arXiv:2301.00037v1 [math.HO] 30 Dec 2022

分数阶微积分简明导论

Alexander I. Zhmakin*

2023年1月3日

目录

1 分数阶导数 1

1.1 黎曼-刘维尔分数阶积分.2 1.2 黎曼-刘维尔分数阶导数.3 1.2.1 莱布尼茨公式.4 1.2.2 法迪布鲁诺公式（链式法则）.4 1.2.3 分数阶泰勒展开.5 1.2.4 对称空间导数.5 1.3 Caputo 分数阶导数.6 1.4 矩阵方法.7 1.5 Caputo-Fabrizio分数阶导数.7 1.6 GC与GRL导数.7 1.6.1 GC导数.8 1.6.2 GRL导数.8 1.7 Marchaud-Hadamard分数阶导数.8 1.8 格伦瓦尔德-莱特尼科夫导数.9 1.9 Riesz 分数阶算子.10 1.10 Weyl 分数阶导数.12 1.11 Erdélye-Kober分数阶算子.12 1.12 分数阶积分与导数的解释.13 1.13 局部分数阶导数.14 1.13.1 “相容”分数阶导数.15

2 截断分数阶微积分 16

3 分数阶微分方程 17

3.1 分布阶微分方程.20 3.2 特殊函数.21 3.2.1 Mittag-Leffler 函数.21 3.2.2 H函数.23 3.2.3 赖特函数.23

*约飞物理技术研究所与 SoftImpact有限公司，电子邮箱：a.zhmakin0@gmail.com

4 分数阶微分方程的求解 24
4.1 解析方法.24 4.2 数值方法.26

1 分数阶导数

分数阶微积分（FC）如今是解决科学和工程领域问题的有效工具
[174, 160, 122, 198, 28, 181, 166, 214]。“分数阶”一词沿用至今是出于历史原因——它其实并不准确，因为阶数可以是实数 [76, 20]。

关于分数阶微积分（FC）发展的历史综述，从戈特弗里德·莱布尼茨致纪尧姆·德·洛必达的信（1695年）开始，涵盖了约瑟夫·刘维尔、BernhardRiemann、尼尔斯·阿贝尔、Grünwald、阿列克谢·列特尼科夫、格拉西莫夫、马塞尔·里斯、马格努斯·米塔-列夫勒、保罗·列维、拉乌尔·尼格马图林、尤里·拉博特诺夫、阿瑟·埃尔德伊等人在19世纪和20世纪作出的贡献，可参见文献 [193, 99, 223, 225,224]。

Lorenzo 和 Hartley [141] 分析了 B. Ross 提出的广义微积分所需的最小标准集：解析性：如果 $f(z)$ 是复变量 z 的解析函数，则导数 $D_z^\nu f(z)$ 是 z 和 ν 的解析函数；向后兼容性：当 $\nu = n$ 为正整数时，运算 $D_z^\nu f(z)$ 必须产生与普通微分相同的结果；当 n 为负整数时，运算 $D_z^\nu f(z)$ 必须产生与普通 n重积分相同的结果； $D_z^\nu f(z)$ 及其 $n-1$ 阶导数在 $x = c$ 处必须同时为零；零阶性质：零阶运算保持函数不变 $D_z^0 f(z) = f(x)$；线性性：分数阶算子必须满足线性 $D_z^\nu [a f(x) + bg(x)] = aD_z^\nu f(x) + D_z^\nu g(x)$；复合（指标律）：任意阶积分的指数律 $D_z^\nu D_z^\mu f(x) = D_z^{\nu+\mu} f(x)$。

分数阶导数基于重复积分的扩展，其定义方式有两种：将分数阶积分延拓至负阶，或对分数阶积分求整数阶导数 [99]。分数阶导数没有唯一的定义 [198, 181, 214] （其记号也尚未标准化 [99, 43]）。

分数阶导数有多种定义（黎曼-刘维尔、卡普托、格林瓦尔德-列特尼科夫、里斯、韦尔、马尔绍、Caputo-Fabrizio、Yang、Chen、何等），这些定义并不等价 [133, 134]。卡普托导数的初始条件用整数阶导数的初值表示；当初始条件为零时，黎曼-刘维尔、卡普托和格林瓦尔德-列特尼科夫导数相同 [191]。大多数分数阶导数通过分数阶积分定义，因此导数具有一定的非局部行为 [105]。以下关系适用于所有类型的分数阶导数 [254]

$$\frac{d^{\alpha+\beta}}{dt^{\alpha+\beta}} = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\frac{d^\beta}{dt^\beta} = \frac{d^\beta}{dt^\beta}\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}.$$

最常用的是黎曼-刘维尔分数阶导数（例如用于微积分）、卡普托分数阶导数（例如用于物理学和数值计算）以及格伦瓦尔德-莱特尼科夫分数阶导数（例如用于信号处理和工程） [4, 43]。

Grigoletto & de Oliveira [82] 研究了微积分基本定理的推广——分数阶微积分基本定理（FTFC），适用于

黎曼-刘维尔、刘维尔、卡普托、韦尔和里斯导数的情形。

Baleanu 和 Fernandez [16] 在某些限制和准则下，考虑了将分数阶算子划分为若干大类的可能性。特别是，许多算子都可以视为 [60] 的特殊情形

$$ {}_{c}^{A}I_{x}^{\alpha,\beta} \int_{c}^{x} (x-t)^{\alpha-1} A\left((x-t)^{\beta}\right) f(t)dt, \qquad A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k $$

其中， c 是一个常数，通常取零或 ∞； α 和 β 是实部为正的复参数； $A(z)$是一个一般的解析函数，其系数 $a_k \in \mathbb{C}$ 可以依赖于 α 和 β； x 是一个大于 c 的实变量。

1.1 黎曼-刘维尔分数阶积分

黎曼-刘维尔（RL）分数阶导数和卡普托分数阶导数都基于 RL 分数阶积分；对于任意 $\alpha > 0$，该积分定义为 [150, 44]

$$ J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{1} $$

如果 $\alpha = 0$， $J_{a^+}^{0} = I$，则 I 是恒等算子。这里

$$ \Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} \exp(-\alpha) u^{\alpha-1} du $$

是欧拉伽马函数。当 $f(t)$ 是局部可积函数，且对于 $t \to 0$，其行为类似于 $O(t^{-\nu})$，其中 $\nu < \alpha$，则此积分存在。为了获得严格的数学严谨性，可以采用由可求和函数构成的勒贝格空间或由广义函数构成的索伯列夫空间框架 [75]。

RL 积分是柯西公式的推广，适用于 n重积分

$$ \int_{a}^{x} dx_1 \int_{a}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{a}^{x_{n-1}} dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x} (x-t)^{n-1} dt $$

利用以下关系

$$ (n-1)! = \prod_{k=1}^{n-1} k = \Gamma(n). $$

方程 (1) 是左侧RL 积分。右侧RL 积分写作

$$ J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{2} $$

RL 积分是沃尔泰拉型卷积积分的一种情况 [149]

$$K * f(x) = \int_a^b k(x-t)f(t)dt.$$

RL 积分具有半群性质（也称为可加性定律 [99]）：

$$J_{a^+}^{\alpha} J_{a^+}^{\beta} f(x) = J_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

由此可得交换性质 [149]: $J_{a^+}^{\beta} J_{a^+}^{\alpha} = J_{a^+}^{\alpha} J_{a^+}^{\beta}$。

当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 时，黎曼-刘维尔分数阶积分与经典定义一致。分数阶积分可提高函数的光滑性 [50]。

有时，RL 积分可以用初等函数表示，例如：

$$J_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(x-a)^{\alpha+\mu}.$$

刘维尔分数阶积分是黎曼-刘维尔分数阶积分的一种特殊情形[82]，它是通过对方程 (1) 和 (2) 作变换 $a \to -\infty$ 和 $b \to \infty$ 得到的：

$$J_{+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad J_{-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

1.2 黎曼-刘维尔分数阶导数

左、右黎曼-刘维尔分数阶导数定义为 [181]

$$D_{a^+}^{\alpha}[f(x)] = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt, & \alpha \in (0,1) \\ \dfrac{df(x)}{dt}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{3}$$

and

$$D_{b^-}^{\alpha}[f(x)] = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_x^b (t-x)^{-\alpha} f(t)dt, & \alpha \in (0,1) \\ \dfrac{df(x)}{dt}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

算子 $D_{a^+}^{\alpha}$是左逆，这意味着 $D_{a^+}^{\alpha} J_{a^+}^{\alpha} = I$, I是恒等算子。因此$D_{a^+}^{\alpha} J_{a^+}^{\alpha} f = f$，但黎曼-刘维尔意义下的分数阶微分并不满足无条件的半群性质：Diethelm [50] 给出了这样的例子： $D_{a^+}^{\alpha_1} D_{a^+}^{\alpha_2} f = D_{a^+}^{\alpha_2} D_{a^+}^{\alpha_1} f \neq D_{a^+}^{\alpha 1+\alpha_2} f$且$D_{a^+}^{\alpha_1} D_{a^+}^{\alpha_2} f \neq D_{a^+}^{\alpha_2} D_{a^+}^{\alpha_1} f = D_{a^+}^{\alpha 1+\alpha_2} f$。

Atangana 和 Secer [13] 给出了三角函数及某些特殊函数的黎曼-刘维尔导数表。幂函数的分数阶黎曼-刘维尔导数为

$$D_{a^+}^{\alpha} t^{\nu} = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\alpha)} t^{\nu-\alpha}$$

尤其是，常数的导数为 $D^{\alpha}_{a^+}1 = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$。

由于常数的分数阶黎曼-刘维尔导数不为零，因此添加常数会改变分数阶导数的大小。

Jumarie [110] 提出了一种修改方法，以消除这一缺点。他从一种基于分数阶差分的分数阶导数（*F*-导数）开始

$$f^{\alpha}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^{\alpha} f(x)}{h^{\alpha}}$$

基于阶数为 α 的分数阶差分 $\Delta^{\alpha} f(x), \quad \alpha \in \mathrm{R}, \quad 0 < \alpha \le 1$。

Jumarie 提出了对分数阶黎曼-刘维尔导数的修改

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (f(t) - f(0)) dt.$$

1.2.1 莱布尼茨公式

一阶导数的经典莱布尼茨公式（即当 $n \in \mathrm{N}$ 时）为

$$D^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [D^k g(x) D^{n-k} f(x)]$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 n 次可微函数。

分数阶导数不满足经典的莱布尼茨法则 [215, 217]。Osler 推导了莱布尼茨公式的推广形式 [176, 177]。

对于在 $(a-h, a+h)$ 上解析的函数，黎曼-刘维尔算子作用于函数乘积时的莱布尼茨公式可写为 [50]

$$D^n_{a^+}[fg](x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} \binom{n}{k} (D^k_{a^+} f)(x)(D^{n-k}_{a^+} g)(x) + \sum_{k=[n]+1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k_{a^+} f)(x)(J^{n-k}_{a^+} g)(x).$$

其中 $\lfloor \quad \rfloor$ 表示向下取整函数。Jumarie 研究了对不可微函数乘积进行微分的莱布尼茨公式 [113]。

1.2.2 法迪·布鲁诺公式（链式法则）

对于导数阶数足够高的函数 f 和 g，且 $n \in \mathrm{N}$[50, 44, 218]

$$D^n[g(f(\cdot))](x) = \sum (D^k g) \prod_{m=1}^{n} (D^m f(x)^{b_m}$$

其中求和遍历{1、2、.....、 n的所有划分；对于每个划分， k是其块的数量，而 b_j 是恰好包含 j 个元素的块的数量。

Tarasov [216] 分析了 Jumarie [112, 111,114] 提出的简化链式法则，并发现这些简化并非普遍有效。

1.2.3 分数阶泰勒展开

分数阶泰勒展开写作 [50, 188, 173]

$$f(x) = \frac{(x-a)^{n-m}}{\Gamma(n-m+1)} \lim_{z\to a+} J_a^{m-n} f(z) +$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^{k+n-m}}{\Gamma(k+n-m+1)} \lim_{z\to a+} D^k J_a^{m-n} f(z) + J_a^n D_a^n f(x).$$

1.2.4 对称空间导数

Vermeersch 和 Shakouri [227] 阐述了阶数介于 1 和 2 之间以及介于 0 和 1 之间的对称空间导数:

- $1 < \alpha < 2$。函数 $g(x)$ 在整个实轴上可积，其对称空间导数为

$$\frac{\partial^\alpha g}{\partial |x|^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x}\left[w_\alpha \star \frac{\partial g}{\partial x}\right]$$

  其中$\star$ 表示卷积， w_α 是一个未知核函数，其傅里叶像为 $W_\alpha = 1/|\xi|^{2-\alpha}$。经傅里叶反演可得

$$w_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp(j\xi x)d\xi}{|\xi|^{2-\alpha}} = \frac{|x|^{-(\alpha-1)}}{2\Gamma(2-\alpha)\cos[(2-\alpha)\frac{\pi}{2}]}.$$

  Thus

$$\frac{\partial^\alpha g}{\partial |x|^\alpha} = \frac{1}{2\Gamma(2-\alpha)\cos[(2-\alpha)\frac{\pi}{2}]} \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x')dx'}{|x-x'|^{\alpha-1}}.$$

- $0 < \alpha < 1$。函数 $g(x)$ 的对称空间导数为

$$\frac{\partial^\alpha g}{\partial |x|^\alpha} = w_\alpha \star \frac{\partial g}{\partial x}.$$

  核函数 w_α 的傅里叶像为 $W_\alpha = j\cdot sgn(\xi)/|\xi|^{1-\alpha}$。进行傅里叶反演后，作者最终得到

$$\frac{\partial^\alpha g}{\partial |x|^\alpha} = \frac{-1}{2\Gamma(1-\alpha)\cos[(1-\alpha)\frac{\pi}{2}]} \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-sgn(x)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x')dx'}{|x-x'|^{\alpha}}.$$

在 $\alpha = 1/2$ 的情况下，分数阶积分和导数也称为半积分和半导数 [207]。

1.3 Caputo 分数阶导数

左侧（${}_CD^{\alpha}_{a+}$）和右侧（${}_CD^{\alpha}_{b-}$）的 Caputo 意义分数阶导数通过黎曼-刘维尔分数阶积分 [82] $({}_CD^{\alpha}_{a+}f) = (J^{n-\alpha}_{a+}f_{(n)})(x)$ 和 $(-1)^n({}_CD^{\alpha}_{b-}f) = (J^{n-\alpha}_{b-}f_{(n)})(x)$ 定义。1948 年，M. Caputo 和 A.N. Gerasimov [65] 分别独立提出了这一概念；后来 Dzherbashyan & Nersesian [56] 也提出了这一概念。

Caputo 分数阶导数的主要区别在于，它先对函数求导，再计算积分；而在 Riemann–Liouville 方法中，则是对积分求导。

Caputo 分数阶导数定义为 [181]

$$D^{\alpha}_{\star}f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-x)^{-\alpha}\frac{df(x)}{dt}dt, & \alpha \in (0,1) \\ \dfrac{df(x)}{dt}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Caputo导数(5) 的定义比 Riemann–Liouville 导数 (3, 4) 的定义更严格，因为它要求导数 $df(x)/dt$ [75] 绝对可积。

Caputo 分数阶导数可视为对黎曼-刘维尔导数在时间原点处的正则化 [76]

$$D^{\alpha}_{\star}f(t) = D^{\alpha}f(t) - f(0^+)\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

并且满足作用于常数时结果为零这一性质。

Yuan & Agrawal 和 Singh & Chatterjee 提出了 Caputo 分数阶导数的其他定义 [50]。第一种方法基于引入辅助二元函数 $\phi:\ (0,\ \infty) \times [a,b] \to \mathrm{R}$，其定义为

$$\phi(w,x) = (-1)^{\lfloor n \rfloor}\frac{2\sin\pi n}{\pi}w^{2n-2\lceil n\rceil+1}\int_a^x f^{(\lceil n\rceil)}(\tau)e^{-(x-\tau)w^2}d\tau$$

其中 ⌈ ⌉表示上取整函数，最后

$$D^n_{\star a}f(x) = \int_0^{\infty}\phi(w,x)dw.$$

第二种方法是将给定函数的分数阶导数表示为在 $(0,\ \infty)$ 上的积分，其被积函数可由以下一阶初值问题的解得到

$$\frac{\partial\phi^{\star}(w,x)}{\partial x} = -w^{\frac{1}{n-\lceil n\rceil-1}}\phi^{\star}(w,x) + \frac{(-1)^{\lfloor n\rfloor}\sin\pi n}{\pi(n-\lceil n\rceil-1)}f^{(\lceil n\rceil)}(x)$$

满足初始条件 $\phi^{\star}(w,a) = 0$。因此

$$\phi^{\star}(w,x) = \frac{(-1)^{\lfloor n\rfloor}\sin\pi n}{\pi(n-\lceil n\rceil-1)}\int_0^x f^{(\lceil n\rceil)}(\tau)\exp(-(x-\tau)w^{\frac{1}{n-\lceil n\rceil-1}})d\tau$$

$$D^n_{\star a} f(x) = \int_0^\infty \phi^\star(w,x)dw.$$

1.4 矩阵方法

分数阶微积分的运算可以用矩阵 [182, 184] 表示。例如，借助上三角带状矩阵 $B_n^{(\alpha)}$，可以在等距离散网格的节点处近似计算左侧的黎曼-刘维尔导数或 Caputo导数 [182]

$$\left[v_n^{(\alpha)}\ v_{n-1}^{(\alpha)}\ \dots\ v_1^{(\alpha)}\ v_0^{(\alpha)}\right]^T = B_n^{(\alpha)}\ [v_n\ v_{n-1}\ \dots\ v_1\ v_0]^T$$

其中

$$B_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\tau^\alpha}\begin{bmatrix} \omega_0^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & \dots & \dots & \omega_{n-1}^{(\alpha)} & \omega_n^{(\alpha)} \\ 0 & \omega_0^{(\alpha)} & \omega_0^{(\alpha)} & \dots & \dots & \omega_{n-1}^{(\alpha)} \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \omega_0^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

类似地，右侧的黎曼-刘维尔或卡普托分数阶导数可以借助相应的下三角带状矩阵进行近似。

1.5 Caputo与Fabrizio 分数阶导数

Caputo与Fabrizio [26, 27] 提出了不含奇异核 [142] 的分数阶导数：他们在卡普托导数的定义中，将核函数 $(t-\tau)^{-\alpha}$ 替换为不存在奇异性的函数 $\exp(-\alpha/(1-\alpha))$，并将因子 $1/\Gamma(1-\alpha)$ 替换为 $M(\alpha)/(1-\alpha)$。

例如，$\alpha \in [0,1]$ 的分数阶时间导数以及函数 $f \in L^1(-\infty, b)$ 为

$$\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{1-\alpha}\int_{-\infty}^t (f(t)-f(\tau))\exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]d\tau$$

其中 $M(\alpha)$ 是归一化函数，例如 $M(0) = M(1) = 1$。

1.6 GC& GRL导数

Zhao & Luo [264] 建议根据不同的核——奇异核与非奇异核——对分数阶导数进行分类（例如，黎曼-刘维尔、卡普托、Caputo-Fabrizio、Atangana-Baleanu[11][1]，其核为

$$k(x,\alpha) = E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}x\right),$$

Atangana-Gomez [12] 使用核

$$k(x,\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}x^2\right)$$

[1]含有 Atangana-Baleanu 算子的方程与分布阶导数有关 [219]。

采用拉伸指数核的导数 [210]（这在利用磁共振成像 [19] 研究人脑中的水扩散时很有用）

$$k(x,\alpha)=\exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}x^{\beta}\right),\quad \beta>0,\quad \beta\neq 1)$$

分为两类——GC（一般的、Caputo 意义下的）和 GRL（一般的、黎曼-刘维尔意义下的）导数，它们遵循 V. Volterra 在其“遗传一般定律”[228]中提出的原则：线性原理、不变性原理、记忆衰减原理和相容性原理。相容性原理要求以下两个极限成立：$D_{\alpha}f(x)\ \to f(x)$ 当 $\alpha\to 0$时，以及 $D_{\alpha}f(x)\ \to f_{\prime}(x)$ 当 $\alpha\to 1$时。

非局部性原理由 Tarasov [213]提出。

1.6.1 GC导数

Zhao & Luo [264] 将 GC导数定义为

$$D_{a,\alpha}^{GC}f(x)=N(\alpha)\int_{a}^{x}k(x-t,\alpha)\frac{df(t)}{dt}dt$$

记忆衰减原理要求，遥远的时间和位置影响较小：$k(x-t,\alpha)$ 随着 x 增大而减小，并且 $k(x-t,\alpha)$ 在 $x\to\infty$时 $\to 0$。

相容性原理要求，当 $\alpha\ \to\ 0$时，$N(\alpha)/k(x,\alpha)\ \to\ 1$；并且当 $\alpha\to 1$时，$N(\alpha)/k(x,\alpha)\ \to\delta(x)$。

1.6.2 GRL导数

$$D_{a,\alpha}^{RL}f(x)=\frac{d}{dx}N(\alpha)\int_{a}^{x}k(x-t,\alpha)f(t)dt.$$

$k(x-t,\ \ \alpha)$ 和 $N(\alpha)$ 的限制相同。

1.7 马尔绍-哈达玛分数阶导数

马尔绍方法基于利用发散积分的 Hadamard有限部分，将分数阶积分解析延拓至负阶（Hadamard 的想法是忽略积分中的无界贡献，并将剩余的有限表达式 [50] 赋予一个值）。

下限为 a 的 Marchaud 分数阶导数为

$$(M_{a+}^{\alpha}f)(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}}dy$$

且上限为 b

$$(M_{b-}^{\alpha}f)(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}}dy.$$

Marchard 方法是将 RL 积分扩展到 $\alpha < 0$

$$(J_+^{-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty y^{-\alpha-1} f(x-y) dy \tag{6}$$

并从积分式 (6) 中减去发散部分

$$\int_\epsilon^\infty y^{-\alpha-1} f(x-y) dy = \frac{f(x)}{\alpha \epsilon^\epsilon}$$

最终得到

$$(M_+^\alpha f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1)}{\Gamma(-\alpha)} \int_\epsilon^\infty \frac{f(x) - f(y)}{y^{\alpha+1}} dy. \tag{7}$$

将定义 (7) 扩展到 $\alpha > 1$ [99] 情形有两种方法:

1. 将 (7) 应用于 $n < \alpha < n+1$ 时的 n 阶导数 $d^n f/dx^n$ 。
2. 将 $f(x-y) - f(x)$ 视为一阶差分，并推广为 n 阶差分（差商）

$$(\Delta_h^n f)(x) = (\mathcal{I} - Th)^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh) \tag{8}$$

其中 I 是恒等算子，而 $T_h = f(x-h)$ 是平移算子。

因此，Marchard 分数阶导数对于 $0 < \alpha < n$ 可写为

$$(M_+^\alpha f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{C_{\alpha,n}} \int_\epsilon^\infty \frac{\Delta_y^n f(x)}{y^{\alpha+1}} dy$$

其中

$$C_{\alpha,n} = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-y})^n}{y^{\alpha+1}}.$$

1.8 Grünwald-Letnikov 导数

Grünwald 于 1867年、Letnikov [132] 于 1868年分别独立提出的方法，基于使用差商 (8) 的极限，这与 $n \in \mathrm{N}$，$f \in C^n[a,b]$，　$a < x \le b$ 导数的经典定义类似

$$\tilde{D}^n f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^n f)(x)}{h^n}$$

以及推广到任意 n的情形。

由于 $\binom{n}{k} = 0$ 若 $n \in \mathrm{N}$ 且 $n < k$，表达式 (8) 等价于

$$(\Delta_h^n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh). \tag{9}$$

当 $n > 0$ [69] 时，对于任意有界函数，级数 (9) 一致收敛。

使用 (9) 会引出两个问题 [50]: 函数 f需要定义在 $(\infty, b]$ 上；函数 f应满足使级数收敛的条件。

通过引入一个新函数 $f^\star$，这些问题得到了解决

$$f^\star = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & x \in (-\infty, a) \end{cases}$$

该函数用于替代原函数 f。

此外，还假设在 h 趋于零时，只考虑阶数为 n 的 Grünwald-Letnikov 分数阶导数，其定义为

$$\tilde{D}_a^n = \lim_{N \to \infty} \frac{\Delta_{h_N}^n f(x)}{h_N^n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh_N). \tag{10}$$

根据极限是逐点取值还是在适当的巴拿赫空间 [99]的范数下取值, Grünwald-Letnikov 导数称为逐点或强导数。

二项式系数可以推广到非整数参数

$$(-1)^j \binom{q}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q-j+1)} = \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)}.$$

（左侧）Grünwald-Letnikov 导数可以写成（$nh = x - a$）

$$\tilde{D}_a^\alpha f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1) f(x - kh)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha - k + 1)}$$

右侧（$nh = b - x$）则写成

$$\tilde{D}_b^\alpha f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1) f(x + kh)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

函数 f的 n 阶 Grünwald-Letnikov 积分写成

$$\tilde{J}_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lim_{N \to \infty} h_N^n \sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)} f(x - kh_N).$$

1.9 里斯分数阶算子

里斯意义下的 α 阶分数阶积分（也称为里斯势）定义为傅里叶卷积乘积

$$(\mathcal{I}^\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathcal{R}^n} \boldsymbol{K}_\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

其中 $Re(\alpha) > 0$。里斯核

$$\boldsymbol{K}_\alpha = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-n}, & \alpha - n \neq 0, 2, \ldots, \\ \|\boldsymbol{x}\|^{\alpha-n} \ln\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\right), & \alpha - n = 0, 2, \ldots \end{cases}$$

其中 $\gamma_n(\alpha)$ 定义为

$$\frac{\gamma_n(\alpha)}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha/2)} = \begin{cases} \left[\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\right]^{-1}, & \alpha - n \neq 0, 2, \ldots, \\ (-1)^{\frac{n-\alpha}{2}} 2^{-1} \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}\right), & \alpha - n = 0, 2, \ldots. \end{cases}$$

里斯分数积分为 [82]

$$(\mathcal{I}^\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\alpha/2)} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) |x - \xi|^{\alpha-1} d\xi.$$

里斯分数阶导数为 [43]

$$D^\alpha[f(x)] = -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[\int_{-\infty}^{x} (x-\xi)^{n-\alpha_n-1} f(\xi) d\xi + \int_{x}^{\infty} (x-\xi)^{n-\alpha_n-1} f(\xi) d\xi \right].$$

里斯导数是拉普拉斯算子的推广 [254]

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + \frac{d^\alpha}{d(-x)^\alpha} \right], \quad \alpha \neq 1.$$

里斯导数可以用马尔绍导数表示

$$D^\alpha[f(x)] = -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)} [(M_+^\alpha f)(x) + (M_-^\alpha f)].$$

相关的 Riesz-Feller 导数 [78] 还包含一个附加参数——“偏斜度” θ

$$D_\theta^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \times \left[\sin\left[(\alpha+\theta)\frac{\pi}{2}\right] \int_0^\infty \frac{f(x+\xi)f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi + \sin\left[(\alpha-\theta)\frac{\pi}{2}\right] \int_0^\infty \frac{f(x-\xi)f(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \right].$$

参数 α 和 θ 的允许区域最终呈现为平面 $\{\alpha, \theta\}$中的一个菱形，其顶点为 (0,0)、(1,1)、(2,0)、(1, -1)，称为“Feller-Takayasu 菱形” [76, 159]。

1.10 韦尔分数阶导数

韦尔导数基于傅里叶空间 [69] 中的微分推广——将 $[-\pi,\pi]$ 上以傅里叶级数表示的绝对可积函数的 n阶整数阶导数（ik）^{n} 推广到非整数阶 n。

韦尔分数阶导数定义为 [148]

$$D_{\pm}^{\alpha}=\begin{cases}\pm\dfrac{d}{dx}[I_{\pm}^{1-\alpha}f(x)] & 0<\alpha<1,\\ \dfrac{d^2}{dx^2}[I_{\pm}^{2-\alpha}f(x)] & 1<\alpha<2,\end{cases}$$

其中，韦尔分数阶积分为（$\mu>0$）

$$I_{+}^{\mu}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{-\infty}^{x}(x-\chi)^{\mu-1}f(\chi)d\chi.$$

1.11 Erdélye-Kober 分数阶算子

对于良态函数 $\phi(t)$，Erdélye-Kober 积分定义为 [143, 178]

$$I_{\eta}^{\gamma,\mu}\phi(t)=\frac{\eta}{\Gamma(\mu)}t^{-\eta(\mu+\gamma)}\int_{0}^{t}\tau^{\eta(\gamma+1)-1}(t^{\eta}-\tau^{\eta})^{\mu-1}\phi(\tau)d\tau,$$

其中 $\mu>0,\quad \eta>0,\quad \gamma\in\mathrm{R}$。

在特殊情形 $\gamma=0,\ \eta=1$ Erdélye-Kober 分数阶积分与阶数为 μ 的黎曼-刘维尔分数阶积分的关系为

$$I_{1}^{0,\mu}\phi(t)=\frac{t^{-\mu}}{\Gamma(\mu)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\mu-1}\phi(\tau)d\tau=t^{-\mu}J^{\mu}\phi(t).$$

当 $n-1<\mu<n,\quad n\in\mathrm{N}$ 时，Erdélye-Kober 分数阶导数定义为

$$D_{\eta}^{\gamma,\mu}\phi(t)=\prod_{j=1}^{n}\left(\gamma+j+\frac{1}{\eta}t\frac{d}{dt}\right)(I_{\eta}^{\gamma+\mu,n-\mu}\phi(t)).$$

当 $\mu=0$ 时，Erdélye-Kober 分数阶导数退化为恒等算子

$$D_{\eta}^{\gamma,0}\phi(t)=\phi(t)$$

并且，对于 $\eta=1$ 和 $\gamma=-\mu$，其与 RL 分数阶导数的关系为

$$D_{\eta}^{\gamma,\mu}\phi(t)=t^{\mu}D_{RL}^{\mu}\phi(t).$$

1.12 分数阶积分和导数的解释

整数阶导数和积分具有清晰的物理和几何解释，这使它们在实践中的应用更加简便。人们提出了许多关于分数阶导数和积分的不同解释 [100]：概率解释 [208, 222, 221],几何解释 [18, 17, 162, 40], 物理解释 [162, 40, 169, 194, 97]。

然而，正如 Podlubny [183], 所指出的：“自从出现微分以及任意（不一定是整数）阶的概念以来，300 多年来，人们一直没有找到对这些运算可接受的几何解释和物理解释。”

Teneiro Machado [221] 将 $x(t)$的格伦瓦尔德–莱特尼科夫导数写作

$$D^{\alpha}[x(t)] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma(\alpha,k)x(t-kh)\right], \quad \gamma(\alpha,k) = (-1)^{k}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}$$

其中h 是时间增量。作者指出

$$\gamma(\alpha,0) = 1, \quad -\sum_{k=0}^{\infty}\gamma(\alpha,k) = 1$$

因此，“现在”（P）由 $x(t)$构成，其概率为 1；而“过去/未来”（PF）的整体则由样本 $x(t)$、 $x(t-h)$、 $x(t-2h)$，.....构成；每个样本都赋予概率 $-\gamma(\alpha,\ k)$。

Nigmatullin [169, 170] 从分形康托集的角度解释了分数阶积分。作者考察了物理系统状态的演化

$$J(t) = \int_{0}^{t} K(t,\tau)f(t)d\tau$$

其中，记忆函数 $K(t,\tau)$ $f(t)$ 表示系统中某些状态的损失；积分分数阶指标等于康托尔集的分形维数。

Podlubly [183] 和 Podlubny 等人 [185] 提出了对左侧（方程 (1)）和右侧（方程 (2)）黎曼-刘维尔积分，以及黎曼-刘维尔（方程 (3)–(4)）和卡普托（方程 (5)）导数的几何解释，也对里斯势作出了几何解释；里斯势是左侧和右侧黎曼-刘维尔分数阶积分之和

$$R_{b}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{a}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt + \int_{x}^{b}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt\right]$$

以及费勒势

$$\Phi^{\alpha}f(x) = cJ_{a^{+}}^{\alpha}f(x) + dJ_{b^{-}}^{\alpha}f(x).$$

Podlubny 的几何解释基于添加第三个维度

$$g_{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[x^{\alpha} + (x-t)^{\alpha}]$$

到有序对 (t, f (x))，并将三维直线 $(t,\ g_x(t),\ f(t))$ 视为“栅栏”的顶边，它在 (g,f) 平面上投下阴影。

Tarasov [57] 提出了 RL 和 Caputo 非整数阶导数的“信息学”（“计算机科学”）解释，该解释利用整数阶导数的无限序列进行重构。这类重构基于科捷利尼科夫定理（亦称采样定理），该定理由弗拉基米尔·科捷利尼科夫于1933年提出，克劳德·香农也于1949年提出：在某些限制条件下，函数 $f(t)$ 可根据惠特克-香农插值公式，从其采样值 $f[n] = f(nT)$ 中恢复。作者强调，整数阶导数序列的无限性在表示描述非局部性和记忆效应的分数阶导数方面起着基础作用。

Gómez-Aguilar 等人 [70] 利用 RC 电路分析了 Caputo 微分，其中分数阶形式的欧姆定律和基尔霍夫定律写作

$$v(t) = \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma q}{dt^\gamma}, \qquad R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

其中，q 是电荷，v 是电压，R 是导体的电阻，C是电容。引入参数 σ 是为了保持量纲一致；它表征分数阶结构（表现出介于保守性（电容器）和耗散性（电阻器） [70]之间行为的元件）。作者推导出了 RC 电路的分数阶微分方程

$$\frac{d^\gamma}{dt^\gamma} + \frac{1}{\tau_\gamma}q(t) = \frac{C}{\tau_\gamma}v(t), \qquad \tau_\gamma = \frac{RC}{\sigma^{1-\gamma}}$$

其中，τ_γ 是时间常数。Gómez-Aguilar 等人认为，微分与记忆效应有关，而记忆效应反映了系统的内禀耗散。

Sierociuk 等人 [204] 利用 RC 网络对分数阶扩散进行建模，其依据是热传导与电传导之间的类比。作者表明，传输线中电容器和电阻器的方程可用于推导扩散方程；通过额外并联在电容器两端的电阻器来表示热量损失。

Carpinteri 等人 [29] 利用体弹簧连接物体中非相邻的点，并假设刚度随材料点之间距离的增大而衰减，从而探讨了 Marchaud 分数阶导数的力学解释。

1.13 局部分数阶导数

分数阶导数是非局部的。多项研究提出了局部变体[259]，可用于研究分形函数和多重分形函数的逐点行为，例如描述具有类分形微观结构 [29] 的材料中的应力和变形模式，或湍流流体的速度场 [128]。

Kolwankar 与 Gangal [127, 128, 129, 126] 通过黎曼-刘维尔导数定义导数如下：

$$\mathfrak{D}^q f(y) = \lim_{x \to y} \frac{D^q(f(x) - f(y))}{(x-y)^q}$$

如果极限存在且有限。

局部分数阶泰勒公式写作 [242]

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(n)(y)}}{\Gamma(1+n)}(x-y)^n\frac{\mathfrak{D}^{\alpha}}{\Gamma(n!+\alpha)}(x-y)^{\alpha}+R_{\alpha}(x,y).$$

Yang 等人 [249, 266] 使用了类似的定义

$$\mathfrak{D}^{(k)}f(\tau)=\lim_{\tau\to\tau_0}\frac{f(\tau)-f(\tau_0)}{\tau^k-\tau_0^k}.$$

Chen 等人 [39] 提出了基于差商积分（IDQ）或奇异差商（SIDQ）的局部导数。例如，右侧 SIDQ 局部导数是

$$\mathfrak{D}^{\alpha}f(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{h\to 0_+}\int_0^1(1-t)^{-\alpha}\frac{f(th+y)-f(y)}{h^{\alpha}}dt.$$

局部分数阶导数本质上是分形导数 [36, 90]。与分数阶微积分的纯分析方法不同，分形微积分遵循物理几何方法；为避免混淆，建议将后者称为尺度化微积分 [175]。

时间分形上的分形（“Hausdorff”）导数定义为 [92]

$$\frac{\partial f}{\partial t^{\sigma}}=\lim_{t_B\to t_A}\frac{f(t_B)-f(t_A)}{(t_B)^{\sigma}-(t_A)^{\sigma}}$$

其中，σ 是时间分形维数。

更一般的定义表述为 [37, 10]

$$\frac{\partial^{\tau} f}{\partial t^{\sigma}}=\lim_{t_B\to t_A}\frac{f^{\tau}(t_B)-f^{\tau}(t_A)}{(t_B)^{\sigma}-(t_A)^{\sigma}}$$

由于分形导数是局部算子，因此可以采用整数阶微分方程的标准数值方法求解分形导数方程 [38]。所谓的“相容”分数阶导数也具有类似的性质。

1.13.1 “相容”分数阶导数

大多数分数阶导数不具备理想的性质 [2, 118, 117]：常数的导数不为零；不满足乘积法则 $D^{\alpha}(fg)=fD^{\alpha}(g)+gD^{\alpha}f$；不满足商法则 $D^{\alpha}(f/g)=(gD^{\alpha}(f)-fD^{\alpha}(g))/g^2$；不满足链式法则 $D^{\alpha}(fg)=f^{\alpha}(g(t)g^{\alpha}(t)$；通常也不满足 $D^{\alpha}D^{\beta}f=D^{\alpha+\beta}f$。

Khalil 等人[118] 和 Katugampola [117, 116] 提出了所谓的基于「相容」极限的 [7] 导数

$$D^{\alpha}f(t)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\epsilon},\qquad 0<\alpha<1,$$

and

$$D^{\alpha}f(t)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(te^{\epsilon t^{-\alpha}})-f(t)}{\epsilon},\qquad 0<\alpha<1.$$

由于相容导数是对经典导数定义的扩展，因此它遵循乘积法则、商法则、线性性质，并且常数的导数为零；这些性质也适用于经典微积分的一些扩展，例如罗尔定理或中值定理 [105]。

2 截断分数阶微积分

Sabzikar等人 [195] 提出了分数阶微积分的一种变体，其中幂律受到指数因子的截断。具有指数截断幂律跳跃的随机游走模型收敛于一种 tempered稳定运动 [31]。这种截断分数阶扩散可用于地球物理 [157, 263] 和金融 [30] 问题。

作者考虑了参数 α的两个取值区间:

- $0<\alpha<1$。截断分数阶导数 $\partial^{\alpha,\lambda}_{x}$定义为傅里叶变换为 $[(\lambda+ik)^{\alpha}-\lambda^{\alpha}]\hat{}f(k)$ 的函数，在实空间中可写为

$$\partial^{\alpha,\lambda}_{x}f(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\infty}(f(x)-f(x-y))e^{-\lambda y}y^{-\alpha-1}dy.$$

  负截断分数阶导数 $\partial^{\alpha,\lambda}_{-x}$定义为傅里叶变换为 $[(\lambda-ik)^{\alpha}-\lambda^{\alpha}]\hat{}f(k)$的函数，在实空间中可写为

$$\partial^{\alpha,\lambda}_{-x}f(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{\infty}(f(x)-f(x+y))e^{-\lambda y}y^{-\alpha-1}dy.$$

- $1<\alpha<2$。截断分数阶导数 $\partial^{\alpha,\lambda}_{x}$定义为傅里叶变换为 $[(\lambda+ik)^{\alpha}-\lambda^{\alpha}-ik\alpha\lambda^{\alpha-1}]\hat{}f(k)$的函数，在实空间中为

$$\partial^{\alpha,\lambda}_{x}f(x)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{0}^{\infty}(f(x-y)-f(x)+yf'(x))e^{-\lambda y}y^{-\alpha-1}dy.$$

  负温和分数阶导数 $\partial^{\alpha,\lambda}_{-x}$定义为其傅里叶变换为 $[(\lambda-ik)^{\alpha}-\lambda^{\alpha}+ik\alpha\lambda^{\alpha-1}]\hat{}f(k)$ 的函数，在实空间中为

$$\partial^{\alpha,\lambda}_{-x}f(x)=\frac{\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{0}^{\infty}(f(x+y)-f(x)-yf'(x))e^{-\lambda y}y^{-\alpha-1}dy.$$

Sabzikar等人将正温和积分定义为

$$\mathfrak{I}_{+}^{\alpha,\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} f(u)(x-u)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-u)} du$$

以及负温和积分为

$$\mathfrak{I}_{-}^{\alpha,\lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} f(u)(u-x)^{\alpha-1} e^{-\lambda(u-x)} du$$

称为 RL 温和积分，因为当 $\lambda = 0$ 时，它们就化为通常的黎曼–刘维尔积分。

作者将 RL 温和分数阶导数 $(D \pm i\lambda)^{\alpha} \hat{} f(k)$ 的函数，可表示为

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha,\lambda} f(x) = \begin{cases} \partial_{\pm x}^{\alpha,\lambda} f(x) + \lambda^{\alpha} f(x) & 0 < \alpha < 1 \\ \partial_{\pm x}^{\alpha,\lambda} f(x) + \lambda^{\alpha} f(x) \pm \alpha\lambda^{\alpha-1} f'(x) & 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

显然，积分和微分是互逆算子：

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha,\lambda} \mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha,\lambda} f(x) = f(x), \quad \mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha,\lambda} \mathcal{D}_{\pm}^{\alpha,\lambda} f(x) = f(x).$$

积分和微分算子具有半群性质

$$\mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha,\lambda} \mathfrak{I}_{\pm}^{\beta,\lambda} f = \mathfrak{I}_{\pm}^{\alpha+\beta,\lambda} f, \quad \mathcal{D}_{\pm}^{\alpha,\lambda} \mathcal{D}_{\pm}^{\beta,\lambda} f = \mathcal{D}_{\pm}^{\alpha+\beta,\lambda} f.$$

3 分数阶微分方程

一般而言，分形介质不能视为连续介质。要用连续模型 [216]描述分形介质，必须使用非整数维空间 [174] 。分数阶微分方程 [53, 167, 121, 50] 是非局部的（即能够纳入记忆效应和空间相关性的影响），并且可以用不同但在数学上等价的形式来表述。Mainardi 等人 [155] 比较了标准柯西问题的分数阶推广

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{R}_{\mathbf{0}}^{+}, \qquad \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{0}^{+}) = \mathbf{u_0}(\mathbf{x}). \tag{11}$$

式 (11) 的基本解（或格林函数），即满足初始条件 $u_0(x) = \delta(x)$ 的解，是高斯概率密度函数

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}.$$

格林函数具有标度性质 $u(x, t) = t^{1/2} U(x/t^{1/2})$, $U(x)$ 是约化格林函数。

柯西问题 (11) 等价于积分微分方程

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \right] d\tau$$

其中包含了初始条件。

分数阶扩散方程可以用黎曼-刘维尔导数$D^{1-\beta}$ (β 为实数 $0 < \beta < 1$)表示

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D^{1-\beta} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{12}$$

或用卡普托导数 $D^{\beta}{}_{\star}$

$$D^{\beta}_{\star} u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{13}$$

方程 (12) 和 (13) 等价于基于 β 阶黎曼-刘维尔分数阶积分的方程

$$u(x,t) = u_0(x) + J^{\beta} \left[\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \right]. \tag{14}$$

请注意，方程 (12) 可通过对 (14) 求导得到，而方程 (14) 可通过对 (13) 进行分数阶积分推导得出。

Metzler 等人 [158] 和 Saichev 与 Zaslavsky [196]，研究了方程 (12)；Gorenflo 等人 [80, 79] 和 Mainardi [146, 147]，研究了方程 (14)；Schneider 与 Wyss [200] 使用梅林变换研究了积分微分方程 (14)。

Mainardi 等人 [155] 通过依次应用傅里叶

$$\mathcal{F}\{v(x); k\} = \hat{v}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} v(x) dx, \qquad k \in \mathbf{R}$$

和拉普拉斯

$$\mathcal{L}\{w(t); s\} = \tilde{w}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} w(t) dt, \qquad s \in \mathbf{C}$$

变换，求解方程 (13) 的基本解。因此，傅里叶-拉普拉斯域中的格林函数可确定为

$$\hat{\tilde{u}}(k,s) = \frac{s^{\beta-1}}{s^{\beta} + k^2}, \qquad 0 < \beta \le 1, \qquad \mathcal{R}(s) > 0, \qquad k \in \mathbf{R}. \tag{15}$$

确定时空域中的格林函数$u(x,\ t)$有两种策略，取决于对表达式（15） [155]执行求逆的顺序:

1）先对傅里叶变换求逆，得到 $\tilde{u}(x,\ s)$，然后对拉普拉斯变换求逆[146, 147]；或 2）先对拉普拉斯变换求逆，得到$\hat{u}(k,\ t)$，然后对傅里叶变换求逆 [81, 151]。

Nieto [168] 研究了具有空间黎曼–刘维尔导数、满足初始条件或周期边界条件的线性分数阶微分方程，并利用 Mittag-Leffler 函数的性质推导出最大值原理。Compte [42] 和 West 等人 [235]研究了用于超扩散（莱维飞行扩散）的方程

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$$

其中，分数阶 n 维拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}}$ 通过对空间变量 [53]进行傅里叶变换来定义

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\frac{\gamma}{2}} g(x)] = |\omega|^{\gamma} \mathcal{F}[g(x)].$$

Luchko [144]针对有界开域 $G \times (0.T),\ G \subset R^n$上带有 Caputo导数的时间分数阶扩散方程的初边值问题，推导出了最大值原理。

该方程可通过复变换 [137, 94, 138] $s = x^S/\Gamma(1+\alpha)$转化为偏微分方程[2] 例如，热传导方程（α 是分形介质的分形维数）

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \left(\lambda \frac{\partial^{\alpha} T}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

转化为方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial s} \right).$$

引入玻尔兹曼变量 [140]$\chi = s/\sqrt{t} = x^{\alpha}/\sqrt{t}\Gamma(1+\alpha)$ 后，可进一步将其转化为常微分方程

$$\frac{d}{d\chi} \left(\lambda \frac{dT}{d\chi} \right) + \frac{\chi}{2} \frac{dT}{d\chi}.$$

对于采用 Jumarie 修正的黎曼-刘维尔导数的一般分数阶微分方程

$$f(u, u_t^{\alpha}, u_x^{\beta}, u_y^{\gamma}, u_z^{\lambda}, u_t^{2\alpha}, u_x^{2\beta}, u_y^{2\gamma}, u_z^{2\lambda}, \dots) = 0$$

何和李 [95] 提出了以下变换

$$s = \frac{qt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad X = \frac{px^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}, \quad Y = \frac{ky^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)}, \quad Z = \frac{lz^{\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)}$$

[2]在多维情形下，如果变量 t, x, y, z 满足以下约束条件 [94] (q, p, k, l 为常数)，则可以进行这样的变换

$$\xi = \frac{qt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{px^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{ky^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} + \frac{lz^{\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)}.$$

从而将分数阶导数转换为经典导数

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = q\frac{\partial u}{\partial s}, \quad \frac{\partial^{\beta} u}{\partial x^{\beta}} = p\frac{\partial u}{\partial X}, \quad \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial y^{\gamma}} = k\frac{\partial u}{\partial Y}, \quad \frac{\partial^{\lambda} u}{\partial z^{\lambda}} = l\frac{\partial u}{\partial Z}.$$

Babusci 等人 [14] 讨论了微分方程与伪算子理论 [220, 202] 及广义积分变换之间的关系。

3.1 分布阶微分方程

分布阶微分方程（DODE）是分数阶微分方程
[165, 253, 33, 34, 35, 125, 24, 77, 153]中的一个特殊类别。Chechkin 等人 [32] 讨论了 DODE 的自然形式和修正形式，并指出，后者与连续性方程以及通量的延迟线性响应方程相结合时，能够对先前时刻过程的记忆效应作出描述，并具有热力学解释。DODE 用于描述加速亚扩散、减速超扩散，或短时间内反常行为向长时间内正常行为的转变。例如，Metzler 和 Klafter [159] 考虑了用于描述具有对数时间依赖 $\left\langle x^2(t)\right\rangle \propto \log^k t$ 的超慢扩散的 DODE，其中包括所谓的 Sinai 扩散（$k = 4$）。

分布阶微分的概念与变阶分数阶算子相近，后者可用于研究黏弹性、蛋白质的反应动力学、电流变流体以及损伤建模 [71, 41, 197]。

分布阶微分方程的构建有两种方法：1）直接方法——不指定新变量；2）自变量方法——将阶视为某个自变量的函数。

Mainardi 等人 [155] 研究了分布阶分数阶扩散方程

$$\int_0^1 b(\beta)[D^{\beta} u(x,t)]d\beta = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad b(\beta) \geq 0, \quad \int_0^1 b(\beta)d\beta = 1 \tag{16}$$

其中 $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$ 以及初始条件 $u(x,\ 0^+) = \delta(x)$。权函数 $b(\beta)$ 称为阶密度。作者使用傅里叶变换和拉普拉斯变换，获得了类似于单阶情形（15）的基本解

$$\left[\int_0^1 b(\beta)s^{\beta}d\beta\right]\hat{\hat{u}}(k,s) - \int_0^1 b(\beta)s^{\beta-1}d\beta = -k^2\hat{\hat{u}}(k,s)$$

and

$$\hat{\hat{u}}(k,s) = \frac{B(s)/s}{B(s)+k^2}, \qquad k \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{s}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{b}(\beta)\mathbf{s}^{\beta}\mathbf{d}\beta. \tag{17}$$

当 k 较小时，方程（17）可近似写为

$$\hat{\hat{u}}(k,s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{k^2}{B(s)} + \ldots\right)$$

二阶矩写作

$$\tilde{\mu_2}(s) = -\frac{\partial^2}{\partial k^2}\hat{\tilde{u}}(k=0,s) = \frac{2}{B(s)}. \tag{18}$$

分布阶微分方程的特殊情形是双阶分数阶方程 [32]

$$b(\beta) = b_1\delta(\beta-\beta_1)+b_2\delta(\beta-\beta_2), \quad 0<\beta_1<\beta_2\le 1, \quad \beta_1>0, \beta_2>0, \quad \beta_1+\beta_2=1.$$

对于慢扩散（幂律增长，$b(\beta) = b_1\delta(\beta-\beta_1) + b_2\delta(\beta-\beta_2)$）和超慢扩散（对数增长，$b(\beta) = 1$）的情形，其渐近行为可由（18）得出。其中，$\tilde{\mu_2}(s) = 2/(b_1 s^{\beta_1+1} + b_2 s^{\beta_2+1})$，而 $\tilde{\mu_2}(s) = 2\ln s/s(s-1)$。

分布阶方程能够描述更复杂的介质。分布阶时间分数阶扩散方程（16）可能更灵活地表征局部现象，而分布阶空间分数阶扩散方程则更适合表征空间变化 [25]。

3.2 特殊函数

与经典情形类似，也有与微分方程相关的特殊函数（例如贝塞尔函数、柱函数、经典正交多项式、艾里函数等） [130]。分数阶微积分中最重要的函数是 Mittag-Leffler 函数 [86], H函数 [98, 156, 124], 赖特函数 [154, 152], 广义洛梅尔-赖特函数 [187]。Mittag-Leffler 函数甚至被称为分数阶微积分的“女王”函数 [124]。

3.2.1 Mittag-Leffler 函数

黎曼-刘维尔导数的特征函数是方程 [99] 的解

$$D_{0+}^{\alpha}[f(x)] = \lambda f(x)$$

其中 λ 是特征值。特征函数为 $f(x) = x^{1-\alpha}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha})$，其中

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^K}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{19}$$

是广义 Mittag-Leffler 函数（也称为维曼函数 [203]）。

阶数为 α 和 β 的导数更一般的特征值方程为

$$D_{0+}^{\alpha,\beta}[f(x)] = \lambda f(x)$$

解为 [99] $f(x) = x^{(1-\beta)\ 1-\alpha)}E_{\alpha,\ \alpha+\beta}(\lambda x^{\alpha})$。

特殊情形的方程为 $D^{\alpha,\ 1}_{0+}[f(x)] = \lambda f(x)$，其特征函数为 $f(x) = E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha})$。

单参数米塔格-莱夫勒函数是当 $\beta=\alpha$ 时式（19）的特例。

显然 [50],

$$E_{0,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

还有其他特殊情形，例如 [86] $E_2(-x^2) = E_{2,1}(-x^2) = \cos(x)$； $E_2(x^2) = E_{2,1}(x^2) = \cosh(x)$；当 $x > 0$ $E_{1/2}(x^{1/2}) = E_{1/2}(x^{1/2}) = (1 + erf(x))\exp(x^2)$ 时；对于$x \in \mathbb{C}$ 和 $r \in \mathbb{N}$

$$E_{1,r} = \frac{1}{x^{r-1}} \left(\exp(x) - \sum_{k=0}^{r-2} \frac{x^k}{k!} \right);$$

$E_3(x) = 1/2[e^{x^{1/3}} + 2e^{-1/2x^{1/3}} \cos(\sqrt{3}/2x^{1/3})]$； $E_4(x) = 1/2[\cos(x^{1/4}) + \cosh(x^{1/4})$]其中 $erf(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x \exp(-t^2)dt$。

Mittag-Leffler函数 E_1 满足函数关系 [50, 86] $E_1(x - y) = E_1(x)/E_1(y)$，以及参数不同的两个Mittag-Leffler 函数之间的关系 $E_{n_1,n_2}(x) = xE_{n_1,n_1+n_2}(x) + 1/\Gamma(n_2)$。请注意，常用关系$E_\alpha(a(t+s)^\alpha) = E_\alpha(at^\alpha)E_\alpha(as^\alpha), t, s \geq 1$仅在 $\alpha = 0$或 $\alpha = 1$ [179]时成立。

Mittag-Leffler 函数的渐近展开和积分表示可见文献 [74, 71, 86]。

Prabhakar [186] 提出了这一扩展

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{x^n}{n!}, \qquad Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$$

$(\gamma)_n$ 是波赫哈默符号 [203] $(\gamma)_0 = 1$， $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots\ldots(\gamma+n-1)$。多指标米塔格-莱夫勒函数的扩展 [123, 124]

$$E_{(\frac{1}{\rho_i}),(\mu_i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu_1 + k/\rho_1)\ldots\Gamma(\mu_m + k/\rho_m)}$$

是通过将指标 $\alpha = 1/\rho$ 和 $\beta = \mu$ 替换为两组多重指标$\alpha \to (1/\rho_1, 1/\rho_2, \ldots\ldots, 1/\rho_m)$ 和 $\beta \to (\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_m)$来实现的。

还有几个相关函数 [166]

- Barret函数

$$U(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} x^{k\alpha i}}{\Gamma(k\alpha - i + 1);}$$

- Rabotnov 的（分数阶指数）函数 [189, 21]

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n x^{n(\alpha+1)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}.$$

3.2.2 H函数

阶数为（m, n, p, q）$\in \mathrm{N}^4$的 H函数通过梅林-巴恩斯型围道积分定义 [53, 156]

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} z^s ds$$

其中 $z^s = exp[s(ln|z| + iargz)]$,

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n} = \frac{A(s)B(s)}{C(s)D(s)}, \qquad A(s) = \prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j - \beta_j s), \quad B(s) = \prod_{j=1}^{n}\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s),$$

$$C(s) = \prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1 - b_j + \beta_j s), \quad D(s) = \prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j - \alpha_j s).$$

这里， m, n, p, q 为满足 $0 \le n \le p$, $1 \le m \le q$, $m^2 + n^2 \ne 0$ 的整数, a_j($j = 1$、.....、 p), b_j($j = 1$、.....、 q) 为复数。

积分围道 L 可以有不同的选取方式:

- L $= \mathrm{L}_{-i\infty,\ i\infty}$ 选取为从 $-i\infty$ 到 $i\infty$ ，使函数 Γ 在 $A(s)$ 中 P (A) 的所有极点位于其右侧，而函数Γ在 $B(s)$ 中 P (B) 的所有极点位于其左侧;

- L $= \mathrm{L}_{i\infty}$ 是一个始于并终于 $+\infty$ 的回路，并沿负方向环绕 P (A) 的所有极点;

- L $= \mathrm{L}_{-i\infty}$ 是一个始于并终于 $-\infty$ 的环路，并沿负方向环绕 PB) 的所有极点。

3.2.3 赖特函数

赖特函数由级数表示定义，该级数在整个z复平面上收敛 [152, 72, 73, 120]

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, \mu \in C.$$

赖特函数的积分表示写作

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\sigma + z\sigma^{-\lambda}}\frac{d\sigma}{\sigma^{\mu}}$$

其中， Ha 是汉克尔路径（从 $-\infty$ 沿负实轴下侧出发，以正方向环绕以原点为中心、半径为 $\epsilon \to 0$ 的圆形区域，然后沿负实轴上侧到达 $-\infty$ ）。

存在 Write 型辅助函数 $F_\nu(z) = W_{-\nu,\ 0}(z)$、 $M_\nu(z) = W_{-\nu,\ 1-\nu}(z)$，其中 $0 < \nu < 1$; 这些函数满足关系 $F_\nu(z) = \nu z M_\nu(z)$。

这些辅助函数的级数表示为

$$F_\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\nu n)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{n!} \Gamma(\nu n + 1) \sin(\pi \nu n)$$

and

$$M_\nu(z) = F_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma[-\nu n + (1-\nu))]} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(\nu n) \sin(\pi \nu n).$$

4 分数阶微分方程的求解

4.1 解析方法

已知许多近似解析方法:

- Adomian 分解法（ADM） [131];
- 组合 Laplace-Adomian 方法（CLAM） [232];
- 变分迭代法（VIM） [87, 237, 59, 239, 244][3] 及其局部变体（LVIM） [248, 244, 236, 246] 和分数阶变体（使用分数阶拉格朗日乘子） [119, 262] ;
- 同伦摄动法（HPM）[1, 241, 251, 205, 190, 233] 及其改进方法 [238] 和局部分数阶变体（LFHPM） [247];
- 微分变换法 [109, 6, 66];
- 热平衡积分法（HBIM）[101, 103, 102];
- 分数阶复变换法（FCTM） [245, 137, 136, 93, 209];
- 局部分数阶傅里叶级数法（FSM） [250, 261];
- 修正简单方程法 [106, 252];
- 镜像法（仅适用于特定的空间对称性）;
- 梅林积分变换法 [145];
- 局部分数阶分解法（LFDM） [5];
- 分数阶子方程法 [260, 83];

[3]VIM 包含三个步骤来确定变分迭代公式：1. 建立校正泛函；2. 确定拉格朗日乘子；3. 确定初始迭代。第二步至关重要 [236]。

• Sumudu 变换方法 [231, 45] 及其变体——局部分数阶同伦摄动 Sumudu 变换法 [265];

• θ 方法 [8];

• Picard 逐次逼近法（PSAM） [243, 240];

• 局部 Laplace 变换。

解析方法通常是摄动法的变体 [226]）。例如，何 [88, 89, 91] 基于 Liao [139] 的方法（Liao 采用双参数方程族），通过考虑单参数族（$1-p$）L（u）$+pN$（u）$=0$，来求解一般方程 A（u）$-f$（r）$=0$；其中一般微分算子 A 分为线性部分 L 和非线性部分 N L（u）$+N$（u）$-f$（r）$=0$。

何构造了同伦 v（r，p）：$\Omega\times[0,1]\to R$，使其满足

$$H(v,p)=(1-p)[L(v)-L(v_0)]+p[A(v)-f(r)]=0$$

其中，同伦参数 $p\in[0,1]$，v_0 是初始近似。

显然，$H(v,0)=L(v)-L(v_0)=0$和 $H(v,1)=[A(v)-f(r)]=0$。

在拓扑学中，$L(v)-L(v_0)$称为变形。同伦参数 p 被视为一个小参数，解可写成级数

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\ldots$$

且当 $p\to1$

$$u=\lim_{p\to1}v=v_0+v_1+v_2+v_3+\ldots.$$

Adomian分解法（ADM） [3, 54] 不使用线性化、微扰或格林函数。通过直接代入可以验证近似解析解的精度。

初值写作 $Lu+Ru+Nu=g$，其中 L 是待求逆的线性算子，R 是线性余项算子，N 是非线性算子。因此$L^{-1}Lu=u-\Phi$，Φ 包含初值。

将解和非线性项分解为级数

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n,\qquad Nu=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$$

其中，A_n 是针对 $Nu=f(u)$的Adomian多项式，为 [54]

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}f\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k\lambda^k\right),\qquad n=0,1,2,\ldots.$$

最后

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\Phi+L^{-1}g-L^{-1}\left[R\sum_{n=0}^{\infty}u_n+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right].$$

非线性项 $Nu(x,\ t)$ 也可以分解为 [238]

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n$$

其中 He 多项式为 [171, 68]

$$H_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n} p^i u_i\right)\right].$$

分数阶子方程法包含以下几个步骤 [83]:

- 将含两个变量 x 和 $tD_t^\alpha u, D_x^\alpha u, \ldots) = 0,\quad 0 < \alpha \leq 1, D_t^\alpha u$和 $D_x^\alpha u$的非线性分数阶方程变换为黎曼-刘维尔导数的 Jumarie 修正形式，利用行波变换 $u(x,t) = u(\xi), \xi = x + ct$，其中 c 是待定常数，得到方程

$$P(u, cu', u', cD_\xi^\alpha u, D_\xi^\alpha u, \ldots) = 0. \tag{20}$$

- 假设方程 (20) 的解具有以下形式

$$u(\xi) = \sum_{i=-n}^{-1} a_i \phi^i + a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi^i,$$

其中 $a_i (i = -n, -n+1, \ldots, n-1, n)$ 是待定常数，$\phi = \phi(\xi)$ 是满足以下 Riccati 方程 $D_\xi^\alpha \phi(\xi) = \sigma\phi^2(\xi)$ 的函数，σ 是一个常数。

- 为 c 和$a_i (i = -n, -n+1, \ldots, n-1, n)$ [83]建立一组超定非线性代数方程。

4.2 数值方法

Diethelm 等人 [115] 列出了数值方法应满足的要求：收敛、具有合理阶数的一致性h^p、稳定、运行成本合理且易于编程。

实际中使用了许多方法：有限差分、有限元、径向基函数、谱方法、无网格方法。分数阶微分方程的数值方法通常是通过改造常微分方程的方法构建的，但需要显著更多的计算时间和存储空间。对分数阶导数进行近似时，需要计算卷积积分，即在整个积分区间内对两个函数的行为进行采样并相乘，因此运算次数为$O(n^2)$，其中 n 表示采样点数 [63]。

计算量的减少与分数阶导数的记忆衰减性质有关，该性质使得可以缩短积分区间——采用

短记忆原理 [46, 49] （也称为 固定记忆原理 [63] 和 对数记忆原理 [85]），并采用自适应时间步进和基选择 [22]。

实际中常用许多方法求解分数阶微分方程：有限差分 [135, 199] （包括显式方法，如欧拉法 [172] ，以及隐式方法[163, 67], ，如克兰克-尼科尔森法 [211, 212] 或交替方向隐式[257, 258] 格式、紧致格式 [229, 230, 64, 52]）、有限元 [104, 107, 256, 267, 192] （包括最小二乘有限元法 [61], 、伽辽金有限元法 [206, 108], 和间断伽辽金有限元法 [164]）、谱方法 [23, 58, 51, 255], 、无网格方法 [55, 201] （包括利用三次 $\phi = r^3$、高斯 $\phi = exp$（$-r^2/c^2$）、多二次 $\phi = \sqrt{c^2 + r^2}$ 或反多二次 $\phi = 1/\sqrt{c^2 + r^2}$ 函数 [234, 180, 9]的径向基函数法）、勒让德小波配置法 [96]。

Bahuguna 等人 [15], Hanert [84], Deng 等人 [48] 以及 Deng 和 Li [47], Ford 和 Simpson [63], Ford 和 Connolly [62], Momani 等人 [161] 报告了几种数值方法的比较结果。

参考文献

[1] Abbaasbandy, S. 同伦分析法在求解传热中出现的非线性方程中的应用。《物理快报*A*辑》*360* (2006), 109–113.[2] Abdeljawad, T. 关于相容分数阶微积分。arXiv: 1402.6892[math.DS], 2014.[3] Adomian, G. 物理前沿问题求解：分解法。Kluver Academic Publishers, Boston, 1994.[4] Aguilar, J. F. G., and Hernández. Caputo导数下的时空分数阶扩散-平流方程。《抽象与应用分析》*2014* (2014), 283019.[5] Ahmad, J., Mohyud-Din, S. T., Srivastava, H. M., and Yang, X.-J. 利用局部分数阶导数算子求解Helmholtz方程和拉普拉斯方程的解析解。*Wave Wavelets Fractals Adv. Anal. 1* (2015), 22–26.[6] Allahviranloo, T., Kiani, N. A., and Motamedi, N. 用微分变换法求解模糊微分方程。*Inform. Sci. 170* (2009), 956– 966.[7] Anderson, D. R., and Ulness, D. J. Katugampola分数阶导数的性质及其在量子力学中的潜在应用。《数学物理杂志》*56*(2015).[8] Aslefallah, M., Rostamy, D., and Hosseinkhani, K. 用θ 方法求解时间分数阶扩散微分方程。*Int. J. Adv. Appl. Math. Mech. 2*(2014), 1–8.[9] Aslefallah, M., and Shivanian, E. 利用径向基函数求解非线性分数阶积分微分反应扩散方程。*Eur. Phys. J. Phys. 130*(2015), 47.

[10] Atangana, A. 分形-分数阶微分与积分：将分形微积分和分数阶微积分结合起来预测复杂系统。*Chaos, Solit.Fract. 102* (2017), 396–406.[11] Atangana, A., and Baleanu, D. 具有非局部和非奇异核的新型分数阶导数：理论及其在传热模型中的应用。《热科学》*20* (2016), 763–769.[12] Atangana, A., and Gomez-Aguilar, J. 正态分布核下的新型导数：理论、方法与应用。*Phys. A Stat. Mech. Appl. 476*(2017), 1–14.[13] Atangana, A., and Secer, A. 关于若干特殊函数的分数阶导数的说明。《抽象与应用分析》*2013* (2013), 279681.[14] Babusci, D., Dattoli, G., and Quattromini, M. 带分数阶算子和伪微分算子的相对论方程。*Phys. Rev. A 83* (2011), 062109.[15] Bahuguna, D., Ujlayan, A., and Pandey, D. N. 求解积分微分方程的数值方法比较研究。《计算数学与应用》*57* (2009), 1485–1493.[16] Baleanu, D., and Fernandez, A. 关于分数阶算子及其分类。《数学》*7* (2019), 830.[17] Ben Adda, F. 实数阶可微性与梯度的几何解释。*Compt. Rend. - Series I - Math. 326* (1997), 931–934.[18] Ben Adda, F. 分数阶导数的几何解释。*J. Fract.Calc. 11* (1997), 21–51.[19] Bennett, K. M., Hyde, J. S., and Schmainda, K. M. 人脑水扩散异质性指数对所施加磁场梯度的方向不敏感。*Magn. Resonan.Med. 56* (2006), 235–239.[20] Benson, D. A., Meerschaert, M. M., and Revielle, J. 水文建模中的分数阶微积分：数值视角。*Adv. Water Resour. 51* (2013), 479–497.[21] Bosiakov, S., and Rogosin, S. 利用Rabotnov分数阶指数函数对牙周韧带的黏弹性行为进行解析建模。见*Lect. Notes Electr. Eng.* (2015), pp. 156–167.[22] Brunner, H., Ling, L., and Yamamoto, M. 二维分数阶亚扩散问题的数值模拟。《计算物理学杂志》*229* (2010), 6613–6622.[23] Canoto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., and Zang, T. A. 谱方法：单区域基础。施普林格，柏林，2006.[24] Caputo, M. 描述介电感应与扩散的分布阶微分方程。《分数阶微积分与应用分析》*4* (2001), 421–442.

[25] Caputo, M. 采用分布阶空间分数阶微分方程建立具有空间记忆的扩散模型。《地球物理年鉴》*46* (2003), 223–234.[26] Caputo, M., and Fabrizio, M. 一种不含奇异核的分数阶导数新定义。《分数阶微分及其应用进展》*1* (2015), 73–85.[27] Caputo, M., and Fabrizio, M. 指数核新型时间和空间分数阶导数的应用。《分数阶微分及其应用进展》(2016).[28] Carpin, A., and Mainardi, F. 连续介质力学中的分形与分数阶微积分。施普林格，维也纳、纽约，1997.[29] Carpinteri, A., Cornetti, P., Sapora, A., Di Paola, M., and Zingales, M. 固体力学中的分数阶微积分：局部与非局部方法。《物理学文摘》*T136* (2009), 014003.[30] Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., and Yor, M. Lévy过程的随机波动率。《数学金融》*13* (2003), 345–382.[31] Chakrabarty, A., and Meerschaert, M. M. 作为随机游走极限的截尾稳定分布。《统计与概率通讯》*81* (2011).[32] Chechkin, A. V., Gonchar, V. Y., Gorenflo, R., Korabel, N., and Sokolov, I. M. 加速亚扩散与截断Lévy飞行的广义分数阶扩散方程。《物理评论*E*》*78* (2008), 021111.[33] Chechkin, A. V., Gorenflo, R., and Sokolov, I. M. 由分布阶分数阶扩散方程描述的减速次扩散与加速超扩散。《物理评论*E*》*66* (2002), 046129.[34] Chechkin, A. V., Gorenflo, R., and Sokolov, I. M. 非均匀介质中的分数阶扩散。《物理评论*E*》*38* (2005), L679–L684.[35] Chechkin, A. V., Gorenflo, R., Sokolov, I. M., and Gonchchar, V. Y. 分布阶时间分数阶扩散方程。《分数阶微积分与应用分析》*6*(2003), 259–279.[36] Chen, W. 反常扩散背后的时空结构。《混沌、孤子与分形》*28* (2006), 923–929.[37] Chen, W., and Liang, Y. 分数阶导数与分形导数建模的新方法。《混沌、孤子与分形》*102* (2017), 72–77.[38] Chen, W., Sun, H., Zhang, X., and Koroˆsak, D. 分形导数与分数阶导数描述的反常扩散。《计算数学与应用》*59* (2010), 1754–1758.[39] Chen, Y., Yan, Y., and Zhang, K. 关于局部分数阶导数。《数学分析及其应用杂志》*362* (2010), 17–33.[40] Cioc, R. Grunwald-Letnikov微分积分的物理与几何解释：路径与加速度的测量。《分数阶微积分与应用分析》*19*(2016), 161–172.

[41] Coimbra, C. F. M. 具有变阶微分算子的力学。《物理年鉴》*12* (2003), 692–703.[42] Compte, A. 分数阶动力学的随机基础。《物理评论*E*》*53*(1996), 4191–4193.[43] de Oliveira, E. C., and Teneiro Machado, J. A. 分数阶导数与积分定义综述。《数学问题工程》*2014* (2014), 238459.[44] Delkhosh, M. 分数阶导数与积分及其应用简介。《应用数学与物理》*1* (2013), 103–119.[45] Demiray, S. T., Bulut, H., and Belgasem, F. 用于分数阶常微分方程解析求解的Sumudu变换方法。《数学问题工程》*2015* (2015), 131690.[46] Deng, W. 分数阶微分方程的短记忆原理与预测-校正方法。《计算与应用数学杂志》*206* (2007), 1774–188.[47] Deng, W., and Li, C. 分数阶常微分方程的数值格式。载于《数值建模》(2012)，P. Miidla 编，第356–34页。[48] Deng, W., Singe, V. P., and Bengtsson, L. 分数阶对流-弥散方程的数值解。《水力工程学杂志》*130* (2004), 422–431.[49] Deng, W., Zhao, L. J., and Wu, Y. J. 求解分数阶常微分方程的高效算法。《应用数学与计算》*269* (2015), 196–216.[50] Diethelm, K. 《分数阶微分方程分析：采用*Caputo*型微分算子的应用导向论述》。施普林格，柏林-海德堡，2010.[51] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., and Ezz-Eldien, S. S. 一种基于运算矩阵、用于分数阶初值与边值问题的切比雪夫谱方法。《计算数学与应用》*62* (2011), 2364–2373.[52] Du, R., Gao, G., and Sun, Z. 分数阶扩散波动方程的紧致差分格式。《应用数学建模》*34* (2010), 2998–3007.[53] Duan, J.-S. 时间和空间分数阶偏微分方程。《数学物理杂志》*46* (2005), 013504.[54] Duan, J.-S., Rach, R., Baleunu, D., and Wazwaz, A.-M. Adomian分解法及其在分数阶微分方程中的应用综述。《分数阶微积分通讯》*3* (2012), 73–99.[55] Duan, Y. 关于使用径向基函数的无网格方法的简述。《计算数学与应用》*55* (2008), 66–75.[56] Dzherbashyan, M. M., and Nersesian, A. D. 分数阶导数与分数阶微分方程的柯西问题（俄文）。《亚美尼亚苏维埃社会主义共和国科学院通报》，《数学》*3* (1968), 3–29.

[57] E., T. V. 将分数阶导数解释为由整数阶导数序列重构而来。*FundamentaInformat. 151* （2017年），431–442。[58] Esmaeli, S. 和 Shamsi, M. 采用伪谱格式近似求解一类分数阶微分方程。*Commun. Nonlinear Sci.Numer. Simulat. 16* （2011年），3646–3654。[59] Faraz, N.、Khan, Y.、Jafari, H.、Yildrim, A. 和 Madani, M. 基于修正的黎曼-刘维尔导数的分数阶变分迭代法。*J. KingSaud Univ. - Sci. 23* （2011年），413–417。[60] Fernandez, A.、Özarslan, M. A. 和 Baleanu, D. 关于具有一般解析核的分数阶微积分。《应用数学与计算》*354* （2019年），248–265。[61] Fix, G. J. 和 Roop, J. P. 分数阶两点边值问题的最小二乘有限元解。《计算数学与应用》*48* （2004年），1017–1033。[62] Ford, N. J. 和 Connolly, J. A. 分数阶微分方程数值方法的比较。*Comm. Pure Appl. Anal. 5* （2006年），289–307。[63] Ford, N. J. 和 Simpson, A. C. 分数阶微分方程的数值解：速度与精度。*Numer. Algor. 26* （2001年），333–346。[64] Gao, G. 和 Sun, Z. 分数阶子扩散方程的紧致差分格式。《计算物理学杂志》*230* （2011年），586–595。[65] Gerasimov, A. N. 线性变形定律的推广及其在内摩擦问题中的应用（俄文）。*Appl. Math. Mech. 12* （1948年），529–539。[66] Ghazanfari, B. 和 Ebrahimi, P. 用微分变换法求解模糊分数阶热方程。*Int. J. Math. Model. Comput. 5* （2015年），81–89。[67] Ghazizadeh, H. R.、Maerefat, M. 和 Azimi, A. Cattaneo分数阶方程的显式与隐式有限差分格式。《计算物理学杂志》*229* （2010年），7042–7057。[68] Ghorbani, A. 超越（A）domian多项式：He多项式。*Chaos Soliton.Fract. 39* （2009年），1486–1492。[69] Goloviznin, V. M.、Kondratenko, P. S.、Matveev, L. V.、Korotkin, I. A. 和 Dranikov, I. L. 强非均匀地质构造中放射性核素的反常扩散（俄文）。Nauka，莫斯科，2010年。[70] Gómez-Aguilar, J. F.、Razo-Hernandez, R. 和 Granados-Lieberma, D. 分数阶微积分在可观测量意义下的物理解释：分数阶时间常数与瞬态响应分析。*Revista Mexicana de Fisica60* （2014年），32–38。

[71] Gorenflo, R.、Loutschko, J. 和 Luchko, Y. 米塔格-莱夫勒函数及其导数的计算。《分数阶微积分与应用分析》*5*（2002年），491–518。[72] Gorenflo, R.、Luchko, Y. 和 Mainardi, F. 赖特函数的解析性质及其应用。《分数阶微积分与应用分析》*2*（1999年），383–414。[73] Gorenflo, R.、Luchko, Y. 和 Mainardi, F. 赖特函数作为扩散波动方程的尺度不变解。《计算与应用数学杂志》*118*（2000年），175–191。[74] Gorenflo, R.、Luchko, Y. 和 Rogosin, S. V. 米塔格-莱夫勒型函数：关于增长性质和零点分布的注记。技术报告A04-97，柏林自由大学，1997年。[75] Gorenflo, R. 和 Mainardi, F. 分数阶积分与微分方程。载于《连续介质力学中的分形与分数阶微积分》（维也纳、纽约，1997年），A. Carpinteri 和 F. Mainardi 编，施普林格。[76] Gorenflo, R. 和 Mainardi, F. 分数阶扩散过程：概率分布与连续时间随机游走。载于《长程相关过程》（柏林，2003年），G. Rangarajan 和 M. Ding 编，施普林格，第148–166页。[77] Gorenflo, R. 和 Mainardi, F. 连续时间随机游走的简单与多重尺度扩散极限。《物理学杂志：会议系列》*7*（2005年），1–16。[78] Gorenflo, R.、Mainardi, F.、Moretti, D.、Pagnini, G. 和 Paradisi, P. 分数阶扩散：概率分布与随机游走模型。《物理学*A*辑》*305*（2002年），106–112。[79] Gorenflo, R.、Mainardi, F. 和 Srivastava, H. M. 分数阶弛豫振荡与分数阶扩散波动现象中的特殊函数。载于第八届国际微分方程讨论会（1997年），D. Bainov 编，第195–202页。[80] Gorenflo, R. 和 Rutman, R. 关于超慢过程与中间过程。载于变换方法与特殊函数（新加坡，1995年），D. Rusev、I. Di-movski 和 V. Kiryakova 编，第171–183页。[81] Gorenfo, R.、Iskenderov, A. 和 Luchko, Y. 分数阶扩散波动方程解之间的映射。《分数阶微积分与应用分析》*3*（2000年），75。[82] Grigoletto, E. C. 和 de Oliveira, E. C. 微积分基本定理的分数阶版本。《应用数学》*4*（2013年），23–33。[83] Guo, S.、Mei, L.、李、Y. 和 Sun, Y. 改进的分数阶子方程法及其在流体力学时空分数阶微分方程中的应用。《物理快报*A*辑》*376*（2012年），407–411。[84] Hanert, E. 分数阶输运模型的三种欧拉数值方法比较。*Environ. Fluid Mech.* *10*（2010年），7–20。

[85] Hanert, E. 时空分数阶扩散模型的数值解。《计算流体》*46* （2011），33–39。[86] Haubold, H. J.、Mathai, A. M. 和 Saxena, R. K. Mittag-Lefler函数及其应用。《应用数学杂志》*2011* （2011），298628。[87] He, J.-H. 变分迭代法在非线性问题及其应用中的研究。《国际非线性力学杂志》*20* （1998），30–31。[88] He, J.-H. 同伦摄动技术。《计算方法与应用力学》*178*（1999），257–262。[89] He, J.-H. 同伦摄动法的新解释。《国际现代物理*B*辑》*20* （2006），2561–2568。[90] He, J.-H. 关于分形时空和分数阶微积分的教程式综述。《国际理论物理杂志》*53* （2014），3698–3718。[91] He, J.-H. 同伦摄动法的最新发展。《拓扑方法与非线性分析》*31* （2016），205–209。[92] He, J.-H. 分形微积分及其几何解释。《物理学成果》*10*（2018），272–276。[93] He, J.-H.、Elagan, S. K. 和 Li, Z. B. 分数阶复变换及分数阶微积分导数链式法则的几何解释。《物理快报*A*辑》*376* （2012），257–259。[94] He, J.-H. 和 Li, Z.-B. 将分数阶微分方程转换为偏微分方程。《热科学》*16* （2012），331–334。[95] He, J. H. 和 Liu, F. 蚕茧层级结构中分形传热的局部分数阶迭代法。《非线性科学快报》*4* （2013），15–20。[96] Heydari, M. H.、Maalek Ghaini, F. M. 和 Hooshmandasl, M. R. 时间分数阶热方程数值解的勒让德小波法。《小波与线性代数》*1* （2014），15–24。[97] Heymans, N. 和 Podlubny, I. 具有黎曼-刘维尔分数阶导数的分数阶微分方程初始条件的物理解释。《流变学报》*45* （2006），765–772。[98] Hilfer, R. 基于黎曼-刘维尔分数阶导数的分数阶扩散。arXiv:cond-mat/0006427 [cond-mat.stat-mech], 2000。[99] Hilfer, R. 分数阶导数的三重介绍。载于《反常输运：《基础与应用》（2008），R. Klages、G. Radons 和 I. M. Sokolov 编，Wiley-VCH，第17–74页。[100] Hilfer, R. 分数阶导数和积分的数学与物理解释。载于《分数阶微积分及其应用手册》（柏林，2019），A. Kochubei 和 Y. Luchko 编，第1卷，德格鲁伊特，第47–85页。

[101] Hristov, J. 从热平衡积分法到分数阶（半时间）热扩散子模型。《热科学》*14* （2010），291–316。[102] Hristov, J. 分数阶亚扩散方程的近似解：热平衡积分法。《欧洲物理杂志：专题》*193* （2011），229–243。[103] Hristov, J. 恒定表面剪切应力作用下广义二级流体的瞬态流动：一种近似积分平衡解。《国际化学工程评论》*3* （2011），802–809。[104] Huang, Q.、Huang, G. 和 Zhan, H. 分数阶对流-弥散方程的有限元解。《水资源进展》*31* （2008），1578–1589。[105] Iyiola, O. S. 和 Nwaeze, E. R. 关于新相容分数阶微积分的一些新结果及其基于达朗贝尔方法的应用。《分数阶微分及其应用进展》*2* （2016），1–7。[106] Jawad, A. J. W.、Petcovic, M. D. 和 Biswas, A. 非线性演化方程的修正简单方程法。《应用数学与计算》*217* （2010），869–877。[107] Jiang, Y. 和 Ma, J. 时间分数阶偏微分方程的高阶有限元法。《计算与应用数学杂志》*235* （2011），3285–3290。[108] Jin, B.、Lazarov, R.、Liu, Y. 和 Zhou, Z. 多项时间分数阶扩散方程的Galerkin有限元法。《计算物理学杂志》*281* （2015），825–843。[109] Joneidi, A. A.、Ganji, D. D. 和 Babaelahi, M. 采用微分变换法确定温度依赖型热导率对流直翅片效率。《国际传热传质通讯》*36* （2009），757–762。[110] Jumarie, G. 不可微函数的修正黎曼-刘维尔导数和分数阶泰勒级数：进一步结果。《计算数学与应用》*51* （2006），1376–1376。[111] Jumarie, G. 分数阶拉格朗日力学、Hamilton-Jacobi分数阶偏微分方程与不可微函数的泰勒级数。《混沌、孤子与分形》*32* （2007），969–987。[112] Jumarie, G. 闵可夫斯基时空与分数阶微分几何相一致。《物理快报》*363* （2007）。[113]Jumarie, G. 不可微函数的分数阶导数满足莱布尼茨法则。《数学与统计学》*1* （2013），50–52。[114] Jumarie, G. 通过分数阶差分研究分数阶微积分中的导数链式法则及其在系统建模中的应用。《开放物理学》*11* （2013），617–633。

[115] K., D., Ford, J. M., Ford, N. J. 和 Weilbeer, M. 分数阶微分方程快速求解器中的陷阱。《计算与应用数学杂志》*186* (2006年), 482–503。[116] Katugampola, U. N. 广义分数阶导数的新方法。数学分析及其应用杂志 *6* (2014年), 1–15。[117] Katugampola, U. N. 具有经典性质的新分数阶导数。arXiv: 1410.6535 [math.CA], 2014。[118] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. 和 Sababheh, M. 分数阶导数的新定义。《计算与应用数学杂志》*264* (2014年), 65–70。[119] Khan, Y., Faraz, N., Yildirim, A. 和 Wu, Q. 应用于非线性科学的分数阶初边值问题的分数阶变分迭代方法。《数学与计算应用》*62* (2011), 2273–2278。[120] Kilbas, A. A., Saigo, M. 和 Trujillo, J. J. 关于广义 Wright 函数。《分数阶微积分与应用分析》*5* (2002), 437–460。[121] Kilbas, A. A., Srivastave, H. M. 和 Trujillo, J. J. 分数阶微分方程理论与应用。北荷兰出版社，2006年。[122] Kiryakova, V. 广义分数阶微积分及其应用。Longman，Harlow，1994年。[123] Kiryakova, V. 多重（多指标）Mittag-Leffler 函数及其与广义分数阶微积分的关系。《计算与应用数学杂志》*118* (2000), 241–259。[124] Kiryakova, V. 多指标 Mittag-Leffler 函数：分数阶微积分中特殊函数的重要类别。《数学与计算应用》*59* (2010), 1885–1895。[125] Kochubei, A. I. 分布阶微积分与超慢扩散方程。《数学分析及其应用杂志》*340* (2008), 252–281。[126] Kolwankar, K. M. 局部分数阶微积分：综述。arXiv:1307.0739, 2013。[127] Kolwankar, K. M. 和 Gangal, A. D. 不规则函数的 Hölder 指数与局部分数阶导数。*Pramana J. Phys. 48* (1997), 49–68。[128] Kolwankar, K. M. 和 Gangal, A. D. 多变量的局部分数阶导数与分形函数。arXiv: physics/9801010 [math-ph], 1998。[129] Kolwankar, K. M. 和 Gangal, A. D. 局部分数阶 Fokker-Plank 方程。*Phys. Rev. Lett. 80* (1998), 214–217。[130] Lebedev, N. N. 特殊函数及其应用。普伦蒂斯-霍尔出版社，1965年。[131] Lesnic, D. 和 Elliot, L. 逆热传导的分解法。《数学分析及其应用杂志》*232* (1999), 82–98。

[132] Letnikov, A. V. 分数阶微分理论。《数学文集》*3* (1868年), 1–7。[133] Li, C. 和 Deng, W. 关于分数阶导数的评注。《应用数学与计算》*187* (2007), 777–784。[134] Li, C., Qian, D. 和 Chwn, Y. Q. 关于黎曼-刘维尔导数和卡普托导数。《离散动力学与自然社会》*2011* (2011), 562494。[135] Li, C. 和 Zeng, F. 分数阶微分方程的有限差分方法。《国际分岔与混沌杂志》*22* (2012年), 1230014。[136] Li, Z.-B. 一种扩展分数阶复变换。《非线性科学与数值模拟杂志》*11* (2010), S0335–S0337。[137] Li, Z.-B. 和 He, J.-H. 分数阶微分方程的分数阶复变换。数学与计算应用 *15* (2010), 970–973。[138] Li, Z.-B., Zhu, W.-H. 和 He, J.-H. 通过扩展分数阶复变换求时间分数阶热传导方程的精确解。《热科学》*16* (2012年), 335–338。[139] Liao, S. J. 采用同伦分析法数值求解非线性问题。《计算力学》*20* (1997), 530–540。[140] Liu, F.-J., Li, Z.-B., Zhang, S. 和 Liu, H.-Y. 分形介质中源于蚕茧层级结构的热传导的何氏分数阶导数。《热科学》*19* (2015年), 1155–1159。[141] Lorenzo, C. F. 和 Hartley, T. T. 广义分数阶微积分中的初始化、概念化与应用。NASA/TP-1998-208415, 1998。[142] Losada, J. 和 Nieto, J. J. 一种无奇异核的新分数阶导数的性质。《分数阶微分与应用进展》*1* (2015年), 87–92。[143] Luchko, Y. 埃尔代伊–科贝尔型混合算子的运算规则。《分数阶微积分与应用分析》*7* (2004), 339–364。[144] Luchko, Y. 广义时间分数阶扩散方程的最大值原理。《数学分析及其应用杂志》*351* (2009), 218–223。[145] Luchko, Y. 和 Kiryakova, V. 分数阶微积分中的梅林积分变换。《分数阶微积分与应用分析》*16* (2013), 405–430。[146] Mainardi, F. 分数阶弛豫振荡与分数阶扩散波动现象。《混沌》*7* (1996), 1461–1477。[147] Mainardi, F. 分数阶微积分：连续介质与统计力学中的一些基本问题。载于连续介质力学中的分形与分数阶微积分（维也纳和纽约，1997），A. Carpinteri 和 F. Mainardi 编，施普林格，231–248 页。

[148] Mainardi, F. 积分变换在分数阶扩散过程中的应用。*Integral Transf. Special Funct. 15* (2004), 477–484.[149] Mainardi, F., and Gorenflo, R. 分数阶演化过程中的 Mittag-Leffler 函数。*J. Comput. Appl. Math. 118* (2000), 283–299.[150] Mainardi, F., and Gorenflo, R. 弛豫过程中的时间分数阶导数：教程式综述。*Int. J. Theor. Appl. 10* (2007), 269–308.[151] Mainardi, F., Luchko, Y., and Pagnini, G. 时空分数阶扩散方程的基本解。*Fract. Calc. Appl. Anal. 4* (2001), 153–192.[152] Mainardi, F., Mura, A., and Pagnini, G. 时间分数阶扩散过程中的 M-Wright函数：教程式综述。*Int. J. Differ. Equations 2010*(2010), 104505.[153] Mainardi, F., Mura, A., Pagnini, G., and Gorenflo, R. 分布阶时间分数阶扩散。arXiv： 0701132 [cond-mat.stat-mech, 2007.[154] Mainardi, F., and Pagnini, G. 作为时间分数阶扩散方程解的赖特函数。*Appl.Math.Comput. 141* (2003), 51–62.[155] Mainardi, F., Pagnini, G., and Gorenflo, R. 单一阶与分布阶分数阶扩散方程的若干方面。*Appl. Math. Comput. 187*(2007), 295–305.[156] Mainardi, F., Pagnini, G., and Saxena, R. K. Fox H函数在分数阶扩散中的应用。*J. Comput. Appl. Math. 178* (2005), 321–331.[157] Meerschaert, M. M., Zhang, Y., and Baeumer, B. 非均匀系统中的截尾反常扩散。*Geophys. Res. Lett. 35* (2008), L17403– L17407.[158] Metzler, R., Glöckle, W. G., and Nonnenmacher, T. F. 反常扩散的分数阶模型方程。*Physica A 211* (1994), 13–24.[159] Metzler, R., and Klafter, J. 随机游走的终点餐馆：用分数阶动力学描述反常输运的最新进展。*J. Phys. A: Math. Gen. 37* (2004), R161–R208.[160] Miller, K., and Ross, B. 分数阶微积分与分数阶微分方程导论。约翰·威立父子出版公司，纽约，1993。[161] Momani, S., Odibat, Z., and Hashim, I. 非线性分数阶偏微分方程算法：数值方法选编。*Topol. Meth.Nonlin. Anal. 31* (2008), 211–226.[162] Moshrefi-Torbati, M., and Hammond, J. K. 分数阶算子的物理与几何解释。*J. Franklin Institute 335* (1998), 1077–1086.

[163] Murio, D. A. 时间分数阶扩散方程的隐式有限差分逼近。*Comput. Math. Appl. 56* (2008), 1138–1145.[164] Mustapha, K. A. Volterra 积分微分方程的超收敛间断伽辽金方法。*Math. Comput. 82* (2013), 1987–2005.[165] Naber, M. 分布阶分数次亚扩散。*Fractals 12* (2004), 23–32.[166] Nakhushev, A. M. 分数阶微积分及其应用。Fismatlit，莫斯科，2003。[167] Nakhusheva, V. A. 非局部过程数学模型的微分方程（俄文）。Nauka，莫斯科，2006。[168] Nieto, J. J. Mittag-Leffler 函数导出的分数阶微分方程的最大值原理。应用数学快报 *23* (2010), 1248–1251.[169] Nigmatullin, R. R. 分数阶积分及其物理解释。理论数学物理 *90* (1992), 242–251.[170] Nigmatullin, R. R., and Le Mehaute, A. 复指数分数阶积分是否具有几何或物理意义？非晶态固体杂志 *351* (2005), 2888–2899.[171] Noor, M. A., and Mohyud-Din, S. T. 利用 He 多项式求解高阶非线性边值问题的变分迭代法。国际非线性科学与数值模拟杂志 *9* (2008), 141–156.[172] Odibat, Z. M., and Momani, S. 分数阶微分方程数值求解算法。应用数学与信息学杂志 *26* (2008), 15–27.[173] Odibat, Z. M., and Shawagfeh, N. T. 广义泰勒公式。《应用数学与计算》*186* (2007), 285–294.[174] Oldham, K., and Spanier, J. 分数阶微积分：任意阶微分与积分的理论及应用。学术出版社，纽约，1974。[175] Ontololan, J., Borres, M., Patac, A., and Maglasang, G. 分形及分形导数与分形物理学相关性的综述。*UV* 研究杂志 (2013), 219–228.[176] Osler, T. J. 分数阶导数的莱布尼茨法则推广及其在无穷级数中的应用。*SIAM* 应用数学杂志 *18* (1970), 658–674.[177] Osler, T. J. 分数阶导数莱布尼茨法则的修正。*SIAM* 数学分析杂志 *4* (1973), 456–459.[178] Pagnini, G. Erdélyi–Kober 分数阶扩散。《分数阶微积分与应用分析》*15*(2012), 117–127。

[179] Peng, J., and Li, K. 关于 Mittag-Leffler函数性质的注记。《数学分析及其应用杂志》*370* (2010), 635–638.[180] Piret, C., and Hanert, E. 一种用于分数阶扩散的径向基函数法。《计算物理学杂志》*238* (2013), 71–78.[181] Podlubny, I. 分数阶微分方程。学术出版社，1998.[182] Podlubny, I. 离散分数阶微积分的矩阵方法。《分数阶微积分与应用分析》*3* (2000), 359–386.[183] Podlubny, I. 分数阶积分与分数阶微分的几何和物理解释。《分数阶微积分与应用分析》*5* (2002), 36–386.[184] Podlubny, I., Chechkin, A., Chen, Y. Q., and Vinagre, B. M. J. 离散分数阶微积分的矩阵方法 II：偏微分方程。《计算物理学杂志》*228* (2009), 3137–3153.[185] Podlubny, I., Despotovic, V., Skovranek, T., and McNaughton, B. H. 墙上的影子：分数阶积分的几何解释。《在线数学应用杂志》*7* (2007), 1664.[186] Prabhakar, T. R. 核函数中含广义 Mittag-Leffler函数的奇异积分方程。横滨数学》*19* (1971), 7–15.[187] Prieto, A. I., de Romero, S. S., and Srivastava, H. M. 涉及广义 Lommel-Wright 函数及相关函数的一些分数阶微积分结果。应用数学快报 *20* (2007), 17–22.[188] Qi, H. T., Xu, H. Y., and Guo, X. W. 广义泰勒公式。《应用数学与计算》*186* (2007), 286–293.[189] Rabotnov, Y. N. 《固体遗传力学基础》（俄文）。Nauka，莫斯科，1977.[190] Raftari, B., and Vajravelu, K. 用同伦分析法研究通道内拉伸壁附近的 MHD 黏弹性流动与传热。《非线性科学与数值模拟通讯》*17* (2012), 4149–4162.[191] Rahimy, M. 分数阶微分方程的应用。《应用数学科学》*4*(2010), 2453–2461.[192] Roop, J. P. 有界区域上分数阶对流扩散方程有限元法近似的计算方面，见 $\mathbb{R}^2$。《计算与应用数学杂志》*193*(2006), 243–268.[193] Ross, B. 分数阶微积分的发展：1695—1990。《数学史》*4*(1977), 75–89.[194] Rutman, R. S. 关于分数阶积分和微分的物理解释。理论数学物理》*105* (1995), 1509–1519.

[195] Sabzikara, F., Meerschaerta, M. M., and Chen, J. tempered分数阶微积分。计算物理学杂志 *293* (2015), 14–28.[196] Saichev, A., and Zaslavsky, G. 分数阶动力学方程：解与应用。《混沌》*7* (1997), 753–764.[197] Samko, A. G. 变阶分数阶积分与微分。《分析数学》*21* (1995), 213–236.[198] Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I. 分数阶积分与导数：理论与应用。Gordon and Breach 科学出版社，1993.[199] Scherer, R., Kalla, S. L., Tang, Y., and Huang, J. 分数阶微分方程的格伦瓦尔德-列特尼科夫方法。《计算数学与应用》*62* (2011), 902–917.[200] Schneider, W. R., and Wyss, W. 分数阶扩散方程与波动方程。《数学物理杂志》*30* (1989), 134–144.[201] Shirzadi, A., Ling, L., and Abbasbandy, S. 二维分数阶时间对流-扩散-反应方程的无网格模拟。《工程分析与边界元》*36* (2012), 1522–1527.[202] Shubin, M. A. 《伪微分算子与谱理论》。施普林格，柏林，1987.[203] Shukla, A. K., and Prajapati, J. C. 关于 Mittag-Leffler函数的一种推广及其应用。《数学分析及其应用杂志》*336* (2007), 797–811.[204] Sierociuk, D., Skovranek, T., Macias, M., Podlubny, I., Petra, I., Dzielin- ski, A., and Ziubinsky, P. 使用分数阶模型进行扩散过程建模。《应用数学与计算》*257* (2015), 2–11.[205] Singh, J., Gupta, P. K., and Rai, K. N. 用同伦摄动法研究有限平板中的时空分数阶凝固。《应用数学建模》*35* (2011), 1937–1945.[206] Singh, S. J., and Chatterjee, A. 分数阶导数的伽辽金投影与有限元。《非线性动力学》*45* (2006), 183–206.[207] Sokolov, I. M., Klafter, J., and Blumen. 分数阶动力学。今日物理(2002), 48–54.[208] Stanislavsky, A. A. 分数阶积分的概率解释。理论数学物理》*138* (2004), 418–431.[209] Su, W.-H., Yang, X.-J., Jafan, H., and Baleanu, D. 康托尔集上波动方程的分数阶复变换法及局部分数阶微分算子。《微分方程进展》*2013* (2013), 97.

[210] Sun, X. G.、Hao, X.、Zhang, Y. 和 Baleanu, D. 具有非奇异核的弛豫与扩散模型。*Phys. A Stat. Mech. Appl. 468* (2017年)，590–596。[211] Tadjeran, C. 和 Meerschaert, M. M. 二维分数阶扩散方程的二阶精确数值方法。*J. Comput. Phys220* (2007年)，813–823。[212] Tadjeran, C.、Meerschaert, M. M. 和 Scheeffler, H.-P. 分数阶扩散方程的二阶精确数值近似。*J. Comput.Phys 213* (2006年)，205–213。[213] Tarasov, V. 无非局部性则无分数阶导数。*NonlinearSci. Numer.Simulat. 62* (2018年)，157–163。[214] Tarasov, V. E. 分数阶动力学：分数阶微积分在粒子、场和介质动力学中的应用（非线性物理科学）。施普林格，2011年。[215] Tarasov, V. E. 不违反莱布尼茨法则。*Commun. NonlinearSci. Numer.Simul. 18* (2013年)，2945–2948。[216] Tarasov, V. E. 分形材料中的传热。*Int. J. Heat Mass Transfer93*(2016年)，427–430。[217] Tarasov, V. E. 莱布尼茨法则与幂函数的分数阶导数。*J.Comput. Nonlinear. Dynam. 11* (2016年)，031014。[218] Tarasov, V. E. 关于分数阶导数的链式法则。*Comm. Nonlin. Sci.Num. Simul. 30* (2016年)，1–4。[219] Tateishi, A. A.、Ribeiro, H. V. 和 Lenzi, E. K. 分数阶时间导数算子在反常扩散中的作用。*Front. Phys. 5* (2017年)，52。[220] Taylor, M. E. 伪微分算子。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1981年。[221] Teneiro Machado, J. A. 分数阶导数：有理近似的概率解释与频率响应。*Comm. Nonlin. Sci. Num. Sim.14* (2009年)，3492–3497。[222] Teneiro Machado, J. A. 分数阶微分的概率解释。*Fract. Calcul. Appl. Anal. 6* (2009年)，73–80。[223] Teneiro Machado, J. A.、Kiryakova, V. 和 Mainardi, F. 一篇关于分数阶微积分近期历史的综述。*Fract. CalculusAppl. Anal. 13* (2010年)，329–334。[224] Teneiro Machado, J. A.、Kiryakova, V. 和 Mainardi, F. 分数阶微积分的近期历史。*Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 16* (2011年)，1140–1153。

[225] Valerio, D.、Machado, J. T. 和 Kiryakova, V. 分数阶微积分应用领域的一些先驱。*Fract. Calculus Appl. Anal. 17* (2011年)，552–578。[226] Van Dyke, M. 流体力学中的摄动方法。Parabolic Press，Standford，1975年。[227] Vermeersch, B. 和 Shakouri, A. 非扩散输运中的时空通量记忆。arXiv: 1412。8571 [cond-mat.stat-mech], 2014。[228] Volterra, V. 函数方程、积分方程与积分微分方程理论。Blackie and Son Ltd.，伦敦和格拉斯哥，1930年。[229]Vong, S.、Lyu, P.、Chen, X. 和 Lei, S, L. 采用卡普托和黎曼-刘维尔导数的时空分数阶微分方程高阶有限差分法。*Numer. Algor. 72* (2016年)，195–210。[230] Vong, S. 和 Wang, Z. 分数阶 Fokker-Planck 方程的高阶紧致格式。应用数学快报 *43* (2015年)，38–43。[231] Watugala, G. K. 二元函数的 Sumudu 变换。*Math.Eng. Industr. 8* (2002年)，293–302。[232] Wazwaz, A.-M. 和 Mehanna, M. S. 处理传热奇异积分方程的 Laplace-Adomian 方法。*Int. J. Nonlinear Sci. 10*(2010年)，248–252。[233] Wei, C. 和 Wang, H. 分数阶 Emden-Fowler 型方程所描述的热传导模型的解。《热科学》*21* (2017年)，S113–S120。[234] Wei, S.、Chen, W. 和 Hon, Y.-C. 求解二维时间分数阶扩散方程的隐式局部径向基函数法。《热科学》*19*(2015年)，S59–S67。[235] West, B. J.、Grigolini, P.、Metzler, R. 和 Nonnenmacher, T. F. 分数阶扩散与 Lévy 稳定过程。《物理评论*E*》*55* (1997年)，99–106。[236] Wu, G. C. 变分迭代法在分数阶扩散方程中的应用：局部与非局部。《国际化学工程评论》*4* (2012年)，505–510。[237] Wu, G. C. 和 Lee, E. W. M. 分数阶变分迭代法及其应用。《物理快报*A*辑》*374* (2010年)，2506–2509。[238] Yan, L.-M. 与拉普拉斯变换相结合的修正同伦摄动法，用于分数阶传热和多孔介质方程。《热科学》*17* (2013年)，1409–1414。[239] Yang, A. M.、Cattani, C.、Jafari, H. 和 Yang, X. J. 具有局部分数阶导数的分形瞬态传导所产生的一维热方程的解析解。*Abstract Appl. Anal. 2013* (2013年)，462535。

[240] Yang, A.-M., Zhang, C., Jafari, H., Cattani, C., and Jiao, Y. 利用局部分数阶导数求解分形传热微分方程的Picard逐次逼近法。《抽象与应用分析》*2014*年 (2014), 395710.[241] Yang, X. J. 《高级局部分数阶微积分及其应用》。World Science Publisher，纽约，2012年。[242] Yang, X.-J. 广义局部分数阶泰勒公式及其局部分数阶导数。《专家系统》*1* (2012), 1–5.[243] Yang, X. J. 求解一类局部分数阶Volterra积分方程的Picard逼近法。《先进智能交通系统》*1* (2012), 67–70.[244] Yang, X. J., and Baleanu, D. 采用局部分数阶变分法求解分形热传导问题。《热科学》*17* (2013), 625–628.[245] Yang, X.-J., Baleanu, D., and He, J.-H. 采用分数阶复变换法研究分形多孔介质中的输运方程。《罗马尼亚科学院院刊》*14*(2013), 287–292.[246] Yang, X.-J., Baleanu, D., and Srivastava, H. M. 《局部分数阶积分变换及其应用》。学术出版社，2015年。[247] Yang, X.-J., Srivastava, H. M., and Cattani, C. 用于求解数理物理中分形偏微分方程的局部分数阶同伦摄动法。《罗马尼亚物理报告》*67* (2015), 752–761.[248] Yang, X.-J., and Zhang, F. R. 局部分数阶变分迭代法及其算法。《计算数学与应用进展》*1* (2012), 139–145.[249] Yang, X.-J., Zhang, Z.-Z., Teneiro Machado, J. A., and Baleanu, D. 从局部分数阶算子的角度探讨计算复杂性：定义在康托尔集上的扩散与弛豫。《热科学》*20* (2016), S755–S767.[250] Yang, Y.-J., Baleanu, D., and Yang, X.-J. 用局部分数阶傅里叶级数法分析分形波动方程。《数学物理进展》*2013*年 (2013), 632309.[251] Yildrim, A., and S., M. 利用同伦摄动法求分数阶振子的级数解。《国际计算数学杂志》*87* (2010), 1072–1082.[252] Younis, M. 通过修正简单方程法求解非线性分数阶方程的新方法。《应用数学》*5* (2014), 1927–1932.[253] Zaslavsky, G. M. 混沌、分数阶动力学与反常输运。《物理报告》*371* (2002), 461–580.[254] Zaslavsky, G. M. 《哈密顿混沌与分数阶动力学》。牛津大学出版社，2008年。[255] Zayernouri, M., and Karniadakis, G. M. 分数阶常微分方程的指数精度谱方法和谱元方法。《计算物理学杂志》*257* (2014), 460–480.

[256] Zeng, F., Li, C., Liu, F., and Turner, I. 具有二阶精度的时间分数阶亚扩散方程数值算法。*SIAM J. SCi.Comp. 37* (2015), A55–A78.[257] Zhai, S., and Feng, X. 关于二维时间分数阶扩散方程若干紧致交替方向隐式方法的研究。*Numer. Heat Transfer Fundam.69* (2016), 364–376.[258] Zhai, S., Weng, Z., Feng, X., and Yuan, J. 关于时空分数阶扩散方程若干高阶ADI方法的研究。《数值算法》*82*(2019), 69–106.[259] Zhang, G., and Li, B. 重新考察纳米管的热导率：手性、同位素杂质、管长和温度的影响。arXiv:cond-mat/0501194[cond-mat.mtrl-sci], 2006.[260] Zhang, S., and Zhang, H. Q. 分数阶子方程法及其在非线性分数阶偏微分方程中的应用。《物理快报*A*辑》*375* (2011), 1069–1073.[261] Zhang, Y. 利用局部分数阶傅里叶级数法求解局部分数阶微分方程的初边值问题。《抽象与应用分析》*2014*年(2014), 912464.[262] Zhang, Y., Cattani, C., and Yang, X.-J. 用局部分数阶同伦摄动法求解分形域上的非齐次热传导方程。《熵》*17* (2015), 6753–6764.[263] Zhang, Y., Meerschaert, M. M., and Packman, A. I. 建立跨尺度河床沉积物输运的联系。*Geophys. Res. Lett. 39* (2012),L20404–L20406.[264] Zhao, D., and Luo, M. 作用过程与记忆效应的表述：广义分数阶导数及其在具有有限波速的热传导理论中的应用。《应用数学与计算》*346* (2019), 531–544.[265] Zhao, D., Singh, J., Kumar, D., Rathore, S., and Yang, X.-J. 一种用于分形介质局部分数阶热传导方程的高效计算技术。*J. Nonlin. Sci. Appl. 10* (2017), 1478–1486.[266] Zhao, Y., Cai, Y.-G., and Yang, X.-J. 一种局部分数阶导数及其在分形弛豫与扩散现象中的应用。《热科学》*20*(2016), S723–S727.[267] Zhu, P., and Xie, S. 二维非线性时间分数阶反应-亚扩散方程的交替方向隐式有限元法。*Am. J. Comput. Math. 6* (2016), 336–356.