 $\Pi_c(q)$。形式上，$\pi = q^0 q^1 \cdots \in \Pi_c(q)$，若 $q^0 = q$，且对所有 $i \geq 0$ 和 $i < n_\pi$，$m^{i+1} = c(q^i,\sigma^i)$。类似地，我们将 $\Pi_c(q)$中最终到达$Q^f{}_{\text{PA}}$内某一状态的运行子集记为 $\Pi_c^f(q)$。形式上，$\pi \in \Pi_c^f(q)$，若存在整数 $i \in \{0,\dots,n_\pi\}$ 使得$q^i \in Q^f{}_{\text{PA}}$。对于 $\pi \in \Pi_c^f(q)$，我们定义

$$r_\pi := \min\{i \in \{0,\dots,n_\pi\} \mid q^i \in Q^f_{\text{PA}}\}.$$

接下来，我们定义瞬时代价 $D_{\text{PA}}:\ E_{\text{PA}} \to \mathbb{R}$，其满足对所有 $e \in E_{\text{PA}}$，$D_{\text{PA}}(e) > 0$，以及终端代价 $H_{\text{PA}}:\ Q_{\text{PA}} \to \mathbb{R}_\circ$ 现在考虑运行 $\pi = q^0 q^1 \dots q^{n_\pi} \in \Pi_c^f(q)$，其中 $q^0 = q$，$c(q^i,\sigma^i) = m^{i+1}$，以及 $e^i := (q^i,\sigma^i,q^{i+1}) \in E_{\text{PA}\circ}$ 我们如下定义剩余代价 $J:\ Q_{\text{PA}} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$J(q,c) = \begin{cases} \max\limits_{\pi \in \Pi_c(q)} \left\{ \sum\limits_{j=0}^{r_\pi - 1} D_{\text{PA}}(e^j) + H_{\text{PA}}(q^{r_\pi}) \right\}, & \Pi_c(q) = \Pi_c^f(q) \\ \infty, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

注 IV.4. 我们的剩余代价公式有几个值得注意的特点。

(i) 对于给定的 $q \in Q_{\text{PA}}$，由于 *PA* 的（第二种非标准类型的）非确定性，可能存在多个运行$\pi \in \Pi_c(q)$ 。因此，我们假设最坏情况，并在剩余代价中取 $\Pi_c(q)$ 的最大值。此外，为了使有限后续代价成立，我们要求 $\Pi_c(q) = \Pi_c^f(q)$，这样 r_π 定义良好，且所有从 q 开始的运行最终都会到达 $Q^f{}_{\text{PA}}$。

(ii) 我们假设有限运行必须在没有出边的 *PA* 状态处终止。假设我们在 $\Pi_c(q)$ 中纳入（有限或无限）运行的有限前缀。这些前缀必然是以具有出边的乘积自动机终态结束的有限运行。此时，如果取一条最终到达目标 *PA* 状态的有限或无限运行，那么该运行的某些有限前缀可能尚未到达目标 *PA* 状态，从而会得到 $\Pi_c(q) \neq \Pi_c^f(q)$ 以及无限的剩余代价。这

这种异常源于人为构造了这样一种情形：

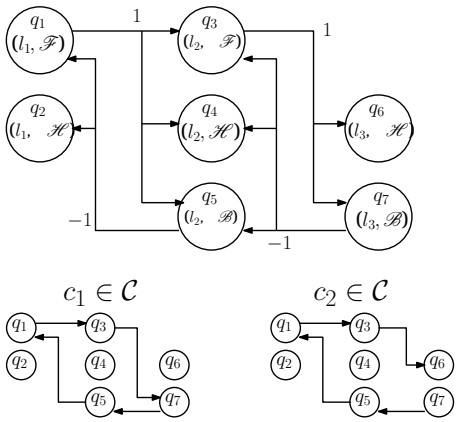


图 7. 顶部展示了一个 PA，它对应一个输出系统，该系统具有三个运动基元 $M = \{\mathscr{H}, \mathscr{F}, \mathscr{B}\}$ $L_{\text{OTS}} = \{l_j \mid j =$，分布 $1, 2, 3\}$ $1\ -1 \in \Sigma$ 在三个盒上。边（以箭头表示）上的数字，是相应的标签。底部的图展示了由控制策略 c_1，$c_2 \in \mathcal{C}$ 所诱导的简化转移集。

由于我们纳入了成功运行的（未成功）有限前缀，因此并非所有从初始 *PA* 状态出发的运行都能到达目标 *PA* 状态。

(iii) 剩余代价泛函还通过使用变量 r_π 记录首次到达目标 *PA* 状态的时间，并仅对无限运行中对应的前缀计算代价，从而纳入对无限运行的考虑。尽管我们主要关注可达-避障规范（其中有限运行在没有出边的目标 *PA* 状态处终止），无限运行使我们能够将框架扩展到线性时序逻辑的一个片段，例如其中目标 *PA* 状态总是最终会到达；更多细节请参见注释 *V.3*。

例 IV.2. 考虑图 *7* 顶部所示的 *PA*，它对应于一个单一输出系统，该系统具有来自例 *IV.1* 的三个运动基元 $M = \{\mathscr{H}, \mathscr{F}, \mathscr{B}\}$，这些运动基元定义在三个盒 $L_{\text{OTS}} = \{l_j \mid j = 1,2,3\}$ 上。假设对所有 $e \in E_{\text{PA}}$，$D_{\text{PA}}(e) = 1$，并且对所有 $q \in Q_{\text{PA}}$，$H_{\text{PA}} = 0$。

首先考虑可行控制策略 $c_1 \in \mathcal{C}$ 及其控制赋值：$c_1(q_1, 1) = \mathscr{F}$、$c_1(q_3, 1) = \mathscr{B}$、$c_1(q_5, -1) = \mathscr{F}$，以及 $c_1(q_7, -1) = \mathscr{B}$。图 *7* 的左下方展示了该控制策略如何修剪掉 *PA* 中可能的边。现假设 Q^f *PA* $= \{q_7\}$。选取初始条件 $q_1 \in Q_{\text{PA}}$，并在不包含终止于具有出边的 *PA* 状态的有限运行这一假设下，我们可以看到 $\Pi_{c_1}(q_1)$ 仅由单一无限运行 $\pi = q_1 q_3 q_7 q_5 q_1 \dots$ 组成。尽管该运行是无限的，$\pi \in \Pi_{c_1}^f(q_1)$、$r_\pi = 2$ 以及 $J(q_1, c_1) = 2$。类似地，我们计算 $J(q_5, c_1) = 3$、$J(q_3, c_1) = 1$、$J(q_7, c_1) = 0$，以及 $J(q_2, c_1) = J(q_4, c_1) = J(q_6, c_1) = \infty$。相比之下，图 *7* 右下方所示的可行控制策略 $c_2 \in \mathcal{C}$ 仅包含有限运行。◁

接下来我们将值函数 $V: Q_{\text{PA}} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$V(q) := \min_{c \in \mathcal{C}} J(q,c).$$

值函数满足动态规划原理

（DPP），该原理考虑了 $\mathcal{A}_{\text{PA}}$ 的非确定性；参见 [5]，其中证明了一个略有不同的结果。证明见附录。

定理 IV.1. 考虑 $q \in Q_{\text{PA}} \setminus Q^{f}{}_{\text{PA}}$ 并假设 $|\Sigma_{\text{PA}}(q)| > 0$。那么 V 满足

$$V(q) = \min_{c(q)\in\mathcal{M}(q)} \left\{ \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)} \{D_{\text{PA}}(e) + V(q')\} \right\} \quad (3)$$

$$= \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)} \left\{ \min_{\bar{m}\in\mathcal{M}(q,\bar{\sigma})} \{D_{\text{PA}}(\bar{e}) + V(\bar{q})\} \right\}, \quad (4)$$

其中 $q' = (l', c(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$，$e = (q,\sigma,q') \in E_{\text{PA}}$，$\bar{q} = (l,\bar{m}) \in Q_{\text{PA}}$，以及 $\bar{e} = (q,\sigma,\bar{q}) \in E_{\text{PA}}$。

注意，对于所有满足 $|\Sigma_{\text{PA}}(q)| = 0, V(q) = \infty$ 的 $q \in Q_{\text{PA}} \setminus Q^{f}{}_{\text{PA}}$（因为不存在通往目标的路径）。此外，对于所有 $q \in Q^{f}{}_{\text{PA}}$，$V(q) = H_{\text{PA}}(q)$。

注释 *IV.5.* 在定理 *IV.1* 的 *(3)* 中，说明了可以利用 $\mathcal{M}(q)$ 的局部信息，而非利用全部 $\mathcal{C}$，来计算 $V(q)$。在 *(4)* 中，进一步表明，对于每个 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$，仅利用 $\mathcal{M}(q,\sigma)$ 即可计算 $V(q)$。*(4)* 的优势在比较最小化所涉及的集合基数时便显而易见。给定 $q \in Q_{\text{PA}}$，令 $\Sigma_{\text{PA}}(q) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$。在 *(3)* 中，最小化是在 $\mathcal{M}(q)$ 上进行的，因此最小化集合的基数为 $\prod_{i=1}^{k} |\mathcal{M}(q,\sigma_k)|$。在 *(4)* 中，对于每个 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$，最小化是在 $\mathcal{M}(q,\sigma)$ 上进行的，因此该集合的基数为 $|\mathcal{M}(q,\sigma)|$。虽然 *(3)* 和 *(4)* 都可用于计算 $V(q)$，但通常 *(4)* 的计算效率更高。

推论 IV.1. 考虑控制策略 c^*，使得对所有 $q \in Q_{\text{PA}}$，以及 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$

$$c^*(q,\sigma) \in \operatorname*{argmin}_{m'\in\mathcal{M}(q,\sigma)} \{D_{\text{PA}}(e) + V(q')\},$$

其中 $q' = (l', m')$，且 $e = (q,\sigma,q')$。则 c^* 是一个最优控制策略，使得对所有 $q \in Q_{\text{PA}}$，$V(q) = J(q, c^*)$。

图 8 展示了图 3 中场景的一种可能控制策略。由于存在两个输出，我们在每个输出中使用例 IV.1 中的运动原语；形式化细节见第 VI 节。该控制策略是手工计算的。请注意，从同一乘积状态出发，根据所到达的面，可能采取不同的路线，但最终该控制策略确保所有路径都通向目标。

V. 主要结果

本节将介绍关于问题 III.1 的主要解法结果。最终结果结合了高层控制策略的概念，以及在低层执行正确连续时间行为的反馈控制器。首先，根据到达-避开目标（见备注 IV.4(iii)），我们假设存在能够使给定盒内轨迹稳定的运动基元，即存在 $m \in M$，使得 $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \emptyset$。我们将最终

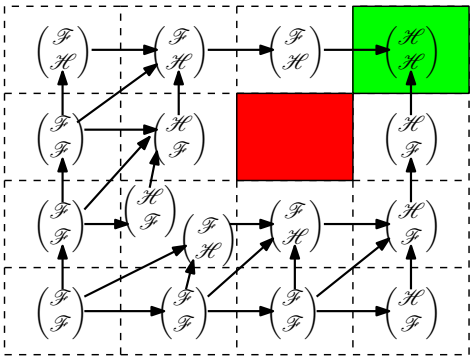


图 8. 本图展示了图 3 所示场景的一种离散控制策略。

乘积自动机终态限制为配备此类运动基元的目标 OTS 状态

$$Q^{f}_{\text{PA}} = \{(l,m) \in L^{g}_{\text{OTS}} \times M \mid \Sigma_{\text{MA}}(m) = \emptyset\}. \quad (5)$$

现在，假设我们有一个通过定理 IV.1 推导得到的可容许控制策略 $c \in \mathcal{C}$，或以其他方式得到的可容许控制策略 $c \in \mathcal{C}$，且具有上述的 $Q^{f}{}_{\text{PA}}$。我们给出问题 III.1 的完整解，包括初始条件集 $\mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n$、反馈控制 $u(x)$，以及关于运动基元的条件，从而满足问题 III.1 的可达-避障规范。

首先，我们定义初始条件集 $\mathcal{X}_0$。可行初始 PA 状态的集合为

$$Q^{0}_{\text{PA}} := \{q \in Q_{\text{PA}} \mid \Pi_c(q) = \Pi^{f}_{c}(q)\}. \quad (6)$$

也就是说，可行初始 PA 状态满足：从该 PA 状态出发的每个运行（由控制策略诱导）最终都会到达某个目标 PA 状态。

现在考虑一个状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。如果存在某个 $(l_j, m) \in Q^{0}{}_{\text{PA}}$，使得该状态既属于盒 Y_j，也属于 m 的不变集，那么它就可以用作系统的初始状态。回顾一下，对于所有 $y \in \mathbb{R}^p$ 和 $j \in \{1, \ldots, n_L\}$，$y \in Y^*$ 当且仅当 $y + d \circ l_j \in Y_j$。基于此，我们将初始状态集定义为：

$$\mathcal{X}_0 = \bigcup_{(l_j,m)\in Q^{0}_{\text{PA}}} \{x + h_o^{-1}(d \circ l_j) \mid x \in I_{\text{MA}}(m)\}. \quad (7)$$

接下来，我们给出用于求解问题 III.1 的反馈控制器。考虑任意 $q = (l_j, m) \in Q^{0}{}_{\text{PA}}$。然后，对于所有满足 $x - h_o^{-1}(d \circ l_j) \in I_{\text{MA}}(m)$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$，我们定义反馈

$$u(x,q) := u_m(x - h_o^{-1}(d \circ l_j)). \quad (8)$$

这定义了一族由 $\mathcal{X}_0$、(1) 的状态以及 PA 状态 $q = (l_j, m)$ 参数化的反馈控制器。这些反馈与控制策略 $c \in \mathcal{C}$ 协同工作，后者有效地确定下一个可行的 PA 状态 $q' \in Q^{0}{}_{\text{PA}}$。例如，假设 $q = (l_j, m) \in Q^{0}{}_{\text{PA}}$，并假设测得标签 $\sigma \in \Sigma$。该事件对应于 $x \in g_e$，对于 $e = (m, \sigma, c(q,\sigma)) \in E_{\text{MA}}$。令 $m' := c(q,\sigma)$，并令 $l' \in L_{\text{OTS}}$ 为 OTS 的唯一位置，使得 $(l,\sigma,l') \in E_{\text{OTS}}$。则下一个 PA 状态为 $q' = (l', m') \in Q^{0}{}_{\text{PA}}$

并且在下一个位置 $l' \in L_{\text{OTS}}$ 中应用的控制器为 $u_{m'}(\cdot)$。

本文的主要结果如下。

定理 V.1. 考虑满足假设 *III.1* 的系统 (1) 、非空可行集 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$以及目标集$\mathcal{G} \subset \mathcal{P}$。令 d 为盒子长度向量，且目标索引 I^g 非空。考虑与之关联的 *OTS* $\mathcal{A}_{\text{OTS}}$、满足假设 *IV.1* 的混合自动机 $\mathcal{H}_{\text{MA}}$ 、具有 $Q^f{}_{\text{PA}}$ 的 *PA* $\mathcal{A}_{\text{PA}}$ （如(5)所示），以及一个可容许控制策略 $c \in \mathcal{C}$。则(7) 中给出的初始条件集 $\mathcal{X}_0$ 和反馈控制器(8)解决了问题 *III.1*。

本节余下部分将证明定理 V.1。下面概述这些结果的证明思路。低层正确性的验证分为两个步骤，现分别说明。首先，我们在引理 V.1 中证明混合自动机是非阻塞的。关键要求总结于假设 IV.1。非阻塞条件确保混合自动机轨迹随时间持续演化，并始终处于不变区域内。我们还提出了避免抖振的条件，即避免两个离散跃迁紧接着连续发生。虽然物理系统不会在有限时间内发生无限次切换，但如果我们的模型预测偏离现实，就没有依据声称问题 III.1 确实得到了解决。其次，在引理 V.2 中，我们证明：对于系统 (1) 在反馈控制器 (8) 和控制策略 $c \in \mathcal{C}$作用下的每条闭环轨迹，都可以关联到一个唯一的混合自动机执行（定义如下）和 PA 运行。

我们首先描述混合自动机的语义。这些定义是标准的；参见 [21]。混合自动机的状态 是一个对 (m, x)，其中 $m \in M$ 且 $x \in \mathbb{R}^n$。混合自动机的轨迹称为执行 ，并定义在混合时间域上，这些混合时间域标识混合系统的轨迹处于固定运动基元 $m \in M$ 时的时间区间。精确地说，混合自动机的混合时间域 是区间 $\tau = \{\mathcal{I}_0, \ldots, \mathcal{I}_{n_\tau}\}$ 的有限或无限序列，使得

(i) $\mathcal{I}_i = [\tau_i, \tau_i']$，对所有 $0 \le i < n_\tau$，(ii) 若 $n_\tau < \infty$，则要么 $\mathcal{I}_{n_\tau} = [\tau_{n_\tau}, \tau'_{n_\tau}]$要么 $I_{n_\tau} = [\tau_{n_\tau}, \tau'_{n_\tau})$，(iii) $\tau_i \le \tau_i' = \tau_{i+1}$，对所有 $0 \le i < n_\tau$。

定义 V.1。混合自动机的执行 是一个集合 $\chi = (\tau, m(\cdot)\ \phi_{\text{MA}}(\cdot, x_0))$，满足

(i) 执行的初始条件满足：$(m(0)\ x_0) \in Q^0$ 混合自动机。*(ii)* 执行的连续演化满足：对于所有 $i \in \{0, \ldots, n_\tau\}$，若 $\tau_i < \tau_i'$，则对于所有$t \in [\tau_i, \tau_i']$，$m(\cdot)$ 为常数，且 $\frac{d}{dt}\phi_{\text{MA}}(t, x_0) = f(\phi_{\text{MA}}(t, x_0)\, u_{m(t)}(\phi_{\text{MA}}(t, x_0)))$；而对于所有 $t \in [\tau_i, \tau_i')$，$\phi_{\text{MA}}(t, x_0) \in I_{\text{MA}}(m(t))$。*(iii)* 执行的离散跃迁满足：对于所有 $i \in \{0, \ldots, n_\tau - 1\}$，存在 $\sigma_i \in \Sigma_{\text{MA}}(m(\tau_i'))$，使得 $(m(\tau_i')\ \sigma_i, m(\tau_{i+1})) =: e_i \in E_{\text{MA}}$，$\phi_{\text{MA}}(\tau_i', x_0) \in g_{e_i}$，且 $\phi_{\text{MA}}(\tau_{i+1}, x_0) = r_{e_i}(\phi_{\text{MA}}(\tau_i', x_0))$。

给定一个执行 $\chi = (\tau,\ m(\cdot)\ \phi_{\text{MA}}(\cdot,\ x_0))$，我们将与之关联的混合自动机的输出轨迹定义为 $y_{\text{MA}}(\cdot,\ x_0) := h(\phi_{\text{MA}}(\cdot,\ x_0))$（下标 MA 用于避免与物理系统 (1) 的输出轨迹 $y(\cdot,\ x_0)$ 混淆，后者不会发生重置）。执行 χ 的执行时间定义为 $\mathscr{T}(\chi) := \sum_{i=0}^{n_\tau}(\tau_i' - \tau_i) = \lim_{i \to n_\tau} \tau_i'$。如果一个执行是以紧时间区间结束的有限序列，则称其为有限。如果 τ 是无限序列，或者 $\mathscr{T}(\chi) = \infty$，则称该执行为无限。最后，如果一个执行是无限的，但 $\mathscr{T}(\chi) < \infty$，则称其为*Zeno* 。

注释 V.1. *Zeno*行为有两种类型。一种类型称为抖振，其中转移是瞬时的。第二种更微妙的类型是，*MA*的离散跃迁之间的时间趋于零，但这些跃迁并非瞬时的。假设 *IV.1 (i)* 和 *(iv)* 确保不会发生抖振。在*MA*由并行组合构成的情况下，识别转移时间收敛的真正*Zeno*行为更加困难。幸运的是，对于我们的到达-避开目标，所诱导的*MA*执行不可能是*Zeno*的，因为根据构造，转移次数有限，见引理 *V.2*。

定义 V.2.若对于所有$(m(0)\ x_0) \in Q^0{}_{\text{混合自动机}}$，具有初始条件$(m(0)\ x_0)$ 的混合自动机的所有无限执行构成的集合非空，则该混合自动机是非阻塞 的。

引理 V.1. 在假设 *IV.1* 下，该混合自动机是非阻塞的。

证明。 设 $(m, x) \in Q^0{}_{\text{混合自动机}}$。 若 $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \emptyset$，则根据假设 IV.1 (vi)， $I_{\text{MA}}(m)$ 是不变集，因此从 (m, x) 出发的轨迹 $\phi_{\text{MA}}(t, x)$ 在所有未来时刻都保持在 $I_{\text{MA}}(m)$ 内。因此，显然，对于该初始条件，混合自动机是非阻塞的。若 $\Sigma_{\text{MA}}(m) \neq \emptyset$，则根据假设 IV.1 (vii)，$\phi_{\text{MA}}(t, x)$ 会保持在 $I_{\text{MA}}(m)$ 内，直至到达守卫集。此外，根据假设 IV.1 (v)，该轨迹经重置映射后进入下一个不变集。由[21], 的引理 1 可知，对于该初始条件，混合自动机仍然是非阻塞的。总之，混合自动机是非阻塞的。

□

假设IV.1旨在保证低层连续时间行为与高层离散计划之间的一致性。这种一致性通过无限 MA 执行与有限 PA 运行之间的一一对应关系来形式化，且二者均从相同的初始条件出发。证明见附录。

引理 V.2. 假设我们有一个可容许控制策略$c \in \mathcal{C}$，以及一个满足假设 *IV.1* 的混合自动机。对于每个 $(l^0, m^0) \in Q^0{}_{\text{PA}}$ 和 $x_0 \in I_{\text{MA}}(m^0)$ ，都存在唯一的无限 *MA*执行 $\chi = (\tau, m(\cdot)\ \phi_{\text{MA}}(\cdot, x_0))$ 以及唯一的有限 *PA* 运行 $\pi = q^0 q^1 \ldots q^N$。

在证明定理 V.1 之前，我们还需要一个初步结果来说明，由于假设 III.1 具有平移不变性，MA执行的连续部分与系统 (1) 的闭环轨迹唯一对应。证明很直接，故略去。

引理 V.3。 令 $m \in M$, $x_0 \in I_{\text{MA}}(m)$、$y \in \mathbb{R}^p$ 和 $\tilde{x}_0 = x_0 + h_o^{-1}(y)$。考虑式 (1) 在反馈控制下的轨迹 $\phi(t, \tilde{x}_0)$，其中

反馈控制 $u(x) = u_m(x - h_o^{-1}(y))$。另考虑采用反馈控制 $u_m(x)$ 的混合自动机轨迹 $\phi_{\text{MA}}(t, x_0)$ 。对于所有满足 $\phi_{\text{MA}}(t, x_0) \in I_{\text{MA}}(m)$ 的 $t \geq 0$,

$$\phi(t, \tilde{x}_0) = \phi_{\text{MA}}(t, x_0) + h_o^{-1}(y).$$

最后，我们可以证明定理 V.1 了。

定理 *V.1* 的证明。 我们必须证明：(i) 系统 (1) 的输出轨迹始终处于 $\mathcal{P}$ 内；(ii) 输出轨迹最终会到达并始终处于目标集$\mathcal{G}$ 内。令 $\tilde{x}_0 \in \mathcal{X}_0$。任取满足$x_0 := \tilde{x}_0 - h_o^{-1}(d \circ l_{j^0}) \in I_{\text{MA}}(m^0)$ 的 $(l_{j^0}, m^0) \in Q^0{}_{\text{PA}}$ 。根据引理 V.2，我们可以将唯一的 MA 执行 χ 和唯一的 PA 运行π 与 $(l_{j^0}, m^0) \in Q^0{}_{\text{PA}}$ 及 $x_0 \in I_{\text{MA}}(m^0)$ 相关联。将混合时间域记为 $\tau = \{\mathcal{I}_0, \ldots, \mathcal{I}_N\}$，其中 $\mathcal{I}_k = [\tau_k, \tau'_k]$ 对应于 $k = 0, \ldots, N-1$（其中 $\tau_0 = 0$）以及 $\mathcal{I}_N = [\tau_N, \infty)$。最后一个区间根据 $(l_{j^N}, m^N) \in Q^f{}_{\text{PA}}$(5) 的定义得出，因为 $\Sigma_{\text{MA}}(m^N) = \emptyset$，因此假设 IV.1 (vi) 意味着必有 $\mathcal{I}_N = [\tau_N, \infty)$。与引理 V.2 的证明中一样，将相应的事件序列记为$\sigma^0 \cdots \sigma^{N-1}$。

利用引理 V.3 和 $y = d \circ l_{j^0}$，我们有 $\phi(t, \tilde{x}_0) = \phi_{\text{MA}}(t, x_0) + h_o^{-1}(d \circ l_{j^0})$。我们声称，对于所有 $k = 0, \ldots, N$ 和 $t \in \mathcal{I}_k$，

$$\phi(t, \tilde{x}_0) = \phi_{\text{MA}}(t, x_0) + h_o^{-1}(d \circ l_{j^k}). \tag{9}$$

显然，对于 $k = 0$，结论成立。

我们推导出两个事实，以帮助证明这一断言。回顾一下，根据 OTS边的定义，对于所有 $k = 0, \ldots, N-1$，$\sigma^k = l_{j^{k+1}} - l_{j^k}$，结论成立。此外，通过重新排列、逐分量乘以 d，并取逆像h_o^{-1}，得到第一个事实：对于所有 $k = 0, \ldots, N-1$，满足$h_o^{-1}(d \circ l_{j^{k+1}}) = h_o^{-1}(d \circ l_{j^k}) + h_o^{-1}(d \circ \sigma^k)$。同样，根据重置映射和 MA执行的定义，我们得到第二个事实：对于所有 $k = 0, \ldots, N-1$，$r_{e^k}(\phi_{\text{MA}}(\tau'_k, x_0)) = \phi_{\text{MA}}(\tau'_k, x_0) - h_o^{-1}(d \circ \sigma^k) = \phi_{\text{MA}}(\tau_{k+1}, x_0)$。

回到 (9)，根据归纳法，我们假设它对$0 \leq k < N$成立，并证明它对 $k+1$成立。利用上述事实以及在 k 处的 (9)，取 $t = \tau'_k = \tau_{k+1}$ 可得

$$\begin{aligned}\phi(\tau_{k+1}, \tilde{x}_0) &= \phi(\tau'_k, \tilde{x}_0) = \phi_{\text{MA}}(\tau'_k, x_0) + h_o^{-1}(d \circ l_{j^k}) \\ &= (\phi_{\text{MA}}(\tau_{k+1}, x_0) + h_o^{-1}(d \circ \sigma^k)) + h_o^{-1}(d \circ l_{j^k}) \\ &= \phi_{\text{MA}}(\tau_{k+1}, x_0) + h_o^{-1}(d \circ l_{j^{k+1}}).\end{aligned}$$

在新的初始条件 $\phi_{\text{MA}}(\tau_{k+1}, x_0) \in I_{\text{MA}}(m^{k+1})$ 下，应用引理 V.3，其中 $y = h_o^{-1}(d \circ l_{j^{k+1}})$，可得对于 $k+1$ 以及所有满足 (9) 的 $t \in \mathcal{I}_{k+1}$，结论成立。当 $k+1 = N$时，归纳结束，命题得证。

利用 (9) 并投影到输出空间，我们得出，对于所有 $k = 0, \ldots, N$和 $t \in \mathcal{I}_k$，$y(t, \tilde{x}_0) \in Y_{j^k}$。由于根据构造，所有盒都包含在 $\mathcal{P}$ 中，因此对于所有$t \geq 0$ ，我们都有 (i)。此外，由于 $l_{j^N} \in L^g{}_{\text{OTS}}$ 意味着目标盒 Y_{j^N} 包含在 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{I}_N = [\tau_N, \infty)$ 中，因此我们有 (ii)。 □

注释 V.2。 上述结果不依赖于可容许控制策略 $c \in \mathcal{C}$的构造方法，也不要求控制策略是最优的。这使得我们可以在 *PA* 上采用不同的路径规划技术，正如第 *VIII-B* 节所示。

注释 *V.3.* 将其扩展到一系列到达-避障问题非常直接，可遵循 *[33]*中的思路。首先，将问题 *III.1* 的到达性质 *(ii)* 放宽为$y(T, x_0) \in \mathcal{G}$。接下来，假设存在有限序列的目标 $L^{g,i}$ *OTS*，$i = 1, \ldots, n_g > 1$。与 *(5)* 不同，我们将乘积自动机终态设为 $Q^{f,i}$ *PA* $= \{(l, m) \in L^{g,i}$ *OTS* $\times M \mid \Sigma_{\text{MA}}(m) \neq \emptyset\}$ *for* $i = 1, \ldots, n_g - 1$。最后，必须设计控制策略 c_i 及其对应的初始条件 $Q^{0,i}$ *PA (6)*，使得 $Q^{f,i}$ *PA* $\subset Q^{0,i+1}$ *PA for* $i = 1, \ldots, n_g - 1$。对于 $i = n_g$，可以要求解保持在不变集中，或返回连接至第一个目标。

VI. 运动原语的并行组合

运动原语

本节介绍两个机动自动机的并行组合操作。通过反复应用这一操作，可以从简单的低维原子运动基元出发，构造更复杂的高维混合自动机，例如第五节所述的那些原子运动基元。关键挑战在于：如果组成两个混合自动机的各自满足假设IV.1，则必须确保并行组合后得到的混合自动机也满足假设IV.1。定理 VI.1 证明了这一点。首先，我们给出一些预备定义并统一记号，随后正式定义混合自动机的并行组合。

我们考虑两个独立系统

$$\dot{x}^j = f^j(x^j, u^j), \quad y^j = h^j(x^j), \tag{10}$$

其中 $x^j \in \mathbb{R}^{n^j}$、$u^j \in \mathbb{R}^{\mu^j}$ 和 $y^j \in \mathbb{R}^{p^j}$ 分别对应 $j = 1$、2。我们使用上标来标识不同的子系统。假设每个系统都满足假设 III.1。也就是说，对于 $j = 1$、2，

$y_i^j = x_i^j \ \ i = 1 \ \ldots \ p^j \qquad j = 1 \ 2$ 、。每个系统 、都对应一个混合自动机

$$\mathcal{H}^j_{\text{MA}} = (Q^j_{\text{MA}}, \Sigma^j, E^j_{\text{MA}}, X^j_{\text{MA}}, I^j_{\text{MA}}, G^j_{\text{MA}}, R^j_{\text{MA}}, Q^{0,j}_{\text{MA}}). \tag{11}$$

我们还假设 $\mathcal{H}^1$ 混合自动机 和 $\mathcal{H}^2$ 混合自动机 满足假设 IV.1。将相应输出空间中的规范盒分别记为 Y^*，$_j = \prod_{i=1}^{p^j}[0, d_i^j]$。为 Y^*，$_j$的各个面标记的事件集为 $\Sigma^j = \{-1, 0, 1\}^{p^j}$。空串记为 $\varepsilon^j := (0, \ldots, 0) \in \Sigma^j$，$j = 1, 2$，而空串记为 $\varepsilon := (\varepsilon^1, \varepsilon^2)$。其他集合也采用类似记法，并用上标标识系统，例如可能事件 Σ^j 混合自动机(m^j) 对于 $m^j \in M^j$ 以及输出索引 o^j。对于并行组合中我们还需要一些额外的符号表示。首先，对于 $j = 1$，2 以及每个 $m^j \in M^j$，定义不变集集合减去所有守卫集

$$I^j(m^j) := I^j_{\text{MA}}(m^j) \setminus \left(\bigcup_{e^j = (m^j, \sigma^j, m_2^j) \in E^j_{\text{MA}}} g_{e^j} \right). \tag{12}$$

接下来，我们需要三个集合：一个包含带空串的转移的边的增广集合、一个运动基元 $m \in M^j$的可能事件的增广集合，以及一个

下一可行运动基元的增广集合。也就是说，对于$j = 1,2$，我们定义

$$\begin{aligned}\overline{E}^j_{\text{MA}} &:= E^j_{\text{MA}} \cup \big\{(m^j, \varepsilon^j, m^j_2) \mid m^j, m^j_2 \in M^j,\\ &\quad I^j(m^j) \subset I^j_{\text{MA}}(m^j_2),\\ &\quad (\forall e^j_2 = (m^j_2, \sigma^j_2, m^j_3) \in E^j_{\text{MA}})\\ &\quad I^j(m^j) \cap g_{e^j_2} = \emptyset\big\}\\ \overline{\Sigma}^j_{\text{MA}}(m^j) &:= \Sigma^j_{\text{MA}}(m) \cup \{\varepsilon^j\}, \qquad m^j \in M^j\\ \overline{M}^j(m^j, \sigma^j) &:= \{m^j_2 \in M^j \mid (m^j, \sigma^j, m^j_2) \in \overline{E}^j_{\text{MA}}\},\\ &\qquad m^j \in M^j, \sigma^j \in \overline{\Sigma}^j_{\text{MA}}(m^j).\end{aligned}$$

我们还定义这些集合的笛卡尔积:

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}_{\text{MA}}(m) &:= \overline{\Sigma}^1_{\text{MA}}(m^1) \times \overline{\Sigma}^2_{\text{MA}}(m^2),\\ &\qquad m = (m^1, m^2) \in M,\\ \overline{M}(m, \sigma) &:= \overline{M}^1(m^1, \sigma^1) \times \overline{M}^2(m^2, \sigma^2),\\ &\quad m = (m^1, m^2) \in M,\\ &\quad \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \overline{\Sigma}_{\text{MA}}(m).\end{aligned}$$

最后，并行组合输出空间中的规范盒为 $Y^* = Y^{*,1} \times Y^{*,2}$。现在我们可以定义两个混合自动机的并行组合。

定义 VI.1。考虑两个混合自动机 $\mathcal{H}^1$ 混合自动机和 $\mathcal{H}^2$ 混合自动机，它们各自均满足假设 *IV.1*。并行组合 $\mathcal{H}^1$ 混合自动机 $\|$ $\mathcal{H}^2$ 混合自动机为 $\mathcal{H}_{\text{MA}} = (Q_{\text{MA}}, \Sigma, E_{\text{MA}}, X_{\text{MA}}, I_{\text{MA}}, G_{\text{MA}}, R_{\text{MA}}, Q^0$ 混合自动机$)$，其中

状态空间 $Q_{\text{MA}} = M \times \mathbb{R}^n$ 满足 $M = M^1 \times M^2$ 和 $n = n^1 + n^2$。

标签 $\Sigma = \Sigma^1 \times \Sigma^2 = \{-1, 0, 1\}^p$ 满足 $p = p^1 + p^2$。

边 $E_{\text{MA}} \subset M \times \Sigma \times M$，其中 $e = (m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$ 若 $\sigma \neq \varepsilon$，$\sigma \in \Sigma_{\text{MA}}(m)$，且 $m' \in M(m, \sigma)$。注意，对于所有 $m \in M$, $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \Sigma_{\text{MA}}(m) \setminus \{\varepsilon\}$。

向量场 对于所有 $m = (m^1, m^2) \in M$, $X_{\text{MA}}(m) = \ddot{\imath} f^1(x^1, u_{m^1}(x^1))\ f^2(x^2, u_{m^2}(x^2))\grave{o}$。状态为 $x := (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^n$，控制输入为 $u := (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^\mu$ 其中 $\mu = \mu^1 + \mu^2$，输出为 $y := (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^p$。输出映射为 $h(x) = \ddot{\imath} h^1(x^1)\ h^2(x^2)\ \grave{o}$，其中对于 $i = 1, \ldots, p^1$, $o(i) = o^1(i)$，对于 $i = p^1 + 1, \ldots, p$, $o(i) = n^1 + o^2(i - p^1)$。

不变集 对于所有 $m = (m^1, m^2) \in M$, $I_{\text{MA}}(m) = I^1$ 混合自动机$(m^1) \times I^2$ 混合自动机(m^2)。

启用与重置条件 考虑一条边 $e = (m_1, \sigma, m_2) \in E_{\text{MA}}$，其中 $m_1 = (m^1_1, m^2_1) \in M$, $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \Sigma_{\text{MA}}(m)$, $m_2 = (m^1_2, m^2_2) \in M(m_1, \sigma)$，并且 $e^j = (m^j_1, \sigma^j, m^j_2) \in E^j MA(m^j_1)$ 且 $\sigma^j = \varepsilon^j$，则我们定义

$$g_{e^j} := I^j(m^j_1), \quad r_{e^j}(x^j) := x^j.$$

否则，若 $\sigma^j \in \Sigma^j$ 混合自动机(m^j_1)，则有 $g_{e^j} = G^j$ 混合自动机(e^j) 和 $r_{e^j} = R^j$ 混合自动机(e^j)，它们分别对应于 $\mathcal{H}^j$ 混合自动机中的定义。

Finally, we define $g_e = g_{e^1} \times g_{e^2}$ *and* $r_e(x) = \begin{bmatrix} r_{e^1}(x^1) \\ r_{e^2}(x^2) \end{bmatrix}$.

初始条件 Q^0 混合自动机 $\subset Q_{\text{MA}}$ 是由 Q^0 混合自动机 $= \{(m, x) \mid (m^j, x^j) \in Q^{0,j}$ 混合自动机 $i = 1, 2\}$给出的初始条件集合。 ◁

首先注意，对于每个 $\mathcal{H}^j$ MA 和每个 $m^j \in M^j$, E^j MA 的定义会自动包含自环边 $(m, \varepsilon^j, m) \in E^j$ MA。我们将此类转移与 ε^j 一并纳入，以便正确构造并行组合。例如，假设第一个系统穿过了 Y^*,1 的一个真面，但第二个系统没有穿过 Y^*,2 的任何真面。为正确处理这类可能性，组合后的混合自动机的整体转移必须通过空串 ε^2记录在 Y^*,2 中未发生穿越。其次，注意到我们允许使用带有 ε^j 的额外边，以允许在同一个盒 $Y^{*,j}$ 上切换到不同的运动基元，前提是不变集存在重叠且未立即映射到守卫集；从 E^j MA 的定义中可以看到这一点。参见图 8，一条诸如 $((\mathscr{F}, \mathscr{H}), (1, 0), (\mathscr{H}, \mathscr{F})) \in E_{\text{MA}}$ 的边由 $(\mathscr{F}, 1, \mathscr{H}) \in E^1$ MA 和 $(\mathscr{H}, 0, \mathscr{F}) \in E^2$ MA 构成，编码了从右向上的转弯。

主要结果现已陈述；证明见附录。

定理 VI.1. 给定 $\mathcal{H}^1$ 混合自动机和 $\mathcal{H}^2$ 混合自动机，这两个混合自动机均满足假设 *IV.1*。上述并行组合 $\mathcal{H}_{\text{MA}} = \mathcal{H}^1$ 混合自动机 $\|$ $\mathcal{H}^2$ 混合自动机是一个同样满足假设 *IV.1* 的混合自动机。

注记 VI.1. 我们将事件集定义为 $\Sigma = \Sigma^1 \times \Sigma^2$，但通常的自动机并行组合会有$\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$ *[34]*。鉴于事件集被解释为穿过 Y^*各面的事件，笛卡尔积是更自然的选择。

VII. 积分器系统的运动基元

本节将详细介绍由例 IV.1 中提出的三个运动基元——保持（$\mathscr{H}$）、前进（$\mathscr{F}$）和后退（$\mathscr{B}$）——构成的混合自动机。由于底层双积分器系统满足假设 III.1，这种设计能够在 MA 形式体系中简洁地表达。通过利用第 VI 节中的并行组合构造，我们在第 VIII 节的多机器人系统背景下展示了该混合自动机的实用性。

假设该非线性控制系统为双积分器系统:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad y = x_1, \tag{13}$$

其中 $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $u_2 \in \mathbb{R}$, 输出 y 为位置。每个运动基元的不变区域都是状态空间中的一个多面体集合，由顶点 v^k_2, $k \in \{1, \ldots, 6\}$ 的凸包定义；见图 5。顶点由线段长度 $d > 0$ 和预先指定的最大控制值 $u^*_2 > 0$ 决定。令 $\bar{u}_1 := \sqrt{d u^*_2}$。顶点为 $v^1_2 = (0, -\bar{u}_1)$、$v^2_2 = (0, 0)$、$v^3_2 = (0, \bar{u}_1)$、$v^4_2 = (d, -\bar{u}_1)$、$v^5_2 = (d, 0)$ 和 $v^6_2 = (d, \bar{u}_1)$。对于每个

运动基元 $m \in M := \{\mathscr{H}, \mathscr{F}, \mathscr{B}\}$，我们定义一个仿射反馈

$$u_m(x) = K_m x + g_m \,. \tag{14}$$

我们的具体选择为 $K_{\mathscr{H}} = \begin{bmatrix} -2u_2^*/d & -2u_2^*/\bar{u}_1 \end{bmatrix}$，$K_{\mathscr{F}} = K_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -2u_2^*/\bar{u}_1 \end{bmatrix}$ $g_{\mathscr{H}} = g_{\mathscr{F}} = u_2^*$ ，，以及$g_{\mathscr{B}} = -u_2^*$。这些控制器是利用可达控制理论 [4], [27] 得出的。首先，在多胞体的顶点处选择控制值，使轨迹保持在不变区域内（对于保持基元），或者使其从某个特定面离开多胞体，而不从其他面离开。具体而言，我们选择所有顶点处的控制值，其大小均为 u_2^*。然后，将顶点处的速度向量进行仿射延拓，从而在整个多胞体上得到仿射反馈，形成图 5 所示的向量场。

现在我们构建混合自动机。状态空间为 $Q_{\text{MA}} = M \times \mathbb{R}^2$。标签为 $\Sigma = \{-1, 0, 1\}$。边集合 E_{MA} 如图 4 所示。在并行组合的背景下，可以计算出增广边为

$$\overline{E}_{\text{MA}} = E_{\text{MA}} \cup \{(m, 0, m)\}_{m \in M} \cup \{(\mathscr{H}, 0, \mathscr{F}), (\mathscr{H}, 0, \mathscr{B})\}.$$

对于每个 $m \in M$，闭环向量场由 $[X_{\text{MA}}(m)](x) = (x_2, u_m(x))$ 给出，它们显然是全局利普希茨的。不变集由顶点的凸包给出，如图 5 所示，并排除两个点 (0, 0) 和 $(d, 0)$，因此不变集显然是有界的。例如，$I_{\text{MA}}(\mathscr{H}) = \text{co}\{v_2^k\}_{k=2}^5 \setminus \{(0, 0), (d, 0)\}$。使能条件通过取退出面顶点的凸包并再次排除 (0, 0) 或 $(d, 0)$ 来构造。具体而言，边 $(\mathscr{F}, 1, \mathscr{H})$、$(\mathscr{F}, 1, \mathscr{F}) \in E_{\text{MA}}$ 均具有守卫集 $g_e = \text{co}\{v_2^5, v_2^6\} \setminus \{(d, 0)\} = \{d\} \times (0, \bar{u}_1]$，如图 5 中 $\mathscr{F}$ 的不变区域上以绿色高亮所示，而 $(\mathscr{B}, -1, \mathscr{H})$、$(\mathscr{B}, -1, \mathscr{B}) \in E_{\text{MA}}$ 均具有守卫集 $g_e = \text{co}\{v_2^1, v_2^2\} \setminus \{(0, 0)\} = \{0\} \times [-\bar{u}_1, 0)$。重置条件按其定义构造。以下结果的证明见附录。

引理 VII.1。 双积分器混合自动机满足假设 *IV.1*。

注记 VII.1. 我们在注记 *V.1* 中指出，对于按构造仅涉及有限次*MA*执行的可达-避障规范，不会出现*Zeno*执行。然而，人们可能希望独立于其所用于的高层规划或控制规范，分析一个混合自动机本身是否为非*Zeno*。可以相当容易地验证，我们上文给出的 $p = 1$ 双积分器混合自动机设计是非*Zeno*的。当考虑由这些混合自动机并行组合而成的混合自动机，或考虑任意混合自动机时，情况要复杂得多。混合系统出现*Zeno*执行的一般条件已在 *[16], [36]*中得到研究。然而，在我们的背景下仍需进一步研究这一问题，因为现有结果并不适用于我们的混合自动机中可能出现的所有情形。

VIII. 四旋翼飞行器的应用

在本节中，我们将所提出的方法应用于一组四旋翼飞行器。我们首先说明如何将运动基元应用于该系统、如何规定到达-避障目标，以及整体求解流程。接下来，我们比较并对照三种用于计算控制策略的算法。然后，我们给出三种不同场景下的实验结果。最后，我们进行讨论。

A. 多架四旋翼飞行器的接口

标准四旋翼动力学模型有六个自由度，可用惯性线位置（x_w，y_w，z_w）和滚转-俯仰-偏航欧拉角（ϕ，θ，ψ）描述 [23], [25]。众所周知，该系统是微分平坦的，能够将四旋翼的完整状态和电机输入与平坦输出（x_w，y_w，z_w，ψ）及其导数联系起来 [23]。我们不指定位置参考轨迹，而是分别在（x_w，y_w，z_w）方向上使用第五节中的运动基元，根据线位置与速度状态的反馈计算线加速度。指定任意偏航参考后，微分平坦性会将这些线加速度映射为（ϕ，θ）角和飞行器总推力，再通过姿态跟踪控制器将其转换为电机输入[23]。尽管我们避免了在高维非线性模型上计算运动基元，但实验表明，使用我们提出的运动基元时，四旋翼在（x_w，y_w，z_w）方向上可较好地近似为双积分器。

我们考虑 N 架四旋翼飞行器之间的集中式到达-避障目标。必须为每辆车辆关联一个网格化三维工作空间的副本，从而产生总计 $p = 3N$ 个输出。通过将第七节中的单输出MA并行复合 p 次，可获得表示多车辆系统异步运动能力的 p 维MA。

为了指定到达-避开目标，我们必须在 $p = 3N$ 维度中识别障碍盒和目标盒。首先，我们假设每辆车辆的物理障碍物和目标已在物理三维网格上标记。输出空间中的障碍盒对应于以下任一情况：车辆占据物理障碍盒，或两辆及以上车辆同时占据同一个物理盒。为避免下洗气流的影响，我们不允许车辆同时占据仅在 z_w 方向上错开的盒。输出空间中的目标盒对应于各个车辆三维目标盒的所有组合。为简单起见，我们假设每辆车辆只有一个三维目标盒。

我们采用所提出的方法离线求解多飞行器到达-规避问题。运行时工作流程如图 9 所示。即使车辆数量众多且输出很多，每个运行时组件所需的计算量也微乎其微。

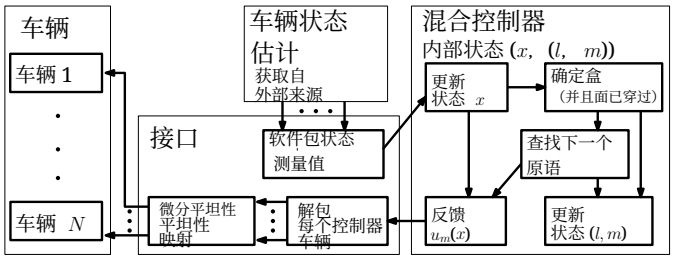


图9. 多个车辆与带有 $3N$ $p =$ 输出的框架之间的接口。混合控制器的内部状态由所有车辆的联合状态测量值构成，并包含当前（联合）盒 l以及当前（联合）运动基元 m。内部状态通过外部状态测量值（假定已给定）更新，并用于计算反馈控制。

B. 控制策略生成

我们重点介绍了在多飞行器到达-规避问题中生成控制策略的三种方案。针对每种方案，我们都提供了一些实现细节，并讨论其计算复杂度。随后，我们在实验中对这些方案进行比较。

1) 穷举非确定性 *Dijkstra*（*NDD*）：第一种策略遵循第四节提出的方法。我们重点介绍主要的实现步骤。首先，针对前文所述的相关输出空间障碍盒，计算 OTS 状态和边。其次，计算 p 个并行复合 MA 状态和边。第三，计算 PA 状态和边。第四，使用式（4）计算值函数 V。具体而言，将目标状态的值函数初始化为零，将其他位置初始化为无穷大，然后使用非确定性 Dijkstra（NDD）算法 [5], [33] 沿 PA 边向后传播。一旦计算出所有状态的值函数，即可使用推论 IV.1 计算最优控制策略 $c^\star$。初始 PA 状态（6）恰好对应于满足 $V(q) < \infty$ 的那些状态 $q \in Q_{\text{PA}}$。

随着输入 $p = 3N$ 数量的增加，计算复杂度呈指数增长。假设物理网格在 $(x_w,\ y_w,\ z_w)$ 个方向上分别包含 $(n_x,\ n_y,\ n_z)$ 个盒。由于存在 3^p 个运动基元，PA 状态的数量上界为 $|Q_{\text{PA}}| < (n_x n_y n_z)^N 3^p =: k_1$。一个 OTS 状态的边数上界为 $3^p - 1$（相邻方向），而一个 MA 状态的边数上界为 $(2^p - 1)3^p =: k_2$（相邻方向数乘以可能的下一运动基元数）。由于 MA 的相邻方向限制更严格，因此 PA 边数的上界为 $|E_{\text{PA}}| < k_1 k_2$。障碍物的存在可以大幅减少 PA 状态和边的数量。NDD 算法通常必须检查所有 PA 状态和边，才能计算值函数。因此，该算法是最优且完备的（相对于所选网格分辨率和运动基元能力而言）从而得到最大的初始条件集合 $\mathcal{X}_0$。

2) 确定性 *A**：在该策略中，我们做出两项简化假设，以牺牲控制策略的质量换取更高的计算效率。首先，我们取 p 次复合的混合自动机，并剔除能够实现同时运动的运动基元。其次，我们放弃计算最大可能的初始条件集合，转而假设为每辆车指定单个物理初始盒。因此，只需在 OTS 中计算一条由盒构成的单一路径，使其在 $p = 3N$ 维输出空间中连接初始盒与目标盒。从该路径可立即提取控制策略：为每个盒分配唯一的运动基元，使其通向路径上的下一个相邻盒。该路径采用标准 A* 算法 [19], 计算，从初始盒出发向外扩展，直至到达目标盒。（可采纳的）启发式函数选为曼哈顿距离，即从当前盒到目标盒沿每个输出方向的距离之和。

A* 必须探查的节点数受 OTS盒最大数量 $(n_x n_y n_z)^N$ 的限制，但其复杂度仍随机器人数量呈指数增长。剪枝后的MA包含 $2p + 1$ 个运动基元，分别对应单个输出分量中具有 $\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{B}$ 的情况，其他分量则为 $\mathscr{H}$，此外还包括运动基元 $(\mathscr{H},\ \ldots\ldots,\ \mathscr{H})$。因此，从当前盒出发，我们必须检查 $2p$ 个相邻方向，以选择可行方向，同时考虑越界和障碍物配置。在此实现中，OTS、MA 和 PA 更多是概念性构造，由于显式预计算的代价很高，因此无需进行预计算。最坏情况下，A* 算法可能会探查所有盒；因此，它还会生成一个控制策略，该策略相对于所选网格和剪枝后的MA运动能力是完备的。A* 生成的策略长度最短，但运行时执行可能耗时较长。

3）确定性贪心搜索：与上文 A* 一样，此策略也采用了两个简化假设，但在路径构建方式上有所不同。在贪心（最佳优先）搜索中， [19], 路径从输出空间中的初始盒开始构建，然后从当前盒向任何可行的相邻方向延伸，使其与目标盒之间的曼哈顿距离减小。贪心搜索通常能很快找到一条路径，但不一定是最优路径。此外，由于贪心搜索可能无法找到路径，因此它并不完备。

C. 实验结果

我们的实验平台是 Crazyflie 2.0，见图 1。我们使用 VICON 动作捕捉系统获取车辆的状态估计。我们的实现采用 Python 2.7.10 和 ROS Kinetic，计算则在一台配备 8 核 3.0 GHz Intel Xeon 处理器、15.4 GiB 内存的 64 位 Lenovo ThinkPad 上完成。我们展示了三个不同的场景，并在每个场景中考察三种策略生成方法。相关视频结果可在 http://tiny.cc/modular-3alg 查看。

1) 开放空间：第一个具有代表性的场景是在一个划分为 $7 \times 7 \times 2$ 网格的开放三维空间中，分布着少量柱状障碍物。左侧图

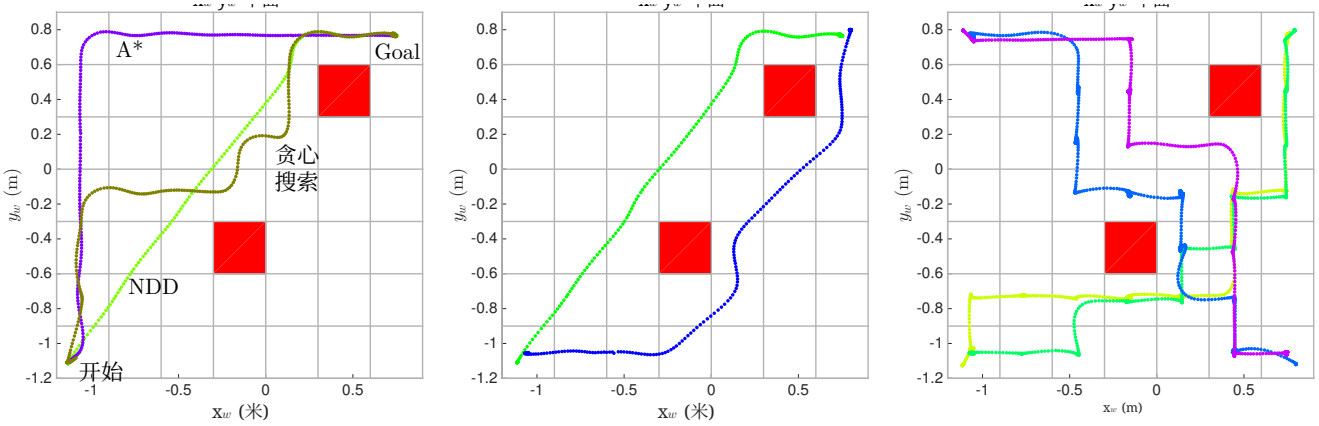


图 10. 开放场景的实验结果，投影到（x_w， y_w）平面上。所有图中，所有车辆都必须交换房间的角落。左图比较了单个车辆采用三种不同控制策略生成策略时的轨迹。中间图显示了两辆车采用非确定性 Dijkstra 算法时的轨迹。右图显示了四辆车采用贪心搜索时的轨迹，另见图10。尽管难以在图中呈现，这些机动动作是安全的，因为车辆的轨迹不会在同一时间占据相同的物理方格。

比较了单个车辆情况下，三种策略在（x_w， y_w）平面中生成的三维轨迹。NDD、A* 和贪心搜索的计算时间分别为 40.63 毫秒、1.59 毫秒和 0.27 毫秒。NDD 算法提供了质量最佳的控制策略：在可能的情况下，车辆会同时沿不同自由度运动，而且从任意起始盒出发都可以使用相同的策略。A* 和贪心搜索算法的结果相似，二者都生成了长度为 14 的最优路径。两者产生的网格状运动效率较低，且仅沿着从初始盒出发的一条路径定义，不过从不同起始盒出发时，都可以快速重新计算策略。根据单个车辆的仿真测试，这些算法在更大空间或更细网格上都能良好扩展；即使是 NDD，在最坏情况下也能在大约两分钟内计算出网格上的解。接下来，我们将比较各策略在车辆数量更多时的表现。

图10的中间图显示了两辆车采用 NDD 时的轨迹。控制策略的计算耗时约 18 分钟，定义在约 PA 180000 个状态上。虽然由此得到的控制策略能够在大量初始条件下实现高效运动，但增加车辆或方格通常会使计算时间和内存需求急剧增加。因此，NDD 最适用于涉及适量车辆的小型场景，尤其是在可以花时间预先计算控制策略时。

图10右图展示了四辆车使用贪心搜索交换房间角落位置后得到的轨迹。由于车辆和物理障碍物都占据单个盒，贪心搜索表现良好，因为每个动作通常都会使一辆车朝目标推进。计算时间约为四毫秒。在包含随机放置的八辆车的 $100\times100\times10$ 网格上进行的仿真结果表明，贪心搜索通常能在约一秒内找到解。正如预期的那样，如果引入长条状墙壁或非凸障碍物，或者目标之间的间距不够大，贪心搜索通常无法找到解。此外，执行整个机动所需的时间会随车辆数量增加而增长。

最后，我们考虑确定性 A* 算法。尽管得到的轨迹沿着长度最优的路径行进，但看起来与贪心搜索找到的轨迹非常相似，因此不予展示。此外，当车辆数量超过三辆时，该方法的计算成本会迅速增加。

2) 通道交换： 第二个代表性场景涉及由一条通道连接的两个房间，该通道定义在一个 $5\times2\times1$ 网格上，见图 11。两辆车必须不断交换位置，第三辆车则需要充当看门人。我们将这一目标指定为两个不同的到达-避障问题组成的无限循环序列。这说明，到达-避障问题是解决更复杂规范时一个实用的构建模块。

NDD 算法在约 10 秒内得出了两种控制策略，而 A* 算法耗时约 0.03 秒。贪心搜索未能找到解决方案，因为它无法协调第三辆车离开其目标位置，为另外两辆车腾出空间。由于所得轨迹在物理空间中相互重叠，图 12 使用 NDD 计算出的策略展示了轨迹随时间的变化。轨迹非常复杂，但表明至少在两个到达-避障任务各执行一个周期的过程中，目标均得以实现。虽然未展示，使用 A* 计算出的轨迹与之类似，但由于运动基元具有确定性，执行该目标需要多花几秒钟。

3）八数码难题：我们以广为人知的八数码难题作为实验结果的收尾。在一个 $3\times3\times1$ 网格上，八辆车辆随机放置，必须回到有序配置，见图 13。对于此应用，A* 算法最为合适，只需 0.32 秒即可计算出控制策略。NDD 方法会花费太多时间在高维输出空间中预计算边，而贪心

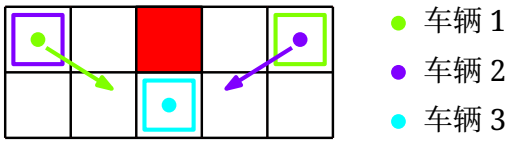


图 11. 本图展示了涉及三辆车辆的通道交换实验。具体而言，它展示了第一次到达-避障的规范，其中目标以彩色方框表示。对于第二次到达-避障，车辆 1 和车辆 2 的初始盒与目标盒被交换。

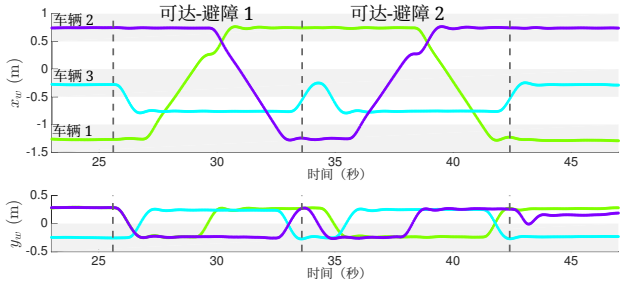


图 12. 通道实验中使用非确定性 Dijkstra 算法生成的轨迹。交替的灰色和白色区域表示网格盒的大小。两个到达-避障规范各自的持续时间均已标出。

搜索则永远无法取得进展。可在视频中查看结果。

D. 讨论

在所展示的各种实验场景中，我们证明了该方法具有模块化特性。设计者可以定制自己的算法来生成控制策略，以权衡解决方案质量与计算效率。根据具体的应用场景，采用不同的控制策略生成方法可能更为合适。

在我们的分析中，所有复杂性都与给定混合自动机的控制策略生成有关。混合自动机形式体系使我们能够生成控制策略，而无需进一步考虑可能产生的连续时间轨迹，因为混合自动机边中编码的离散行为具有保证。另一方面，为任意系统生成混合自动机本身就是一项艰巨的挑战，因此留给设计者自行处理；不过，我们在第 VII 节提出的设计有可能应用于可反馈线性化为一组双积分器的控制系统。只要确保输出具有平移不变性，且能够计算障碍盒，该方法就适用于全驱动机器人机械臂的末端执行器控制 [29]，以及通过使用前视点控制的一些轮式车辆 [1]。

我们的方法通过采用基于反馈的运动基元来提供鲁棒性，因为不变区域的构造确保了广泛的初始条件范围，使输出轨迹能够通过适当的守卫集进入后续盒。由于运动基元会在执行过程中根据测得的盒转换和控制策略进行更新，因此我们不需要估计盒转换的完成时间，而这可能很难计算。

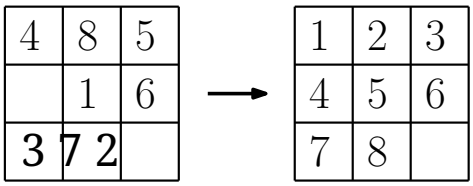


图 13. 八数码难题：八辆车辆必须协调排列成有序配置。

这些特性在存在模型不确定性的情况下具有优势。我们必须应对这种不确定性，因为我们的运动基元设计基于双积分器模型，而不是更复杂的四旋翼模型；此外，当多个四旋翼飞行器近距离飞行时，还会产生空气动力学效应。我们之前的工作还展示了，在由风扇对更大型四旋翼飞行器产生的风扰动下，系统运行具有类似的鲁棒性[31]。最后，我们注意到，我们的框架可以轻松应用于异构机器人团队；如果每辆车都有自己的混合自动机，那么并行组合会自动构造多车辆系统的整体混合自动机。

当然，我们对问题 III.1 的解是保守的，因为我们将自身限制在一种特定的离散化方式上，即选择将空间划分为盒并使用运动基元。正如我们所展示的，这是一种合理的权衡，尤其是因为输出空间离散化的分辨率、运动基元的丰富程度以及控制策略的复杂性都是设计参数。

IX. 结论

我们为已知环境中的多机器人运动规划构建了一个模块化分层框架。该框架由多个模块组成。输出转移系统（OTS）通过将机器人的工作空间划分为盒，对机器人允许的运动进行建模。基于多胞体上的可达控制，设计了一组运动基元。机动自动机（MA）刻画连续运动基元所受的约束。最后，基于 OTS 与 MA 离散部分的同步积生成控制策略。总体而言，我们获得了一种高度鲁棒、模块化且概念上优雅的两级控制设计。我们针对双积分器系统提出了一个具体的机动自动机，并展示了如何组合这一设计，以获得多机器人系统的机动自动机。该方法已在一组四旋翼飞行器上通过实验得到验证。未来的工作包括将我们的方法应用于不同的车辆类别，例如机器人机械臂或轮式车辆，以及与动态环境中更先进的多机器人规划算法相结合。

参考文献

[1] B. d’Andrea-Novel、G. Bastin 和 G. Campion。“非完整轮式移动机器人的建模与控制”。国际机器人与自动化会议，1991年。

[2] F. Augugliaro、A. P. Schoellig 和 R. D'Andrea。"四旋翼机群无碰撞轨迹的生成：一种序列凸规划方法"。国际智能机器人与系统会议，2012年。[3] N. Ayanian 和 V. Kumar。"具有障碍物环境中的多智能体团队分散式反馈控制器"。IEEE机器人学汇刊，第26卷，第5期，第878–887页，2010年。[4] M.E. Broucke 和 M. Ganness。"通过分段仿射反馈实现单纯形上的可达控制"。SIAM控制与优化杂志，第52卷，第5期，第3261–3286页，2014年。[5] M. E. Broucke、S. Di Gennaro、M. Di Benedetto 和 A. Sangiovanni-Vincentelli。"利用混合系统高效求解最优控制问题"。SIAM控制与优化杂志，第43卷，第6期，第1923–1952页，2005年。[6] M. ˇC´ap、P. Nov´ak、A. Kleiner 和 M. Seleck´y。"用于机器人轨迹协调的优先级规划算法"。IEEE自动化科学与工程汇刊，第12卷，第3期，第835–849页，2015年。[7] Y. Chen、X. C. Ding、A. Stefanescu 和 C. Belta。"分布式机器人团队部署的形式化方法"。IEEE机器人学汇刊，第28卷，第1期，第158–171页，2012年。[8] M. Cirillo、T. Uras 和 S. Koenig。"一种面向非完整约束车辆的多机器人运动规划的基于格的方法"。国际智能机器人与系统会议，2014年。[9] D. C. Conner、A. A. Rizzi 和 H. Choset。"组合局部势函数以实现全局机器人控制与导航"。国际智能机器人与系统会议，2003年。[10] A. Dobson、K. Solovey、R. Shome、D. Halperin 和 K. E. Bekris。"可扩展的渐近最优多机器人运动规划"。多机器人与多智能体系统国际研讨会，2017年。[11] G. E. Fainekos、A. Girard、H. Kress-Gazit 和 G. J. Pappas。"动态机器人的时序逻辑运动规划"。Automatica，第45卷，第2期，第343–352页，2009年。[12] E. Frazzoli、M. A. Dahleh 和 E. Feron。"具有对称性的非线性系统的基于机动的运动规划"。IEEE机器人学汇刊，第21卷，第6期，第1077–1091页，2005年。[13] M. Guo 和 D. V. Dimarogonas。" 局部 LTL 规范下的多智能体计划重构 "。国际机器人研究杂志，第34卷，第2期，第218–235页，2015年。[14] L.C.G.J.M. Habets、P.J. Collins 和 J.H. van Schuppen。"单纯形上分段仿射混合系统的可达性与控制综合"。IEEE自动控制汇刊，第51卷，948，2006年6，938号，第-页。[15] D. Heß、M. Althoff 和 T. Sattel。"参数化运动基元的机动自动机形式化验证"。国际智能机器人与系统会议，2014年。[16] K. H. Johansson、M. Egerstedt、J. Lygeros 和 S. Sastry。"论 Zeno 混合自动机的正则化"。系统与控制快报，第38卷，第3期，第141–150页，1999年。[17] M. Kloetzer 和 C. Belta。"根据时序逻辑规范控制线性系统的全自动框架"。IEEE自动控制汇刊，第53卷，第1期，第287–297页，2008年。[18] M. Kloetzer 和 C. Belta，"符号控制中的非确定性处理"。混合系统：计算与控制国际研讨会，2008年。[19] S. M. LaValle。《规划算法》。剑桥大学出版社，2006年。[20] S. R. Lindemann 和 S. M. LaValle。"在给定单元分解上计算平滑、无碰撞反馈律的简单高效算法"。国际机器人研究杂志，第28卷，第5期，第600–621页，2009年。[21] J. Lygeros、K.H. Johansson、S. Sastry 和 M. Egerstedt。"论混合自动机执行的存在性"。IEEE决策与控制会议，1999年。[22] A. Majumdar 和 R. Tedrake。"用于实时鲁棒反馈运动规划的漏斗库"。国际机器人研究杂志，第36卷，第8期，第947–982页，2017年。[23] D. Mellinger 和 V. Kumar。"四旋翼无人机的最小快 2017 年。[24] P. Mihail、R. A. Knepper 和 A. Kelly。"状态格中的微分约束移动机器人运动规划"。野外机器人学杂志，第26卷，第3期，第308–333页，2009年。[25] J. A. Preiss、W. H¨onig、N. Ayanian 和 G. S. Sukhatme。"考虑下洗气流的大型四旋翼无人机团队轨迹规划"。国际智能机器人与系统会议，2017年。

[26] V. Raman 和 H. Kress-Gazit. "交错运动下多机器人控制器的综合"。国际机器人与自动化会议，2014 年。[27] B. Roszak 和 M. E. Broucke. "单纯形上可达性的充要条件"。 *Automatica*。第 42 卷，1918，2006 年第 11 期，第 1913 页。[28] I. Saha、R. Ramaithitima、V. Kumar、G. J. Pappas 和 S. A. Seshia. "根据安全 LTL 规范自动组合多机器人系统的运动基元"。 国际智能机器人与系统会议，2014 年。 [29] M.W. Spong、S. Hutchinson 和 M. Vidyasagar《机器人建模与控制》。纽约：Wiley，2005 年。 [30] P. Tabuada、G. J. Pappas 和 P. Lima，"混合控制系统的组合抽象"。 *IEEE*决策与控制会议，2001 年。[31] M. Vukosavljev、Z. Kroeze、M. E. Broucke 和 A. P. Schoellig. "使用基于反馈的运动基元进行多车辆导航的框架"。国际智能机器人与系统会议，2017 年。[32] G. Wagner 和 H. Choset，"用于多机器人路径规划的子维度扩展"。 人工智能 第 219 卷，第 2 期，第 1-24 页，2015 年。[33] E. M. Wolff、U. Topcu 和 R. Murray. "针对时序逻辑一个计算效率高的片段，对非确定性系统进行最优控制"。 *IEEE*决策与控制会议。2013年12月。 [34] W.M. Wonham 和 K. Cai. 离散事件系统的监督控制。http://www.control.utoronto.ca/~wonham/Research.html。 [35] J. Yu 和 D. Rus. "近似最优多机器人路径规划的有效算法框架"。机器人研究，Springer Berlin/Heidelberg，第 1 卷，第 495-511 页，2018 年。[36] J. Zhang 、 K. H. Johansson 、 J. Lygeros 和 S. Sastry，" 重新审视动力系统：具有芝诺执行的混合系统"。 混合系统：计算与控制，2000 年。

附录

定理 *IV.1* 的证明。 首先证明 (3)。考虑 $q = (l, m) \in Q_{\text{PA}} \setminus Q^f_{\text{PA}}$ 并假设 $|\Sigma_{\text{PA}}(q)| > 0$。根据 J 的定义，对于任意 $c \in \mathcal{C}$，

$$J(q,c) = \max_{e=(q,\sigma,q')\in E_{\text{PA}}} \{D_{\text{PA}}(e) + J(q',c)\}, \qquad (15)$$

其中 $q' = (l', c(q, \sigma)) \in Q_{\text{PA}}$。注意，给定 $q = (l, m) \in Q_{\text{PA}}$ 和 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$，存在唯一的 $l' \in L_{\text{OTS}}$ 使得 $(l, \sigma, l') \in E_{\text{OTS}}$ （因为 OTS 是一个确定性自动机）。因此，当我们在 (15) 中对 $e = (q, \sigma, q') \in E_{\text{PA}}$ 取最大值，且满足 $q' = (l', c(q, \sigma))$ 时，唯一需要取最大值的自由变量是 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$。因此，(15) 等价于

$$J(q,c) = \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)} \{D_{\text{PA}}(e) + J(q',c)\}, \qquad (16)$$

其中，如前所述，$q' = (l', c(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$ 和 $e = (q, \sigma, q') \in E_{\text{PA}}$。根据 V的定义

$$J(q,c) \geq \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)} \{D_{\text{PA}}(e) + V(q')\}.$$

同样根据 V的定义

$$V(q) = \min_{c\in\mathcal{C}} J(q,c) \geq \min_{c\in\mathcal{C}} \left\{ \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)} \{D_{\text{PA}}(e) + V(q')\} \right\}.$$

因此，

$$V(q) \geq \min_{c(q)\in\mathcal{M}(q)} \left\{ \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)} \{D_{\text{PA}}(e) + V(q')\} \right\}.$$

为证明反向不等式，采用反证法，假设存在一个在 $q \in Q_{\text{PA}}$、$\hat{c}(q) \in \mathcal{M}(q)$ 处的可容许控制赋值，使得

$$\begin{aligned} V(q) &> \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(\hat{e})+V(\hat{q})\} \\ &\geq \min_{c(q)\in\mathcal{M}(q)}\left\{\max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(e)+V(q')\}\right\}, \end{aligned}$$

其中 $\hat{q}=(l,\hat{c}(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$，$\hat{e}=(q,\sigma,\hat{q}) \in E_{\text{PA}}$，$q'=(l',c(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$，以及 $e=(q,\sigma,q') \in E_{\text{PA}}$。假设 $\hat{c}(q)$ 的最大值在 $\sigma^* \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$ 处取得。我们定义 $q^*=(l^*,\hat{c}(q,\sigma^*))$，以及 $e^*=(q,\sigma^*,q^*) \in E_{\text{PA}}$。则

$$V(q) > D_{\text{PA}}(e^*)+V(q^*).$$

假设使 q^* 达到 $V(q^*)$ 的可容许最优控制策略为 $c^* \in \mathcal{C}$。在 $Q_{\text{PA}} \setminus \{q\}$ 上定义一个新策略 $c=c^*$，并且 $c(q)=\hat{c}(q)$。则

$$\begin{aligned} J(q,c) &= \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(e)+V(q')\} \\ &= D_{\text{PA}}(e^*)+V(q^*) < V(q), \end{aligned}$$

矛盾。因此，必有

$$V(q) \leq \min_{c(q)\in\mathcal{M}(q)}\left\{\max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(e)+V(q')\}\right\},$$

如所需。这证明了 (3)。

其次，我们证明 (4)。考虑 $q=(l,m) \in Q_{\text{PA}} \setminus Q^f{}_{\text{PA}}$，并假设 $|\Sigma_{\text{PA}}(q)|>0$。令 $\bar{c}(q) \in \mathcal{M}(q)$ 为 q 处的一个可容许控制赋值，使得对于所有 $\sigma \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$，

$$\bar{c}(q,\sigma) \in \operatorname*{argmin}_{\bar{m}\in\mathcal{M}(q,\sigma)}\{D_{\text{PA}}(\bar{e})+V(\bar{q})\}, \tag{17}$$

其中 $\bar{q}=(l,\bar{m}) \in Q_{\text{PA}}$，且 $\bar{e}=(q,\sigma,\bar{q}) \in E_{\text{PA}}$。我们将证明

$$\begin{aligned} &\max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(\bar{e})+V(\bar{q})\} \leq \\ &\min_{c(q)\in\mathcal{M}(q)}\left\{\max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(e)+V(q')\}\right\}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $\bar{q}=(l,\bar{c}(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$，$\bar{e}=(q,\sigma,\bar{q}) \in E_{\text{PA}}$，$q'=(l',c(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$，且 $e=(q,\sigma,q') \in E_{\text{PA}}$。假设右侧的最小值和最大值分别在 $c^*(q) \in \mathcal{M}(q)$ 和 $\sigma^* \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$ 处取得。此外，假设左侧的最大值在 $\bar{\sigma}^* \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$ 处取得。于是 (18) 变为

$$D_{\text{PA}}(\bar{e}^*)+V(\bar{q}^*) \leq D_{\text{PA}}(e^*)+V(q^*), \tag{19}$$

其中 $q^*=(l^*,c(q,\sigma^*)) \in Q_{\text{PA}}$，$e^*=(q,\sigma^*,q^*) \in E_{\text{PA}}$，$q^*=(l^*,c^*(q,\sigma^*)) \in Q_{\text{PA}}$，以及 $e^*=(q,\sigma^*,q^*) \in E_{\text{PA}}$。反设 (18) 不成立，则 (19) 不成立。也就是说，

$$D_{\text{PA}}(\bar{e}^*)+V(\bar{q}^*) > D_{\text{PA}}(e^*)+V(q^*).$$

根据 $\sigma^* \in \Sigma_{\text{PA}}(q)$ 的极大性，我们有

$$\begin{aligned} & D_{\text{PA}}(e^*)+V(q^*) \\ =\ & D_{\text{PA}}((q,\sigma^*,(l^*,c^*(q,\sigma^*))))+V((l^*,c^*(q,\sigma^*))) \\ \geq\ & D_{\text{PA}}((q,\overline{\sigma}^*,(\overline{l}^*,c^*(q,\overline{\sigma}^*))))+V((\overline{l}^*,c^*(q,\overline{\sigma}^*))). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & D_{\text{PA}}(\bar{e}^*)+V(\bar{q}^*) \\ =\ & D_{\text{PA}}((q,\overline{\sigma}^*,(\overline{l}^*,\bar{c}(q,\overline{\sigma}^*))))+V((\overline{l}^*,\bar{c}(q,\overline{\sigma}^*))) \\ >\ & D_{\text{PA}}((q,\overline{\sigma}^*,(\overline{l}^*,c^*(q,\overline{\sigma}^*))))+V((\overline{l}^*,c^*(q,\overline{\sigma}^*))). \end{aligned}$$

这与式 (17) 中 $\bar{c}(q,\bar{\sigma}^*)$ 的定义矛盾。由此可得，式 (18) 必须成立。

现在考虑满足 $\bar{c}^*(q)=\bar{c}(q)$ 的 $\bar{c}^* \in \mathcal{C}$，其中 $\bar{c}^*$ 是 $q' \neq q$ 的任意可容许最优控制策略。利用式 (16)，可得

$$\begin{aligned} J(q,\bar{c}^*) &= \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(\bar{e})+J(\bar{q},\bar{c}^*)\} \\ &= \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(\bar{e})+V(\bar{q})\}, \end{aligned}$$

其中 $\bar{q}=(l,\bar{c}^*(q,\sigma))=(l,\bar{c}(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$，且 $\bar{e}=(q,\sigma,\bar{q}) \in E_{\text{PA}}$。现在由式 (3) 和式 (18) 可得

$$\begin{aligned} J(q,\bar{c}^*) &= \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(\bar{e})+V(\bar{q})\} \\ &\leq \min_{c(q)\in\mathcal{M}(q)}\left\{\max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(e)+V(q')\}\right\} = V(q). \end{aligned}$$

根据 V 的定义，可得 $J(q,\bar{c}^*)=V(q)$。也就是说，

$$J(q,\bar{c}^*) = V(q) = \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\{D_{\text{PA}}(\bar{e})+V(\bar{q})\} \tag{20}$$

其中 $\bar{q}=(\bar{l},\bar{c}(q,\sigma)) \in Q_{\text{PA}}$，且 $\bar{e}=(q,\sigma,\bar{q}) \in E_{\text{PA}}$。然而，我们知道 $\bar{c}^*(q)=\bar{c}(q)$，且 $\bar{c}(q)$ 满足式 (17)。因此，

$$V(q) = \max_{\sigma\in\Sigma_{\text{PA}}(q)}\left\{\min_{\overline{m}\in\mathcal{M}(q,\sigma)}\{D_{\text{PA}}(\bar{e})+V(\bar{q})\}\right\},$$

其中现在 $\bar{q}=(\bar{l},\overline{m}) \in Q_{\text{PA}}$，这就证明了 (4)。 □

引理 V.2 的证明。 设 $(l^0,m^0) \in Q^0{}_{\text{PA}}$ 且 $x_0 \in I_{\text{MA}}(m^0)$。MA 执行的初始混合自动机状态为 $(m(0),x_0)=(m^0,x_0) \in Q^0{}_{\text{MA}}$，而 PA 运行 π 的初始 PA 状态为 $q^0=(l^0,m^0)$。χ 的混合时间域记为 $\tau=\{\mathcal{I}_i\}_{i=0}^{n_\tau}$，其初始化为 $\tau=\{\mathcal{I}_0\}$，其中 $\mathcal{I}_0=\{\tau_0\}$ 且 $\tau_0=0$。在确立基例 $k=0$ 后，我们通过归纳法构造 MA 执行和 PA 运行的其余部分。

目前的运行是 $\pi=q^0\ldots q^k$，其中对于 $i=0,\ldots,k$，$q^i=(l^i,m^i)$，并且 $\mathcal{I}_k=\{\tau_k\}$。假设 $\Sigma_{\text{MA}}(m^k)=\emptyset$。则根据假设 IV.1 (vi)，对于扩展区间 $\mathcal{I}_k=[\tau_k,\infty)$ 中的所有 t，$\phi_{\text{MA}}(t,x_0) \in I_{\text{MA}}(m^k)$。完整的 PA 运行是 $\pi=q^0\cdots q^k$，归纳法终止。反之，假设 $\Sigma_{\text{MA}}(m^k) \neq \emptyset$。则根据假设 IV.1 (vii)，存在唯一的 $\sigma^k \in \Sigma_{\text{MA}}(m^k)$ 和 $T^k \geq 0$，使得对于扩展区间 $\mathcal{I}^k=[\tau_k,\tau_k']$，$\tau_k' := \tau_k+T^k$ 中的所有 t，$\phi_{\text{MA}}(t,x_0) \in I_{\text{MA}}(m^k)$。此外，对于每个 $e=(m^k,\sigma^k,m') \in E_{\text{MA}}$，存在一个守卫集 g_e 使其

即 $\phi_{\text{MA}}(\tau'_k, x_0) \in g_e$。假设 IV.1 (ii) 告诉我们，对于所有这样的 m'，守卫集是相同的。此外，假设 IV.1 (iii) 确保 σ^k 是唯一的。现在我们调用控制策略来选择一个特定的 m'。令 $m^{k+1} := c(q^k, \sigma^k)$，使得 $e^k := (m^k, \sigma^k, m^{k+1}) \in E_{\text{MA}}$ 且 $\phi_{\text{MA}}(\tau'_k, x_0) \in g_{e^k}$。定义 $x_0^{k+1} := r_{e^k}(\phi_{\text{MA}}(\tau'_k, x_0))$。根据假设 IV.1 (iv)，$x_0^{k+1} \notin g_e$ 对于任意 $e = (m^{k+1}, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$。下一个 PA 状态是 $q^{k+1} = (l^{k+1}, m^{k+1})$，其中 $l^{k+1} \in L_{\text{OTS}}$ 通过 $(l^k, \sigma^k, l^{k+1}) \in E_{\text{OTS}}$ 由 OTS 的确定性唯一确定。到目前为止的 PA 运行是 $\pi = q^0 \cdots q^{k+1}$，并且新区间 $\mathcal{I}_{k+1} = \{\tau'_k\}$ 被添加到 τ。

根据 $Q^0{}_{\text{PA}}$ 的定义，上述归纳过程必定会以有限 PA 运行终止。也就是说，由于 $(l^0, m^0) Q^0 \quad N \quad l^N \; m^N \in Q^f{}_{\text{PA}}$，因此存在最小的使得 $(,)_{\text{PA}}$。此外，根据 $Q^f{}_{\text{PA}}$(5) 的定义，我们有 $\Sigma_{\text{MA}}(m^N) = \emptyset$，因此该运行无法进一步延长。由此得到的 MA 执行在混合时间域 τ 中包含有限个区间，但其本身是无限的，并且根据引理 V.1，它是非阻塞的。

□

定理 *VI.1* 的证明。我们使用以下两个关于集合的笛卡尔积、交集和子集的标准事实。形式化地说，若 A, B, C, D 是集合，则

$$(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D), \tag{21}$$

$$A \subset C \text{ and } B \subset D \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D). \tag{22}$$

首先，我们证明所得的 $\mathcal{H}_{\text{MA}}$ 确实是根据定义的一个混合自动机。显然，组合后的向量场也是全局利普希茨的，组合后的不变集有界。需要证明的非平凡之处在于：(a) 堆叠后的系统满足假设 III.1；(b) 不变集投影后位于规范盒内；(c) 使能条件既位于不变集内，也位于由 $\sigma \in \Sigma$ 确定的适当面上；(d) 重置条件仅由事件 $\sigma \in \Sigma$ 确定；(e) 初始条件就是整个不变集。我们将依次证明这些性质。

(a) 我们证明堆叠系统满足假设 III.1。对于第一个条件，通过直接展开可以验证，h 的定义必然会产生先前定义的单射输出映射 $o\colon \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$。对于第二个条件，令 $x = (x^1, x^2)$、$u = (u^1, u^2)$ 和 $y = (y^1, y^2)$，我们必须证明 $f(x, u) = f(x + h^{-1}(y)\ u)$。首先，根据各个系统的假设 III.1，$f^j(x^j, u^j) = f^j(x^j + (h^j_{o^j})^{-1}(y^j)\ u^j)$。其次，不难（但较为繁琐）证明 $h_o^{-1}(y) = ((h_o^1)^{-1}(y^1), (h_{o^2}^2)^{-1}(y^2))$。结合这两个事实即可得到所需结果。

（b）我们证明，对于所有 $m \in M$、$I_{\text{MA}}(m) \subset h^{-1}(Y^*)$。令 $m = (m^1, m^2) \in M$，根据每个系统都是混合自动机这一事实，有 $I^j{}_{\text{混合自动机}}(m^j) \subset (h^j)^{-1}(Y^{*,j})$，其中 $j = 1, 2$。容易（但较为繁琐）证明，$h^{-1}(Y^*) = (h^1)^{-1}(Y^{*,1}) \times (h^2)^{-1}(Y^{*,2})$。然后应用（22）即可得到该结果。

(c) 我们证明，对于所有 $e = (m_1, \sigma, m_2) \in E_{\text{MA}}$，$g_e \subset h^{-1}(\mathcal{F}_\sigma) \cap I_{\text{MA}}(m_1)$。设 $e = (m_1, \sigma, m_2) \in E_{\text{MA}}$，并将其分解为 $e^j = (m_1^j, \sigma^j, m_2^j) \in E^j{}_{\text{混合自动机}}$，其中 $j = 1, 2$。对于 $j = 1, 2$，若 $\sigma^j \neq \varepsilon^j$，则 $g_{e^j} \subset (h^j)^{-1}(\mathcal{F}_{\sigma^j}) \cap I^j{}_{\text{混合自动机}}(m_1^j)$，因为每个系统都是混合自动机。否则，若 $\sigma^j = \varepsilon^j$，注意到 $\mathcal{F}_{\varepsilon^j} = Y^{*,j}$ 并且根据构造，$g_{e^j} = I^j(m_1^j) \subset I^j$ 混合自动机$(m_1^j) \subset (h^j)^{-1}(Y^{*,j})$。因此，$g_{e^j} \subset (h^j)^{-1}(\mathcal{F}_{\sigma^j}) \cap I^j$ 混合自动机(m_1^j) 也成立。接下来，根据定义，$g_e = g_{e^1} \times g_{e^2}$ 且 $I_{\text{MA}}(m) = I^1$ 混合自动机$(m_1^1) \times I^2$ 混合自动机(m_1^2)。同样容易（但较为繁琐）证明，$h^{-1}(\mathcal{F}_\sigma) = (h^1)^{-1}(\mathcal{F}_{\sigma^1}) \times (h^2)^{-1}(\mathcal{F}_{\sigma^2})$。然后应用（21）和（22）即可得出结果。

（d）我们证明，对于所有 $e = (m_1、\ \sigma、\ m_2) \in E_{\text{MA}}$、$r_e(x) = x - h_o^{-1}(d \circ \sigma)$。令 $e = (m_1、\ \sigma、\ m_2) \in E_{\text{MA}}$，并将其分解为 $e^j = (m_1^j、\ \sigma^j、\ m_2^j) \in E^j$ 混合自动机，其中 $j = 1, 2$。首先，根据定义 $r_e(x) = (r_{e^1}(x^1)\ \ r_{e^2}(x^2))$。对于 $j = 1, 2$，若 $\sigma^j \neq \varepsilon^j$，则 $r_{e^j}(x^j) = x^j - (h^j_{o^j})^{-1}(d^j \circ \sigma^j)$，因为每个系统都是混合自动机。当 $\sigma^j = \varepsilon^j$ 时情况也相同，因为 $r_{e^j} = x^j \quad -1\ d^j \circ \varepsilon^j = 0 \quad d = d^1\ d^2 \quad (x^j)$ 且 $(h^j_{o^j})()$。接下来，由于 $(,)$ 和 $\sigma = (\sigma^1、\ \sigma^2)$，逐分量乘法给出 $d \circ \sigma = (d^1 \circ \sigma^1、\ d^2 \circ \sigma^2)$。利用 $x = (x^1、\ x^2)$ 以及在（a）中建立的分解 $h_o^{-1}(y) = ((h_{o^1}^1)^{-1}(y^1)、\ (h_{o^2}^2)^{-1}(y^2))$，并结合 $y = d \circ \sigma$，即可证明该结果。

(e) 我们必须证明 $Q^0{}_{\text{混合自动机}} = \{(m,\ x) \in Q_{\text{MA}} \mid x \in I_{\text{MA}}(m)\}$。根据 Q_{MA}、I_{MA} 和 $Q^0{}_{\text{混合自动机}}$ 的定义，这一点可立即得出。

接下来，我们证明假设 IV.1 的 (i)-(vii) 成立。

(i) 我们必须证明，对于所有 $m \in M$, $\varepsilon \notin \Sigma_{\text{MA}}(m)$。根据边的定义，这一点可立即得出，因为对于所有 $m \in M$, $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \Sigma_{\text{MA}}(m) \setminus \{\varepsilon\}$。

(ii) 我们必须证明，对于所有满足 $e_1 = (m_1, \sigma, m_2)$ 和 $e_2 = (m_1, \sigma, m_3)$ 的 $e_1, e_2 \in E_{\text{MA}}$，$g_{e_1} = g_{e_2}$。为此，我们将 $e_1^j = (m_1^j, \sigma^j, m_2^j) \in E^j$ 混合自动机以及 $e_2^j = (m_1^j, \sigma^j, m_3^j) \quad \in E^j \quad 2$ 混合自动机记作 $j = 1,$。为了证明 $g_{e_1} = g_{e_2}$，我们必须证明，对于 $j = 1, 2$，$g_{e_1^j} = g_{e_2^j}$。令 $j \in \{1, 2\}$。如果 $\sigma^j = \varepsilon^j$，那么根据构造，$g_{e_1^j} = I^j(m_1^j) = g_{e_2^j}$。否则，如果 $\sigma^j \neq \varepsilon^j$，那么根据假设 IV.1 (ii)，$g_{e_1^j} = g_{e_2^j}$ 可由第 j 个系统得出。

(iii) 我们必须证明，对于所有 $e_1, e_2 \in E_{\text{MA}}$，使得 $e = (m_1\ \sigma_1\ m_2 \quad e_2 = m_1\ \sigma_2\ m_3 \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad g_{e_1} \cap ,,) g_{e_2} = \emptyset \quad e_1^j = m_1^j\ \sigma_1^j\ m_2^j \in E^j$ 与 $(,,)$，若，则。为此，我们记 $(,,)$ 混合自动机以及 $e_2^j = (m_1^j, \sigma_2^j, m_3^j) \in E^j$ 混合自动机，其中 $j = 1,2$。若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，则不妨设 $\sigma_1^1 \neq \sigma_2^1$。为证明 $g_{e_1} \cap g_{e_2} = \emptyset$，由 (21) 只需证明 $g_{e_1^1} \cap g_{e_2^1} = \emptyset$。若 σ_1^1 与 σ_2^1 均不等于 ε^1，则由假设 IV.1 (iii)$g_{e_1^1} \cap g_{e_2^1} = \emptyset$。若 σ_1^1 或 σ_2^1 之一为 ε^1，例如 σ_1^1，则我们不能援引假设 IV.1 (iii)。然而，由定义，$g_{e_1^1} = I^1(m_1^1)$ 不与任何其他守卫相交，从而 $g_{e_1^1} \cap g_{e_2^1} = \emptyset$，即为所求。

(iv) 我们必须证明，对于所有满足 $e_1 = (m_1, \sigma_1, m_2)$ 和 $e_2 = (m_2, \sigma_2, m_3)$ 的 $e_1、\ e_2 \in E_{\text{MA}}$，$r_{e_1}(g_{e_1}) \cap g_{e_2} = \emptyset$。为此，对于 $j = 1, 2$，我们将 $e_1^j = (m_1^j, \sigma_1^j, m_2^j) \in E^j$ 混合自动机，将 $e_2^j = (m_2^j, \sigma_2^j, m_3^j) \in E^j$ 混合自动机。根据（21），只需证明对于 $j = 1, 2$ 中至少一个，$r_{e_1^j}(g_{e_1^j}) \cap g_{e_2^j} = \emptyset$。由于根据假设 IV.1 (i)，$\varepsilon$ 不可能是事件，因此 $j_1 = 1, 2$ 中至少一个必须具有 $\sigma_1^{j_1} \neq \varepsilon^{j_1}$，并且 $j_2 = 1, 2$ 中至少一个必须具有 $\sigma_2^{j_2} \neq \varepsilon^{j_2}$。形式上，存在若干种情况，但可以总结如下。如果至少存在一个匹配的 $j = j_1 = j_2$，使得 $\sigma_1^j、\ \sigma_2^j \neq \varepsilon^j$ 均成立，则 $e_1^j、\ e_2^j \in E^j$ 均为混合自动机，并且我们调用假设 IV.1 (iv) 得到

$r_{e_1^j}(g_{e_1^j}) \cap g_{e_2^j} = \emptyset$。还有两种情况与此类似，因此我们只讨论其中一种。假设 $\sigma_1^1 = \varepsilon^1$ 和 $\sigma_2^2 = \varepsilon^2$。那么 $e_1^1 \notin E^1$ 混合自动机 和 $e_2^2 \notin E^2$ 混合自动机，因此我们无法调用假设 IV.1 (iv)。然而，根据构造，$e_1^1 \in E^1$ 混合自动机意味着 $r_{e_1^1}(g_{e_1^1}) = I^1(m_1^1)$ 不与 E^1 混合自动机 中的任何守卫相交。特别地，$e_2^1 \in E^1$ 混合自动机，因为必然有 $\sigma_2^1 \neq \varepsilon^1$，所以 $r_{e_1^1}(g_{e_1^1}) \cap g_{e_2^1} = \emptyset$。

(v) 我们必须证明，对于所有 $e = (m_1, \sigma, m_2) \in E_{\text{MA}}$，$r_e\ g_e \subset I_{\text{MA}}\ m_2$ $e^j = m_1^j\ \sigma^j\ m_2^j \in (\ )\ (\ )$。为此，我们 E^j 2 2 将 $(\ ,\ )$ 混合自动机 记为 $j = 1$ $j = 1$ $\sigma^j \neq \varepsilon^j$ $r_{e^j}\ g_{e^j} \subset$ ，。对于 ，，若，I^j 1 则根据单个系统上的假设 IV.(v)，可得 $(\ )$ 混合自动机(m_2^j)。当 $\sigma^j = \varepsilon^j$ 时同样成立，因为根据定义，E^j 混合自动机 满足 $r_{e^j}(g_{e^j}) = I^j(m_1^j) \subset I^j$ 混合自动机(m_2^j)。接下来，根据定义可得 $I_{\text{MA}}(m_2) = I^1$ 混合自动机$(m_2^1) \times I^2$ 混合自动机(m_2^2)。此外，容易验证 $r_e(g_e) = r_{e^1}(g_{e^1}) \times r_{e^2}(g_{e^2})$。应用式（22）即可得出结果。

(vi) 我们必须证明，对于所有 $m \in M$，如果 $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \emptyset$，那么 $I_{\text{MA}}(m)$ 是不变集。令 $m = (m^1, m^2) \in M, x_0 = (x_0^1, x_0^2) \in I_{\text{MA}}(m)$，并假设 $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \emptyset$。那么对于 $j = 1, 2$，Σ^j 混合自动机$(m^j) = \emptyset$。为说明这一点，假设其中一个非空，不妨设 $\sigma^1 \in \Sigma^1$ 混合自动机$(m^1) \subset \Sigma^1$ 混合自动机(m^1)，根据假设 IV.1 (i)，$\sigma^1 \neq \varepsilon^1$。根据构造，$\varepsilon^2 \in \Sigma^2$ 混合自动机(m^2)，并且根据上文证明的假设 IV.1 (i)，$(\sigma^1, \varepsilon^2) \in \Sigma_{\text{MA}}(m) \backslash \{\varepsilon\} = \Sigma_{\text{MA}}(m)$，因此得到矛盾。根据关于 $j = 1,2$ 的假设 IV.1 (vi)，对于所有 $t \geq 0$，单个系统的轨迹都满足 ϕ^j 混合自动机$(t, x_0^j) \in I^j$ 混合自动机(m^j)。因此，对于所有 $t \geq 0$，$\phi_{\text{MA}}(t, x_0) \in I_{\text{MA}}(m)$。

(vii) 我们必须证明，对于所有 $m \in M$，若 $\Sigma_{\text{MA}}(m) \neq \emptyset$，则 $I_{\text{MA}}(m)$ 会迫使所有轨迹在有限时间内经由某个守卫退出。令 $m = (m^1, m^2) \in M$，$x_0 = (x_0^1, x_0^2) \in I_{\text{MA}}(m)$，并假设 $\Sigma_{\text{MA}}(m) \neq \emptyset$。反向运用假设 IV.1 (vi) 中的论证，现在可以得出结论：至少对于 $j = 1, 2$ 中的一个，Σ^j 混合自动机$(m^j) \neq \emptyset$。首先假设只有 Σ^1 混合自动机$(m^1) \neq \emptyset$，那么对 $j = 1$ 应用假设 IV.1 (vii)，并对 $j = 2$ 应用假设 IV.1 (vi)，可得事件 $\sigma = (\sigma^1, \varepsilon^2) \in \Sigma_{\text{MA}}(m)$，其退出时间为 T^1。如果只有 Σ^2 混合自动机$(m^2) \neq \emptyset$，则论证类似。如果对于 $j = 1, 2$ 两者，Σ^j m^j 1 2 混合自动机$(\ ) \neq \emptyset$，那么对两者 $j = 1$ 应用假设 IV. (vii)，可得事件 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$，其中 $\sigma^j \in \Sigma^j$ 混合自动机(m^j)，退出时间为 T^j。如果 $T^1 < T^2$，那么总退出时间为 $T = T^1$，事件为 $\sigma = (\sigma^1, \varepsilon^2) \in \Sigma_{\text{MA}}(m)$。如果 $T^1 > T^2$，那么退出时间为 $T = T^2$，事件为 $\sigma = (\varepsilon^1, \sigma^2) \in \Sigma_{\text{MA}}(m)$。否则，$T = T^1 = T^2$，且事件为 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \Sigma_{\text{MA}}(m)$。对于以上所有情况，容易（但繁琐）验证：对于所有 $e = (m, \sigma, m') \in E_{\text{MA}}$，以及所有 $t \in [0, T]$，$\phi_{\text{MA}}(t, x_0) \in I_{\text{MA}}(m)$ 和 $\phi_{\text{MA}}(T, x_0) \in g_e$。

□

引理 *VII.1* 的证明。(i) 我们必须证明，对于所有 $m \in M$,$0 \notin \Sigma_{\text{MA}}(m)$，结论均成立。显然这是正确的，因为 E_{MA} 中没有包含标签 0 的边。

(ii) 我们必须证明，对于所有满足 $e_1 = (m_1, \sigma, m_2)$ 且 $e_2 = (m_1, \sigma, m_3)$ 的 $e_1, e_2 \in E_{\text{MA}}$，$g_{e_1} = g_{e_2}$ 成立。显然这是正确的，因为我们设计了 $g_{(\mathscr{F},1,\mathscr{H})} = g_{(\mathscr{F},1,\mathscr{F})}$ 和 $g_{(\mathscr{B},-1,\mathscr{H})} = g_{(\mathscr{B},-1,\mathscr{B})}$。

(iii) 我们必须证明，对于所有满足 $e = (m_1, \sigma_1, m_2)$ 且 $e_2 = (m_1, \sigma_2, m_3)$ 的 $e_1, e_2 \in E_{\text{MA}}$，若 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 成立，则 $g_{e_1} \cap g_{e_2} = \emptyset$ 成立。这显然成立，因为对于所有 $m \in M$，$|\Sigma_{\text{MA}}(m)| < 2$。

(iv) 我们必须证明，对于所有满足 $e_1 = (m_1, \sigma_1, m_2)$ 和 $e_2 = (m_2, \sigma_2, m_3)$ 的 $e_1, e_2 \in E_{\text{MA}}$，$r_{e_1}(g_{e_1}) \cap g_{e_2} = \emptyset$。根据上述假设 IV.1 (ii)，我们只需检查两种情况，即 $e_1 = e_2 = (\mathscr{F}, 1, \mathscr{F})$ 和 $e_1 = e_2 = (\mathscr{B}, -1, \mathscr{B})$。这两种情况都满足条件，因为第一坐标上的重置动作；例如，第一种情况给出 $r_{e_1}(\{d\} \times (0, \bar{u}_1]) \cap \{d\} \times (0, \bar{u}_1] = \emptyset$。

(v) 我们必须证明，对于所有 $e = (m_1, \sigma, m_2) \in E_{\text{MA}}$,$r_e(g_e) \subset I_{\text{MA}}(m_2)$ 均成立。对于 E_{MA} 中的全部四条边，这一点很容易验证。例如，若 $e = (\mathscr{F}, 1, \mathscr{H})$，显然 $r_{e_1}(\{d\} \times (0, \bar{u}_1]) \subset I_{\text{MA}}(\mathscr{H})$。

(vi) 我们必须证明，对于所有 $m \in M$，如果 $\Sigma_{\text{MA}}(m) = \emptyset$，那么 $I_{\text{MA}}(m)$ 是不变集。我们知道，只有 $\Sigma_{\text{MA}}(\mathscr{H}) = \emptyset$。如图 5 所示，闭环向量场不允许轨迹越过 $I_{\text{MA}}(\mathscr{H})$ 的边界，因此对于所有 $x_0 \in I_{\text{MA}}(\mathscr{H})$，以及所有 $t \geq 0$，$\phi_{\text{MA}}(t, x_0) \in I_{\text{MA}}(\mathscr{H})$。

(vii) 我们必须证明，对于所有 $m \in M$，如果 $\Sigma_{\text{MA}}(m) \neq \emptyset$，那么 $I_{\text{MA}}(m)$ 会迫使所有轨迹在有限时间内通过某个守卫离开。考虑满足 $\Sigma_{\text{MA}}(\mathscr{F}) = \{1\}$ 的 $\mathscr{F}$。如图 5 所示，对于所有 $x_0 \in I_{\text{MA}}(\mathscr{F})$，存在 $T \geq 0$，使得对于所有 $t \in [0, T]$，$\phi_{\text{MA}}(t, x_0) \in I_{\text{MA}}(\mathscr{F})$，并且 $\phi_{\text{MA}}(T, x_0) \in \{d\} \times (0, \bar{u}_1]$。由于两者均为 $g_{(\mathscr{F},1,\mathscr{H})} = g_{(\mathscr{F},1,\mathscr{F})} = \{d\} \times (0, \bar{u}_1]$，该假设成立。对于 $\mathscr{B}$，也可以作出类似论证。

□