arXiv:2301.00093v1 [math.AT] 31 Dec 2022

# 曲面上广义构形空间的解耦

LUCIANA BASUALDO BONATTO

Abstract. 流形上 $k$ 个点的构形空间带有其微分同胚群的作用。该作用的同伦商等价于带穿孔流形的微分同胚分类空间，因此可应用同调稳定性方面的结果。受 Segal、McDuff、Bodigheimer 和 Salvatore 的研究启发，我们考察广义构形空间，其中粒子带有标签，甚至带有部分可求和标签；只要标签可求和，点就可以碰撞。这些广义构形空间也带有微分同胚群的作用，我们研究它们的同伦商。我们的主要结果是关于曲面上这些同伦商的一个解耦定理：在一定范围内，它们的同调完全由曲面模空间与 $\mathbb{R}^\infty$中点的广义构形空间的乘积描述。利用这一结果，我们证明这些空间在亏格增加时具有同调稳定性，并确定其稳定同调。这可以解释为因子化同调的 Diff-等变同调稳定性。此外，我们还利用这一结果研究曲面上构形模空间幺半群的群完备化。

## 1. Introduction

$k$ 个点在无边界光滑流形 $M$ 上的有序构形空间 定义为

$$\widetilde{C}_k(M) \coloneqq \{(m_1, \dots, m_k) \in M^k \mid m_i \neq m_j \text{ if } i \neq j\}.$$

~当 $M$ 是带边界的光滑流形时，我们用 $C_k(M)$表示其内部中 $k$ 个点的有序构形空间。对称群 $\Sigma_k$ 通过置换 $k$ 个点的顺序作用于此空间。 $M$上的 $k$ 点构形空间 记作 $C_k(M)$，是商空间 $C_k(M)/\Sigma_k$。我们用 $\mathrm{Diff}_\partial(M)$表示流形 $M$ 上固定其边界邻域的微分同胚群。

本文将重点研究二维流形，并用$F^k_{g,b}$ 表示亏格为 $g$、有 $k$ 个穿孔和 $b \geq 1$ 个边界分支的可定向曲面。空间 $C_k(F_{g,b})$具有群 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$的作用，其中微分同胚 $\phi$通过 $\phi$ 将一组 $k$ 个点映至其像。本文关注此作用的 Borel 构造（同伦商），记作 $C_k(F_{g,b})/\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$，并称之为个点在$F_{g,b}$中的构形模空间。容易证明

$$C_k(F_{g,b})/\!\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \simeq B\mathrm{Diff}_\partial(F^k_{g,b}) \tag{1.1}$$

事实上，这一关系不仅对曲面成立，而且对任何具有 $k$ 个穿孔的流形都成立。特别地，这使我们能够直接利用关于带穿孔曲面的分类空间的已知定理，推导出这些由 $k$ 个点构成的构形模空间的同调稳定性结果。例如，当 $b \geq 1$ 这些空间增加亏格以及增加点的数量时，它们具有同调稳定性 [Har85,

*Date*: 2023年1月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 57R19,55R80,55R40, 55P47。本文基于 CNPq（201780/2017-8）和美国国家科学基金会资助项目 DMS-1928930 的支持完成，作者当时正在参加由数学科学研究所于2022年举办的项目。

Har90、RW16、RW14]。此外， [BT01] 表明，该分类空间的稳定同调可以由 $B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times B(\Sigma_k \wr \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))$ 的同调计算得到，这被称为解耦定理。

本文研究广义构形空间对应的这一模空间。首先，我们考察带标签构形：给定一个带基点空间 $Z$，空间内的构形 $M$，其标签取自 $Z$，即为以下商空间

$$C(M;Z) \coloneqq \left( \coprod_{k\geq 0} \widetilde{C}_k(M) \times_{\Sigma_k} Z^k \right) \Big/ \sim$$

在如下等价关系下：$(m_1,\dots,m_k;\ z_1,\dots,z_k) \sim (m_1,\dots,m_{k-1};\ z_1,\dots,z_{k-1})$，若 $z_k$ 是 $Z$ 的基点。我们可以从几何角度理解这个空间：将其视为 $M$ 中粒子的空间，每个粒子都带有一个取自 $Z$ 的标签；若粒子带有基点作为标签，则允许其消失。

自20世纪70年代以来，人们便对这一空间颇感兴趣，它见于 May 的开创性著作 [May72] 和 Segal 的著作 [Seg73]。人们注意到，空间 $C(\mathbb{R}^n;Z)$ 可以赋予一个（$A_\infty$-）幺半群结构，其中乘法大致通过将构形并排堆叠来定义 [Seg73]。关于这一空间的主要结果之一是如今称为扫描映射 $C(\mathbb{R}^n;Z) \to \Omega^n\Sigma^n Z$ 的映射；Segal 证明，该映射在群完备化上诱导出弱同伦等价。这一思想已推广至许多方向。例如，B¨odigheimer [B¨od87] 证明了关于一般流形上构形的类似结论。此外，对于标签空间具有额外结构（例如（部分）乘法）的情形，也证明了类似结果[McD75, Seg79, Gue95, Kal01, Sal01]。我们将在第1.1节讨论后一种情形。

近来，这种带标签构形空间与扫描映射论证，一方面被拓展为因子化同调中的复杂构造 [AFT17] ；另一方面，以流形构形空间的形式，它被用于计算黎曼曲面模空间 [MW07] 和高维流形模空间的稳定同调 [GRW18, GRW17]。

带标号构型空间也继承了微分同胚群的作用。更进一步，若 $Z$ 是一个带基点的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间，我们可以在$C(M;Z)$上定义 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$的作用：微分同胚 $\phi$ 将一组 $k$ 点映至其在 $\phi$下的像，而点 $w$的标签 $z$则变为点 $\phi(w)$的标签 $d_w\phi\cdot z$。与固定点数的构形情形不同， $C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$通常不等价于微分同胚群的分类空间。因此，我们要问它是否仍具有同调稳定性，以及是否存在类似的解耦定理。

对于曲面 $F_{g,b}$，其中 $b\geq 1$，与曲面$F_{1,1}$ 作边界连通和，会诱导出同态 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to \mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b})$，该同态通过将 $F_{g,b}$ 上的映射按恒等映射延拓而给出。我们称之为稳定化映射，并研究它在构型空间模空间上诱导的作用：

**定理 A**。 设 $Z$ 是一个带基点的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间，且 $b\geq 1$。*Borel* 构造上的稳定化映射

$$s_* : C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to C(F_{g+1,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b})$$

在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上诱导同调同构。

此外，我们还能精确确定稳定同调：

**定理 B**。 设 $Z$ 是一个带基点的连通 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间。存在一个映射

$$C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to \Omega^\infty \mathrm{MTSO}(2) \times \Omega^\infty\Sigma^\infty \left( E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z \right)$$

它与稳定化映射相容，并在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上诱导同调同构。

在上文中， $E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 表示 $B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的万有纤维化的全空间；我们用 $(-)_+$ 表示给一个空间添加一个不交基点，而 $- \wedge_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})} -$ 表示带基点拓扑 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间的楔积对 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的对角作用取商空间。

上述两个结果都是下文定理 C 的推论，该定理是 BT01] 中解耦定理的一个类似结果。它表明，可以通过解耦映射 $\tau \times \varepsilon$ 来理解这一构型空间模空间的稳定同调；该映射将构形中的点与底层曲面分离开来。映射$\tau : C_k(F_{g,\,b}) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b}) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$ 忘却构形的数据，而 $\varepsilon$忘却底层曲面，但仍保留构形中的点及其周围的一些局部切向数据（有关这些映射的详细描述，见第3节）。

**定理 C** （带标签配置的解耦定理）。 设 $\tau$ 和 $\varepsilon$ 为上文所述的映射。那么

$$\tau \times \varepsilon : C(F_{g,b}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times C(\mathbb{R}^\infty; E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z)$$

在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上诱导同调同构。 –

这一结果可以从物理角度来理解：在高亏格极限下，粒子必须留在底层曲面上的约束被解除，粒子现在可以自由活动。

作为定理 C 的最后一个应用，我们考察曲面上构形模空间的幺半群。边界连通和在分类空间层面上诱导乘法，使 $\coprod_g B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$ 成为拓扑幺半群。这一重要构造及其群完备化，在研究曲面映射类群的稳定同调中一直发挥着核心作用 [Mil86, Til00, MW07, GRW10, GRW18, GRW17]。这种曲面的粘合也在 Borel 构造上诱导乘法

$$C(F_{g,1}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1}) \times C(F_{h,1}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{h,1}) \to C(F_{g+h,1}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g+h,1})$$

使 $\coprod_g C(F_{g,\,1}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$ 成为拓扑幺半群。我们研究它的群完备化。

**推论 D**。 对于任意带基点的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间 $Z$，解耦映射在群完备化上诱导出弱等价

$$\Omega B\left(\coprod_g C(F_{g,1}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})\right) \simeq \Omega B\left(\coprod_g B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})\right) \times \Omega B C(\mathbb{R}^\infty; E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z).$$

**1.1. 带部分可求和标记的构形空间**。 本文的主要结果研究了一类更一般的构形空间，其标签取自带框架的偏 2-幺半群；当标签可求和时，允许粒子发生碰撞。这类空间已在 [McD75、Seg79、Gue95、Kal01、Sal01]等著作中得到研究；当标签是 $E_2$-代数（非偏）时，它等价于因子化同调 [AF15] 和拓扑手性同调 [Lur09]。这一构造的第一个例子可见于 McDuff 关于正负粒子的构形空间[McD75], ，其中粒子带有“荷”标签，并且当其荷互为相反数时允许发生碰撞。更一般地，Salvatore [Sal01] 定义了部分 2-幺半群；从本质上说，它们是带有类似于一个 $E_2$-代数结构的乘法的空间，但这一乘法不必对每个元素元组都有定义（见定义4.4）。当 $P$ 配备了与 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$相容的作用时，我们称其为带框架的偏幺半群，并可定义$F_{g\text{中的}b}$ 构形空间，其中带有 $P$中的部分可求和标签，记作 $C_\Sigma(F_{g,b};\, P)$。定义 $C_\Sigma(F_{g,b};\, P)$所需的工具远多于标签不可求和的情形

，后者所需的工具包括 Fulton-MacPherson 操作子，并由此产生更复杂的构形空间模型。我们将在第4节的第4.1节讨论这些构造。与之前一样，这些广义构形空间带有微分同胚群的作用，我们研究其 Borel 构造。

**定理 E**。 设 $P$ 是一个带框架的部分 2-幺半群，且 $b \geq 1$。*Borel* 构造上的稳定化映射

$$s_* : C_\Sigma(F_{g,b}; P) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to C_\Sigma(F_{g+1,b}; P) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b})$$

在 $\leq \frac{2}{3}g$ 度上诱导出同调同构。 –

尽管此前已有研究关于增加点数时带可求和标签的构形的同调稳定性 [KM16], ，上述结果首次考察了随着亏格增加而产生的稳定性。定理 E 可解释为因子化同调的 $\mathrm{Diff}_\partial$-等变同调稳定性结果。

与带标签构形的情形一样，该结果是空间 $C_\Sigma(F_{g,b}; P) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$ 的解耦定理的推论，这是本文的主要结果。它比带标签构形的解耦复杂得多。证明使用了第4.2节中构造的 $C_\Sigma(F_{g,b}; P)$ 的半单纯分解，我们称之为构形的圆盘模型，记作 $|D_\Sigma(F_{g,b}; P)_\bullet|$（命题 4.13）。该模型明确展示了这些空间与因子化同调之间的联系。在解耦的语境下，我们自然会遇到这个空间的一个类似物，其中二维圆盘中的构形嵌入 $\mathbb{R}^\infty$，我们将该空间记作$|D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty; P)_\bullet|$（定义 4.17）。利用带标签构形的解耦定理（定理 D），我们随后证明:

**定理 F**（带可求和标签构形的解耦定理）。 对于$P$一个带框架的部分2-幺半群，存在一个弱等价 $C_\Sigma(F_{g,b}; P) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \simeq |D_\Sigma(F_{g,b}; P)_\bullet| /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$，并且解耦映射

$$|D_\Sigma(F_{g,b}; P)_\bullet| /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times |D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty; P)_\bullet|.$$

在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上诱导一个同调同构。 –

在未来的工作中，我们将讨论空间 $|D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty; P)_\bullet|$ 的同伦类型，以及将其描述为一个无穷循环空间的方式。我们猜想它也等价于 $\mathbb{R}^\infty$ 中一个带有部分可求和标签的构形。

与带标签构形的情形类似，空间 $C_\Sigma(F_{g,1}; P) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})$ 组成一个拓扑幺半群，而解耦定理下降到其群完备化中。

**推论 G**。 对于任意带单位元 $P$ 的道路连通带框架部分2-幺半群，解耦映射诱导一个同伦等价

$$\Omega B(\coprod_g C_\Sigma(F_{g,1}; P) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})) \simeq \Omega B(\coprod_g B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})) \times \Omega B(|D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty; P)_\bullet|).$$

**1.2. 论文概要**。 我们首先在第2节回顾本文中（尤其是第4节）将会用到的背景结果。读者可以跳过这一部分，并在需要时再回头查阅。

在第3节中，我们引入带标签构形空间，并证明定理 C。利用这一结果，我们推导出定理 A 和定理 B，以及推论 D。

在第4节中，我们讨论带可求和标签的构形情形，并证明本文的主要结果。首先，我们在第4.1节回顾带框架的部分 $d$-幺半群以及带部分可求和标签的构形空间的定义。接着，我们在第4.2节为这些空间构造半单纯分解。在第4.3节中，我们将这一圆盘模型与带标签配置的解耦定理（定理 D）结合起来，证明定理 F。最后，我们利用这一结果推导出定理 E 和推论 G。

**致谢**。我谨感谢 Ulrike Tillmann 提出这个问题，并与我进行了许多富有见地的讨论。此外，我还要感谢 David Ayala、Christopher Douglas、Jan Steinebrunner 和 Nathalie Wahl 所给予的有益讨论和意见。

## 2. Preliminaries

本节回顾半单纯空间的相关技术与结果，这些内容将在第4节中使用。读者可以跳过本部分，并在需要时回读。有关本节概念的详细阐述，请参见 [ERW19]。

一个半单纯空间是一个函子 $\Delta_{inj}^{op} \to$Top，其中 $\Delta_{inj}$ 是一个范畴，其对象为线性有序集 $[p] = \{0 < \cdots < p\}$，态射为单调单射。我们将这样的函子记为 $X_\bullet$，并写作 $X_p = X_\bullet(\{1, \ldots, p\})$。一个半单纯空间的数据等价于一族空间 $X_p$、$p \geq 0$，以及面映射 $d_i \colon X_p \to X_{p-1}$（$i = 0, \ldots\ldots, p$），满足当 $i < j$时有 $d_i d_j = d_{j-1} d_i$。

记 $\Delta^p$ 为 标准 $p$-单纯形

$$\Delta^p = \left\{ (t_0, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \middle| \sum_{i=1}^{p} t_i = 1 \text{ and } t_i \geq 0 \text{ for all } i \right\}.$$

对于 $\Delta_{inj}$ 中的每个态射 $\phi \colon [p] \to [q]$，都存在一个连续映射 $\phi_* \colon \Delta^p \to \Delta^q$，使得 $\phi_*(t_0, \ldots, t_p) = (s_0, \ldots, s_q)$，其中 $s_j = \sum_{i \in \phi^{-1}(j)} t_i$。半单纯空间 $X_\bullet$ 的几何实现 是商空间

$$|X_\bullet| \coloneqq \left( \coprod_p X_p \times \Delta^p \right) \Big/ \sim$$

其中 $(x, \phi_* t) \sim (\phi^* x, t)$，且 $\phi$ 是 $\Delta_{inj}$ 的一个态射。

**2.1. 偏序集的半单纯神经。** 任意拓扑偏序集 $(Q, <)$ 都定义了一个半单纯空间 $Q_\bullet$，令 $Q_p$ 为元组 $(q_0 < \cdots < q_p) \in Q^{p+1}$ 所构成的子空间，并定义面映射

$$\begin{aligned} d_i : Q_p &\longrightarrow Q_{p-1} \qquad \text{对于 } 0 \leq i \leq p \\ (q_0 < \cdots < q_i < \cdots < q_p) &\longmapsto (q_0 < \cdots < q_{i-1} < q_{i+1} < \cdots < q_p). \end{aligned}$$

我们将 $Q_\bullet$ 称为偏序集 $Q$的半单纯神经。

给定一个拓扑偏序集 $(Q, <)$，空间 $Q \times Q$ 可以赋予一个偏序，其中 $(q_1, q_2) < (q_1', q_2')$ 当且仅当 $q_i < q_i'$ 且 $q_j \leq q_j'$，其中 $\{i, j\} = \{1, 2\}$。我们称带基点的此类 $Q$ 为偏序拓扑幺半群，若其配备了一个乘法

$$- \cdot - : Q \times Q \to Q$$

该乘法严格满足结合律、具有单位元且保序。在这种情况下，半单纯神经 $Q_\bullet$ 的几何实现自然带有一个乘法 $\cdot$，定义为

$$\begin{aligned} &\big((q_0 < \cdots < q_m; t_0, \ldots, t_m) \cdot (\overline{q_0} < \cdots < \overline{q_k}; \bar{t}_0, \ldots, \bar{t}_k)\big) = \\ &= (q_0 \cdot \overline{q_0} < \cdots < q_0 \cdot \overline{q_k} < \cdots < q_m \cdot \overline{q_0} \cdots < q_m \cdot \overline{q_k}; t_0 \cdot \bar{t}, \ldots, t_m \cdot \bar{t}) \end{aligned}$$

其中 $t_i \cdot t \coloneqq t_i t_0, \ldots, t_i t_k$，对于所有 $i = 0, \ldots, m$。不难验证这一定义良好。

**引理 2.1**。对于$(Q, <, \mu)$ 这个偏序拓扑幺半群，$(|Q_\bullet|, |\mu|)$ 是一个拓扑幺半群。此外，任意偏序拓扑幺半群的映射 $f \colon Q \to Q'$都会诱导一个拓扑幺半群的映射

$$f_* : |Q_\bullet| \to |Q'_\bullet|.$$

该证明是一个直接的计算，直接由定义得出。

2.2.**谱序列**。 下面我们简要回顾在[Seg68，第 5 命题1] 中定义的、与半单纯空间相关联的谱序列；这是证明定理 4.18 中所用同调论证的关键（详见 [ERW19，第 1 节4] ）。

对于任意半单纯空间 $X_\bullet$，其几何实现 $|X_\bullet|$ 带有由其骨架构成的滤过，其中 $|X_\bullet|^{(0)} = X_0$ 以及

$$|X_\bullet|^{(q)} = |X_\bullet|^{(q-1)} \cup_{X_q \times \partial\Delta^q} X_q \times \Delta^q.$$

该滤过导出一个谱序列

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(|X_\bullet|^{(q)}, |X_\bullet|^{(q-1)}) \Longrightarrow H_{p+q}(|X_\bullet|)$$

并利用切除和 Künneth 同构，左侧项可以改写为一个谱序列，其中

$$E^1_{p,q} \cong H_p(X_q) \Longrightarrow H_{p+q}(|X_\bullet|).$$

因此，逐层诱导同调同构的半单纯空间映射，会在相应谱序列的第一页上诱导同构，进而在几何实现之间诱导同调同构。

2.3. **半单纯分解**。 在解耦的证明中，我们将使用一个半单纯分解来处理带有可求和标签的构形空间。证明我们确实得到一个分解，将直接应用 [GRW14，定理 6.2]。为完整起见，我们简要回顾这一结果的陈述，以说明在命题 4.13 的证明中将要检验的条件。我们沿用 [GRW14] 中的记号和定义。

一个增广半单纯空间 是一个三元组 $(X_\bullet, X_{-1}, \varepsilon_\bullet)$，其中 $X_\bullet$ 是一个半单纯空间，$X_{-1}$ 是一个空间，而 $\varepsilon_\bullet$ 是一族连续映射 $\varepsilon_p : X_p \to X_{-1}$ ，满足 $d_i\varepsilon_p = \varepsilon_{p-1}$ ，对所有 $p \geq 0$ 以及所有面映射 $d_i$均成立。我们也称$\varepsilon_\bullet : X_\bullet \to X_{-1}$ 是 $X_\bullet$的一个增广。容易验证，增广会诱导一个连续映射 $|\varepsilon_\bullet| : |X_\bullet| \to X_{-1}$。

**定义 2.2.** 一个增广拓扑旗复形 [GRW14，定义 6.1] 是一个增广半单纯空间 $\varepsilon : X_\bullet \to X_{-1}$，满足

(i) 将一个 $n$-单形映射到其 $(n+1)$ 个顶点的映射 $X_n \to X_0 \times_{X_{-1}} \cdots \times_{X_{-1}} X_0$ 是到其像上的同胚，而该像是一个开子集。(ii) 元组 $(v_0, \ldots, v_n) \in X_0 \times_{X_{-1}} \cdots \times_{X_{-1}} X_0$属于 $X_n$，当且仅当 $(v_i, v_j) \in X_1$对所有 $i < j$均成立。

换言之，在增广拓扑旗复形中， $n$-单形空间可以描述为由在 $\varepsilon$ 下像相同的顶点 $(n+1)$-元组构成的一个开子空间；当且仅当这些顶点两两组成 1-单形时，这样的元组才构成一个 $n$-单形。下面的结果给出了一个判据，用于确定增广拓扑旗复形 $X_\bullet \to X_{-1}$ 何时诱导弱等价 $|X_\bullet| \to X_{-1}$。

**定理 2.3** ([GRW14], 定理 6.2)。 设 $X_\bullet \to X_{-1}$ 是一个增广拓扑旗复形。假设

*(i)* 映射 $\varepsilon : X_0 \to X_{-1}$ 对任意从圆盘出发的映射都有局部提升，也就是说，给定一个映射$f : D^n \to X_{-1}$、一个点 $p \in \varepsilon^{-1}(f(x))$，存在一个 $x$ 的开邻域 $U \subset D^n$ 以及一个映射 $F : U \to X_0$，使得 $\varepsilon \circ F = f|_U$ 且 $F(x) = p$。*(ii)* $\varepsilon : X_0 \to X_{-1}$ 是满射。*(iii)* 对任意 $p \in X_{-1}$ 以及任意非空有限集 $\{v_1, \ldots, v_n\} \in \varepsilon^{-1}(p)$，存在一个 $v \in \varepsilon^{-1}(p)$，使得对所有 $i$，均有 $(v_1, v) \in X_1$ 。

那么， $|X_\bullet| \to X_{-1}$ 是弱同伦等价。

## 3. Decoupling Labelled Configuration Spaces

本节回顾带标签构形空间的定义，并介绍同伦商 $C(F_{g,\,b};\,Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$ 的一个模型。借助该模型，我们构造定理 C 中的解耦映射。随后，我们将这一结果证明为定理 3.2，并用它证明定理 A 和定理 B，以及推论 D。它们分别是下文的推论 3.4、推论 3.5 和推论 3.7。

**定义 3.1.** 设 $M$ 是一个流形，$Z$ 是一个良基点空间。$Z$ 中带标签的 $M$ 构形空间，记为 $C(M;\,Z)$，是如下商空间

$$\coprod_{k\geq 0}\widetilde{C}_k(M)\underset{\Sigma_k}{\times}Z^k/\sim$$

~其中 $C_k(M)$ 表示 $M$ 中 $k$ 个点的有序构形空间，并且

$$(m_1,\dots,m_k;z_1,\dots,z_k)\sim(m_1,\dots,m_{k-1};z_1,\dots,z_{k-1})$$

当 $z_k$ 是 $Z$ 的基点时。

若 $Z$ 是一个带基点的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间，且 $M$ 是一个曲面 $F_{g,\,b}$，其中 $b\geq 1$，则空间 $C(F_{g,\,b};Z)$ 带有 $F_{g,\,b}$ 的微分同胚群的自然作用：对于 $\phi\in\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$

$$\phi\cdot(m_1,\dots,m_k;z_1,\dots,z_k)\coloneqq(\phi(m_1),\dots,\phi(m_k);D_{m_1}\phi\cdot z_1,\dots,D_{m_1}\phi\cdot z_k).$$

基点关系在此作用下保持不变，因为 $Z$ 是一个带基点的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间。解耦结果讨论的是此作用的同伦商，也就是 Borel 构造 $C(F_{g,\,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$。

从现在起，我们用 $F_{g,b}$ 表示一个亏格为 $g$、有 $b\geq 1$ 个边界分量的固定可定向曲面，并一次性选定 $F_{g,b}$上的一个标架，即标架丛 $Fr(TF_{g,b})\to F_{g,b}$的一个截面 $s$。现在我们为 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$固定一个模型，用于构造定理 3.2 的解耦映射。令 $\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)$ 表示 $\mathrm{colim}_{n\to\infty}\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^n)$。此空间带有 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$ 的自由作用，该作用由前复合给出；根据 [BF81]，商映射 $\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)\to\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$ 存在局部截面，因此它是一个主 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$-丛。此外，根据惠特尼嵌入定理，$\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)$ 弱可缩，因此它是 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$ 的一个模型。于是我们令

$$C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\simeq\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)\underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times}C(F_{g,b};Z).$$

类似地，我们将采用以下模型来表示 $B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$

$$B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\simeq\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}).$$

这可以解释为由与 $F_{g,b}$ 微分同胚的 $\mathbb{R}^\infty$ 的抽象子流形所构成的空间，但不指定固定的微分同胚。类似地，$C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$ 中的一个点由这样一个抽象流形以及一个带标签构形组成。

解耦映射是两个映射的乘积

$$\tau:C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \tag{3.1}$$

$$\varepsilon:C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\to C(\mathbb{R}^\infty;E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+\underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge}Z). \tag{3.2}$$

回忆一下，$E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 是 $B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的万有纤维化的全空间；我们用 $(-)_+$ 表示给空间添上一个不交基点，而 $-\ \wedge_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}-$ 表示

带基点拓扑 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间的楔积对 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的对角作用取商。

直观来说，映射 $\tau$ 会遗忘构形，而 $\varepsilon$ 会遗忘底层曲面，但会保留带标签构形及其子流形上切空间的数据。

具体而言， $\tau$ 是该同伦商的分类映射，它正是由投影 $\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)\times C_k(F_{g,b}) \to \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)$诱导的映射。

为定义 $\varepsilon$，我们将 $B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 的模型取为 $\mathbb{R}^\infty$ 上由 $Gr^+$ 个二维定向子空间构成的定向格拉斯曼流形 $\infty(2,E)$，并令 $\tilde{}_2\mathrm{GL}\mathbb{R}(\tilde{}_2)$ 表示其上的通用 $\mathrm{GL}\mathbb{R}(Fr)$-标架丛的全空间。随后，利用恒等式 $T\mathbb{R}^\infty(\cong)\,\mathbb{R}^\infty\times E\tilde{}_2\mathrm{GL}\mathbb{R}(e)$，一个嵌入 $F_g\colon_b\hookrightarrow\mathbb{R}^\infty$，$e_*$ 诱导出一个映射 $Fr\colon TF_g(_b,\to ESO)\,TF_g(2)$，该映射取 $_b,T_pF_g$ 上标架丛中的一个标架的基 $_b$，$D_pe$，并将其映射到经 $\varepsilon$ 映射后的像。映射 $[m_1,\dots,m_k$ 将由带标签构形 $z_1;\,z_k],\dots,e$ 以及嵌入 $F_g\colon_b\hookrightarrow\mathbb{R}^\infty$，$\mathbb{R}^\infty$ 表示的点，映射为 中由下式给出的带标签构形

$$[e(m_1),\dots,e(m_k);[e_*(s(m_1)),z_1],\dots,[e_*(s(m_k)),z_k]]$$

其中 $s(p)$ 表示 $p\in F_{g,b}$ 上选定的定向标架。容易验证，这确实定义了一个到构形空间 $C(\mathbb{R}^\infty;(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))\wedge$ 的连续函数 $\tilde{}_{+_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}}Z)$.

**定理 3.2.** 设 $\tau$ 和 $\varepsilon$ 是 (3.1) 中的映射。那么解耦映射

$$\tau\times\varepsilon : C(F_{g,b};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\times C(\mathbb{R}^\infty;(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))_+\underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge}Z)$$

在 $\leq\frac{2}{3}g$ 度诱导出一个同调同构。 –

上述结果的证明将建立在一个针对点数固定的无标记构形的解耦结果之上，该结果最初由 [BT01] 证明，并由 [Han09, Bon22] 推广。这里我们证明该结果的一个轻微推广，这是证明中所需要的。空间 $C(M;Z)$ 构造为一系列空间 $\widetilde{C}_k(M)\times_{\Sigma_k}Z^k$ 的并集的商空间，下面的引理讨论的是这些分支各自上的解耦映射。

事实上，我们将在一个稍微一般化的情形中进行研究，这样更便于证明：设 $X$ 是一个带有广 wreath 积$\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 作用的良基点空间（在上述情形中，我们使用的是 $X=Z^k$）。空间 $\widetilde{C}_k(F_{g,1})\times X$ 配备了两个作用： $\Sigma_k$ 通过置换构形中的点并作用于 $X$，从而以对角方式作用；$\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$ 的作用方式为

$$\phi\cdot(m_1,\dots,m_k;x)=(\phi(m_1),\dots,\phi(m_k);(d_{m_1}\phi,\dots,d_{m_k}\phi)(x)).$$

注意， $\Sigma_k$ 和 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})$ 在该空间上的作用彼此交换。

和之前一样，我们有映射

$$\tau_k : (\widetilde{C}_k(F_{g,1})\underset{\Sigma_k}{\times}X)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_k : (\widetilde{C}_k(F_{g,1})\underset{\Sigma_k}{\times}X)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\to(\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^\infty)\times(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))^k)\underset{\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\times}X. \tag{3.4}$$

这里， $\tau_k$ 仍然只是同伦商的分类映射，而 $\varepsilon_k$ 是一个映射，它将由 $[m_1,\dots,m_k;\,x]$ 和一个嵌入 $e\colon F_{g,b}\hookrightarrow\mathbb{R}^\infty$ 表示的点映到类

$$\big[[e(m_1),\dots,e(m_k);e_*(s(m_1)),\dots,e_*(s(m_k))],x\big]$$

其中， $s(p)$ 表示在 $p\in F_{g,b}$ 上选定的定向标架。我们指出，将 $X$ 替换为 $Z^k$ 后，恰好可以恢复 (3.1) 中映射 $\tau$ 和 $\varepsilon$ 的定义。

**引理 3.3** ([BT01, Bon22])**.** 对于任意 $\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间 $X$，设 $\tau_k$ 和 $\varepsilon_k$ 为 (3.3) 中定义的映射。那么

$$\tau_k\times\varepsilon_k : (\widetilde{C}_k(F_{g,b})\underset{\Sigma_k}{\times}X)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\times(\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^\infty)\times(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))^k)\underset{\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\times}X.$$

在次数 $\leq\frac{2}{3}g$ 上诱导同调同构。 –

为求完整起见，我们给出上述结果的简短证明。详情请参见 [BT01, Bon22]。

引理 *3.3* 的证明。我们首先将证明归结为 $X$ 是一个点的情形。投影

$$(\widetilde{C}_k(F_{g,b}) \underset{\Sigma_k}{\times} X)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to C_k(F_{g,b})/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$$

$$B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times (\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^\infty) \times (E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))^k)_{\Sigma_k} \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\times} X \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times C_k(\mathbb{R}^\infty, B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))$$

都是以 $X$为纤维的纤维化，且映射 $\tau_k \times \varepsilon_k$ 在相应的纤维序列之间诱导出一个映射，并且该映射在纤维上的限制是恒等映射。如果基空间之间的映射在 $\leq \frac{2}{3}g$度诱导出同调同构，那么根据应用于这些纤维化所关联的 Serre 谱序列的 Zeeman 比较定理 [Zee57]，$\tau_k \times \varepsilon_k$也会如此。因此，只需证明基空间之间的映射

$$\tau_k \times \varepsilon_k : C_k(F_{g,b})/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times C_k(\mathbb{R}^\infty, B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))$$

在度数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上诱导同调同构。

根据 Palais 定理 [Pal60]，，映射 $\varepsilon_k$ 是一个纤维为 $B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b+n})$ 的纤维化。此外，映射 $\tau_k \times \varepsilon_k$ 诱导出纤维序列之间的映射

$$\begin{array}{ccccc}
B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b+n}) & \longrightarrow & C_k(F_{g,b})/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) & \xrightarrow{\varepsilon_k} & C_k(\mathbb{R}^\infty, B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_k\times\varepsilon_k} & & \| \\
B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) & \longrightarrow & B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times C_k(\mathbb{R}^\infty, B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})) & \xrightarrow{proj} & C_k(\mathbb{R}^\infty, B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))
\end{array}$$

其中最左侧的映射是通过粘合圆盘封去 $n$ 额外的边界分支而诱导的映射。已证明该映射在范围 $\leq \frac{2}{3}g$ [Har85, Iva87, Iva89, Iva93, Bol12, RW16] 内诱导同调同构。因此，根据 Zeeman 比较定理 [Zee57]，应用于与这些纤维序列相关的 Serre 谱序列，总空间之间的映射也在范围 $\leq \frac{2}{3}g$ 内诱导同调同构。□

有了引理 3.3，我们现在可以证明定理 3.2。

定理 *3.2* 的证明。空间 $C(F_{g,b}; Z)$ 和 $C(\mathbb{R}^\infty; (E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))_+ \wedge_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})} Z)$ 由任意数量的粒子构形组成。不过，它们具有自然的滤过 $C^{\leq k}(-)$，其子空间由至多包含 $k$ 个点的构形组成。这些滤过诱导出

$$\begin{aligned}
X_k &\coloneqq C^{\leq k}(F_{g,b}; Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \\
Y_k &\coloneqq B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times C^{\leq k}(\mathbb{R}^\infty; (E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z).
\end{aligned}$$

且在映射 $\tau \times \delta$ 下保持不变。我们将通过归纳法证明，对所有 $k$，限制映射$X_k \to Y_k$ 都是同调同构。

由于 $Z$ 是一个具有良好基点的空间， $X_{k-1} \hookrightarrow X_k$ 和 $Y_{k-1} \hookrightarrow Y_k$ 的包含映射是余纤维化。它们的子商为

$$X_k/X_{k-1} = (E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}))_+ \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\wedge} \widetilde{C}_k(F_{g,b})_+ \underset{\Sigma_k}{\wedge} Z^{\wedge k}$$

and

$$Y_k/Y_{k-1} = (B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}))_+ \wedge \widetilde{C}_k(\mathbb{R}^\infty)_+ \underset{\Sigma_k}{\wedge} ((E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z)^{\wedge k}.$$

比较与这些滤过相关的谱序列，只需证明这些子商上的诱导映射是同调同构。考虑余纤维化的映射：

$$\begin{array}{ccccc} E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} C_k(F_{g,b}) & \longrightarrow & E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} (\widetilde{C}_k(F_{g,b}) \underset{\Sigma_k}{\times} Z^{\wedge k}) & \longrightarrow & X_k/X_{k-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_k\times\varepsilon_k} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_k\times\varepsilon_k} & & \downarrow \\ B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times C_k(\mathbb{R}^\infty, B\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})) & \longrightarrow & B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times (\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^\infty) \underset{\Sigma_k}{\times} ((E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z)^{\wedge k}) & \longrightarrow & Y_k/Y_{k-1} \end{array}$$

由引理 3.3 配合 $X = *$，左侧映射在 $\leq \frac{2}{3}g$ 度诱导同调同构；同一结果配合 $X = Z^{\wedge n}$，– 也说明中间映射如此。因此，由五引理可知，右侧映射在 $\leq \frac{2}{3}g$ 度也诱导同调同构，这正是所需结论。□

3.1. **同调稳定性**。设 $F_{g+1,b}$ 是一个亏格为 $g+1$ 且有 $b \geq 1$ 个边界分支的曲面，它由 $F_{g,b}$ 与 $F_{1,1}$ 作边界连通和得到。然后，将微分同胚在 $F_{1,1}$ 上按恒等映射延拓，便得到一个拓扑群映射

$$s : \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b})$$

我们称之为稳定化映射。此外，包含映射 $F_{g,1} \hookrightarrow F_{g+1,b}$ 诱导出带标号构型空间之间的连续映射 $C(F_{g,b}; Z) \to C(F_{g+1,b}; Z)$，该映射是 $s$-等变的。由此可知，我们在 Borel 构造上得到一个诱导映射：

**推论 3.4**。对于 $b \geq 1$，*Borel* 构造上的稳定化映射

$$s_* : C(F_{g,b}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to C(F_{g+1,b}; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b})$$

在 $\leq \frac{2}{3}g$ 次数上诱导同调同构。

上述结果是定理 3.2 的推论，但对于我们所采用的 Borel 构造和分类空间模型，需要格外谨慎。具体而言，我们尚不清楚如何在嵌入空间 $\mathrm{Emb}(F_{g,\,b},\ \mathbb{R}^\infty) \to \mathrm{Emb}(F_{g+1,\,b},\ \mathbb{R}^\infty)$ 上定义稳定化映射，使其在 Borel 构造上诱导所需的映射。解决方法是将 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$ 的模型取为 $\mathrm{Emb}(F_{g,\,b},\ \mathbb{R}^\infty)$ 的一个弱可缩子空间，该子空间仍具有 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$ 的自由且适当的作用，并且其中的稳定化映射是明确的。

固定 $F_{g,\,b}$ 的一个边界分支和一个嵌入 $S^1 \hookrightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^\infty$。我们将 $\mathrm{Emb}^\partial(F_{g,\,b},\ (-\infty,\ 0] \times \mathbb{R}^\infty)$ 记为所有将 $F_{g,\,b}$ 扩展为嵌入的空间，这些嵌入在所标记边界的一个领圈邻域上是标准的。根据与上文相同的论证，$\mathrm{Emb}^\partial(F_{g,\,b},\ (-\infty,\ 0] \times \mathbb{R}^\infty)$ 是 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$ 的一个模型，而包含映射

$$\mathrm{Emb}^\partial(F_{g,b}, (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^\infty) \hookrightarrow \mathrm{Emb}(F_{g,b}, \mathbb{R}^\infty)$$

是一个 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$-等变弱同伦等价。固定一个嵌入 $e : F_{1,2} \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$，其在边界邻域上限制为所选嵌入，由此得到一个包含映射

$$\mathrm{Emb}^\partial(F_{g,b}, (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^\infty) \to \mathrm{Emb}^\partial(F_{g+1,b}, (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^\infty)$$

该映射通过将$F_{g,b}$ 的任意嵌入延拓为 $e$ 给出。这显然与稳定化映射相容。

推论 *3.4* 的证明。以如下所述的空间 $\mathrm{Emb}^\partial(F_{g,b},(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^\infty)$ 为 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})$ 的模型，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} C(F_{g,\,b};\ Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b}) & \xrightarrow{\quad s \quad} & C(F_{g+1,b};\ Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b}) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau\times\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\times\varepsilon} \\ B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})\times C(\mathbb{R}^\infty;(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))_+\ \wedge_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})} Z) & \xrightarrow[s\times id]{} & B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b})\times C(\mathbb{R}^\infty;(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))_+\ \wedge_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})} Z) \end{array}$$

由定理 3.2 可知，竖直映射在 $\leq \frac{2}{3}g$ 次数上诱导同调同构；根据 Harer 稳定性定理 [Har85, Iva87, Iva89, Iva93, Bol12, RW16] 以及 Künneth 定理，底部映射也如此。因此，顶部映射也必定在 $\leq \frac{2}{3}g$ 次数上诱导同调同构。□

解耦定理还使我们能够确定同调稳定到何处。令 $C(F_\infty;Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty)$ 和 $B\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty)$ 分别为

$$C(F_\infty;Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) := \mathrm{colim}(C(F_{1,1};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{1,1}) \xrightarrow{s} C(F_{2,1};Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{2,1}) \xrightarrow{s} \dots)$$
$$B\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) := \mathrm{colim}(B\mathrm{Diff}_\partial(F_{1,1} \xrightarrow{s} B\mathrm{Diff}_\partial(F_{2,1}) \xrightarrow{s} \dots).$$

**推论 3.5**。 对于 $Z$ 一个带基点的连通 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$-空间，解耦映射诱导

$$\tau\times\varepsilon : C(F_\infty;Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) \to \Omega^\infty \mathrm{MTSO}(2)\times\Omega^\infty\Sigma^\infty\left(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z\right)$$

这是一个在所有次数上都是同调同构的映射。

证明。 定理 3.2 和推论 3.4 表明，余极限上的解耦映射

$$\tau\times\varepsilon : C(F_\infty;Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty)\times C(\mathbb{R}^\infty, E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+ \wedge_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})} Z) \tag{3.5}$$

诱导出一个同调同构。根据 [GTMW09, MW07], $B\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty)$ 存在一个映射到 $\Omega^\infty$ MTSO(2)，且该映射是同调同构；此外，根据 [Seg73], ，式 (3.5) 中最右侧的构形空间与 $\Omega^\infty\Sigma^\infty\left(E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+ \wedge_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})} Z\right)$ 同伦等价。□

3.2. **带标签构形空间模空间的幺半群**。 将两个曲面$F_{g,\,1}$ 和 $F_{h,\,1}$ 沿其边界的一部分粘合，定义了一个拓扑群映射

$$\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})\times\mathrm{Diff}_\partial(F_{h,1})\to\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+h,1}).$$

只要固定亏格为 $g$、具有一个边界分支的定向曲面$F_{g,b}$，并使其与稳定化相容（见第 3.1 节），就可以将此操作定义为结合的操作。采用这些曲面作为选择，可以看出，上述映射在所有 $F_{g,1}$ 的微分同胚群构成的集合上给出了一个结合的操作。图 1 展示了这类曲面及其乘法的一个例子。

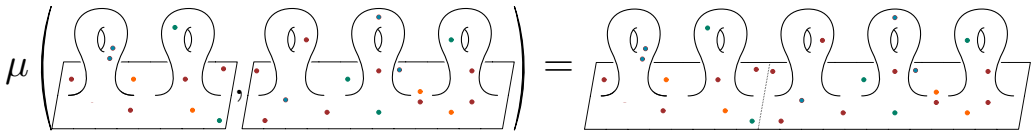


FIGURE 1. 映射 $\mu$ 的示例：$MC(\mathcal{C})_2\times MC(\mathcal{C})_3\to MC(\mathcal{C})_5$，其中 $\mathcal{C}$ 是颜色空间，白色是基点。

在同伦意义下，上述粘合过程等价于将曲面 $F_{g,1}$ 和 $F_{h,1}$ 的边界圆粘合到 $F_{0,3}$ 的三个边界圆中的两个上，这称为裤子乘法。我们选择从第一种描述的角度来理解这种乘法，因为这样乘积便严格满足结合律。

此运算也在分类空间 $B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$上诱导出乘法；通过选取一个合适的模型，可以使其成为结合的。与第 3.1 节中一样，我们将把 $\mathrm{Emb}(F_{g,\,1},\ \mathbb{R}^\infty)$ 的某个子空间用作 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$。具体来说，我们可以固定

嵌入 $\delta_g\colon S^1 \hookrightarrow [0,g]\times\mathbb{R}^\infty$，使得 $\delta_g(S^1)\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^\infty) = \{0\}\times(-1,\ 1)\times\{0\}$且 $\delta_g(S^1)\cap(\{g\}\times\mathbb{R}^\infty) = \{g\}\times(-1,\ 1)\times\{0\}$。我们用 $\mathrm{Emb}^{\delta_g}(F_{g,\,1},\ [0,g]\times\mathbb{R}^\infty)$ 表示所有可延拓为 $F_{g,\,1}$ 的嵌入、且在边界的领圈邻域上为标准形式的空间。根据与上述相同的论证，$\mathrm{Emb}^{\delta_g}(F_{g,\,1},\ [0,g]\times\mathbb{R}^\infty)$ 是 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$ 的一个模型，而包含映射

$$\mathrm{Emb}^{\delta_g}(F_{g,1},[0,g]\times\mathbb{R}^\infty)\hookrightarrow \mathrm{Emb}(F_{g,1},\mathbb{R}^\infty)$$

是一个 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$-等变弱同伦等价。通过选取与稳定化映射相容的嵌入 $\delta_g$，我们可以定义乘法

$$\mathrm{Emb}^{\delta_g}(F_{g,1},[0,g]\times\mathbb{R}^\infty)\times\mathrm{Emb}^{\delta_h}(F_{h,1},[0,h]\times\mathbb{R}^\infty)\to\mathrm{Emb}^{\delta_{g+h}}(F_{g+h,1},[0,g+h]\times\mathbb{R}^\infty)$$

方法是将 $F_{g,\,1}$ 的嵌入与 $F_{h,\,1}$ 的嵌入沿第一坐标平移 $g$ 后延拓。这显然满足结合律，并且与微分同胚群上的结合乘法相容。

以 $\mathrm{Emb}^{\delta_g}(F_{g,\,1},\ [0,g]\times\mathbb{R}^\infty)$ 作为 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$ 的模型，我们在分类空间上得到一个结合乘法。这一结构赋予空间 $\coprod_{g\geq 0} B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$ 拓扑幺半群的结构，我们称之为**曲面幺半群**。这与 Tillmann 在 [Til00]，中研究的结构等价，而该结构对于证明 Madsen-Weiss定理 [MW07] 至关重要。

上述在微分同胚群和空间 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$ 上定义的运算，连同固定的识别 $F_{g+h,\,1}=F_{g,\,1}\#_\partial F_{h,\,1}$，也在 Borel 构造上诱导出一个结合的乘法（见图 1）

$$\mu : C(F_{g,1};Z)/\!\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})\times C(F_{h,1};Z)/\!\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{h,1})\to C(F_{g+h,1};Z)/\!\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+h,1}).$$

**定义3.6**。我们将 $MC(Z)_g := C(F_{g,\,1};\,Z)\ /\!\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})$ 记为 $MC(Z)_g$。由 $Z$ 标记的构形模空间幺半群是由不交并集 $MC(Z) := \coprod_{g\geq 0} MC(Z)_g$ 以及运算 $\mu$ 给出的拓扑幺半群。

**定理 3.7**。对于任意带基点的 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^+$-空间 $Z$，解耦映射在群完备化上诱导出弱等价

$$\Omega B\left(\coprod_g C(F_{g,1};Z)/\!\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})\right)\simeq\Omega B\left(\coprod_g B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})\right)\times\Omega B\,C(\mathbb{R}^\infty;E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+\underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge}Z).$$

Segal 在 [Seg73] 中证明，空间 $\Omega^\infty\Sigma^\infty(X)$ 是构形空间 $C(\mathbb{R}^\infty;X)$ 的群完备化，其中该构形空间被视为一个拓扑幺半群，运算大致由转置给出。利用包含映射 $\mathrm{Emb}^{\delta_g}(F_{g,\,1},\ [0,g]\times\mathbb{R}^\infty)\hookrightarrow\mathrm{Emb}(F_{g,\,b},\ \mathbb{R}^\infty)$，我们看到，定理 3.2 的解耦映射通过当前模型在这些空间之间诱导出一个映射。上述定理的证明将包括证明解耦在 $MC(Z)$ 与 Tillmann 和 Segal 的幺半群之间诱导出一个幺半群映射，并证明该映射在群完备化上诱导出一个同伦等价。

**引理 3.8.** *3.1* 中定义的映射 $\tau$ 和 $\varepsilon$ 与这些幺半结构相容。

对于映射 $\tau$，这一结果可直接由定义得出。对于 $\varepsilon$，需要谨慎地将构形空间构造成真正的拓扑幺半群（见[Seg73]）。具体而言，我们使用同伦等价空间，而不是 $C(\mathbb{R}^\infty;X)$

$$C'(\mathbb{R}^\infty,X)=\{(c,t)\in C(\mathbb{R}^\infty,X)\times\mathbb{R} : t\geq 0, c\subset(0,t)\times\mathbb{R}^\infty\}.$$

幺半群结构由并置给出，即 $(c,\ t),\ (c',\ t')\mapsto(c\cup T_t(c')\ t+t')$，其中 $T_t(-)$ 是将构形沿第一个方向平移 $t$ 的映射。于是，解耦定理中的映射 $\tau$ 等价于幺半群映射 $MC(Z)\to C'(\mathbb{R}^\infty,\ X)$，它将 $[e,c]\in MC(Z)_g$ 中的一个元素映射为 $(\tau([e,c])\ g)$。

定理 *3.7* 的证明。只需证明，由解耦给出的幺半群映射在群完备化上诱导同伦等价。由于群完备化是环空间，因而它们是单连通空间；根据单连通空间的怀特黑德定理，只需证明该映射在群完备化上诱导同调等价。两个幺半群都是同伦交换的，因此可以应用群完备化定理[MS76] 。因此，只需证明在极限空间上诱导的映射（定义见第 3.1 节）

$$\tau \times \varepsilon : C(F_\infty; Z) /\!\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) \times C(\mathbb{R}^\infty; E\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})_+ \underset{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}{\wedge} Z) \tag{3.6}$$

是一个同调等价。这由定理 3.2 和推论 3.4 得出。 □

## 4. Decoupling Configuration Spaces with Partially Summable Labels

本节证明本文的主要结果，即带部分可求和标签的构形空间的一个解耦结果。在这种情况下，标记空间带有部分乘法，并且当粒子的标签可以相乘时，允许粒子发生碰撞。由 $P$ 中的带部分可求和标签的构形在 $M$ 中的空间 $C_\Sigma(M; P)$已在 [Sal01] 中定义，其定义需要更精细的工具，例如 Fulton-MacPherson 构形空间和歌剧。在第 4.1 节中，我们回顾这些定义以及部分 $d$-幺半群的概念。

为证明 $C_\Sigma(M; P)$的解耦定理，我们在第 4.2 节中为该空间构造一个半单纯解消，记作 $|D_\Sigma(M; P)_\bullet|$。命题 4.13 表明，该空间确实与 $C_\Sigma(M; P)$弱等价。在解耦的背景下，我们自然会遇到另一个由构形组成的圆盘空间，它在定义 4.17 中构造。

利用这些半单纯空间，我们结合推论 4.14 和定理 4.18，证明定理 F。随后，我们据此推出定理 E 和推论 G，它们分别对应推论 4.19 和 4.20。

**4.1. Fulton-MacPherson 配置空间与部分可求和标签。**本节回顾 [Sal01] 中所述的、带有部分幺半群中可求和标签的构形空间这一概念。

部分 $d$-幺半群 $P$ 本质上是一个空间，其连续运算并非对所有元素集合都有定义，而只对一个子集可合成元素有定义。定义这种部分幺半群的数据包括可合成元素的子集，以及该子集上的一个结合运算。我们感兴趣的是还具有 $E_d$-代数结构的部分幺半群。这一构造的关键是 $\mathcal{F}_d$，即维数为 $d$ 的 Fulton-MacPherson 操作子。它是小 $d$-圆盘操作子的余纤维替换，因此将用于精确定义 $E_d$-部分幺半群这一概念。对我们而言至关重要的是，Fulton-MacPherson 操作子是根据点的配置空间定义的；在这些空间中，构形里的粒子可以相互碰撞，同时保留碰撞前粒子的相对位置，以及碰撞发生的先后顺序。

我们遵循 [Sin04] 中所述的流形 $M$ 的 Fulton-MacPherson 配置空间 $\overline{C}_k(M)$ 的定义。为精确起见，我们将 $M$ 视为嵌入在某个 $\mathbb{R}^m$ 中，并用 $k$ 表示集合 $\{1, \dots, k\}$。我们通过如下定义来记录碰撞中粒子的方向：对于 $(i, j) \in \widetilde{C}_2(k)$，映射 $\pi_{i,j} : \widetilde{C}_k(\mathbb{R}^m) \to S^{m-1}$ 将构形 $(x_1, \dots, x_k)$ 映射到方向 $\overline{x_i - x_j}$上的单位向量。通过定义映射 $s_{i,j,\ell} : C_k(\mathbb{R}^m) \to [0, \infty]$，我们记录 $\widetilde{\quad\quad\quad

**定义 4.1** ([Sin04, 定义 1.3])。流形 $M$ 的*Fulton-MacPherson* 配置空间$C_k(M)$ 是映射像的闭包

$$i \times (\pi_{i,j}|_{\widetilde{C}_k(M)}) \times (s_{i,j,k}|_{\widetilde{C}_k(M)}) : \widetilde{C}_k(M) \longrightarrow M^k \times (S^{m-1})^{k(k-1)} \times [0,\infty]^{k(k-1)(k-2)}.$$

$\widetilde{\ }$空间 $C_k(M)$ 与有序构形空间 $C_k(M)$[Sin04，推论 4.5] 同伦等价；而且，每当 $M$ 是紧空间时， $C_k(M)$ 是$\sim C_k(M)$的紧化。此外，该构造关于嵌入具有函子性 [Sin04，推论 4.8], ；也就是说，任意嵌入 $f : M \hookrightarrow N$ 都会诱导一个嵌入 $f_* : C_k(M) \to C_k(N)$。

以下结果给出了表示 $C_k(M)$ 中元素的一种便捷方法，本章将始终使用这种方法。

**命题 4.2** ([Sin04, 定理 3.8])。 $C_k(M)$ 中的每个元素都由以下数据唯一确定：

*(1)* $M$内部的点配置 $P_1, \dots, P_l$，其中 $1 \le l \le n$（我们称之为无穷小构形）；
*(2)* 对每个 $1 \le i \le l$，一个有 $f_i$ 个叶（枝）的树 $T_i$ ，且没有二价顶点，使得 $\sum_{i=1}^{l} f_i = n$；并且对于 $T_i$ 中每个价为 $m$ 的顶点，指定一个元素 $C_m(T_{P_i}M)/G(d)$，其中 $G(d)$ 是由平移和正膨胀生成的 $\mathbb{R}^d$ 的仿射变换群。*(3)* 对这些树的 $k$ 个叶进行全局排序。

对 $C_k(M)$ 中元素的这种解释，也提供了一种描述由嵌入 $f: M \hookrightarrow N$ 到 $d'$-流形 $N$ 所诱导的映射 $f_*: C_k(M) \to C_k(N)$ 的方式：它将一个具有无穷小构形 $P_1, \dots, P_l \in M$ 的点映射为一个具有无穷小构形 $f(P_1) \dots, f(P_l) \in N$ 的点；它保留树和叶的顺序，但通过将标签 $\xi \in C_m(T_{P_i}M)/G(d)$ 替换为标签 $D_{P_i}f(\xi) \in C_m(T_{f(P_i)}N)/G(d')$，来改变树顶点的标签。

Fulton-MacPherson 操作子 $\mathcal{F}_d$ 由 $\mathbb{R}^d$ 中这些构形的子空间构成。直观地说，对于每个 $k \ge 0$ ，空间 $F_d(k)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中 $k$ 个点的有序构形的子空间，其中这些点在原点处发生碰撞。

**定义 4.3**。维数为 $d$的*Fulton-MacPherson* 操作子，记作 $\mathcal{F}_d$，定义为令 $\mathcal{F}_d(k)$ 等于以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_d(k) & \longrightarrow & \overline{C}_k(\mathbb{R}^d) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^k. \end{array}$$

换言之，它是 $C_k(\mathbb{R}^d)$ 的子空间，其无穷小构形是原点处的一个单点。

按照命题 4.2 中对该空间的描述，这个歌剧的复合由树的嫁接给出。直观地说，我们通常会用构形树来表示 $\mathcal{F}_d(k)$ 的元素，如图 2 最右侧的示意图所示。

如 [Sal01], 所示，拓扑歌剧范畴上存在一种模型结构，其中 $\mathcal{F}_d$ 是小型 $d$-圆盘歌剧的余纤维替换。Salvatore 将 $\mathcal{F}_d$ 上的代数称为 $d$-幺半群，它由一个空间 $A$ 以及 $\Sigma_k$-等变映射组成：

$$\mathcal{F}_d(k) \times A^k \to A$$

这些映射与 $\mathcal{F}_d$的结构映射相交换。

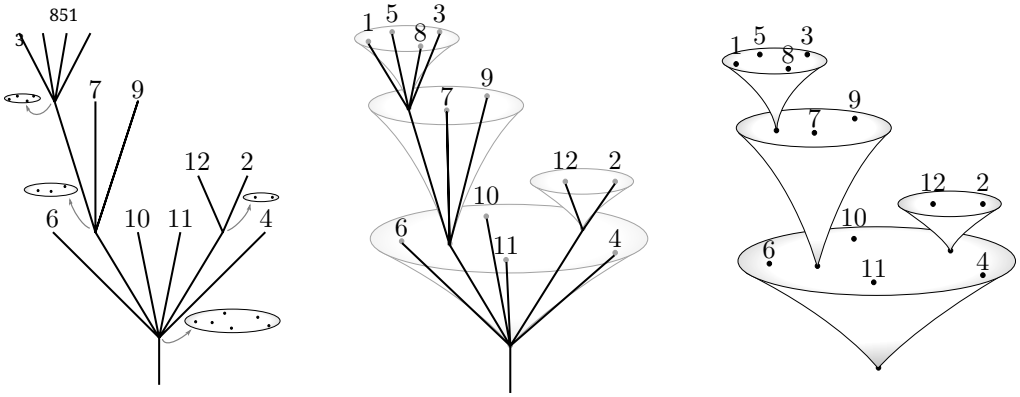



FIGURE 2. 空间 $\mathcal{F}_2(12)$ 中一个元素由无穷小配置树表示。

**定义4.4** ([Sal01], 定义1.7和2.6)。 一个偏 $d$-幺半群 是一个空间 $P$，并配有 $\Sigma_k$-空间的单态射

$$i : Comp_k \hookrightarrow \mathcal{F}_d(k) \times_{\Sigma_k} P^k.$$

以及复合映射 $\rho$: $Comp_k \to P$，使得

(1) 单位元 $\eta \times P$: $P \to \mathcal{F}_d(1) \times P$唯一地经由 $\widetilde{\eta}$: $P \to Comp_1$ 分解，且复合 $\rho \circ \widetilde{\eta}$ 是恒等映射 $\mathrm{id}_P$；(2) 对于 $f \in \mathcal{F}_d(k)$ 和 $[f_j;\ p_j] \subset Comp_{m_j}$，对于 $j = 1, \ldots\ldots, k$，该元素

$$[f; \rho(f_1; \overline{p}_1), \ldots, \rho(f_k; \overline{p}_k)] \in \mathcal{F}_d(k) \times_{\Sigma_k} P^k$$

属于 $Comp_k$ 当且仅当

$$[\mu(f; f_1, \ldots, f_k); \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_k]$$

属于 $Comp_{m_1+\cdots+m_k}$。此外，如果确实如此，那么它们在 $\rho$下的像相同。

带基点空间（$P$，0）是一个偏 $d$-幺半群，其单位元为，此外还满足

3. 对于每个 $k$，存在一个包含映射 $u$： $\mathcal{F}_d(k) \times_{\Sigma_k} \bigvee_k P \hookrightarrow Comp_k$，使得其与 $i \circ u$ 的复合是子空间包含映射；并且 $\rho \circ i$： $\mathcal{F}_d(k) \times_{\Sigma_k} \bigvee_k P \to P$是到 $P$ 坐标的投影。

将上述定义与 $E_d$-代数进行比较后会更容易理解，Salvatore 将其称为 $d$-幺半群。给定一个 $d$-幺半群 $M$ 和一个无穷小构形 $f \in \mathcal{F}_d(k)$，我们总能通过由$f$描述的复合规则，复合 $M$ 中的任意 $k$ 个元素。而在偏 $d$-幺半群 $P$中，情况并非如此。相反，我们给定的是 $k$ 的 $P$元组的一个子集，其中的元素可以通过给定 $f \in \mathcal{F}_d(k)$所描述的运算进行复合。于是，应将空间 $Comp_k$ 理解为： $\mathcal{F}_d$中可能的复合规则与能够依据该复合规则进行复合的 $P$元素元组所组成的有序对空间。映射 $\rho$ 计算复合的结果，只要这些复合有定义。

**例 4.5.** (a) 任意空间 $X$ 都可通过定义 $Comp_1 = \{[1, x] : x \in X\}$ 和 $Comp_k = \emptyset$，对所有 $k \neq 1$，赋予一个平凡的部分 $d$-幺半群结构。在这种情况下，唯一可执行的复合规则是恒等规则，且 $X$ 中的其他任何点集都无法以任何方式进行复合。

(b) 当 $X$ 是一个带有基点 $*$的空间时，我们可以定义一个有单位元的偏$d$-幺半群，令 $Comp_k = \mathcal{F}_d(k) \times \vee_k X$，且 $\rho(f, x) = x_i$，其中 $x_i$ 是唯一的非基点坐标，否则为 $*$。在这种情况下，基点充当单位元，且只有与单位元进行复合时才有定义。

(c) 每个 $d$-幺半群显然都是偏 $d$-幺半群。特别地，每个 $\Omega^d$-空间都是偏 $d$-幺半群。(d) 典范包含 $i_{d,n}:\mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+n}$ 也使我们能够通过添加 $n$ 个平凡复合方向，从偏 $d$-幺半群构造出一个偏 $(d+n)$-幺半群 $P$。我们将其称为偏 $d$-幺半群 $P$ 的朴素升级，记作 $T_{d,n}P$。$T_{d,n}P$的底层空间是 $P$，并将 $Comp_k^{T_{d,n}P}$定义为.....的像

$$Comp_k^P \hookrightarrow \mathcal{F}_d(k)\times_{\Sigma_k} P^k \xrightarrow{(i_{n,k})_*} \mathcal{F}_{d+n}(k)\times_{\Sigma_k} P^k = \mathcal{F}_{d+n}(k)\times_{\Sigma_k}(T_{d,n}P)^k.$$

在 [Sal01], 中，始终假设部分 $d$-幺半群是良好的，具体含义如下文所述。

**定义 4.6.** 若对每个 $k$，包含映射 $Comp_k^P \hookrightarrow \mathcal{F}_d(k)\times_{\Sigma_k} P^k$ 都是余纤维化，则称部分 $d$-幺半群 $P$ 是良好的。

从现在起，我们始终假设部分 $d$-幺半群是良好的且具有单位元。为满足今后的应用需求，我们还关注具有 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 相容作用的部分 $d$-幺半群，因此在此引入这一概念，并在这个更一般的框架下进行构造。

回忆命题 4.2，$\mathcal{F}_d(k)$ 的一个元素由一棵具有 $k$个有序叶子的树，以及以 $\widetilde{C}_{|v|}(\mathbb{R}^d)/G(d)$ 中的元素为顶点装饰所描述。$\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的作用诱导出在 $\widetilde{C}_{|v|}(\mathbb{R}^d)/G(d)$ 上的作用。这对每个 $k$ 都给出了该群在 $\mathcal{F}_d(k)$ 上的作用，而且很容易验证歌剧映射 $\mu$ 都是 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 等变的。

**定义4.7** ([Sal01], 定义 4.3)。带框架的*Fulton-MacPherson* 操作子 记为 $f\mathcal{F}_d$，它是由 $f\mathcal{F}_d(k)=\mathcal{F}_d(k)\times \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})^k$ 定义的歌剧，其结构映射为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}((x,g_1,\dots,g_k);(x_1,g_1^1,\dots,g_1^{m_1}),\dots,(x_k,g_k^1,\dots,g_k^{m_k}))\\ =(\mu(x;g_1x_1,\dots,g_kx_k),g_1g_1^1,\dots,g_kg_k^{m_k}).\end{aligned}$$

上述构造是构造 $\mathcal{A}\rtimes G$ 的一个实例，即歌剧 $\mathcal{A}$ 与群 $G$ 的半直积。该构造以及证明上述构造确实定义了一个歌剧的过程，见 [SW03, 定义 2.1]。

**定义 4.8** ([Sal01], 定义 4.8)。带框架的部分 $d$-幺半群 （带单位元）是一个带基点的 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-空间 $P$，并配有以下 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-空间的单态射

$$i: fComp_k \hookrightarrow f\mathcal{F}_d(k)\times_{\Sigma_k} P^k.$$

以及 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-等变复合映射 $\rho: fComp_k \to P$，满足定义4.4的性质1-3。

$\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-丛在 $M$ 上的标架诱导出 $C_k(M)$ 上的一个 $(\mathrm{GL}_d(\mathbb{R}))^k$-丛 $\overline{f}C_k(M)$，其受 $\Sigma_k$ 作用。这称为 $M$ 中 $k$ 个点的带框架的构形空间 。根据命题 4.2 的描述，空间 $fC_k(M)$ 中的一个元素可由 $M$ 中带标记树的一个无穷小构形，以及与这些树的 $k$ 叶相对应的切平面的额外 $k$ 标架唯一确定。

那么，标架构形空间 $fC(M)=\coprod_k fC_k(M)$ 是一个右$\overline{f}\mathcal{F}_d$-模，其乘法映射具有 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-等变性

$$m: f\overline{C}_k(M)\times_{\Sigma_k}(f\mathcal{F}_d(n_1)\times\cdots\times f\mathcal{F}_d(n_k))\to f\overline{C}_{n_1+\cdots+n_k}(M).$$

定义为将 $f\mathcal{F}_d(n_i)$ 中的元素嫁接到 $fC_k(M)$ 中元素的第 $i$ 个叶上，对所有 $i=\overline{1}$、...、$k$均如此，并使用叶上的标架将 $C_m(\mathbb{R}^d)/G(d)$ 识别为 $M$ ([Sal01, 命题 4.5]) 的切空间上的一个构形。容易验证，任意余维零嵌入 $e: M\hookrightarrow N$ 都会诱导一个右 $f\mathcal{F}_d$-同态$e_*:\overline{f}C(M)\hookrightarrow\overline{f}C(N)$。

**定义 4.9** ([Sal01], 定义 4.14)。设 $P$ 是一个带标架的部分 $d$-幺半群，且 $M$ 是一个维数为 $d$ 的流形。那么， $M$ 中标签取自 $P$ 的部分可求和标签构形空间，记作 $C_\Sigma(M;\, P)$，定义为以下对象的余等化子

$$\coprod_k \left[ f\overline{C}_k(M) \times_{\Sigma_k} \left( \coprod_{\pi\in \mathrm{Map}(n,k)} \prod_{i=1}^{k} fComp^P_{\pi^{-1}(i)} \right) \right] \underset{(m\times \mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\times i)}{\overset{\mathrm{id}\times\rho^k}{\rightrightarrows}} \coprod_k f\overline{C}_k(M) \times_{\Sigma_k} P^k$$

$C_\Sigma(M;\, P)$中的一个元素，随后是 $\coprod_k fC_k(M) \times_{\Sigma_k} P^k$中元素的一个等价类。从上面对 $fC_k(M)$的描述可以看出， $C_\Sigma(M;\, P)$中的一个元素可以表示为 $w_1$，……， $w_l$ 个 $\ell < k$ 点在 $M$中的一个无穷小构形，以及树 $T_i$（其中 $i = 1$，……， $\ell$）； $T_i$ 的顶点由 $x^i_j \in f\mathcal{F}_d$中的元素标记，而树的叶由 $p^i_k \in P$中的元素标记。定义 $C_\Sigma(M;\, P)$的等价关系意味着：如果若干个分别标记为 $p_1$，……， $p_k$的叶从一个标记为 $x \in f\mathcal{F}_d(k)$的顶点出发，且复合 $\rho(x;\, p_1, \ldots\ldots,\, p_k)$有定义，那么我们将此构形与如下构形视为同一构形：移除这些叶，并将它们的顶点替换为一个标记为 $\rho(x;\, p_1, \ldots\ldots,\, p_k)$的叶。

对于带框架的部分 $d$-幺半群 $P$ 和余维零嵌入 $f : M \hookrightarrow N$，我们得到一个诱导映射

$$f_* : \coprod_k f\overline{C}_k(M) \times_{\Sigma_k} P^k \to \coprod_k f\overline{C}_k(N) \times_{\Sigma_k} P^k.$$

根据上述描述，定义域中的一个点由无穷小构形$w_1, \ldots, w_\ell$ 组成，属于 $M$，并配有树 $T_i$，对应于 $i = 1, \ldots, \ell$；其中 $T_i$ 的顶点由元素 $x^i_j \in f\mathcal{F}_d$标记，而树的叶由 $p^i_k \in P$中的元素标记。该点被映射到这样一个点：其无穷小构形为 $\phi(x_1) \ldots, \phi(x_\ell)$，树为 $T_i$, $i = 1, \ldots,$ $\ell$，并带有相应的标签

$$d_{x_i}\phi \cdot x^i_j \text{ and } d_{x_i}\phi \cdot p^i_k.$$

这里我们使用 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 在 $f\mathcal{F}_d$和 $P$上的标准作用。根据带框架部分幺半群定义中的等变条件，该映射保持上述等价类。因此，任何这样的余维零嵌入都会诱导一个映射

$$f_* : C_\Sigma(M; P) \to C_\Sigma(N; P). \tag{4.1}$$

将群 $\mathrm{Diff}_\partial(M)$ 看作 $\mathrm{Emb}(M,\ M)$ 的子空间，上述构造表明 $C_\Sigma(M;\, P)$ 具有 $\mathrm{Diff}_\partial(M)$ 的作用。我们将关注空间 $C_\Sigma(M;\, P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(M)$ 的一个解耦定理。

**4.2. 带部分可求和标记的构形空间的圆盘模型**。设$M$ 是一个光滑紧致的 $d$-流形（可能带边界）， $P$ 是一个带框架的部分 $d$-幺半群。群 $\Sigma_k \wr \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ 典范地包含于 $\mathrm{Diff}_\partial(\coprod_k \mathbb{R}^d)$。我们将 $\mathrm{Emb}(\coprod_k \mathbb{R}^d,\ M)$ 视为一个 $\Sigma_k \wr \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-空间，其作用由逆映射的前复合给出；并将 $C_\Sigma(\coprod_k \mathbb{R}^d;\, P)$ 视为一个 $\Sigma_k \wr \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-空间，其作用由 $\mathrm{Diff}_\partial(\coprod_k \mathbb{R}^d)$ 的作用诱导，正如上一节所述。

**定义 4.10** ([MT14])。设 $Z$ 是一个带基点的 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-空间。 $M$ 中带有取值于 $Z$ 的标签的管状构形空间记作 $D(M;\, Z)$，它是以下商空间：

$$\left( \coprod_{k\geq 0} \mathrm{Emb}(\coprod_k \mathbb{R}^d, M) \underset{\Sigma_k \wr \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})}{\times} Z^k \right) \Big/ \sim$$

其中 $(e_1, \ldots, e_k;\, z_1, \ldots, z_k) \sim (e_1, \ldots, e_{k-1};\, z_1, \ldots, z_{k-1})$，当 $z_k$ 是 $Z$的基点时，对 $e_i : \mathbb{R}^d \hookrightarrow M$ 和 $z_i \in Z$均成立。

空间 $D(M;\ Z)$ 配备了 $\mathrm{Diff}_\partial(M)$ 的作用：对于 $\psi \in \mathrm{Diff}_\partial(M)$、一个嵌入 $e\colon \coprod_k \mathbb{R}^d \hookrightarrow M$，以及 $z=(z_1,\dots,z_k)\in Z^k$，我们定义

$$\phi\cdot[e,\overline{z}]=[\phi\circ e; D_{e(0_1)}\phi\cdot z_1,\dots,D_{e(0_k)}\phi\cdot z_k]$$

其中，$0_i$ 表示 $\coprod_k \mathbb{R}^d$的第 $i$个分量的原点。

**引理 4.11** ([MT14], 命题 2.7、2.8 和 3.6)。原点的包含映射$i:\ *\hookrightarrow \mathbb{R}^d$ 诱导出一个$\mathrm{Diff}_\partial($ $M)$-等变弱等价

$$i^*: D(M;Z)\xrightarrow{\simeq} C(M;Z).$$

可以将 $D(M;\ Z)$视为带标签的构形空间的圆盘模型。要构造可求和标签的圆盘模型，我们需要更多的结构：

**定义 4.12**。 $M$ 中带有 $P$内可求和标签的被包围构形空间，记作 $D_\Sigma(M;\ P)$，是如下商空间

$$\left(\coprod_{k\geq 0}\mathrm{Emb}(\coprod_k\mathbb{R}^d,M)\underset{\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})}{\times} C_\Sigma(\coprod_k\mathbb{R}^d;P)\right)\Big/\sim$$

其中，$(e:\coprod_m\mathbb{R}^d\to M,\ \ \xi)\sim(e':\coprod_n\mathbb{R}^d\to M,\ \ \xi')$，若存在单射 $k\hookrightarrow m$和 $k\hookrightarrow n$，使得由此诱导的包含映射 $i_1:\coprod_k\mathbb{R}^d\to\coprod_m\mathbb{R}^d$和 $i_2:\coprod_k\mathbb{R}^d\to\coprod_n\mathbb{R}^d$满足

$$\xi\subset Im\, i_1,\xi'\subset Im\, i_2\qquad e\circ i_1=e'\circ i_2,\qquad \text{and } e_*(\xi)=e'_*(\xi').$$

这里，$e_*$ 表示由余维零嵌入所诱导的、带有可求和标签的构形映射，如（4.1）中所述。由于 Fulton-MacPherson 构形空间对余维零嵌入具有函子性，我们得到一个映射

$$p: D_\Sigma(M;P)\to C_\Sigma(M;P) \tag{4.2}$$

它将一个类 $(e,\xi)$ 映到构形 $e_*(\xi)$。根据定义，该映射不依赖于代表元 $(e,\xi)$ 的选取。空间 $D_\Sigma(M;\ P)$ 上有一个偏序，规定若对于这些类的某个代表元，$e(\xi)=e'(\xi')$ 且 $Im\, e\supset Im\, e'$，则 $(e,\xi)<(e',\xi')$。我们将 $D_\Sigma(M;\ P)_\bullet$ 记为偏序集$D_\Sigma(M;\ P)$的半单纯神经。

根据偏序的定义，映射 $p$ 诱导出一个增广 $D_\Sigma(M;\ P)_\bullet\to C_\Sigma(M;\ P)$。特别地，$D_\Sigma(M;\ P)_\bullet$ 是一个增广拓扑旗复形（定义 2.2），因为 $n$-单形空间确实是这样一类顶点的 $(n+1)$-元组所构成的开子空间：这些顶点在增广映射下的像相同；而一个元组构成 $n$-单形的条件，只需检查两两之间的序关系。以下可视化或许有助于理解空间$|D_\Sigma(M;\ P)_\bullet|$中的元素：任意一点都可以表示为一个元组

$$((e_0,\xi_0)<\cdots<(e_k,\xi_k);t_0,\dots,t_k)\qquad t_0\cdots+t_k=1.$$

偏序集构造意味着，对于这样的元组 $e_0(\xi_0)=\cdots=e_k(\xi_k)$ 和 $Im\, e_0\supset\cdots\supset Im\, e_k$。我们可以将其直观地看作构形 $e_i(\xi_i)$ 在 $M$ 中的一组逐渐缩小的嵌入圆盘。每组嵌入圆盘的权重之和为 1；当与某个嵌入集合相关联的权重趋于零时，该集合便消失。等价关系保证我们总能为这组圆盘找到一个代表元，使得每个分支中至少包含该构形的一个粒子。参见图3。

**命题 4.13**。 映射 $p{:}D_\Sigma(M;\ P)\to C_\Sigma(M;\ P)$ 诱导出一个弱同伦等价

$$|D_\Sigma(M;P)_\bullet|\to C_\Sigma(M;P).$$

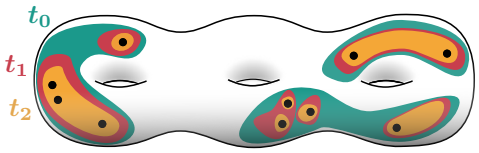



FIGURE 3. $|D_\Sigma(F_3)|$中的一个 2-单形元素。

上述结论的证明将直接应用定理 2.3 [GRW14，定理 6.2]。

证明。 如前所述，增广半单纯空间 $p\colon D_\Sigma(M;\,P)_\bullet \to C_\Sigma(M;\,P)$ 是一个增广拓扑旗复形。我们需要验证定理 2.3 的假设均得到满足：

(i) 为了说明 $p\colon D_\Sigma(M;\,P) \to C_\Sigma(M;\,P)$ 具有局部截面，取 $f\colon D^n \to C_\Sigma(M;\,P)$ 以及一点 $(e,\xi) \in p^{-1}(f(x))$。那么， $e$ 的像是 $M$ 的一个开子集，且包含 $f(x)$；因此，由包含在 Im $e$ 中的构形组成的子空间 $V$ 是 $C_\Sigma(M;\,P)$ 的一个开子集，且包含 $f(x)$。令 $U = f^{-1}(V)$，它是 $D^n$ 中 $x$ 的一个开邻域。那么，映射 $F\colon U \to D_\Sigma(M;\,P)$ 将 $y$ 映至 $(e, e^{-1}(f(y)))$，满足 $p\circ F = f|_U$，且 $F(x) = (e,\xi)$。(ii) $p\colon D_\Sigma(M;\,P) \to C_\Sigma(M;\,P)$ 是满射，因为任意构形 $\xi$ 都有一个管状邻域 $e$。于是，$(e, e^{-1}(\xi))$ 是 $D_\Sigma(M;\,P)$ 中的一个元素，且属于 $\xi$ 的原像。(iii) 对于一个构形 $\xi \in C_\Sigma(M;\,P)$ 和一个非空有限子集 $\{(e_1,\xi_1)\ldots,(e_k,\xi_k)$ }

在其原像中，我们总能找到 $e$ 一个包含 $e_i(\xi_i)$、包含于所有 $e_i$ 且属于 $\mathbb{R}^d$ 的嵌入。例如，可以取 $e$ 为构形中各点周围的小开圆盘。

于是，根据定理 2.3，映射 $|D_\Sigma(M;\,P)_\bullet| \to C_\Sigma(M;\,P)$ 是一个弱同伦等价。□

空间 $D_\Sigma(M;\,P)$ 配备了 $\mathrm{Diff}_\partial(M)$ 的一个作用：对于 $\psi \in \mathrm{Diff}_\partial(M)$、一个嵌入 $e\colon \coprod_k \mathbb{R}^d \hookrightarrow M$，以及 $\xi = (x_1,\ \ldots\ldots,\ x_k;\ p_1,\ \ldots\ldots,\ p_k)$，这是一个 $\coprod_k \mathbb{R}^d$ 中取值于 $P$ 的点配置，我们定义 $\phi\cdot[e,\xi] = [\phi\circ e,\xi]$。不难验证，该作用定义良好，并保持 $D_\Sigma(M;\,P)$ 中的偏序。根据定义可直接得出，增广映射 $p\colon D_\Sigma(M;\,P) \to C_\Sigma(M;\,P)$ 是 $\mathrm{Diff}_\partial(M)$-等变的。

由于 $D_\Sigma(M;\,P)$ 中的偏序与 $\mathrm{Diff}_\partial(M)$-作用相容，它在 $D_\Sigma(M;\,P)\times_{\mathrm{Diff}_\partial(M)} \mathrm{Emb}(M,\mathbb{R}^\infty)$ 上诱导出一个纤维逐点偏序，其底空间为 $B\mathrm{Diff}_\partial(M)$。于是，偏序集 $D_\Sigma(M;\,P)\times_{\mathrm{Diff}_\partial(M)} \mathrm{Emb}(M,\mathbb{R}^\infty)$ 的半单纯神经恰好是纤维逐点半单纯神经 $D_\Sigma(M;\,P)_\bullet \times_{\mathrm{Diff}_\partial(M)} \mathrm{Emb}(M,\mathbb{R}^\infty)$。

**推论 4.14**。 映射 $D_\Sigma(M;\ \ P) \to C_\Sigma(M;\ \ P)$ 诱导出一个弱同伦等价

$$|D_\Sigma(M;P)_\bullet \underset{\mathrm{Diff}_\partial(M)}{\times} \mathrm{Emb}(M,\mathbb{R}^\infty)| \longrightarrow C_\Sigma(M;P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(M).$$

上述结论直接由 $D_\Sigma(M;\,P)\times_{\mathrm{Diff}_\partial(M)} \mathrm{Emb}(M,\mathbb{R}^\infty)$ 上偏序的定义以及命题 4.13 得出。

在证明这一情形下的解耦时，推论 4.14 使我们能够使用圆盘模型来描述带有部分可求和标签的构形空间。本节最后，我们将引入另一种圆盘与构形空间，它们将在解耦中用到。

**定义 4.15.** 设 $Z$ 是一个带基点的 $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$-空间，且 $M$ 是一个维数为 $n > d$的光滑紧流形。$M$ 中标签属于

$Z$的管状构形空间 -管状构形，记作 $D^d(M;\,Z)$，是如下商空间

$$\left(\coprod_{k\geq 0}\mathrm{Emb}(\coprod_k\mathbb{R}^d,M)\underset{\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R})}{\times}Z^k\right)\Big/\sim$$

其中 $(e_1,\dots,e_k;\,z_1,\dots,z_k)\sim(e_1,\dots,e_{k-1};\,z_1,\dots,z_{k-1})$，只要 $z_k$是 $Z$的基点，且 $e_i:\mathbb{R}^d\hookrightarrow M$和 $z_i\in Z$。

$D^d(M;\,Z)$与 $D(M;\,Z)$这两个空间（定义 4.10）的区别在于，对于前者，我们考察的嵌入圆盘维数低于环境流形$M$的维数。

**引理 4.16**。设 $n>d$，并记 $E_{d,n}$ 为定向格拉斯曼流形 $Gr^+(d,n)$上的典范$\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R})$-丛的全空间。原点的包含映射$i:*\hookrightarrow\mathbb{R}^d$ 诱导出一个弱等价

$$i^*:D^d(\mathbb{R}^n;Z)\xrightarrow{\simeq}C(M;(E_{d,n})_+\underset{\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R})}{\wedge}Z).$$

这一结果应视为引理 4.11 在 $\mathbb{R}^n$ 中 $d$-管状构形情形下的类比。

证明。回忆一下，$\mathrm{Emb}(\coprod_k\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R}^n)\ \simeq\ \widetilde{C}_k(\mathbb{R}^n)\ \times(E_{d,\ n})^k$，其中到 $\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^n)$ 的映射由原点的包含映射诱导。于是我们得到弱等价

$$\mathrm{Emb}(\coprod_k\mathbb{R}^d,M)\underset{(\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R}))}{\times}Z^k\xrightarrow{\simeq}(\widetilde{C}_k(\mathbb{R}^n)\times(E_{d,n})^k)\underset{(\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R}))}{\times}Z^k.$$

这些映射保持等价关系，因此诱导出一个映射

$$i^*:D^d_\Sigma(\mathbb{R}^n;P)\xrightarrow{\simeq}C(M;(E_{d,n})_+\underset{\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R})}{\wedge}Z).$$

证明随后沿用 [MT14 的命题 2.7 和 2.8] 中的论证即可。 □

对于 $d$-管状构形的情形，我们还需要定义 4.12 的一个类似版本。

**定义 4.17**。设 $M$ 是一个维数为 $n>d$ 的光滑紧流形。$M$ 中带有 $P$ 内可求和标签的空间 $d$- 被包围构形 记为 $D^d_\Sigma(M;\,P)$，它是如下商空间

$$\left(\coprod_{k\geq 0}\mathrm{Emb}(\coprod_k\mathbb{R}^d,M)\underset{\Sigma_k\wr\mathrm{GL}_d^+(\mathbb{R})}{\times}C_\Sigma(\coprod_k\mathbb{R}^d;P)\right)\Big/\sim$$

其中，$(e:\coprod_m\mathbb{R}^d\to M,\ \ \xi)\sim(e':\coprod_n\mathbb{R}^d\to M,\ \ \xi')$，当且仅当存在单射 $k\hookrightarrow m$和 $k\hookrightarrow n$，使得由此诱导的包含映射 $i_1:\coprod_k\mathbb{R}^d\to\coprod_m\mathbb{R}^d$和 $i_2:\coprod_k\mathbb{R}^d\to\coprod_n\mathbb{R}^d$满足

$$\xi\subset Im\,i_1,\ \xi'\subset Im\,i_2\text{ and }e\circ i_1=e'\circ i_2.$$

我们通过如下规定为该空间赋予偏序：若存在这些等价类的某个代表元，使得 $e(\xi)\ =\ e'(\xi')$且 $Im\,e\ \supset\ Im\,e'$，则 $(e,\xi)\ <(e',\xi')$。我们将该偏序集的半单纯神经记为 $D^d_\Sigma(M;\,P)_\bullet$。

4.3. **解耦定理**。本节证明本文的主定理，即关于 $C_\Sigma(F_{g,\ b};\ P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b})$ 的一个解耦结果。与第3节一样，我们将 $\mathrm{Emb}(F_{g,\ b},\ \mathbb{R}^\infty)$ 空间作为 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b})$ 的模型。对于每个 $g$ 和 $b\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\tau_\Sigma\times\varepsilon_\Sigma:D_\Sigma(F_{g,b};P)\times\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)&\longrightarrow\mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)\times D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)\\((e:\coprod_k\mathbb{R}^2\hookrightarrow F_{g,b},\xi),f:F_{g,b}\hookrightarrow\mathbb{R}^\infty)&\longmapsto(f,(f\circ e,\xi)).\end{aligned}$$

该映射相对于定义域上的对角作用以及值域 $\mathrm{Emb}(F_{g,\,b},\,\mathbb{R}^\infty)$ 上的作用是 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,b})$-等变的，并且保持偏序集结构。因此它诱导出一个映射 $\tau_\Sigma \times \varepsilon_\Sigma$，使其适合以下图表

$$\begin{array}{ccc} |D_\Sigma(F_{g,b};P)_\bullet \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)| & \xrightarrow{\tau_\Sigma\times\varepsilon_\Sigma} & |B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_\bullet| \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ C_\Sigma(F_{g,b};P) \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty) & & B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times |D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_\bullet| \end{array}$$

**定理 4.18**。该映射

$$\tau_\Sigma \times \varepsilon_\Sigma : |D_\Sigma(F_{g,b};P)_\bullet \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty)| \to |B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_\bullet|$$

在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上诱导同调同构。 –

定理 4.18 和推论 4.14 蕴含定理 F。

上述证明将通过证明 $\tau_\Sigma \times \varepsilon_\Sigma$ 在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上是逐层同调同构的半单纯空间映射来完成，随后再证明这意味着几何实现上也成立，正如 [GRW17 第 4] 节所做的那样。为此，我们将使用第 2.2 节回顾的谱序列、引理 4.11、定理 3.2，以及针对带标签互不碰撞配置空间的解耦结果。

在整个证明过程中，牢记图 4 将会有所帮助。

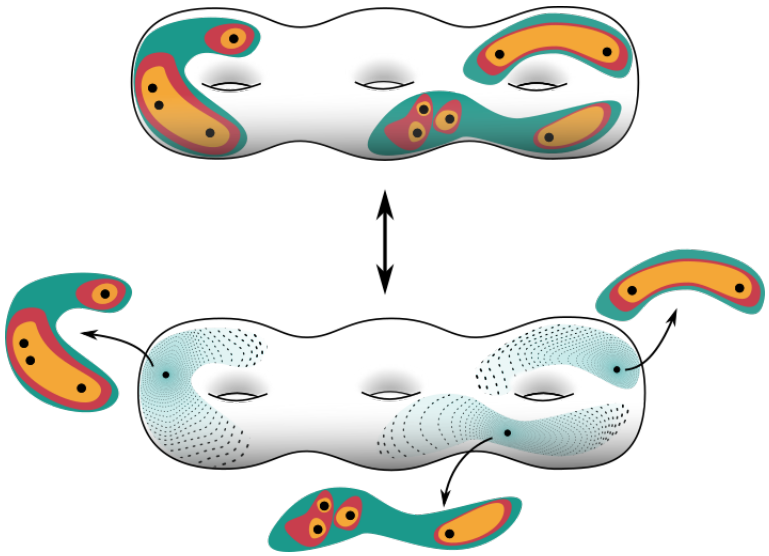


FIGURE 4. 式 (4.3) 在 $D_\Sigma(F_3;\,P)_2$ 的一个元素（上图）与 $D(F_3,\mathcal{Z}_2)$（下图）之间建立了对应关系。虚线区域表示嵌入的 $\mathbb{R}^2$，箭头表示其标签。

*定理 4.18* 的证明。我们首先证明

$$D_\Sigma(F_{g,b};P)_\bullet \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_\bullet$$

在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上逐级诱导同调同构。 –

令 $\mathcal{Z}_p$ 为 $D_\Sigma(\mathbb{R}^2;\,P)_p$ 的子空间，由满足 $e_0 = \mathrm{id}$ 的元组 $e = ((e_0,\,\xi_0)\ldots,\,(e_p,\,\xi_p))$ 构成。这个空间以空配置上的唯一等价类为基点。我们

证明存在一个 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b})$-等变同胚

$$D_\Sigma(F_{g,b};P)_p \cong D(F_{g,b};\mathcal{Z}_p) \tag{4.3}$$

其中，$D(F_{g,b};\mathcal{Z}_p)$ 是标签取自 $\mathcal{Z}_p$ 的管状构形空间（见定义 4.10）。令 $[(e_0,\xi_0) < \cdots < (e_p,\xi_p)]$ 表示 $D_\Sigma(F_{g,b};\ P)_p$ 中的一个元素。根据定义，$e_0(\xi_0) = \cdots = e_p(\xi_p)$ 且 $Im\, e_0 \supset \cdots \supset Im\, e_p$。记 $i_j\colon \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \coprod_k \mathbb{R}^2$ 为包含映射 $\{j\} \hookrightarrow \{1,\dots,k\}$ 所诱导的映射，其中 $1 \le j \le k$。映射 $D_\Sigma(F_{g,b};\ P)_p \to D_\Sigma(F_{g,b};\ \mathcal{Z}_p)$ 将一个序列 $((e_0,\xi_0)\dots,(e_p,\xi_p))$ 映射为由嵌入 $e_0$ 以及与第 $j$ 个分量 $\mathbb{R}^2 \subset \coprod_k \mathbb{R}^2$ 相关联的标签所表示的等价类，其标签为

$$((id,\xi_0),((e_0\circ i_j)^{-1}\circ e_1,\xi_1)\dots,((e_0\circ i_j)^{-1}\circ e_p,\xi_p)) \in \mathcal{Z}_p.$$

关于此同胚的直观解释，请参见图 4。显式构造此映射的逆映射并验证它是 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b})$-等变同胚并不困难。

由引理 4.11，原点的包含映射定义了一个 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b})$-等变映射 $D(F_{g,\ b};\mathcal{Z}_p) \to C(F_{g,\ b};\ \mathcal{Z}_p)$，它是 $\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b})$-空间之间的弱等价。结合同胚 (4.3)，可得

$$D_\Sigma(F_{g,b};P)_p \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{\simeq} C(F_{g,b};\mathcal{Z}_p) \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty). \tag{4.4}$$

类似地，我们现在证明

$$D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_p \xrightarrow{\simeq} C(\mathbb{R}^\infty;(E\mathrm{SO}(2))_+ \underset{\mathrm{SO}(2)}{\wedge} \mathcal{Z}_p). \tag{4.5}$$

用与上文相同的论证，我们得到一个同胚

$$D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_p \cong D^2(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{Z}_p)$$

其中，$D^2(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{Z}_p)$ 是具有 $\mathcal{Z}_p$ 中标签的 $d$-管状构形空间，如定义 4.15 所述。由引理 4.16，原点的包含映射诱导出一个弱同伦等价 $D^2(\mathbb{R}^\infty;\mathcal{Z}_p) \simeq C(\mathbb{R}^\infty;(E\mathrm{SO}(2))_+ \wedge_{\mathrm{SO}(2)} \mathcal{Z}_p)$，由此可得同伦等价 (4.5)。

于是我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} D_\Sigma(F_{g,b};P)_p \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{\simeq} & C(F_{g,b};\mathcal{Z}_p) \underset{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b})}{\times} \mathrm{Emb}(F_{g,b},\mathbb{R}^\infty) \\ \downarrow{\scriptstyle (\tau_\Sigma\times\varepsilon_\Sigma)_p} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\times\varepsilon} \\ B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_p & \xrightarrow{\simeq} & B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \times C(\mathbb{R}^\infty;E\mathrm{SO}(2)_+ \underset{\mathrm{SO}(2)}{\wedge} \mathcal{Z}_p) \end{array}$$

其中，上方和下方的映射分别由 (4.4) 和 (4.5) 给出，且都是弱等价。根据带有 $Z = \mathcal{Z}_p$ 的定理 3.2，右侧映射在 $\le \frac{2}{3}g$ 度诱导同调同构。因此，映射 $(\tau_\Sigma \times \bar{\varepsilon}_\Sigma)_p$ 也如此。

这意味着，与半单纯空间 $X_\bullet = D_\Sigma(F_{g,\ b};\ P)_\bullet \times_{\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b})} \mathrm{Emb}(F_{g,\ b},\ \mathbb{R}^\infty)$ 以及 $Y_\bullet = B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\ b}) \times D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;\ P)_\bullet$ 相关联的谱序列之间的映射

$$\begin{array}{ccc} E^1_{p,q} = H_q(X_p) & \Longrightarrow & H_{p+q}(|X_\bullet|) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_\Sigma\times\varepsilon_\Sigma} \\ E'^1_{p,q} = H_q(Y_p) & \Longrightarrow & H_{p+q}(|Y_\bullet|). \end{array}$$

在所有 $q \le \frac{2}{3}g$ 下，它在 $E^1$ 页上诱导出一个同构，因此右侧的映射在这些次数上也是同构。□

与带标号构型空间的情形一样，适用于可求和标签的解耦定理使我们能够推导出同调稳定性结果。

**推论 4.19**。 对于 $b \geq 1$，沿边界粘合 $F_{1,\,1}$ 所诱导的映射

$$C_\Sigma(F_{g,b}; Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,b}) \to C_\Sigma(F_{g+1,b}; Z)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+1,b})$$

在次数 $\leq \frac{2}{3}g$ 上诱导出一个同调同构。 –

证明与推论 3.4 的证明采用相同的论证。

**4.4. 带部分可求和标签的曲面上的构形幺半群**。本节将证明，定理 4.18 蕴含带部分可求和标签的曲面上构形幺半群的群完备化具有一种分裂，与推论 3.7 类似。

与第 3.2 节中一样，沿着部分边界粘合两个曲面 $F_{g,\,1}$ 和 $F_{h,\,1}$ 定义了一个结合的乘法

$$B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1}) \times B\mathrm{Diff}_\partial(F_{h,1}) \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+h,1}).$$

对于一个带单位元的带框架的偏 2-幺半群 $(P,0)$，上文所述的微分同胚群与空间 $E\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})$ 上的运算，连同固定的识别 $F_{g+h,1} = F_{g,1}\#_\partial F_{h,1}$，也在 Borel 构造上诱导出结合乘法

$$\mu\colon C_\Sigma(F_{g,1};\, P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1}) \times C_\Sigma(F_{h,1};\, P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{h,1}) \to C_\Sigma(F_{g+h,1};\, P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g+h,1}).$$

与第 3 章中的构造类似，我们将相应的 Borel 构造记为

$$MC_\Sigma(P)_g = C_\Sigma(F_{g,1}; P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1}).$$

这一乘法使 $MC_\Sigma(P) = \coprod_{g\geq 0} MC_\Sigma(P)_g$ 成为一个拓扑幺半群，我们称之为 $P$ 中的带可求和标签的构形幺半群 。

另一方面，偏序集 $D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;\, P)$ 可以采用与 Segal 定义出一个与 $C(\mathbb{R}^\infty,\ X)$ 同伦等价的拓扑幺半群时相同的策略，构造成一个偏序拓扑幺半群；这一策略我们在第 3.2 节中回顾过。

**推论 4.20**。 对于任意道路连通的带框架偏部分2-幺半群，且其单位元为 $P$，存在一个同伦等价

$$\Omega B(MC_\Sigma(P)) \simeq \Omega B\left(\coprod_g B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})\right) \times \Omega B\,|D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty; P)_\bullet|.$$

上述结果的证明包括构造一串幺半群之间的 zig-zag

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{g\geq 0} |D_\Sigma(F_{g,1}; P)_\bullet/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})| & \xrightarrow{\tau_\Sigma \times \varepsilon_\Sigma} & \coprod_{g\geq 0} B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1}) \times |D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty; P)_\bullet| \\ \simeq\big\downarrow & & \\ MC_\Sigma(P) & & \end{array} \tag{4.6}$$

竖直箭头由推论 4.14 导出，水平箭头则由解耦映射导出。我们利用第 2.1 节中回顾过的偏序集一般构造，描述顶端空间上的幺半结构。

推论 *4.20* 的证明。 空间 $\coprod |D_\Sigma(F_{g,\,1};\, P)_\bullet/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,\,1})|$ 同伦等价于偏序集的半单纯神经的几何实现

$$\coprod_{g\geq 0} D_\Sigma(F_{g,1}; P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})$$

其偏序按分量定义。如前所述，沿边界的一部分粘合曲面可将 $\coprod_{g\geq 0} D_\Sigma(F_{g,\ 1};\ P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial($ $F_{g,\ 1})$ 构成一个偏序拓扑幺半群。此外，可以验证增广 $D_\Sigma(F_{g,\ 1};\ P)_\bullet \to C_\Sigma(F_{g,\ 1};\ P)$ 诱导出一个幺半群映射。结合引理 2.1，这给出了一个幺半群映射

$$\coprod_{g\geq 0} |D_\Sigma(F_{g,1};P)_\bullet /\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})| \to MC_\Sigma(P). \tag{4.7}$$

另一方面，解耦映射给出了一个拓扑幺半群之间的映射

$$\coprod_{g\geq 0} |D_\Sigma(F_{g,1};P)_\bullet /\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1})| \to \coprod_{g\geq 0} B\mathrm{Diff}_\partial(F_{g,1}) \times |D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_\bullet| \tag{4.8}$$

正如引理 3.8 中所述。

剩下的工作是验证映射 (4.7) 和 (4.8) 在群完备化上诱导同伦等价。由于群完备化是环空间，因此它们是简单空间；根据怀特海德定理，只需证明这些映射在群完备化上诱导同调等价。所有幺半群在同伦意义下均为交换的，因此可以应用群完备化定理 [MS76]。由此可知，只需证明极限空间上的诱导映射

$$|D_\Sigma(F_\infty;P)_\bullet /\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_\infty)| \to C_\Sigma(F_\infty;P)/\!/\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) \tag{4.9}$$

$$|D_\Sigma(F_\infty;P)_\bullet /\!/ \mathrm{Diff}_\partial(F_\infty)| \to B\mathrm{Diff}_\partial(F_\infty) \times |D^2_\Sigma(\mathbb{R}^\infty;P)_\bullet| \tag{4.10}$$

是同调等价。根据推论 4.14，第一个映射是弱等价；而根据定理 4.18 和推论 4.19，第二个映射是同调等价。□

## References


[AF15] David Ayala 和 John Francis, *Factorization homology of topological manifolds*, 《拓扑学杂志》8 (2015), 第 4 期, 1045–1084。MR 3431668[AFT17] David Ayala、John Francis 和 Hiro Lee Tanaka, *Factorization homology of stratified spaces* **23** 2017 1, 293 362 , 《Selecta Mathematica》 3595895 （新系列）（），第 – 期。MR[ 81] *The manifold of embeddings of a closed manifold*

BF E. Binz 和 H. R. Fischer, , 《数学物理中的微分几何方法》（国际会议论文集，克劳斯塔尔工业大学，克劳斯塔尔-采勒费尔德，1978），《物理学讲义》，第 139 卷，Springer，柏林-纽约，1981，附有 P. Michor 的附录，第 310–329 页。[B¨od 87] C-F B¨odigheimer, *Stable splittings of mapping spaces*, 《代数拓扑》，Springer，1987，第 174–187 页。[Bol12] Søren K Boldsen, *Improved homological stability for the mapping class group with integral or twisted coefficients* **270** 2012 1 2, 297 329 , 《数学杂志》（），第 — 期。[Bon22] Luciana Basualdo Bonatto, *Decoupling decorations on moduli spaces of manifolds*, 《剑桥哲学学会数学论文集》（2022年），1–36。[BT01] Carl-Friedrich B ¨ *Stripping and splitting decorated mapping class groups* 1998 odigheimer 和 Ulrike Tillmann, , 《同伦论中的上同调方法》（贝拉泰拉，），《数学进展》，第 196 卷，Birkhäuser，巴塞尔，2001，第 47–57 页。[ERW19] Johannes Ebert 和 Oscar Randal-Williams, *Semisimplicial spaces*, 《代数与几何拓扑》19 (2019)，第 4 期，2099–2150。[GRW10] Sø ren Galatius 和 Oscar Randal-Williams, *Monoids of moduli spaces of manifolds*, 《几何与拓扑》14 (2010)，第 3 期，1243–1302。MR 2653727[GRW14] Søren Galatius 和 Oscar Randal-Williams, *Stable moduli spaces of high dimensional manifolds* **212** 2014 2, 257 377 , 《数学学报》（），第 – 期。 3207759 MR[ 17] GRW , *Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. II*, 《数学年刊》（2）186 (2017)，第 1 期，127–204。[GRW18] , *Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. I*, 《美国数学会杂志》31 (2018)，第 1 期，215–264。[GTMW09] Sø ren Galatius、Ulrike Tillmann、Ib Madsen 和 Michael Weiss, *The homotopy type of the cobordism category* **202** 2009 2, 195 239 , 《数学学报》（），第 – 期。[Gue95] Martin A. Guest, *The topology of the space of rational curves on a toric variety*, 《数学学报》174 (1995)，第 1 期，119–145。MR 1310847[Han09] Elizabeth Hanbury, *Homological stability of non orientable mapping class groups with marked points* **137** 2009 1, 385 392 , 《美国数学会会刊》（），第 – 期。

[Har85] John L. Harer, *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*, 《数学年刊》（2）121 (1985)，第 2 期，215–249。[Har90] ———, *Stability of the homology of the moduli spaces of Riemann surfaces with spin structure* **287** 1990 334 , 《数学年刊》（），第 2 期，323–。[Iva87] N. V. Ivanov, *Complexes of curves and Teichmüller modular groups*, 《数学科学进展》42 (1987)，第 3(255) 期，49–91，255。[Iva89] , *Stabilization of the homology of Teichmüller modular groups*, 《代数与分析》1 (1989)，第 3 期，110–126。[Iva93] Nikolai V. Ivanov, *On the homology stability for Teichmüller modular groups: closed surfaces and twisted coefficients*, 《映射类群与黎曼曲面的模空间》（哥廷根，1991/美国华盛顿州西雅图，1991），《当代数学》，第 150 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993，第 149–194 页。[Kal01] Sadok Kallel, *Spaces of particles on manifolds and generalized Poincaré dualities*, 《数学季刊》52 (2001)，第 1 期，45–70。MR 1820902[KM16] Alexander Kupers 和 Jeremy Miller, *Homological stability for topological chiral homology of completions* **292** 2016 755 827 3464033 , 《数学进展》（），–。MR [Lur09] Jacob Lurie, *On the classification of topological field theories*, 《数学最新进展，2008》，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2009，第 129–280 页。MR 2555928[May72] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, 《数学讲义》，第 271 卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1972。MR 0420610[McD75] Dusa McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, 《拓扑学》14 (1975)，第 1 期，91–107。[Mil86] Edward Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, 《微分几何杂志》24 ( 1986 1, 1 14 857372 )，第 – 期。MR MS D. McDuff 和 G. Segal, [ 76] *Homology fibrations and the "group-completion" theorem*, 《数学发明》31 (1975/76)，第 3 期，279–284。MR 402733[MT14] Richard Manthorpe 和 Ulrike Tillmann, *Tubular configurations: equivariant scanning and splitting* 2 **90** 2014 3, 940 962 3291808 , 《伦敦数学学会杂志》（）（），第 – 期。MR [MW07] Ib Madsen 和 Michael Weiss, *The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture* 2007 843 941 , 《数学年刊》（），–。[Pal60] Richard S. Palais, *Extending diffeomorphisms*, 《美国数学会会刊》11 (1960)，274–277。MR 117741[RW14] Oscar Randal-Williams, *Homology of the moduli spaces and mapping class groups of framed r-Spin and Pin surfaces* **7** 2014 1, 155 186 , 《拓扑学杂志》（），第 – 期。[RW16] , *Resolutions of moduli spaces and homological stability*, 《欧洲数学会杂志》18 ( 2016)，第 1 期，1–81。[Sal01] Paolo Salvatore, *Configuration spaces with summable labels*, 《同伦论中的上同调方法》（贝拉泰拉，1998），《数学进展》，第 196 卷，Birkhäuser，巴塞尔，2001，第 375–395 页。MR 1851264[Seg68] Graeme Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, 《IHÉS 数学出版物》34 (1968)，105–112。[Seg73] , *Configuration-spaces and iterated loop-spaces*, 《数学发明》21 (1973)，213–221。MR 331377[Seg79] , *The topology of spaces of rational functions* **143** 1979 1 2, , 《数学学报》39 72 533892 （），第 – 期。MR[Sin04] Dev P. Sinha, *Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces*, 《Selecta Mathematica》（新系列）10 (2004)，第 3 期，391–428。MR 2099074[SW03] Paolo Salvatore 和 Nathalie Wahl, *Framed discs operads and Batalin-Vilkovisky algebras*, 《数学季刊》 **54** 2003 2, 213 231 1989873 （），第 – 期。MR Til Ulrike Tillmann, [ 00] *Higher genus surface operad detects infinite loop spaces*, 《数学年刊》317 ( 2000 3, 613 628 1776120 )，第 – 期。MR Zee E. C. Zeeman, [ 57] *A proof of the comparison theorem for spectral sequences*, 《剑桥哲学学会会刊》53 (1957)，57–62。MR 84769

*Email address*: basualdo@mpim-bonn.mpg.de
Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany