流体天线系统：关于中断概率与分集增益的新见解

Wee Kiat New，IEEE会员，Kai-Kit Wong，IEEE会士，
Hao Xu，IEEE会员，Kin-Fai Tong，IEEE会士，
以及 Chan-Byoung Chae，IEEE会士

arXiv:2301.00073v2 [cs.IT] 11 May 2023

摘要

为推动创新应用与服务的发展，产业界和学术界都在探索用于第六代（6G）通信的新技术。流体天线系统（FAS）是其中一个颇具前景的候选方案。与现有系统不同，FAS 是一种新型通信技术，其天线可在给定空间内自由改变位置和形状。与传统系统相比，这种独特能力有望提供更高的分集增益，并实现无干扰通信。然而，由于FAS的系统特性难以分析，其性能极限仍不明确。为此，我们采用闭式表达式近似描述FAS的中断概率和分集增益。随后，我们提出一种具有 N^* 个端口的次优FAS；与具有 N^*-1 个端口的FAS相比，它能获得显著增益，而具有 N^*+1 个端口的FAS相较于所提出的次优FAS仅带来有限的性能提升。本文还提供了分析结果和仿真结果，以揭示影响FAS性能的关键因素。针对仅配备一个有源射频链的系统，我们表明，所提出的次优FAS在中断概率方面优于单天线（SISO）系统和选择合并（SC）系统。有趣的是，当给定空间为 $\frac{\lambda}{2}$ 时，所提出的配备一个有源射频链的次优FAS，其中断概率可达到与配备多个有源射频链的最大比合并（MRC）系统近乎相同的水平。

W. K. New、K.-K.Wong 和 K.-F. Tong 的工作由工程与物理科学研究委员会（EPSRC）通过项目编号 EP/W026813/1 资助。C.-B. Chae 的工作由韩国科学技术与信息通信部（MSIT）资助的信息通信技术促进研究院（IITP）项目资助（编号：2021-0-02208、2021- 0-00486）。H. Xu 的工作由欧盟地平线2020研究与创新计划通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里基金（编号：101024636）资助。

Wee Kiat New（电子邮箱：a.new@ucl.ac.uk）、Kai-KitWong（电子邮箱：kai-kit.wong@ucl.ac.uk）、Hao Xu（电子邮箱：hao.xu@ucl.uk）和 Kin-Fai Tong（电子邮箱：k.tong@ucl.ac.uk）均任职于英国伦敦 WC1E 6BT 伦敦大学学院电子与电气工程系。

Chan-Byoung Chae（电子邮箱：cbchae@yonsei.ac.kr）任职于韩国首尔03722的延世大学综合技术学院。Kai-Kit Wong 也隶属于韩国首尔03722的延世大学延世前沿实验室。

索引词

6G、流体天线系统、中断概率、分集增益、性能分析。

I. 引言

第五代（5G）无线网络近期已在全球部署，因此产业界和学术界正在寻求新技术，以最大限度地发挥第六代（6G）无线网络的潜力。流体天线系统（FAS）是很有前景的候选技术之一。与传统天线系统不同，FAS 是一种可由软件控制的流体、导电或介电结构，可在给定空间内自由调整其位置和形状 [1]。最基本的单流体天线由一个射频链和 N 个预设位置（称为端口）组成，这些端口分布在给定空间内；此外，也可以采用更先进的设计。流体辐射体可以在这些端口之间自由切换位置，以获得更强的信道增益、更低的干扰及其他理想性能 [2]。

得益于近期将液态金属和电离溶液应用于天线领域的进展，流体天线如今已成为可行方案。一些原型可见于 [3]–[6]。如 [7],所述，软件控制像素天线或可移动天线等其他柔性天线结构也可视为流体天线。从本质上说，FAS 的关键原理是利用其位置和形状的动态变化，实现极致的分集与复用增益 [7]。此外，未来 FAS 可与其他 6G 候选技术结合使用，例如可重构智能表面（RIS）、大规模多输入多输出（MIMO）和太赫兹（THz）通信。具体而言，FAS 有助于降低 RIS 的优化复杂度 [1],，提升大规模 MIMO 的复用增益 [8] ，并对抗太赫兹通信中的高路径损耗效应[9]。

尽管 FAS 具有诸多优势，但其性能的基本极限及影响性能的关键因素仍不明确。原因之一是，由于端口之间可以紧密排列，FAS 的信道具有很强的相关性。因此，FAS 信道的概率密度函数（PDF）和累积分布函数（CDF）难以处理 [10]。由此，FAS 的中断概率和分集增益尚无已知的闭式表达式。此外，由于

一个有源射频链 [11]。[1] 因此，达到令人满意的性能所需的次优端口数量尚不明确。然而，这一数量在实践和理论上都十分重要，因为它能够降低实现难度和分析复杂度。

从概念上讲，FAS 可视为类似于传统的选择合并（SC）系统，因为两种系统都只使用一条激活的射频链，并且都有一组可供选择的端口（即 FAS）或天线（即 SC）。然而，与传统 SC 系统不同，FAS 可在有限空间内拥有无限多个端口（例如使用液态金属时），这使得其实现和分析都更具挑战性。此外，还可以利用在各端口之间自由切换辐射单元这一独特能力来缓解多用户干扰。这些特性在传统 SC 系统中并不实用。

最新研究表明，当端口数量足够大时，FAS 的性能优于最大比合并（MRC）系统 [7]。事实上， [7] 证明，对于固定速率/信噪比（SNR），随着 $N \to \infty$，FAS 可实现任意小的中断概率。在 [12], 中，作者揭示了 FAS 的遍历容量会随着 N 而增加，因此 FAS 在遍历容量方面可以优于 MRC。有趣的是，FAS 还可用于多址接入。具体而言， [13] 提出了一种流体天线多址接入（FAMA）系统，该系统利用空间中的深衰落时刻来降低多用户干扰。受这些研究启发， [14] 采用随机几何分析 FAS 在大规模下行蜂窝网络中的中断概率，并且 [15]分析了 FAS 在更一般的相关衰落信道中的性能。

然而，[16] 指出，先前研究中的信道建模可能并不准确。为此，[10] 提出了一种高度复杂的信道模型，以紧密拟合Jake模型的空间相关性。利用这一信道模型，他们指出，随着 N 增加，FAS的性能增益有限。然而，限制FAS性能的关键原因仍不明确。这是因为解析概率密度函数/累积分布函数表达式中使用的特征值和特征向量条目所能提供的见解有限。

需要特别指出的是，推导 FAS 信道的概率密度函数/累积分布函数极具挑战性 [10]。这是因为 FAS 信道之间存在很强的相关性，因此必须用多元相关瑞利分布来表述。过去几十年来，人们为解决这一问题付出了大量努力 [17]。然而，大多数

[1]在本文中，我们将用于通信的射频链称为活动射频链。相比之下，射频链指的是连接到每根天线、使其正常工作的射频链集合。

研究仅得到了二元 [18], [19], 三元 [18], [20], [21], 或四元 [21], [22]分布，而其他研究则将相关矩阵限定为特定形式（例如，等相关 [23] 和指数相关 [24]）。值得庆幸的是，近期已有研究推导出了任意相关瑞利分布的多元概率密度函数/累积分布函数 [25]–[27]。然而，这些研究仍保留了相关矩阵非奇异的假设。本文不采用这一假设（即我们的相关矩阵可以是近奇异的），并通过次优近似来解决计算问题。[2]

除上述研究外， [29] 还提出了一种端口选择算法，在仅观测少数端口的接收信噪比时，其性能也能接近最优FAS。此外，[30] 研究了场响应信道模型，但忽略了空间相关效应； [31] 则将该模型扩展到多输入多输出场景。此外，FAMA可分为 i）慢速FAMA和 ii）快速FAMA。前者在信道发生变化时切换端口，[32] 而后者则以逐符号方式切换端口 [33]。文献 [34]还推导了双用户FAMA的解析中断概率。

受上述研究启发，本文旨在探究FAS的基本极限，以及影响其性能的关键因素。为此，我们通过一种简单且准确的信道模型，以闭式表达式近似表示FAS的中断概率和分集增益，该模型能够紧密遵循Jake模型的空间相关性。此外，我们提出了一种具有 N^* 个端口的次优FAS，并给出了一种近似 N^*的算法。本文的主要贡献总结如下:

- 我们采用一种简单而准确的信道模型，该模型遵循 Jake模型的空间相关性。基于这一信道模型，我们推导出中断概率的闭式表达式。通过应用泰勒级数近似，我们将高信噪比下的中断概率简化为更简洁且更有意义的表达式。利用这一结果，我们得到了 FAS 的分集增益。

- 我们提出了一种具有 N^* 个端口的次优FAS。所提出的次优FAS发挥着重要作用，因为它能让FAS以最少的端口数实现近乎最优的性能。具体而言，可以定义$\varepsilon_{\text{容差}}$ 来调整所提出的FAS的次优程度。

[2]近奇异相关矩阵的计算问题比奇异矩阵的计算问题难得多。这是因为我们可以通过移除相关项 [28]，从奇异矩阵中得到一个独立矩阵。但对于近奇异情况，这种方法并不适用。因此，我们需要依赖近似。

例如，当 ε_{tol} 较小时，所提出的FAS能够以增加端口数为代价，在量化意义上达到近乎最优的性能。此外，我们开发了一种多项式时间算法来近似 N^*。另外，N^* 可用于解决近奇异相关矩阵问题。

- 我们提供分析结果和仿真结果，以展示影响 FAS 性能的关键参数。我们的讨论不仅包含对系统特性的直观见解，也为高效的 FAS 设计提供实用指导。

本文其余部分安排如下：第二节详细介绍系统模型和性能指标。第三节阐述 FAS 的中断概率和分集增益。第四节讨论次优 FAS 的具体内容以及用于近似 N^* 的算法。第五节给出仿真结果，并在第六节总结全文。

符号说明：标量变量用斜体字母表示（例如，c），向量用小写粗斜体字母表示（例如，$\boldsymbol{c}$），矩阵用大写粗斜体字母表示（例如，$\boldsymbol{C}$）。此外，$(\cdot)^T$ 表示转置，$(\cdot)^H$ 表示共轭转置，$(\cdot)^{-1}$ 表示矩阵的逆，而 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|_F$ 分别表示绝对值和弗罗贝尼乌斯范数。本文中，log(·)表示以 2 为底的对数，$\mathbb{E}[\cdot]$ 表示期望，$\mathbb{P}\{\cdot\}$ 表示某事件发生的概率。此外，f_c(·)表示 c的概率密度函数，F_c(·)表示c的累积分布函数。符号 $\mathbf{1}_c\{\cdot\}$ 是条件 c 的指示函数，而 $[\cdot]_c^{+/-}$ 输出受 c下界或上界约束的参数。为帮助读者理解本文的数学内容，表 I 中解释了关键变量的含义。

II. 系统模型

本文考虑一种点对点流体天线系统，其中发射机配备传统天线，接收机配备流体天线。该流体天线由一个射频链和 N 个预设位置（也称为端口）组成，这些位置沿长度为 $W\lambda$ 的线性尺寸均匀分布，其中 λ 为载波频率对应的波长。由于各端口排列紧密，彼此之间存在较强的空间相关性。根据 Jake模型 [35], , 第 m个端口与第 n个端口之间的空间相关性表示为

$$J_{m,n} = \sigma^2 J_0\left(2\pi\frac{(m-n)}{N-1}W\right), \tag{1}$$

其中，σ^2 表示大尺度衰落效应，J_0(·)是第一类零阶贝塞尔函数。

表 I：关键变量的含义

符号	含义
D_{FAS}	FAS 的分集增益
h_n	第 n个端口的复信道系数
$\hat{h}_n$	h_n的近似
$\lvert h_{\text{FAS}}\rvert$	FAS 的最大信号包络
$J_{m,n}$	第 m 个端口与第 n 个端口之间的空间相关性
$\boldsymbol{J}$	空间相关矩阵
$\boldsymbol{J}'$	含有 $N \to \infty$ 的空间相关矩阵
$\boldsymbol{K}$	$\boldsymbol{J}$ 的余因子
λ	载波频率的波长
N	端口总数
N'	$\boldsymbol{J}'$的秩
q	最低所需速率
SNR	发射信噪比
W	以 λ为单位的流体天线长度
Θ	接收机的瞬时接收信噪比

为便于分析，我们引入相关矩阵 $\boldsymbol{J}$，其中

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_{1,1} & \cdots & J_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{N,1} & \cdots & J_{N,N} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

在（2）中，我们有 $J_{m,\,n} = J_{n,\,m}$。因此，通过特征值分解，可得 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^H$ 其中，$\boldsymbol{U}$ 是一个 $N \times N$ 矩阵，其第 n 列（记为 $\boldsymbol{u}_n$）是 $\boldsymbol{J}$的特征向量，而 $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ 是一个 $N \times N$ 对角矩阵，其第 n 个对角元素是 $\boldsymbol{u}_n$ 对应的特征值。不失一般性，我们假设 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的特征值按降序排列，即 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N$。

在本文中，我们假设 FAS 中只有一条射频链，因此通信时只能激活一个端口。第 n 个端口的接收信号表示为

$$y_n = h_n x + w_n,\ n = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

其中，h_n 是第 n个端口的复信道系数，x 是信息信号，满足$\mathbb{E}\left[|x|^2\right] = P$；$w_n$ 是第 n个端口的加性高斯白噪声，其均值为零，且

var方差为 N_0。由于端口之间存在空间相关性， h_n 可以建模为 as

$$h_n = \sum_{m=1}^{N} u_{n,m}\sqrt{\lambda_m} z_m, \tag{4}$$

其中$u_{n,\ m}$是$(n,\ m)$项（即 $\boldsymbol{U}$中的 $z_m = a_m + jb_m$，其中 a_m、 b_m和$\forall m$ 均为均值为零、方差为1 2的独立同分布（i.i.d.）高斯随机变量。根据[10], (4) 也可近似表示为

$$\hat{h}_n = \Psi v_n + \sum_{m=1}^{\epsilon\text{-rank}} u_{n,m}\sqrt{\lambda_m} z_m, \tag{5}$$

其中， ϵ-秩是一个建模参数， $\Psi = \sqrt{\sigma^2 - \sum_{m=1}^{\epsilon\text{-rank}} u_{n,\ m}^2 \lambda_m}$、 $v_n = c_n + jd_n$ 以及 c_n、 d_n、$\forall n$均为均值为零、方差为1 2的独立同分布（i.i.d.）高斯随机变量。

为获得全局最优性能，FAS会激活信号包络最大的端口 [7],[3] 即，

$$|h_{\text{FAS}}| = \max\left\{|h_1|, \ldots, |h_N|\right\}. \tag{6}$$

接收机的瞬时接收信噪比为

$$\Theta = |h_{\text{FAS}}|^2 \frac{P}{N_0} = |h_{\text{FAS}}|^2 SNR, \tag{7}$$

其中，$SNR = \frac{P}{N_0}$ 为发射信噪比，其中断概率定义为 as

$$\mathbb{P}\left\{\log\left(1+\Theta\right) < q\right\} = \mathbb{P}\left\{|h_{\text{FAS}}| < \Omega\right\}, \tag{8}$$

其中， $\Omega = \sqrt{\frac{2^q-1}{SNR}}$， q 为最低所需速率。此外，FAS的分集增益可定义为 [36]

$$\lim_{SNR\to\infty} -\frac{\log \mathbb{P}_e\left(SNR\right)}{\log\left(SNR\right)} \overset{(a)}{=} \lim_{SNR\to\infty} -\frac{\log \mathbb{P}\left\{\log\left(1+|h_{\text{FAS}}|^2 SNR\right) < q\right\}}{\log\left(SNR\right)} = D_{\text{FAS}}, \tag{9}$$

其中，(a) 是基于以下事实得出的：在高信噪比下，误码概率与中断概率相差一个常数偏移量 [37]。

[3]由于端口间存在空间相关性， [32] 中指出，只需观测少量端口/进行少量训练，即可获取完整信道状态信息。

III. FAS 的中断概率与分集增益

如（4）所示，复信道系数 $\boldsymbol{h} = [h_1, \ldots, h_N]^T$之间存在相关性。因此，$|\boldsymbol{h}|$ 是一个相关瑞利随机向量。下面给出若干引理，以求得 FAS 的闭式中断概率和分集增益。

引理 1。$|\boldsymbol{h}|$ 的概率密度函数可近似为

$$f_{|\boldsymbol{h}|}(|h_1|, \ldots, |h_N|) \approx \eta \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \cdots \sum_{s_T=0}^{s_{T-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^{T} s_t^*} \prod_{t=1}^{T} \beta(t, s_t^*) \sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}} \left[\prod_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} s_t^* \\ v_t \end{pmatrix}\right] \left[(2\pi)^N \prod_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{\Delta_i=0\}}\right]. \tag{10}$$

证明：见附录 A。 ■

在（10）中，$\eta = \frac{\pi^{\sum_{n=1}^{N} s_n^*}}{\pi^N \det(\boldsymbol{J})}$，$\zeta_t = \frac{s_t^*!}{\zeta_t^{s_t^*}}$，$\beta(t, s_t^*)$ 在 $\boldsymbol{J}$ 行列式（）指数函数 $\left\{-\sum_{n=1}^{N} |h_n|^2 K_{n,n}\right\}$，$T = N(N-1)2$，$s_t^* = s_t - s_{t+1}$，其中 $s_{T+1} = 0$。本文中，下标 t 与 m, n 的关系如下：$t = n + (m-1)N - m(m+1)2$，$m < n$，而 m, n 可由 t 得到，其中 $m =$ 满足以 $\sum_{i=1}^{m'}(N-i) > t$ 和 $n = t - (m-1)N + m(m+1)2$ 为约束的 $m' \in \mathbb{Z}$ 最小值。

注意，s_0 是一个有限常数，为保证近似准确，该常数必须足够大。此外，$\boldsymbol{v} = [v_1, \ldots, v_T]^T$，$\mathcal{V}$ 表示所有可能排列的集合，而 $\Delta_i = \sum_{n=1}^{N} G_{i,n} - \sum_{n=1}^{N} G_{n,i} - G_{i,i}$。此外，$K_{m,n}$ 是 $\boldsymbol{K}$ 的第 (m,n) 个元素，其中 $\boldsymbol{K}$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的余因子；$G_{m,n}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的第 (m,n) 个元素，其中 $\boldsymbol{G}$ 定义为

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{N-1} \\ & & \gamma_N & \cdots & \gamma_{2N-3} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \gamma_T \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

且 $\gamma_t = 2v_t - s_t^* \in \mathbb{Z}$。

引理 2。$|\boldsymbol{h}|$ 的累积分布函数可近似为

$$F_{|\boldsymbol{h}|}(R_1, \ldots, R_N) \approx \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \cdots \sum_{s_T=0}^{s_{T-1}} \frac{g(\boldsymbol{s}^*)}{\pi^N \det(\boldsymbol{J})} \prod_{t=1}^{T} \frac{(-K_{m,n})^{s_t^*}}{s_t^*! \det(\boldsymbol{J})^{s_t^*}} \times \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \left(\frac{K_{n,n}}{\det(\boldsymbol{J})}\right)^{-\frac{\bar{s}_n}{2}-\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{1+\bar{s}_n}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\bar{s}_n}{2}, \frac{K_{n,n} R_n^2}{\det(\boldsymbol{J})}\right)\right]. \tag{12}$$

证明：见附录 B。 ■

在 (12) 中，我们有 $\bar{s}_n = \sum_{i=1}^{N} S^*_{n,\ i} + \sum_{i=1}^{n-1} S^*_{i,\ n} + 1$ 其中 $S^*_{i,\ n}$ 是 $(i,\ \ n)$ 阶项 $\boldsymbol{S}^*$，且$\boldsymbol{S}^*$ 在 (36) 中引入。此外，

$$g\left(\boldsymbol{s}^*\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^{T} s_t^*} \sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}} \left[\prod_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} s_t^* \\ v_t \end{pmatrix}\right] (2\pi)^N \prod_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{\{\Delta_i=0\}}. \tag{13}$$

式（10）和（12）中的表达式极其复杂。尽管如此，它们使我们能够推导出更有见地的结果，相关推导将在本文后文中展示。利用上述引理，我们给出以下定理。

定理 1. FAS 的中断概率可近似表示为以下闭式表达式：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{|h_{FAS}| < \Omega\right\} &= F_{|\boldsymbol{h}|}\left(\Omega, \ldots, \Omega\right) \\ &\approx \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \cdots \sum_{s_T=0}^{s_{T-1}} \frac{g\left(\boldsymbol{s}^*\right)}{\pi^N \det(\boldsymbol{J})} \prod_{t=1}^{T} \frac{\left(-K_{m,n}\right)^{s_t^*}}{s_t^*! \det(\boldsymbol{J})^{s_t^*}} \times \\ &\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \left(\frac{K_{n,n}}{\det(\boldsymbol{J})}\right)^{-\frac{\bar{s}_n}{2}-\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{1+\bar{s}_n}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\bar{s}_n}{2}, \frac{K_{n,n}\Omega^2}{\det(\boldsymbol{J})}\right)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

证明：该结 果可由引理 2 并代入 $R_1 = \cdots = R_N = \Omega$ 得到 .

■

备注 1。 根据 [10]， $\boldsymbol{h}$ 可使用以下模型 $\hat{}\boldsymbol{h} = \left[\hat{}h_1、\ \ldots\ldots、\ \hat{}h_N\right]^T$，并利用后一种模型，他们表明 FAS 的中断概率可近似表示为

$$F_{|h_{\text{FAS}}|}\left(\Omega\right) \approx \left[\prod_{n=1}^{N} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sum_{m=1}^{\epsilon\text{-rank}} u_{n,m}^2 \lambda_m} \exp\left(-\frac{r}{\sum_{m=1}^{\epsilon\text{-rank}} u_{n,m}^2 \lambda_m}\right) \left(1 - Q_1\left(\frac{\sqrt{2r}}{\Psi}, \frac{\sqrt{2}\Omega}{\Psi}\right)\right)^L dr\right]^{\frac{1}{L}}, \tag{15}$$

其中 $Q_1\left(\cdot,\ \cdot\right)$ 是 Marcum-Q 函数，且 L =的最小值 $\left\{\frac{1.52(N-1)}{2\pi W},\ \ N\right\}$。注意，（15）是一个非常精妙的表达式，因为每个 n 项都只包含一个积分。尽管如此，我们发现很难从该表达式中获得更深入的见解。

定理 2. FAS 在高信噪比下的中断概率为

$$\mathbb{P}\left\{|h_{FAS}| < \Omega\right\} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{J})} \Omega^{2N} + o\left(\frac{1}{SNR^N}\right). \tag{16}$$

证明：见附录 C。 ■

定理 3。FAS 的分集增益近似表示为

$$D_{FAS} \approx \min\left\{N, N'\right\}, \tag{17}$$

其中 N'是 $\boldsymbol{J}'$的数值秩，满足 $\boldsymbol{J}'$是式（2）中定义的协方差矩阵，其中 $N \to \infty$ 对于固定的 W。

证明：见附录 D。 ■

在定理 2中，我们可以将 $\det\left(\boldsymbol{J}^{-1}\right)$ 解释为惩罚项，将 Ω^2 解释为 FAS 的增益，该增益相对于 N呈指数级增长。与此同时，当 SNR 较高时，含小 o 的项会趋于零，因此可以忽略。然而，在定理 3中可以看到，分集增益受限于 $\min\{N, N'\}$。因此，将 N增加到超过 N'可能并无益处。请注意，这些解释无法直接从式（15）中得出。

IV. 次优解：采用 N^* 个端口的 FAS

从根本上说，[11] 表明，增加信道（或端口）数量带来的增益会逐渐减小（即，平均接收信噪比增益为 $\sum_n^N \frac{1}{n}$）。事实上，[10] 表明，对于固定的 W，经过一段 N后，FAS 的中断概率可能保持相近。为便于表述，我们将此 N记为 N^*，其中 $N^* \leq N$。

据我们所知，关于 N^*的研究很少。事实上，要获得 N^*非常困难，因为它会随参数 W，更确切地说，随相关矩阵 $\boldsymbol{J}$而变化。[4]然而，求得 N^* 在理论和实践中都至关重要，因为这有助于 FAS 以最少的端口实现高效性能。本节将介绍一种简单的方法，用于近似 N^*，给定 W。

首先，我们给出以下定理。

定理 4. 假设具有 N 个端口的 FAS 的信道记为 $\boldsymbol{h}$。那么， $\boldsymbol{h}$ 可以很好地近似为 $\tilde{\boldsymbol{h}} = \left[\tilde{h}_1、\ .....、\ \tilde{h}_N\right]^T$，其中

$$\tilde{h}_n = \sum_{m=1}^{\tilde{N}} u_{n,m}\sqrt{\lambda_m} z_m, \tag{18}$$

~ ~其中，$\tilde{N}$ 是 $\boldsymbol{J}$的数值秩。也就是说， $\tilde{\boldsymbol{h}}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的概率密度函数和累积分布函数相似。

~ ~证明：设 $\tilde{N}$ 为 $\boldsymbol{J}$ 的数值秩，其中 $\tilde{N} \leq N$。根据数值秩的定义，我们有 $\lambda_n < \epsilon$，对 $n \in \left\{\tilde{N}+1, \ldots, N\right\}$，其中 $\epsilon \approx 0$。根据 Eckart-Young-Mirsky

[4]参考式（1）和式（2），可以看出， N^* 取决于参数 W。

~ ~定理 [38], 最优的 $\boldsymbol{J}$ 使矩阵 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 之间的弗罗贝尼乌斯范数最小，且满足秩$\left(\tilde{\boldsymbol{J}}\right) \leq \tilde{N}$为 $\tilde{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{U}^H$其中 $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \text{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\tilde{N}}, 0, \ldots 0\right)$。

~ ~ ~基于这一洞见，我们引入 $\boldsymbol{h}$ ，其定义见定理4 ，其中 $\boldsymbol{h}$ 的协方差为 $\boldsymbol{J}$（即 $\boldsymbol{J}$的秩为$\left(\tilde{\boldsymbol{J}}\right) \leq \tilde{N}$时的最佳近似）。因此，我们可以利用 $\boldsymbol{h}$~很好地近似 $\boldsymbol{h}$ ，因为这两个分布之间的弗雷歇距离为 [39]

$$W_2\left(\mathcal{CN}\left(0_{N\times 1}, \boldsymbol{J}\right), \mathcal{CN}\left(0_{N\times 1}, \tilde{\boldsymbol{J}}\right)\right) = \left\|(\boldsymbol{\Lambda})^{\frac{1}{2}} - \left(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_F^2 \approx 0. \tag{19}$$

■

~推论 1. 如果我们已知 $\boldsymbol{J}$的精确特征值和秩，则 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}$。

~证明：设 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 N 分别为 $\boldsymbol{J}$的精确特征值和秩。根据秩的定义，我们有 $\lambda_n = 0$，其中 $n \in \left\{\tilde{N}+1, \ldots\ldots, N\right\}$。由此可知，~ $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的分布之间的弗雷歇距离为零。

■

如式（19）所示，在信道近似中起关键作用的是相关矩阵的特征值。受这一洞见启发，我们引入如下新公式：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{N^*} &= S_N - S_{N^*} \\ &= \sigma^2 - S_{N^*},\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $S_{N^*} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N^*}\lambda_n$。注意，(20)与(19)类似，因为(20)的左侧衡量了 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{h}^*$的分布之间的差距，其中 $\boldsymbol{h}^*$ 的定义方式与~ ~(18)中类似，但我们将 N替换为 N^*，并要求 $N^* \leq N$。另一方面，在(20)的右侧，我们考虑 $\boldsymbol{J}^*$的平均特征值，其中 $\boldsymbol{J}^*$ 是 $\boldsymbol{h}^*$的协方差。

为减少所需端口的数量，我们定义 $\varepsilon_{\text{tol}} > 0$ ，并找出满足 $\varepsilon_{\text{tol}} \geq \varepsilon_{N^*}$的最小整数 N^*。由于 $\boldsymbol{J}^*$只有 N^*个主导特征值，我们提出采用具有 N^* 个端口的次优FAS。有趣的是，在实践中， ε_{tol} 具有很好的启发式解释。具体而言，它定义了所提出FAS的次优程度，即当 ε_{tol} 较小时，所提出的FAS接近最优；而当 ε_{tol} 较大时，其最优性较低。

通过适当固定 ε_{tol} ，我们观察到，具有 N^* 个端口的 FAS 相较于所有具有 $N < N^*$ 个端口的 FAS 都有显著提升，而大多数具有 $N > N^*$个端口的 FAS 则只有

[5]我们建议设定 $\varepsilon_{\text{tol}} = 0.01\sigma^2$ （即， $\boldsymbol{J}^*$ 的平均特征值为 $\boldsymbol{J}$的平均特征值的 99%）

算法 1 根据 W 近似求解 N^* 的方法

1: 输入： W， ε_{tol}；输出： N^*

2：计算 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^H$

3：定义 $n=1$ 并计算 ε_n

4: 当 $\varepsilon_{\text{tol}}<\varepsilon_n$ 且 $n<$时 $\tilde{N}$

5: $n=n+1$

6: $\varepsilon_n=\sigma^2-S_n$

7: 结束

8：返回 n 作为 N^*

˜相较于具有 $N-1$ 个端口的 FAS 略有提升。请注意，当 $\boldsymbol{J}$ 是病态矩阵时，我们通常有 $N^*<N$；当 $\boldsymbol{J}$ 是良态矩阵时，我们通常有 $N^*=N$。

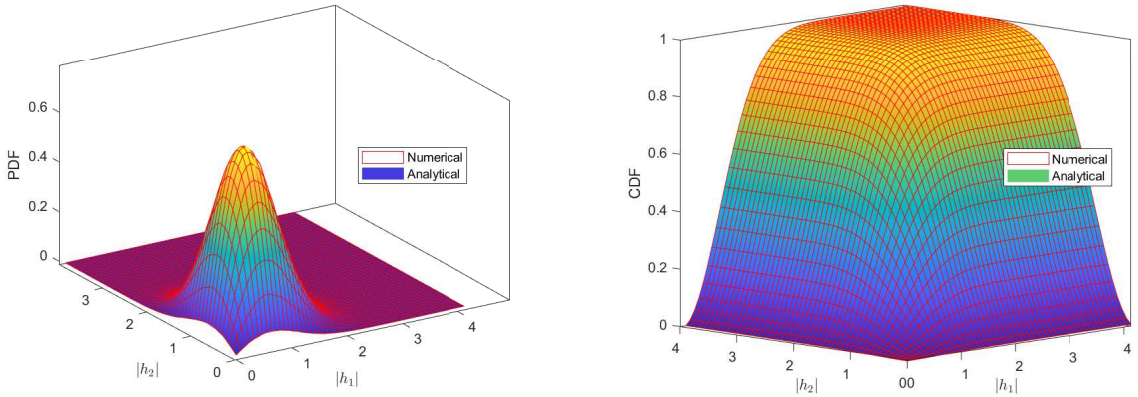
近似 N^* 的方法见算法 1。为了衡量我们算法的计算复杂度，我们考虑浮点运算次数（flops）。一次浮点运算定义为两个浮点数之间的一次加、减、乘或除 [40]。在算法 1 中，计算 $\boldsymbol{J}$和 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^H$分别需要 $6N^2$和 $21N^3$次浮点运算 [41]。计算 ε_n 对每个 $n+1$ 需要 n次浮点运算。因此，算法 1 的浮点运算总次数为$21N^3+6N^2+\frac{1}{2}N^{*2}+\frac{3}{2}N^*$，其多项式时间复杂度为 $\mathcal{O}(N^3)$，因为 $N^*\leq N$。换言之，算法 1 的计算量主要由 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^H$ 决定。

注意， N^* 在理论上也很有用。例如，当 引理 1 和 引理 2 以及定理 1、2和3 在 $\boldsymbol{J}$ 近奇异时无法计算。为了解决这一问题，我们提出以下定理。

定理 5. 如果 $\boldsymbol{J}$ 是近奇异的，那么从计算角度来看，我们可以使用 N^* 个端口来近似具有 N 个端口的 FAS 信道。不过，具有 N 个端口的 FAS 与具有 N^* 个端口的 FAS 的信道分布之间可能存在微小差异。

证明： 如果 $\boldsymbol{J}$ 近奇异，则一个或多个项几乎可以表示为其他项的线性组合。因此，我们可以移除这些近似相关的项，只考虑 N^*独立项。由于具有 N^*个端口的 FAS 有 N^* 个主导特征值，引理 1和 2以及定理 1、2和 3 均可计算。不过，由于这些项只是近似相关，具有 N 个端口的 FAS 与具有 N^* 个端口的 FAS 的信道分布之间可能存在微小差异。

■



(a) (b)

图1：具有2个端口的FAS：a）联合概率密度函数；b）联合累积分布函数。

V. 结果与讨论

在本节中，我们给出仿真结果，以便更好地了解 FAS 的性能。我们重点关注高效 FAS 的设计，以及限制其性能的因素。除非另有说明，我们假设 $\sigma^2 = 1$、 $N = 50$、 $W = 0.5$、 $q = 10$ 和 $SNR = 30$ dB。

首先，我们展示（10）和（12）的准确性。为了直观展示 $|\boldsymbol{h}|$的联合概率密度函数和联合累积分布函数，我们考虑一个具有2个端口的FAS（即 $N = 2$）。在图1中，红色网格表示数值概率密度函数/累积分布函数，实心曲面则表示解析概率密度函数/累积分布函数。可以看出，在整个分布区域内， $|\boldsymbol{h}|$ 的概率密度函数/累积分布函数近似与数值结果高度吻合。不过，值得注意的是， （10）和（12）非常复杂。因此，仍然需要表达式更简单的近似。

图 2 比较了 FAS 的中断概率与（14）和（15）的结果。如图所示， （14）更准确，因为其解析表达式直接基于多元相关瑞利分布推导而来，仅在将无穷级数截断为有限级数时使用近似。这里，我们假设 $s_0 = 20$。与数值结果相比，只要 s_0 足够大，截断误差就可以忽略。相比之下， （15）准确度较低，因为 FAS 的中断概率是通过单重积分的幂近似得到的，这种简化可能会导致一些误差。尽管如此，值得强调的是， （14）只能在 N 较小时计算，因为其表达式非常复杂。因此， （15）对于较大的 N仍然有用。

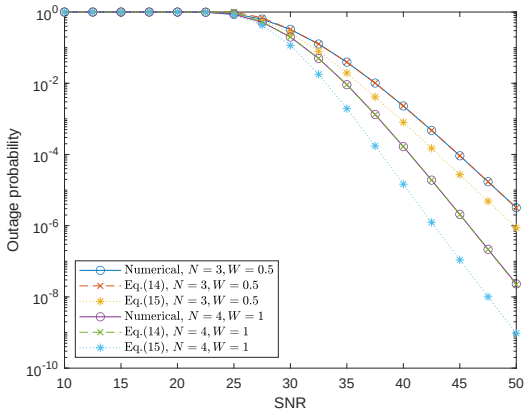
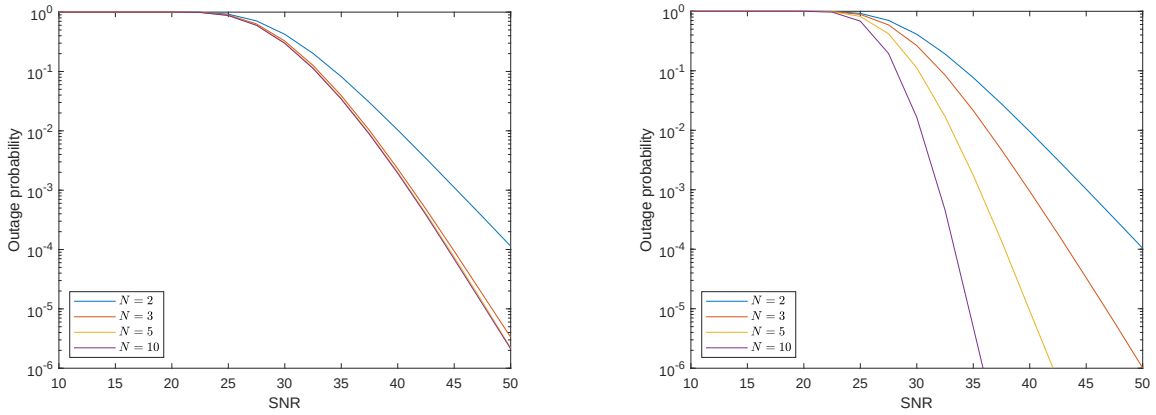


图 2：FAS 的中断概率随信噪比变化。



(a) (b)

图 3：中断概　　率随信噪比变化，适用于不同的 N 和 W：a) $W = 0.5$；b) $W = 10$　　.

在图 3中，我们计算了不同 N 和 W条件下，FAS 的中断概率随信噪比的变化。比较图 3（a）和图 3（b），可以清楚地看到，中断概率主要受 W限制。具体而言，如果 W 较小且 N 较大，中断概率仍基本相同，这与 [10]的研究结果一致。然而，如果 W 足够大，中断概率会随着 N 增大而显著降低。

为了更好地理解这一点，我们进一步在图 4中比较了 FAS 的中断概率与（15）和（16）。与数值结果相比，可以看出（15）的精度较低，而随着 SNR增大，（16）的精度较高。具体而言，随着 SNR增大，（16）的精度会显著提高，因为我们在零附近应用泰勒级数近似，这对应于渐近高

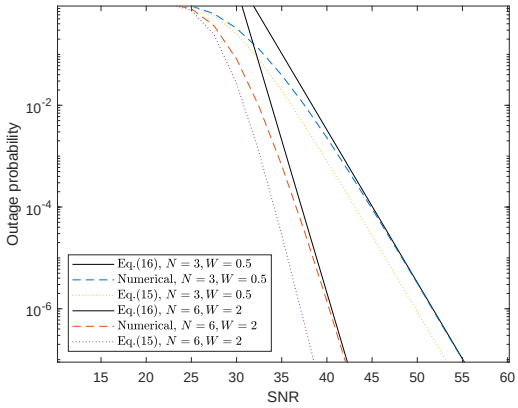
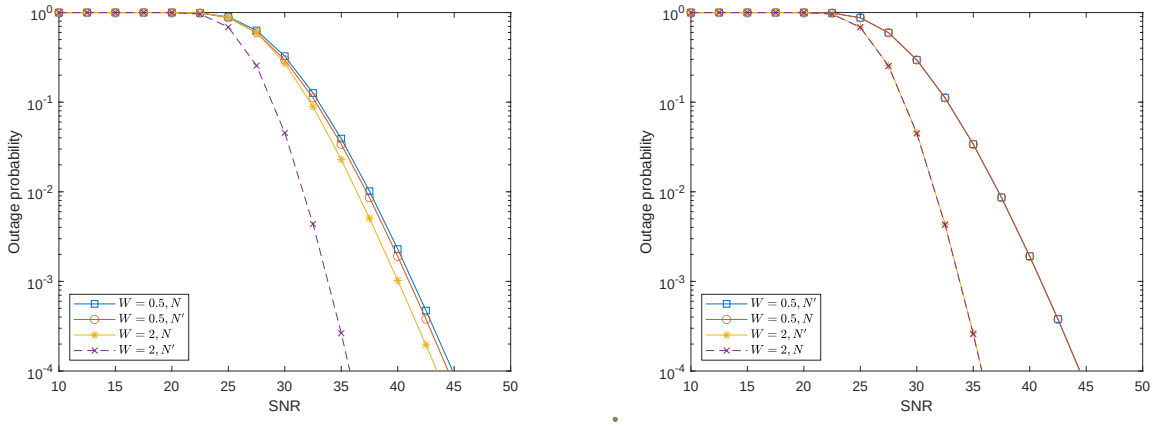


图4：高信噪比下 FAS 的中断概率。

信噪比。因此，在高信噪比下，误差可以忽略不计。从（16）可知，$\det\left(\boldsymbol{J}^{-1}\right)$对 FAS 的性能起着关键作用。特别是，$\boldsymbol{J}$ 必须具有良好的条件性，才能使 Ω^{2N} 成为主导项。如果 $\boldsymbol{J}$ 近奇异，那么 N 就不再重要。这是因为 $\det\left(\boldsymbol{J}^{-1}\right)$ 无法由 Ω^{2N} 补偿。要使 $\boldsymbol{J}$ 成为条件良好的矩阵，我们可以在 W 固定时增大 N，或者在 N 固定时减小 W。不过，我们认为，实际应用中较大的 N 不会对系统造成任何危害，只会增加理论分析的难度。

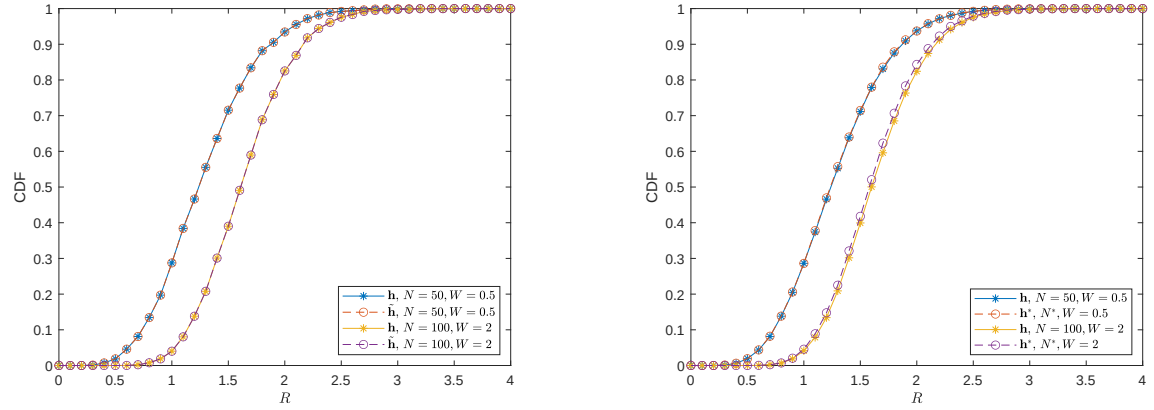
如图5(a)所示，我们比较了不同 N 个端口的 FAS 与N'个端口在不同 W条件下的中断概率，其中 $N < N'$。可以看到，无论 W如何，前者的中断概率都以下者为下界。图5(b)研究了相反的情况，即 $N > N'$。观察可知，不同 N个端口的 FAS 与 N'个端口的 FAS 在不同 W条件下的中断概率相同。因此，FAS 的分集增益受限于最小值 $\{N, N'\}$，这验证了定理3。定理3 还表明，在点对点场景中，端口数超过 N' 不会带来任何提升。

˜图 6(a) 展示了 $\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的累积分布函数，其中我们固定 $R_1 = \cdots = R_N = R$。结果显示，无论 ˜如何变化，$\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 之间都没有明显差异，且不受 R、N 和 W的影响。这是因为两个分布之间的弗雷歇距离始终接近于零。这证实了定理˜4，并表明我们始终可以用 $\boldsymbol{h}$ 代替 $\boldsymbol{h}$。此外，图 6(b) 展示了$\boldsymbol{h}$ 和 $\boldsymbol{h}^*$的累积分布函数。与前一结果不同，随着 W增大，两个分布之间出现了小幅差距。尽管存在一定差距，近似结果仍相当准确。这一结果验证了



(a) (b)

图5：FAS 中具有 N 个端口与 N' 个端口的中断概率：a) $N = 3 < N'$；b) $N = 50 > N'$。



(a) (b)

图6：以下两者之间的累积分布函数：a) $\boldsymbol{h}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{h}}$；b) $\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{h}^*$。

定理 5。

接下来，我们考察算法 1 的准确性以及所提出的次优FAS的效率。采用算法 N^* 时，不同 W 对应的参数汇总于表 1 II。如图 7所示，具有 N^* 个端口的FAS具有良好的中断概率表现。具体而言，具有N^*个端口的FAS相比具有 $N^* - 1$个端口的FAS有显著改进。与此同时，具有$N + 1$ 个端口的FAS相比具有 N^* 个端口的FAS，改进微乎其微。因此，我们可以采用

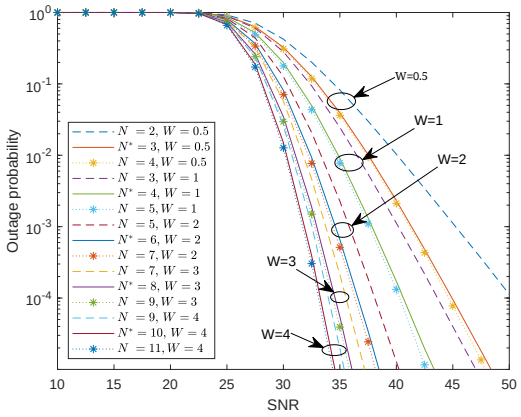


图7：次优FAS的中断概率。

表II：使用算法 1 时，不同 W 的参数 N^*，其中 $\varepsilon_{\text{tol}} = 0.01$

W	0.5	1	2	3	4
N^*	3	4	6	8	10

用于提升性能的次优FAS。

最后，在图8中，我们比较了所提出的次优FAS、最优FAS、单天线（单输入单输出）系统、 N分支选择合并系统，以及 N分支最大比合并系统的中断概率。在选择合并和最大比合并系统中，我们假设有 N 条射频链，每根天线之间至少相隔 $\frac{\lambda}{2}$，并考虑其空间相关性。注意，最大比合并有 N条有源射频链。结果表明，所提出的次优FAS优于单输入单输出和选择合并系统。这一改进得益于FAS切换能够在有限W内切换至最佳端口。

此外，最大比合并具有最低的中断概率，其性能优于最优FAS。这种优势源于功率增益：最大比合并使用了更多的有源射频链（即 $\left\lfloor \frac{W}{0.5} \right\rfloor + 1$），而FAS仅使用一条有源射频链。尽管最大比合并优于次优FAS，但当 $W = 0.5$ 时，后者能够达到与前者相近的性能。不过，需要注意的是，在这种情况下，最大比合并比次优FAS多使用一条射频链。因此，比较具有相同数量有源射频链的MIMO-FAS与MIMO的性能将非常有意义。

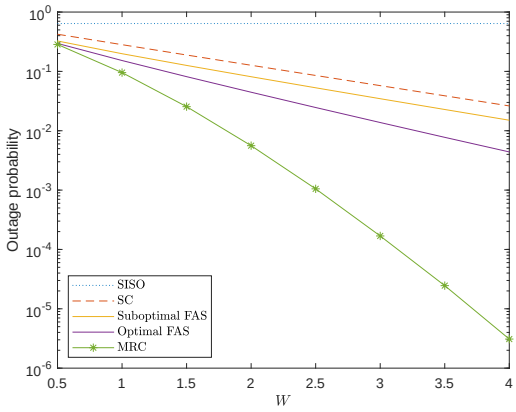


图8：次优FAS 与单输入单输出、选择合并和最大比合并的中断概率 .

VI. 结论

本文研究了FAS，并以闭式表达式近似表示其中断概率和分集增益。我们从解析结果中获得了新的有意义见解，并给出了仿真结果，以更好地理解限制FAS性能的因素。结果表明，FAS的性能高度依赖于空间相关矩阵 $\boldsymbol{J}$。具体而言，在点对点场景中，将端口数增加到超过 N' 后，不会带来分集增益。相反，增加 N 会导致相关矩阵 $\boldsymbol{J}$ 变得病态。为解决这一问题，可以在固定 N 的情况下增加 W，或在固定 W 的情况下减小 N。此外，我们提出了一种具有 N^* 个端口的次优FAS。通过固定适当的 ε_{tol}，所提出的方案能够实现相较于具有 N^*-1 的FAS的显著增益，同时其性能几乎达到具有 N^*+1 个端口的FAS的相同性能。因此， N^* 的近似是有用的，因为增加端口数会带来递减的增益和额外成本。此外，当相关矩阵 $\boldsymbol{J}$ 近奇异时，可以使用 N^* 来近似具有 N 个端口的FAS的信道。最后，所提出的次优FAS优于单输入单输出和选择合并系统，但由于仅具有一条有源射频链，其性能落后于最大比合并。然而，我们发现，当 $W=0.5$ 时，次优FAS与最大比合并能够达到相近的性能。因此，未来研究MIMO-FAS与MIMO的性能将很有意义。

附录 A： $|\boldsymbol{h}|$的近似概率密度函数

的精确概率密度函数 $|\boldsymbol{h}|$ 首次在 [25]–[27]中推导得出。本文采用类似步骤，并通过引入 $|\boldsymbol{h}|$ 进一步近似其概率密度函数 $\boldsymbol{G}$：一个 $N\times N$ 矩阵，并使用精确的

二项式定理，并将无穷级数截断为有限级数以便于计算。根据 [36], , 圆对称复高斯随机变量的概率密度函数已知为

$$f\left(\boldsymbol{h}\right)=\frac{1}{\pi^{N}\det(\boldsymbol{J})}\exp\left\{-\boldsymbol{h}^{H}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{h}\right\}, \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{J}^{-1}=\frac{\boldsymbol{K}^{T}}{\text{行列式}(\boldsymbol{J})}$ 可通过克拉默法则求得。利用 [42, (7-8) & (7-9)], 可得到以幅度和相位表示的 21 的概率密度函数，表示为

$$f_{|\boldsymbol{h}|,\boldsymbol{\theta}}\left(\left|h_{1}\right|,\theta_{1},\ldots,\left|h_{N}\right|,\theta_{N}\right)=\eta\prod_{t=1}^{T}\exp\left\{\zeta_{t}\cos\left(\bar{\theta}_{t}\right)\right\}, \tag{22}$$

$_{N}$其中 $\eta=\frac{\prod_{n=1}^{|h_{n}|}}{\pi^{N}\quad\boldsymbol{J}}$det( ) 指数函数 $\left\{-\sum_{n=1}^{N}|h_{n}|^{2}K_{n},_{n}\det(\ )\right\}$, $T=\ ^{N}(N-1)\ 2$, $\zeta_{t}=-^{2K_{m},}$ $_{n}|h_{n}||h_{m}|\det(\boldsymbol{J})$ 且 $\bar{\theta}_{t}=\theta_{n}-\theta_{m\circ}$ 本文中，我们使用映射函数 $t=n+(m-1)\ N-\ ^{m}(m+1)$ 2 , $m<n$, 而 (m,n) 可由 t 通过令 $m=\min\ \ m'\in\mathbb{Z}$ 且满足 $\sum_{i=1}^{m'}(N-i)\ >t$ 和 $n=t-(m-1)\,N+\ ^{m}(m+1)\ 2$ 得到。

对 22 关于 $\theta_{n},\forall n$ 在 $[0,2\pi]$上积分，得到

$$\begin{aligned}
&f_{|\boldsymbol{h}|}\left(\left|h_{1}\right|,\ldots,\left|h_{N}\right|\right)\\
&=\int_{0}^{2\pi}\cdots\int_{0}^{2\pi}f\left(\left|h_{1}\right|,\theta_{1},\ldots,\left|h_{N}\right|,\theta_{N}\right)d\theta_{1}\ldots d\theta_{N} &(23)\\
&\overset{(a)}{=}\eta\int_{0}^{2\pi}\cdots\int_{0}^{2\pi}\prod_{t=1}^{T}\sum_{s_{t}=0}^{\infty}\frac{\zeta_{t}^{s_{t}}}{s_{t}!}\cos\left(\bar{\theta}_{t}\right)^{s_{t}}d\theta_{1}\ldots d\theta_{N} &(24)\\
&\overset{(b)}{=}\eta\sum_{s_{1}=0}^{\infty}\sum_{s_{2}=0}^{s_{1}}\cdots\sum_{s_{T}=0}^{s_{T-1}}\prod_{t=1}^{T}\beta\left(t,s_{t}^{*}\right)\int_{0}^{2\pi}\cdots\int_{0}^{2\pi}\cos\left(\bar{\theta}_{t}\right)^{s_{t}^{*}}d\theta_{1}\ldots d\theta_{N} &(25)\\
&\overset{c}{=}\eta\sum_{s_{1}=0}^{\infty}\sum_{s_{2}=0}^{s_{1}}\cdots\sum_{s_{T}=0}^{s_{T-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^{T}s_{t}^{*}}\prod_{t=1}^{T}\beta\left(t,s_{t}^{*}\right)\times &(26)\\
&\int_{0}^{2\pi}\cdots\hat{}\int_{0}^{2\pi}\left(\text{指数函数}\left\{j\bar{\theta}_{t}\right\}+\text{指数函数}\left\{-j\bar{\theta}_{t}\right\}\right)^{s_{t}^{*}}d\theta_{1}\ldots d\theta_{N}\\
&\overset{(d)}{=}\eta\sum_{s_{1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{s_{T}=0}^{s_{T-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^{T}s_{t}^{*}}\prod_{t=1}^{T}\beta\left(t,s_{t}^{*}\right)\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}\prod_{t=1}^{T}\binom{s_{t}^{*}}{v_{t}}\times &(27)\\
&\int_{0}^{2\pi}\cdots\hat{}\int_{0}^{2\pi}\text{指数函数}\left\{j\sum_{t=1}^{T}\gamma_{t}\bar{\theta}_{t}\right\}d\theta_{1}\ldots d\theta_{N},
\end{aligned}$$

其中（24）通过使用 指数函数 $\{x\}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^{s}}{s}!$ 而得；（25）通过对幂级数使用柯西乘积而得，其中 $\beta\ (t,\ s_{t}^{*})\ \frac{\zeta_{t}^{s_{t}^{*}}}{s_{t}^{*}}!$ 且 $s_{t}^{*}=s_{t}-s_{t+1}$其中 $s_{T+1}=0$。此外，（26）

通过使用 余弦（x） $=$ 指数~~函数（jx）+指数函数~~（$-jx$）2 而（27）通过使用二项式定理得到，其中$\boldsymbol{v}=[v_1,\ldots,v_T]^T$， $\mathcal{V}$表示所有可能排列的集合，且 $\gamma_t=2v_t-s_t^*\in\mathbb{Z}$。

注意到 $\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}$指数函数 $\left\{j\sum_{t=1}^T\gamma_t\bar{\theta}_t\right\}d\theta_1\ldots d\theta_N=(2\pi)^N$当且仅当 $\sum_{t=1}^T\gamma_t\bar{\theta}_t=0$ 时成立，否则为零。因此，我们引入一个新的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 定义如式(11)所示，以及矩阵$\boldsymbol{\Theta}$ 定义为

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}=\begin{bmatrix}0&\bar{\theta}_1&\bar{\theta}_2&\ldots&\bar{\theta}_{N-1}\\&&\bar{\theta}_N&\ldots&\bar{\theta}_{2N-3}\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\&&&&\bar{\theta}_T\\0&&\ldots&&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\theta_2-\theta_1&\theta_3-\theta_1&\ldots&\theta_N-\theta_1\\&&\theta_3-\theta_2&\ldots&\theta_N-\theta_2\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\&&&&\theta_N-\theta_{N-1}\\0&&\ldots&&0\end{bmatrix}. \tag{28}$$

利用 $\boldsymbol{\Theta}$ 和 $\boldsymbol{G}$，通过对 θ_i 积分（即将 $\boldsymbol{G}$ 中与 $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$ 对应的相同元素相加，并令 θ_i，即 $\Delta_i=\sum_{n=1}^N G_{i,\ n}-\sum_{n=1}^N G_{n,\ i}-G_{i,\ i}$，我们可以轻松地对式(27)进行积分。因此，式(27)可得

$$(27)=\eta\sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{s_2=0}^{s_1}\cdots\sum_{s_T=0}^{s_{T-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^T s_t^*}\prod_{t=1}^T\beta\left(t,s_t^*\right)\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}\left[\prod_{t=1}^T\binom{s_t^*}{v_t}\right]\left[(2\pi)^N\prod_{i=1}^N\mathbf{1}_{\{\Delta_i=0\}}\right] \tag{29}$$

$$\overset{(a)}{\approx}\eta\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\cdots\sum_{s_T=0}^{s_{T-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^T s_t^*}\prod_{t=1}^T\beta\left(t,s_t^*\right)\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}\left[\prod_{t=1}^T\binom{s_t^*}{v_t}\right]\left[(2\pi)^N\prod_{i=1}^N\mathbf{1}_{\{\Delta_i=0\}}\right], \tag{30}$$

其中，(a)可利用以下事实求得：$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^T s_t^*}$在每个求和项中均单调递减，且当 s_t^*足够大时，$\beta(t,s_t^*)\approx 0$。

附录 B: $|\boldsymbol{h}|$的近似累积分布函数

利用（10），的累积分布函数可求得为

$$F\left(R_1,\ldots,R_N\right)\approx\int_0^{R_1}\cdots\int_0^{R_N}f_{|\boldsymbol{h}|}\left(|h_1|,\ldots,|h_N|\right)d\,|h_1|\cdots d\,|h_N| \tag{31}$$

$$=\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\cdots\sum_{s_T=0}^{s_{T-1}}\frac{g\left(\boldsymbol{s}^*\right)}{\pi^N\det(\boldsymbol{J})}\prod_{t=1}^{T}\frac{\left(-2K_{m,n}\right)^{s_t^*}}{s_t^*!\det(\boldsymbol{J})^{s_t^*}}\int_0^{R_1}\cdots\int_0^{R_N}\times \tag{32}$$

$$\prod_{n=1}^{N}|h_n|\prod_{n=1}^{N}\prod_{m<n}^{N}|h_n|^{s_n^*}|h_m|^{s_m^*}\exp\left\{-\frac{\sum_{n=1}^{N}|h_n|^2K_{n,n}}{\det(\boldsymbol{J})}\right\}d\,|h_1|\cdots d\,|h_N|$$

$$=\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\cdots\sum_{s_T=0}^{s_{T-1}}\frac{g\left(\boldsymbol{s}^*\right)}{\pi^N\det(\boldsymbol{J})}\prod_{t=1}^{T}\frac{\left(-2K_{m,n}\right)^{s_t^*}}{s_t^*!\det(\boldsymbol{J})^{s_t^*}}\times \tag{33}$$

$$\prod_{n=1}^{N}\int_0^{R_n}|h_n|^{\bar{s}_n+1}\exp\left\{-\frac{|h_n|^2K_{n,n}}{\det(\boldsymbol{J})}\right\}d\,|h_n|$$

$$=\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\cdots\sum_{s_T=0}^{s_{T-1}}\frac{g\left(\boldsymbol{s}^*\right)}{\pi^N\det(\boldsymbol{J})}\prod_{t=1}^{T}\frac{\left(-K_{m,n}\right)^{s_t^*}}{s_t^*!\det(\boldsymbol{J})^{s_t^*}}\times \tag{34}$$

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{K_{n,n}}{\det(\boldsymbol{J})}\right)^{-\frac{\bar{s}_n}{2}-\frac{1}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\bar{s}_n}{2}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\bar{s}_n}{2},\frac{K_{n,n}R_n^2}{\det(\boldsymbol{J})}\right)\right],$$

其中

$$g\left(\boldsymbol{s}^*\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{t=1}^{T}s_t^*}\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}}\left[\prod_{t=1}^{T}\binom{s_t^*}{v_t}\right](2\pi)^N\prod_{i=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\Delta_i=0\}}, \tag{35}$$

且 $\bar{s}_n$ 是影响 $(|h_n|\,|h_m|)^{s_t^*}$ 的 s_t^* 之和。为计算 $\bar{s}_n$，我们引入一个新的矩阵

$$\boldsymbol{S}^*=\begin{bmatrix}0 & s_1^* & s_2^* & \cdots & s_{N-1}^*\\ & & s_N^* & \cdots & s_{2N-3}^*\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & & & & s_T^*\\ 0 & & \cdots & & 0\end{bmatrix}. \tag{36}$$

使用（36），我们得 到 $\bar{s}_n=\sum_{i=1}^{N}S_{n,\ i}^*+\sum_{i=1}^{n-1}S_{i,\ n}^*+1$ 使得 $S_{i,\ n}^*$ 是 $\boldsymbol{S}^*$ 的第 (i,n) 个元素 .

附录 C: 高信噪比下的中断概率

根据 [37], 高信噪比下无线通信系统的中断概率可以通过其衰落信道的概率密度函数得到。具体而言，假设高信噪比下信道的概率密度函数可近似为

$$f_{|h_{\mathrm{FAS}}|}\left(\Omega\right)=2\xi\Omega^{2M+1}+o\left(\Omega^{2M+1}\right). \tag{37}$$

则可得高信噪比下的中断概率为

$$\mathbb{P}\left\{\left|h_{\mathrm{FAS}}\right|<\Omega\right\}=\frac{\xi}{M+1}\Omega^{2(M+1)}+o\left(\frac{1}{SNR^{M+1}}\right). \tag{38}$$

在对高信噪比下 FAS 的概率密度函数进行近似之前，我们指出，式（21）中关于幅度和相位的概率密度函数可重写为

$$f_{|\boldsymbol{h}|,\boldsymbol{\theta}}\left(\left|h_1\right|,\theta_1,\ldots,\left|h_N\right|,\theta_N\right)=\prod_{n=1}^{N}\frac{\left|h_n\right|H_n}{\pi^N\det(\boldsymbol{J})}, \tag{39}$$

其中

$$H_n=\exp\left\{-\frac{K_{n,n}\left|h_n\right|^2}{\det(\boldsymbol{J})}-\frac{2\sum_{m=n+1}^{N}K_{m,n}\left|h_n\right|\left|h_m\right|\cos\left(\theta_n-\theta_m\right)}{\det(\boldsymbol{J})}\right\}. \tag{40}$$

利用式（39），可推导出高信噪比下 FAS 的近似概率密度函数:

$$f_{|h_{\mathrm{FAS}}|}\left(\Omega\right)=\frac{\partial F_{|h_{\mathrm{FAS}}|}\left(\Omega\right)}{\partial\Omega} \tag{41}$$

$$\overset{(a)}{=}N\int_0^{\Omega}\cdots\int_0^{\Omega}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f_{|\boldsymbol{h}|,\boldsymbol{\theta}}\left(\left|h_1\right|,\theta_1,\ldots,\left|h_{N-1}\right|,\theta_{N-1},\Omega,\theta_N\right)\times \tag{42}$$

$$d\left|h_1\right|\cdots d\left|h_{N-1}\right|d\theta_1\ldots d\theta_N$$

$$\overset{(b)}{=}\frac{N\Omega}{\pi^N\det(\boldsymbol{J})}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}H_N\int_0^{\Omega}\left|h_{N-1}\right|\left(H_{N-1}\times\ldots\right. \tag{43}$$

$$\left.\left(\int_0^{\Omega}\left|h_2\right|H_2\left(\int_0^{\Omega}\left|h_1\right|H_1 d\left|h_1\right|\right)d\left|h_2\right|\right)d\left|h_{N-1}\right|\right)d\theta_1\ldots d\theta_N,$$

其中 (a) 通过莱布尼茨积分得到，而 (b) 利用式（39）得到。

根据 [43],，项 $\int_0^{\Omega}\left|h_n\right|H_n d\left|h_n\right|$ 可通过在零点附近应用泰勒级数近似求解。具体而言，有

$$\int_0^{\Omega}\left|h_n\right|H_n d\left|h_n\right|=\frac{\Omega^2}{2}+o\left(\Omega^2\right),n=\{1,\ldots,N-1\} \tag{44}$$

而 H_N 在零点处的泰勒级数近似为

$$H_N=1+o\left(1\right). \tag{45}$$

将（44）和（45）代入（43），可得

$$f_{|h_{\mathrm{FAS}}|}\left(\Omega\right)$$

$$=\frac{N\Omega}{\pi^N\det(\boldsymbol{J})}\left[\frac{\Omega^2}{2}+o\left(\Omega^2\right)\right]^{N-1}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}d\theta_1\ldots d\theta_N \tag{46}$$

$$=\frac{2N}{\det(\boldsymbol{J})}\Omega^{2N-1}+o\left(\Omega^{2N-1}\right). \tag{47}$$

比较 将（47）代入（37），可得 $M = N - 1$ 和 $\xi = {}^{N}\text{行列式}(\boldsymbol{J})$。应用（38），可得e

$$\mathbb{P}\left\{|h_{\text{FAS}}| < \Omega\right\} \approx \frac{1}{\det(\boldsymbol{J})}\Omega^{2N} + o\left(\frac{1}{SNR^N}\right). \tag{48}$$

附录D：FAS的分集增益

考虑以下情况 $W \to \infty$。根据 [37], 在高信噪比下，可以通过衰落信道的概率密度函数（PDF）获得无线通信系统的分集增益。具体而言，假设高信噪比下的信道概率密度函数可近似表示为式（37）。那么，该系统的分集增益为

$$D = M + 1. \tag{49}$$

在附录 C 中，我们有 $M = N - 1$。因此，显然，作为 $W \to \infty$ 的 FAS 的分集增益为 N。不过，如果 W 有限， $\boldsymbol{J}$ 可能接近奇异。为说明这一点，考虑在有限的 W 内具有 $N \to \infty$ 个端口的 FAS，其中各端口等距分布，且编号为 1、2、.....。不失一般性，我们只关注两个端口：第 n个端口和第（$n+1$）个端口。第 n个端口与第（$n+1$）个端口之间的相关性为$\boldsymbol{J}_{n,\,n+1} = \lim_{N\to\infty} \sigma^2 J_0\left(2\pi\frac{1}{N-1}W\right) = \sigma^2 J_0(0)$，且有 $h_{n+1} = h_n$。因此，h_n和 h_{n+1}的联合累积分布函数为$F_{h_n,\,h_{n+1}}(g_1,\,g_2) = F_{h_n}(\min\{g_1, g_2\})$，这意味着它们趋于奇异。由于此类端口有很多，我们可以用有限个 N' 端口来近似具有 N个端口的 FAS 的信道，其中 N'是 $\boldsymbol{J}'$的数值秩，并且 $\boldsymbol{J}'$是式（2）中定义的协方差矩阵，其中 $N \to \infty$ 对应固定的 W。因此，FAS 的分集增益近似受 $\min\{N, N'\}$限制。如果 N较大，也会得到相同的观察结果。为去除 $\boldsymbol{J}$中近似线性相关的元素，可以采用秩揭示 QR 分解 [44] 或带给定容差的高斯-若尔当消元。

参考文献

[1] A. Shojaeifard, K.-K. Wong, K.-F. Tong, Z. Chu, A. Mourad, A. Haghighat, I. Hemadeh, N. T. Nguyen, V. Tapio, and M. Juntti, “通过可重构智能表面和流体天线系统实现超越5G的多输入多输出演进”，IEEE会刊，第110卷，第9期，第1244–1265页，2022年。[2] K. K. Wong, K.-F. Tong, Y. Shen, Y. Chen, and Y. Zhang, “受李小龙启发的流体天线系统：六个研究主题及其在6G中的潜力”，《通信与网络前沿》，第5页，2022年。[3] Y. Shen, K.-F. Tong, and K.-K. Wong, “用于移动通信的辐射方向图多样化单流体通道表面波天线”，载于2022年IEEE-APS无线通信天线与传播专题会议（APWC），2022年，第049–051页。

[4] ——，“用于移动通信的辐射方向图多样化双流体通道表面波天线”，载于2022年IEEE-APS天线与无线通信传播专题会议（APWC），2022年，第085–088页。[5] ——，“用于空间多输入多输出应用的可重构表面波流体天线”，载于2021年IEEE-APS天线与无线通信传播专题会议（APWC），2021年，第150–152页。[6] ——，“用于多输入多输出应用的波束赋形表面波流体天线”，载于2020年IEEE亚太微波会议（APMC），2020年，第634–636页。[7] K.-K. Wong, A. Shojaeifard, K.-F. Tong, and Y. Zhang, “流体天线系统”，IEEE无线通信汇刊，第20卷，第3期，第1950–1962页，2021年。[8] K.-K. Wong, K.-F. Tong, Y. Chen, and Y. Zhang, “通过超大规模多输入多输出实现毫米波频段的慢速流体天线海量接入”，电子快报，第58卷，第25期，第1016–1018页，2022年。[9] L. Tlebaldiyeva, S. Arzykulov, K. M. Rabie, X. Li, and G. Nauryzbayev, “流体天线系统（FAS）辅助的太赫兹通信网络的中断性能”，已被2023年IEEE国际通信会议（ICC）接收，2023年。[10] M. Khammassi, A. Kammoun, and M.-S. Alouini, “流体天线系统信道的一种新型解析近似”，IEEE无线通信汇刊，第1–1页，2023年。[11] D. G. Brennan, “线性分集合并技术”，IRE会刊，第47卷，第6期，第1075–1102页，1959年。[12] K. K. Wong, A. Shojaeifard, K.-F. Tong, and Y. Zhang, “流体天线系统的性能极限”，IEEE Communications Letters，第24卷，第11期，第2469–2472页，2020年。[13] K.-K. Wong and K.-F. Tong, “流体天线多址接入”，IEEE无线通信汇刊，第21卷，第7期，第4801–4815页，2022年。[14] C. Skouroumounis and I. Krikidis, “采用线性最小均方误差信道估计的大规模流体天线系统”，载于ICC 2022 - IEEE国际通信会议，2022年，第1330–1335页。[15] L. Tlebaldiyeva, G. Nauryzbayev, S. Arzykulov, A. Eltawil, and T. Tsiftsis, “相关Nakagami-m衰落信道上通过流体天线系统提升服务质量”，载于2022年IEEE无线通信与网络会议（WCNC），2022年，第78–83页。[16] K. Wong, K. Tong, Y. Chen, and Y. Zhang, “用于流体天线系统性能分析的空间相关参数闭式表达式”，电子快报，第58卷，第11期，第454–457页，2022年。[17] K. N. Le, “相关莱斯衰落下选择合并接收机综述”，数字信号处理，第88卷，第1–22页，2019年。 [在线]。获取地址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200418307176[18] K. S. Miller, “复高斯过程”，SIAM评论，第11卷，第4期，第544–567页，1969年。[19] C. Tan and N. Beaulieu, “二元瑞利和Nakagami-m分布的无穷级数表示”，IEEE Transactions on Communications，第45卷，第10期，第1159–1161页，1997年。[20] P. Dharmawansa, N. Rajatheva, and C. Tellambura, “关于三元莱斯分布”，IEEE Transactions on Communications，第56卷，第12期，第1993–1997页，2008年。[21] Y. Chen and C. Tellambura, “三元和四元瑞利分布的无穷级数表示及其应用”，IEEE Transactions on Communications，第53卷，第12期，第2092–2101页，2005年。[22] M. Tekinay and C. Beard, “四元瑞利分布的矩及其在分集接收机中的应用”，电信年刊，第75卷，第7期，第447–459页，2020年。[23] Y. Chen and C. Tellambura, “等相关瑞利、莱斯和Nakagami-m衰落信道中选择合并器输出的分布函数”，IEEE Transactions on Communications，第52卷，第11期，第1948–1956页，2004年。[24] G. Karagiannidis, D. Zogas, and S. Kotsopoulos, “关于具有指数相关的多元Nakagami-m分布”，IEEE Transactions on Communications，第51卷，第8期，第1240–1244页，2003年。

[25] M. Wiegand and S. Nadarajah, “多维瑞利分布的级数表示”，International Journal of Communication Systems，第31卷，第6期，e3510页，2018年，e3510 dac.3510。 [在线]。可访问：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/dac.3510[26] ——，“任意维数和协方差矩阵下瑞利分布的级数近似”，Signal Processing，第165卷，第20–29页，2019年。[27]——，“用于任意多元瑞利随机变量累积分布函数的新型通用近似方法”，Signal Processing，第176卷，107664页，2020年。 [在线]。可访问：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168420302073[28] R. G. Gallager，《数字通信原理》。剑桥大学出版社，英国剑桥，2008年，第1卷。[29] Z. Chai、K.-K. Wong、K.-F. Tong、Y. Chen 和 Y. Zhang，“流体天线系统的端口选择”，IEEE Communications Letters，第26卷，第5期，第1180–1184页，2022年。[30] L. Zhu、W. Ma 和 R. Zhang，“可移动天线赋能无线通信的建模与性能分析”，arXiv预印本 arXiv:2210.05325，2022年。[31] W. Ma、L. Zhu 和 R. Zhang，“可移动天线系统的多输入多输出容量表征”，arXiv预印本 arXiv:2210.05396，2022年。[32] N. Waqar、K.-K. Wong、K.-F. Tong、A. Sharples 和 Y. Zhang，“深度学习赋能的慢速流体天线多址接入”，IEEE Communications Letters，第27卷，第3期，第861–865页，2023年。[33] K.-K. Wong、K.-F. Tong、Y. Chen 和 Y. Zhang，“实现海量连接的快速流体天线多址接入”，IEEE Communications Letters，第27卷，第2期，第711–715页，2023年。[34] H. Xu、K.-K. Wong、W. K. New 和 K.-F. Tong，“双用户流体天线多址接入的中断概率”，已被2023年IEEE国际通信会议（ICC）接收，2023年。[35] G. L. Stüber 和 G. L. Steuber，《移动通信原理》。Springer，1996年，第2卷。[36] D. Tse 和 P. Viswanath，《无线通信基础》。剑桥大学出版社，2005年。[37] Z. Wang 和 G. Giannakis，“一种量化衰落信道性能的简单通用参数化方法”，IEEE Transactions on Communications，第51卷，第8期，第1389–1398页，2003年。[38]G. Golub、A. Hoffman 和 G. Stewart，“Eckart-Young-Mirsky矩阵近似定理的推广”，Linear Algebra and its Applications，第88–89卷，第317–327页，1987年。[在线]。可访问：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379587901145[39]D. Dowson 和 B. Landau，“多元正态分布之间的弗雷歇距离”，Journal of Multivariate Analysis，第12卷，第3期，第450–455页，1982年。[在线]。可访问：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0047259X8290077X[40] S. Boyd、S. P. Boyd 和 L. Vandenberghe，《凸优化》。剑桥大学出版社，2004年。[41] W. Ford，《数值线性代数及其应用：使用MATLAB》。Academic Press，2014年。[42] A. Papoulis 和 S. U. Pillai，《概率、随机变量与随机过程》，2002年。[43] S. Liu、J. Cheng 和 N. C. Beaulieu，“任意相关瑞利信道中分集方案的渐近误差分析”，IEEE Transactions on Communications，第58卷，第5期，第1351–1355页，2010年。[44] G. Golub，“求解线性最小二乘问题的数值方法”，Numerische Mathematik，第7卷，第3期，第206–216页，1965年。