arXiv:2301.00094v1 [math.CV] 31 Dec 2022

关于奇异复空间上 Nadel-Lebesgue 乘子理想层的 Skoda 定理及弱凯勒-爱因斯坦度量的正则性

李振谦

摘要。本文将分别通过 Ricci 曲率的局部消失性、正性以及 ^{2}-方程的 L^2 可解性来刻画正则点，并证明适用于任意纯维数（约化）复空间上与多重次调和（psh）函数相关的 Nadel-Lebesgue 乘子理想层的 Skoda 定理。作为推论，我们证明，奇异 $\mathbb{Q}$-Fano／Calabi-Yau／一般型簇上的任意弱凯勒-爱因斯坦度量都不可能是光滑的；此外，一般而言，不存在这样的奇异正规 Kähler 复空间，使得其 Kähler 度量在正则轨迹上是 Kähler-爱因斯坦度量。

1. 引言

除非另有说明，本文始终假设所有复空间都是既约且仿紧的；关于复空间理论的基本参考资料，我们主要参阅 [19, 40] 。

1.1. 乘子理想的局部消失定理。计算乘子理想的层的高阶直接像的局部消失定理，在复几何和代数几何中发挥着重要作用；借助该定理，可以推出乘子理想的许多局部/整体性质，例如乘子理想的限制定理、Nadel 消失定理和 Skoda 定理等（参见 [10, 28], 等）。

设 (X,ω) 是一个纯维数为 n 的 Hermitian 复空间，且 $\varphi \in \mathrm{QPsh}(X)$ 是 X 上的一个拟多重次调和函数。于是，我们可以根据关于 Lebesgue 测度 dV_ω 的可积性，在 X 上定义与 φ 相关的 Nadel-Lebesgue 乘子理想层 $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi)$（见定义 2.2）；当 X 光滑时，该层与 Nadel 引入的通常乘子理想层 $\mathscr{I}(\varphi)$ 一致。设 $\pi : X \to X$ 是 X 的雅可比理想 $\mathcal{J}\mathrm{ac}_X$ 的任意对数消解，则可得 Nadel-Lebesgue 乘子理想层

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi) = \pi_*\left(O_{\widetilde{X}}(\widehat{K}_{\widetilde{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi\circ\pi)\right).$$

b 当 X 光滑时，Mather 不一致除子 $K^{\widetilde{X}/X}$ 不过是 X 在 X 上的相对典范除子 $K^{\widetilde{X}/X} := K_{\widetilde{X}} - \pi^* K_X$ 。于是，我们有如下乘子理想的局部消失定理（参见 [28, 37]）

$$R^q\pi_*\left(O_{\widetilde{X}}(K_{\widetilde{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi\circ\pi)\right) = 0,\ \forall q \geq 1.$$

因此，自然会问，我们是否能在奇异情形下建立类似的局部消失结果，即，

$$R^q\pi_*\left(O_{\widetilde{X}}(\widehat{K}_{\widetilde{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi\circ\pi)\right) = 0,\ \forall q \geq 1.$$

本文的目标之一，是研究 Nadel-Lebesgue 乘子理想背景下的局部消失定理。具体而言，基于 Nadel-Lebesgue

日期：2023年1月3日。2010年数学主题分类。14F18、32L20、32Q20、32S05、32U05、32W05。关键词。乘子理想层、多重次调和函数、消失定理、$\overline{\partial}$-方程、Skoda 的 L^2 除法定理、凯勒-爱因斯坦度量。电子邮箱：lizhenqian@amss.ac.cn。

乘子理想的 Skoda 除法，我们将证明，在某种意义上，这类 Nadel-Lebesgue 乘子理想的局部消失定理实际上等价于环境空间的光滑性；详细陈述见定理 1.3。

1.2. 利用 L^2 估计证明 Skoda 理想生成定理及其在 $\overline{\partial}$ 方程中的应用。Skoda 在多复变函数领域的经典著作[44, 45], 中，基于 L^2 方法，针对给定的一组全纯函数或截面，建立了关于理想生成的解析判据。在 Skoda 理想生成定理的原始证明中，除了采用泛函分析中的标准技巧来论证先验估计并求解带 L^2 估计的 ∂ 方程外，他还发展了特殊的解析技巧：将 ∂ 算子的定义域限制在通常 L^2 空间的适当子空间上，并对这个新算子导出 L^2 估计。

作为应用，Skoda 定理是证明交换代数中的 Briançon-Skoda 定理 [6, 27, 35] 以及代数几何中有效版零点定理 [13]的关键要素。此外，Skoda 理想生成的一个特殊情形，在 Siu 关于多重属数的变形不变性 [42] 和典范环的有限生成性 [43]的研究中也发挥了关键作用。多复变函数、复代数几何与偏微分方程之间的交互一直是一个引人关注的研究领域。为方便读者，我们在下文陈述 Skoda 的一个 L^2 除法定理版本。

定理 1.1。（[45], 定理 2）。设 (X, ω) 是一个 n 维弱拟凸 Kähler 流形，且 $\varphi \in \mathrm{Psh}(X)$，并且 $g : E \to Q$ 是厄米全纯向量丛之间的满射态射，其中 $r_E = E$ 的秩，$r_Q = Q$ 的秩。假设 E 在 X 上中野半正，且 $L \to X$ 是一个厄米线丛，使得

$$\sqrt{-1}\Theta(L) - \rho\sqrt{-1}\Theta(\det Q) \geq 0$$

对于 $\rho = \min\{n, r_E - r_Q\} + \varepsilon$ 以及某个 $\varepsilon > 0$。

那么，对每个满足下式的 $f \in H^0(X, Q \otimes K_X \otimes L)$,

$$\int_X \langle \widetilde{gg^*} f, f\rangle \cdot (\det gg^*)^{-\rho-1} e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty,$$

存在 $h \in H^0(X, E \otimes K_X \otimes L)$，使得 $f = g \cdot h$，且

$$\int_X |h|^2 \cdot (\det gg^*)^{-\rho} e^{-2\varphi} dV_\omega \leq \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \int_X \langle \widetilde{gg^*} f, f\rangle \cdot (\det gg^*)^{-\rho-1} e^{-2\varphi} dV_\omega.$$

由定理 1.1 可知，若考虑伪凸域上的平凡丛 E、Q 和 L，那么结合 Guan-Zhou [21], 所证明的乘子理想层的强开性，我们可以用乘子理想的语言重新表述定理 1.1（另见注 A.3）：

定理 1.2. 设 X 是一个 n 维复流形，$\varphi \in \mathrm{QPsh}(X)$ 是一个拟多重次调和函数，且 $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ 是一个具有 r 个（局部）生成元的非零理想层。那么，由此可得

$$\mathscr{I}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}), \ \forall k \geq \min\{n, r\},$$

其中 $\varphi_{\mathfrak{a}} := \frac{1}{2}\log(\sum_i |g_i|^2)$，且 (g_i) 是 $\mathfrak{a}$ 的任意局部生成系。

受上述定理 1.1 的改述启发，我们希望探讨奇异情形下 Nadel-Lebesgue 乘子理想的定理 1.2 类比结果。为实现这一目标，一个自然的想法是将 Skoda 的 L^2 方法推广到奇异情形，即为奇异复空间上的 ∂-算子建立适当的 L^2 理论。然而，如 [15, 16], 所述，似乎无法像在光滑情形下那样建立一般理论，从而在具有奇点的复空间上求解带有 L^2 估计的 ∂-方程；相关主题的一些部分结果可参见 [17, 38, 39, 41] 。

另一方面，我们也可以考虑在曲率正性满足某些合理假设的条件下，将定理 1.1 应用于奇点附近。幸运的是，我们可以证明，正则轨迹上的里奇曲率正性实际上等价于所需的 Skoda 理想生成以及 ∂-方程的 L^2-可解性。更准确地说，我们将以下述方式陈述主要结果：

定理 1.3。设 X 是一个纯维数为 n 的（Hermitian）复空间，且 $x \in X$ 是一个正规点，$\pi : X \to X$ 是 X 的雅可比理想 $\mathcal{J}ac_X$ 的对数消解。那么，以下陈述等价：

(1) 对于点 $x \in X$ 附近的每个拟多重次调和函数 φ，都有

$$R^q\pi_*\Big(\mathcal{O}_{\overline{X}}(\widehat{K}_{\overline{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi\circ\pi)\Big) = 0,\ \forall q \geq 1.$$

(2) 对于点 $x \in X$ 附近的每个拟多重次调和函数 φ，都有

$$R^q\pi_*\Big(\mathcal{O}_{\overline{X}}(\widehat{K}_{\overline{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi\circ\pi)\Big) = 0,\ \forall 1 \leq q < n.$$

(3) 对于点 x 的某个 Stein 邻域 $\Omega \subset\subset X$，存在一个 Kähler 度量 ω，使得 Ω 的正则轨迹 Ω_{reg} 上的 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(\omega) \geq 0$。

(4) 对于点 x 的某个 Stein 邻域 $\Omega \subset\subset X$，存在一个 Kähler 度量 ω 和一个 $\mathscr{C}^\infty$ 可微实函数 ψ，定义在 Ω 上，使得 Ω 的正则轨迹 Ω_{reg} 上的 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}(\omega) + \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi \geq 0$。

(5) 对于点 x 的某个 Stein 邻域 $\Omega \subset\subset X$，存在一个 Kähler 度量 ω 以及 Ω 上的厄米线丛 L，使得对于任意光滑的 $\varphi \in \mathrm{SPsh}(\Omega)$ 和 $v \in L^{2}_{0,\,q}(\Omega_{reg},L)$，满足 $\partial v = 0$ 且

$$\int_{\Omega_{reg}} \langle A_\varphi^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty$$

其曲率算子为 $A_\varphi = [\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi, \Lambda_\omega]$ 的 Ω_{reg} 上，存在 $u \in L^{2}_{0,\,q-1}(\Omega_{reg}, L)$，使得 $\partial u = v$ 且

$$\int_{\Omega_{reg}} |u|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega \leq \int_{\Omega_{reg}} \langle A_\varphi^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega.$$

(6) 对于点 x 的某个 Stein 邻域 $\Omega \subset\subset X$，存在一个 Kähler 度量 ω 以及 Ω 上的厄米线丛 L，使得对于任意光滑的 $\varphi \in \mathrm{SPsh}(\Omega)$ 和 $v \in L^2_{0,1}(\Omega_{reg},L)$，满足 $\partial v = 0$ 且

$$\int_{\Omega_{reg}} \langle A_\varphi^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty,$$

存在 $u \in L^2(\Omega_{reg}, L)$，使得 $\partial u = v$ 且

$$\int_{\Omega_{reg}} |u|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega \leq \int_{\Omega_{reg}} \langle A_\varphi^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega.$$

(7) Skoda 定理适用于 Nadel-Lebesgue 乘子理想；也就是说，对于任意由 r 个生成元生成的非零理想层 $\mathfrak{a}$，以及在点 $x \in X$ 附近的拟多重次调和函数 φ，有

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}\cdot\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}),\ \forall k \geq \min\{n, r\}.$$

(8) 对于点 $x \in X$ 附近的任意非零理想层 $\mathfrak{a}$，有

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(n\varphi_{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}\cdot\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}((n-1)\varphi_{\mathfrak{a}}).$$

(9) 对于一个 y 点 $x \in X$ 附近的非零理想层 $\mathfrak{a}$，有 如下结论

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(n\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a}.$$

(10) 点 $x \in X$ 是 X 的正则点。

在上述结果中，最有趣且令人惊叹之处在于，它通过若干涉及 Nadel-Lebesgue 乘子理想的不同表述，给出了正则点的多种刻画；这些表述看起来几乎毫不相关。例如，(1, 2) 属于代数几何，(3, 4) 属于微分几何，(5, 6) 属于偏微分方程，而 (7—9) 则属于交换代数。所有论证的核心思想都源自通过多复变函数中的 L^2 方法实现的 Skoda 理想生成。

注 1.4. 简单的例子表明，在定理 1.3 中，不能去掉 x 是 X 的正规点这一假设；特别是，在这种情况下，任何一项陈述（1、2、7、8）都不能推出（10）。

作为定理 1.3 的直接推论，我们有

推论 1.5. 任何在正则轨迹上具有非负里奇曲率的正规凯勒空间必定是非奇异的。

1.3. 奇异簇上的凯勒-爱因斯坦度量。设 X 是一个正规 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 凯勒空间，即其典范类 K_X 在 X 上定义了一个 $\mathbb{Q}$-线丛的正规凯勒空间。若凯勒流 $\omega \in c_1(\pm K_X)$具有有界局部势，并且在 X 的正则轨迹 X^{reg} 上是真正的凯勒-爱因斯坦度量（参见 [3, 4, 5, 14], 等），则称其为 X 上的弱（或奇异）凯勒-爱因斯坦度量。若 X 上的弱凯勒-爱因斯坦度量 ω 是 X 上的凯勒度量，即 ω 具有光滑的局部势，则称其为凯勒-爱因斯坦度量。关于凯勒-爱因斯坦度量这一主题的一般性综述，可参见 [2, 23, 47, 48, 49, 50] 及其中的参考文献。特别地，我们陈述如下若干近期结果。

定理 1.6。（[3, 5, 14, 30, 31, 32, 36], 等）。设 X 是一个正规 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 复射影簇，则：

（1）如果 X 是一个仅具有对数终端奇点的 $\mathbb{Q}$-Calabi-Yau 簇，则 X 存在弱凯勒-爱因斯坦度量。（2）如果 K_X 是 ample 的，则 X 存在弱凯勒-爱因斯坦度量，当且仅当 X 是 K-稳定的。（3）如果 $-K_X$ 是 ample 的，则 X 存在弱凯勒-爱因斯坦度量，当且仅当 X 是 K-多稳定的。

凯勒几何/几何分析中的一个基本且广泛开放的问题，是理解弱凯勒-爱因斯坦度量在 X 的奇异轨迹 X^{sing} 附近的几何渐近行为。在 [24], 中，作者对一类具有可平滑孤立奇点的 Calabi-Yau 簇给出了极为精确的描述，从而取得了突破；进一步地，这些簇还被要求同强正则卡拉比-丘锥的顶点邻域同构；关于这一方向的近期进展，另见 [7, 8, 18] 。在更一般的情形下，通过使用奇异复空间上退化复Monge-Ampère方程理论中的深刻工具， [4, 22], 中的所有 $\mathbb{Q}$-Fano/Calabi-Yau 簇的弱凯勒-爱因斯坦度量的局部势的连续性已经得到证明，但迄今为止，对于一般情形下的高阶正则性，我们所知甚少，而建立弱凯勒-爱因斯坦势的高阶正则性是值得期望的。然而，依靠定理 1.3，我们将看到，不能期待过高的正则性；事实上，任意弱凯勒-爱因斯坦势在奇点附近至多是 $\mathscr{C}^\alpha$ （$\alpha < 2$）可微的。特别地，我们得到如下结论

定理 1.7. 设 X 是一个正规 $\mathbb{Q}$-Gorenstein Kähler 空间，并具有弱 Kähler-Einstein 度量 ω。那么， ω 在 X 上光滑，当且仅当 X 是非奇异的。

2. 预备知识

首先，我们介绍任意纯维数复空间上的 Nadel-Lebesgue 乘子理想层的概念，然后陈述本文中会用到的一些有用事实。

定义 2.1. 设 X 是一个纯维数复空间，并且相对于 Lebesgue 测度有 $\varphi \in L^1_{loc}(X_{reg})$。若 X 的正则部分（可以是不连通的）$X_{reg}$ 上存在一个厄米度量 ω，且对于 X 的一个局部嵌入，该度量 ω 在局部是某个 $\mathbb{C}^N$ 上的厄米度量的限制，则称复空间 X 为 Hermitian 复空间。由可微单位分解可知，与光滑情形一样，每个复空间都是 Hermitian 复空间。

若复空间 X 上存在厄米度量 ω，使得对于 X 的某个局部嵌入，该度量 ω 局部是某个 $\mathbb{C}^N$ 上的 Kähler 度量的限制，则称 X 为 Kähler 空间。特别地，它具有光滑严格拟次调和函数作为局部势。

若函数 φ 在 X 上局部等于一个多重次调和函数与一个定义在 X 上的光滑函数之和，则称其为 X 上的拟多重次调和函数（简称拟多重次调和函数）。X 上的拟多重次调和函数（分别为多重次调和函数和严格拟次调和函数）的集合记为 QPsh(X)（分别记为 Psh(X) 和 SPsh(X)）。若拟多重次调和函数 $\varphi \in$ 属于 QPsh(X)，且 φ 可局部写成

$$\varphi = \frac{c}{2}\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_{N_0}|^2) + O(1),$$

其中 $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，且 (f_i) 是全纯函数。

定义 2.2. 设 (X, ω) 是一个纯维数的 Hermitian 复空间，并且 $\varphi \in L^1_{loc}(X_{reg})$ 关于 Lebesgue 测度定义。

X 上与 φ 相关的 Nadel-Lebesgue 乘子理想层定义为由亚纯函数芽 $f \in \mathscr{M}_{X,x}$ 满足 $|f|^2 e^{-2\varphi}$ 关于 Lebesgue 测度 dV_ω 在点 $x \in X$ 附近可积所构成的 $\mathcal{O}_X$-子模 $\mathscr{I}_{NL}(\varphi) \subset \mathscr{M}_X$。可以验证，$\mathscr{I}_{NL}(\varphi)$ 与 X 上所选的厄米度量 ω 无关。

点 $x \in X$ 处 φ 的对数正则阈值（或复奇点指数）$LCT_x(\varphi)$ 定义为

$$LCT_x(\varphi) := \sup\{c \geq 0 \mid \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathscr{I}_{NL}(c\varphi)_x\}.$$

记 $LCT_x(-\infty) = 0$，则表示起来较为方便。

容易看出，当 X 是正规复空间且 φ 在 X 上局部有上界时，$\mathscr{I}_{NL}(\varphi) \subset \mathcal{O}_X$ 是一个理想层。此外，若 X 光滑且 $\varphi \in QPsh(X)$，则 $\mathscr{I}_{NL}(\varphi)$ 就是 Nadel 引入的通常乘子理想层 $\mathscr{I}(\varphi)$（参见[10]）。

注 2.3. 由于 Nadel-Lebesgue 乘子理想的定义是局部的，我们可以通过为 X 的局部嵌入选取一个特殊的厄米度量 ω 来计算乘子理想。特别地，若 X 是 $\mathbb{C}^N$中某个区域内的 n 维复子空间，我们可以取 X 上的厄米度量 ω 为从 $\mathbb{C}^N$继承的标准 Kähler 度量。于是，我们有 $dV_\omega = \frac{1}{n!}\upsilon^n|_{X_{reg}}$，其中 $\upsilon = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k=1}^{N} dz_k \wedge d\bar{z}_k$。

为方便读者，下面陈述一个与解析子集的局部体积相关的基本估计。

引理 2.4.（[20], 引理 2.3）。设 X 是 $\mathbb{C}^N$ $(N \geq 2)$ 中某个区域内经过原点 0 的纯 n 维解析子集。那么，存在原点 0 的一个 Stein 邻域 $U \subset\subset \mathbb{C}^N$，使得对任意 $0 \leq \varepsilon < 1$，有

$$\int_{U\cap X} \frac{1}{(|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)^{n-1+\varepsilon}} dV_\omega < +\infty,$$

其中 $dV_\omega = \frac{1}{n!}\upsilon^n|_{X_{reg}}$ 且 $\upsilon = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{k=1}^{N} dz_k \wedge d\bar{z}_k$。

类似于 [33, 34] 中引入的 Nadel-Ohsawa 乘子理想层（另见 [9, 12] 中关于代数几何对应物的讨论），我们陈述如下相关性质。

命题 2.5. (1) 设 $\pi : X \to X$ 是 X 的雅可比理想 $\mathcal{J}\mathrm{ac}_X$ 的对数消解，且 $K_{\widetilde{X}/X}$ 是 Mather差异除子。则我们有像

$$\mathrm{Im}\left(\pi^*\Omega^n_X \hookrightarrow \Omega^n_{\widetilde{X}}\right) = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-\widehat{K}_{\widetilde{X}/X}) \cdot \Omega^n_{\widetilde{X}},$$

and

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi) = \pi_*\left(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\widehat{K}_{\widetilde{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi \circ \pi)\right).$$

此外，我们可以推得 $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + \log|\mathcal{J}\mathrm{ac}_X|) = \mathscr{I}_{\mathrm{NO}}(\varphi)$，即 X 上与 φ 相关联的 Nadel-Ohsawa 乘子理想层。

(2) 当 X 正规且 φ 具有解析奇点时，$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi)$ 与 [9] 中定义的 Mather 乘子理想层一致。

(3) 对任意 $\varphi \in \mathrm{QPsh}(X)$，可知 $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi) \subset \mathscr{M}_X$ 是一个凝聚分式理想层，并满足强开性，即 $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi) = S\,\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}((1+\varepsilon)\varphi)_{.\varepsilon>0}$

为证明定理 1.3，我们需要以下关于 ∂-方程的 L^2 估计，以及关于高阶直接像的 Grauert-Riemenschneider 消失定理的相对版本。

定理 2.6。（参见 [10], 定理 5.2）。设 (X, ω) 是一个 n 维 Kähler 流形，其中包含一个弱伪凸的 Zariski 开子集。设 L 是 X 上的一个厄米线丛，使得 $\sqrt{-1}\Theta(L) + \mathrm{Ric}(\omega) > 0$。

那么，对于每个光滑的 $\varphi \in \mathrm{Psh}(X)$ 和满足 $\partial v = 0$ and 的 $v \in L^{2}_{0,q}(X, L)$,

$$\int_X \langle A^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty$$

在 X 上，若曲率算子为 $A = [\sqrt{-1}\Theta(L) + \mathrm{Ric}(\omega) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi, \Lambda_\omega]$，则存在 $u \in L^{2}_{0,q-1}(X, L)$，使得 $\partial u = v$ and

$$\int_X |u|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega \le \int_X \langle A^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega.$$

定理 2.7. ([11], 定理 1.1)。设 (X, ω) 是一个 n 维 Kähler 流形，且是某个 Stein 空间 X^* 的 Zariski 开子集；L 是 X 上的厄米线丛。

若对于任意光滑的 $\varphi \in \mathrm{SPsh}(X^*)$ 和满足 $\partial v = 0$ and 的 $v \in L^{2}_{0,1}(X, L)$,

$$\int_X \langle A_\varphi^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty$$

在 X 上，若曲率算子为 $A_\varphi = [\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi, \Lambda_\omega]$，则存在 $u \in L^2(X, L)$，使得$\partial u = v$ and

$$\int_X |u|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega \le \int_X \langle A_\varphi^{-1}v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega,$$

因此，$L \otimes K_X^{-1}$在 X 上是中野半正的。

定理 2.8.（[37], 推论 1.5）。设 $\pi : X \to Y$ 是从复流形 X 到复空间 Y 的满射适当（局部）Kähler 态射，且 $(L, e^{-\varphi_L})$ 是 X 上具有半正曲率的（可能奇异的）厄米线丛。那么，高阶直接像层

$$R^q\pi_*\left(K_X \otimes L \otimes \mathscr{I}(\varphi_L)\right) = 0,$$

对每个 $q > \dim X - \dim Y$ 都成立。

注 2.9. 复空间 X 上凝聚理想层 $\mathscr{I}$ 的任意对数消解 $\pi : X \to X$ 都是局部 Kähler（真修改），且局部是由光滑中心进行的有限次爆破。此外，复空间之间的任意有限全纯映射都是（局部）真 Kähler。

本节余下部分，我们回顾理想整闭包的一些代数性质。

定义 2.10.（[46]）。设 R 是一个交换环，I 是 R 的一个理想。若元素 f ∈ R 满足关系式

$$f^d + a_1 f^{d-1} + \cdots + a_d = 0 \quad (a_k \in I^k, 1 \le k \le d).$$

由 R 中所有与 I 整相关的元素组成的集合 I 称为 I 在 R 中的整闭包。若 $I = \overline{I}$，则称 I 为整闭的。可以证明，I 是 R 的一个理想，并且是包含 I 的最小整闭理想。

定义 2.11.（[46]）。设 R 是一个含幺交换环，且 J ⊂ I 是 R 中的理想。若存在一个非负整数 n，使得 $I^{n+1} = JI^n$，则称 J 是 I 的一个约化。

若 I 的一个约化 J 中不存在严格包含于 J 的 I 的约化，则称 J 为极小约化。若一个理想除自身外没有其他约化，则称其为基本理想。

可以证明，诺特局部环中极小约化确实存在，而且给定理想的极小约化必然是基本的。此外，若 R 是诺特环，则 J ⊂ I 是 I 的约化，当且仅当 $J = \overline{I}$。

在解析情形下，关于理想的整闭包和约化，我们有如下刻画。

定理 2.12。（参见 [29], 定理 2.1）。设 X 是一个复空间，Y ⊂ X 是一个由相干 $\mathcal{O}_X$-理想 $\mathscr{I}$ 定义的真闭复子空间（可以非约化），且 x ∈ Y 是一个点。设 $\mathscr{J} \subset \mathcal{O}_X$ 是一个相干 $\mathcal{O}_X$-理想，$\mathcal{I}$（分别为 $\mathcal{J}$）是 $\mathscr{I}$（分别为 $\mathscr{J}$）在 x 处的芽。那么，以下条件等价：

(1) $\mathcal{J} \subset \overline{\mathcal{I}}$. e e (2) 对每个满足以下条件的态射 π : X → X：(i) π 是适当且满射的；(ii) X 是正规复空间；(iii) $\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ 是可逆的 $\mathcal{O}_X$-模，均存在 x 在 X 中的一个开邻域 U，使得

$$\mathscr{J} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}|_{\pi^{-1}(U)} \subset \mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}|_{\pi^{-1}(U)}.$$

(3) 若 V 是 x 的一个开邻域，且 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{J}$ 由其整体截面生成，则对任意生成元系 $g_1, ..., g_r \in \Gamma(V, \mathscr{I})$ 以及任意 f ∈ Γ(V, $\mathscr{J}$)，都可以找到 x 的一个开邻域 V′ 和一个常数 C > 0，使得

$$|f(y)| \le C \cdot \sup_k |g_k(y)|, \ \forall y \in V'.$$

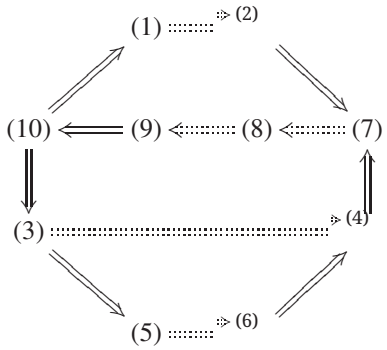
注 2.13. 设 X 是正规复空间，且 $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ 是一个凝聚理想层。设 e eπ : X → X 是从正规复空间 X 到 X 的任意真修改，满足 e$\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$，其中 D 是 X 上的一个有效卡蒂埃除子。则有 $\pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D) = \mathscr{I}$，即 $\mathscr{I}$ 在 $\mathcal{O}_X$ 中的整闭包。

引理 2.14.（参见 [28] 中的例 9.6.19；另见 [10], 引理 11.16。）设 X 是一个维数为 n 的正规复空间，且 a ⊂ $\mathcal{O}_X$ 是一个非零理想。则存在 X 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$，使得 $a|_{U_\alpha}$ 有一个由至多 n 个元素生成的约化 b_α。

3. 主要结果的证明

3.1. 定理 1.3 的证明。由于所有结论都是局部的，不妨设 X 是某个区域中的一个 $n_{\ge 2}$ 维正规（Hermitian）复子空间，其中 $\mathbb{C}^N$ 上有 $\varphi \in$ QPsh(X)，且 $= (g_1, ..., g_r) \cdot \mathcal{O}_X$ 是由全纯函数 $g_1, ..., g_r$ 在 X 上生成的理想层。此外，如有必要，我们还可以假设 φ 是 X 上（局部）严格拟叶状函数，只需加上某个光滑的严格拟叶状

函数即可。容易看出，蕴含关系 (1) $\Longrightarrow$ (2)、(3) $\Longrightarrow$ (4)、(5) $\Longrightarrow$ (6) 以及 (7) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (9) 都是显然的；特别地，我们将按以下顺序给出证明：



“(2) $\Longrightarrow$ (7)”。根据 Nadel-Lebesgue 乘子理想层的定义，可得

$$\mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}),$$

因此，只需证明反向包含关系。

情形（i）。当 $r \leq n$ 时。

令 $\pi : \widetilde{X} \to X$ 是 $\mathcal{J}\mathrm{ac}_X$ 和 $\mathfrak{a}$ 的一个共同对数解消，使得 $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-F)$，其中 F 上的 F 为某些有效除子。记

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_m &:= \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\widehat{K}_{\widetilde{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi \circ \pi + m\varphi_{\mathfrak{a}} \circ \pi) \\ &= \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\widehat{K}_{\widetilde{X}/X}) \otimes \mathscr{I}(\varphi \circ \pi) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-mF)\end{aligned}$$

对于任意 $m \in \mathbb{N}$，考虑由 $g_1, \ldots\ldots g_r$ 确定的 Koszul 复形：

$$0 \to \Lambda^r V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(rF) \to \cdots \to \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(2F) \to V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(F) \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to 0,$$

其中 V 是由 $g_1, \ldots\ldots g_r$ 张成的向量空间。注意，Koszul 复形在局部上是分裂的，其齐次关系在局部上是自由的，因此与任意相干层进行扭曲都会保持正合性。于是，通过用 $\mathscr{A}_k$ $(k \geq r)$ 进行扭曲，我们得到以下长正合列

$$0 \to \Lambda^r V \otimes \mathscr{A}_{k-r} \to \cdots \to \Lambda^2 V \otimes \mathscr{A}_{k-2} \to V \otimes \mathscr{A}_{k-1} \to \mathscr{A}_k \to 0. \qquad (\star)$$

另一方面，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，由（2）可知高阶直接像 $R^q\pi_*\mathscr{A}_m = 0$ $(1 \leq q < n)$ 局部消失。注意

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + m\varphi_{\mathfrak{a}}) = \pi_*\mathscr{A}_m$$

根据层的直像在修正下的函子性，然后对 $(\star)$ 取直像，我们将推出下述所谓的 Skoda 正合复形（参见 [28], 第 228 页）：

$$0 \to \Lambda^r V \otimes \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-r)\varphi_{\mathfrak{a}}) \to \cdots \to V \otimes \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}) \to \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) \to 0.$$

特别地，映射 $V \otimes \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}) \to \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}})$ 是满射，由此可推知，对于任意 $k \geq r$，$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}})$。

情形（ii）。当 $r > n$ 时。

由于该陈述是局部的，由引理 2.14 可知，我们不妨设 $\mathfrak{b}$ 是由 n 个元素 $eg_1, \ldots, eg_n$ 生成的 $e^{\varphi}\mathfrak{a}$ 的一个约化。考虑 $e^{\varphi}\mathcal{J}\mathrm{ac}_X$、$\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的一个共同对数解消 $\pi : X \to X$，使得 $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathfrak{b} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-F)$，其中 F 是 X 上的某些有效除子。于是，按照上文相同的论证，我们可以推出以下 Skoda 正合复形：

$$0 \to \Lambda^n V \otimes \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-n)\varphi_{\mathfrak{a}}) \to \cdots \to V \otimes \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}) \to \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) \to 0.$$

对任意 k ≥n，其中 V 是由 eg1,...,egn 张成的向量空间。因此可得

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{b} \cdot \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}}).$$

“(3) $\Longrightarrow$ (5)”。由假设可知，点 x 存在一个 Stein 邻域Ω ⊂⊂X，其上有一个 Kähler 度量 ω，满足 Ric(ω) ≥ 0 于 Ωreg上。设 $\varphi \in \mathrm{SPsh}(\Omega)$ 是 Ω 上任意一个光滑严格拟叶状函数，且 L =Ω×ℂ是赋有平凡 Hermitian 度量的平凡丛，这意味着

$$\sqrt{-1}\Theta(L) + \mathrm{Ric}(\omega) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \geq \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi > 0$$

在 Ωreg上。

由于 Ω 是 Stein 空间，我们可以选取一个包含 Ω 的奇异轨迹Ωsing 的复超曲面 Z ⊂ Ω，使得 Ω – Z ⊂Ωreg 是一个 Stein 流形。于是，由定理 2.6 可得，对于任意光滑的 $\varphi \in \mathrm{SPsh}(\Omega)$ 以及满足∂v =0和 v ∈L20, $_q$(Ωreg,L)

$$\int_{\Omega_{\mathrm{reg}}} \langle A_\varphi^{-1} v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty,$$

我们可以找到 u ∈L20, $_{q-1}$(Ωreg, L)，使得$\bar{\partial}$u =v 且

$$\int_{\Omega_{\mathrm{reg}}} |u|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega \leq \int_{\Omega_{\mathrm{reg}}} \langle A_\varphi^{-1} v, v\rangle\, e^{-2\varphi} dV_\omega.$$

“(6) $\Longrightarrow$ (4)”。将定理 2.7 直接应用于 Ωreg，可得$\sqrt{-1}$Θ(L) + Ric(ω) ≥ 0 在 Ωreg上。令 Ω′ ⊂ Ω 为点 x 的一个足够小的 Stein 邻域，使得厄米线丛 L 在 Ω′上有一个光滑势函数 ψ。因此，我们推得

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi + \mathrm{Ric}(\omega) = \sqrt{-1}\Theta(L) + \mathrm{Ric}(\omega) \geq 0$$

在 Ω′$_{\mathrm{reg}}$上。

“(4) $\Longrightarrow$ (7)”。根据定义和引理 2.14，只需证明

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}})$$

当 r ≤n 时，在点 x ∈X 附近的情形。令 f ∈ $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}})_x$，其中 k ≥min{n,r} = r，则由乘子理想的强开性，存在足够小的 $\varepsilon > 0$，使得 f ∈ $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi +(k+\varepsilon)\varphi_{\mathfrak{a}})_{x}$。

根据假设 (4)，令 Ω ⊂⊂ X 为点 x 的一个 Stein 邻域，其上配有 Kähler 度量 ω 和光滑实函数 ψ，使得 Ric(ω)+ $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$ 在 Ωreg上成立。若有必要，可缩小 Ω，使得函数 ψ 在 Ω 上有界，且 f 在 Ω 上全纯，并且

$$\int_\Omega |f|^2 \cdot |g|^{-2(r+\varepsilon)} e^{-2(\varphi+(k-r)\varphi_{\mathfrak{a}})} dV_\omega < +\infty.$$

此外，我们还选取一个复超曲面 Z ⊂ Ω，它包含 Ωsing 的奇异轨迹以及全纯函数 g1,..., g_r 的公共零点集，使得 Ω′ := Ω –Z 是一个 Stein 流形。

令 E =Ω′×ℂ^r 和 Q =Ω′×ℂ 为 Ω′ 上的平凡丛，令 L = $K_{\Omega'}^{-1}$ 为反典范线丛，其诱导度量经过权重 e$^{-\psi}$扭曲。由全纯函数 g1,..., g_r 确定的态射 g : E →Q 定义为

$$(h_1, ..., h_r) \mapsto \sum_{m=1}^{r} g_m \cdot h_m = g \cdot h.$$

g注意，当秩 Q =1时，gg* = Id$_Q$，并且在 Ω′ 上有

$$\sqrt{-1}\Theta(L) - (r - 1 + \varepsilon)\sqrt{-1}\Theta(\det Q) = \mathrm{Ric}(\omega) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0.$$

因此，我们可以在 Ω' 上应用定理 1.1，进而得到一个由 Ω' 上的全纯函数组成的 r 元组 $(h_1,...,h_r)$，使得在 Ω' 上 $f = g \cdot h$，并且

$$\int_{\Omega'} |h|^2 \cdot |g|^{-2(r-1+\varepsilon)} e^{-2(\varphi+(k-r)\varphi_{\mathfrak{a}})} dV_\omega = \int_{\Omega'} |h|^2 e^{-2(\varphi+(k-1+\varepsilon)\varphi_{\mathfrak{a}})} dV_\omega < +\infty.$$

由上述 L^2 估计和 X 的正规性可知，我们现在可以将每个 h_m 延拓为 Ω 上的全纯函数，从而

$$\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + k\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1+\varepsilon)\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(\varphi + (k-1)\varphi_{\mathfrak{a}})$$

在 Ω 上；论证至此完成。

“(9) $\Longrightarrow$ (10)”。根据假设，我们有 $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(n\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a}$。设 $x \in X$ 是一个奇异点。于是，由解析集的局部参数化可知，我们可以在 x 附近找到一个局部坐标系 $(z'; z'') = (z_1, ..., z_n; z_{n+1}, ..., z_N)$，使得对于某个常数 $C > 0$，任意靠近 x 的点 $z \in X$ 都满足 $|z''| \le C \cdot |z'|$。

令 $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ 为由全纯函数 $bz_1,...,bz_n \in \mathcal{O}_X$ 生成的理想层（必要时缩小 X），其中 bz_k 是 $\mathcal{O}_X$ 中 z_k 的剩余类。由 X 在点 x 处不光滑可知，X 在 x 处的嵌入维数 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2) \ge n+1$，这意味着存在 $k_0\,(n+1 \le k_0 \le N)$，使得 $bz_{k_0} \notin \mathfrak{a}$。

另一方面，再次缩小 X 后，可得

$$\int_X \frac{|z_{k_0}|^2}{|z'|^{2n}} dV_\omega \le C^2(1+C^2)^{n-1} \cdot \int_X |z|^{-2(n-1)} dV_\omega < +\infty,$$

其中，积分的有限性由引理 2.4 得出。于是我们推得 $bz_{k_0} \in \mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(n\varphi_{\mathfrak{a}})$，但 $bz_{k_0} \notin \mathfrak{a}$，这与假设 $\mathscr{I}_{\mathrm{NL}}(n\varphi_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{a}$ 矛盾。因此，我们得到 $x \in X$ 是一个正则点。

“(10) $\Longrightarrow$ (1)”。这是定理 2.8 的直接推论。

“(10) $\Longrightarrow$ (3)”。由于 x 是 X 的正则点，选取 x 的一个适当坐标邻域后，我们可以假设 $\Omega \ni x$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个 Stein 域。因此，我们可以取 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k$ 作为 $\mathbb{C}^n$ 上的标准欧几里得度量，于是 $\mathrm{Ric}(\omega) = 0$ 于 Ω 上；定理 1.3 的证明至此完成。 □

注 3.1. 此外，我们可以从定理 1.3 的证明中推出

(i) 若每个具有解析奇点的拟多重次调和函数 φ 都满足 (1) 或 (2)，则 $x \in X$ 是一个正则点；

(ii) 陈述 (3) 和 (4) 可分别改为在包含于 Ω_{reg} 的 Ω 的 Zariski 开子集上，$\mathrm{Ric}(\omega) \ge 0$ 以及 $\mathrm{Ric}(\omega) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \ge 0$。

3.2. 定理 1.7 的证明。只需证明必要性。

令 $x \in X$ 为任意一点。由于 ω 是 X 上的光滑 Kähler 度量，因此 ω 具有光滑局部势；也就是说，存在 x 的一个 Stein 邻域 $\Omega \subset X$，以及 Ω 上的光滑严格拟次调和函数 ψ，使得 Ω_{reg} 上有 $\omega = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$。由此可知，只要 $\mathrm{Ric}(\omega) = \pm\omega, 0$，便有 Ω_{reg} 上 $\mathrm{Ric}(\omega) + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \ge 0$。因此，由定理 1.3 中的 (4) 可知，$x \in X$ 是一个正则点。□

注 3.2. 定理 1.3 和 1.7 的证明中采用的相同论证也表明，弱凯勒-爱因斯坦度量 ω 的每个局部势在 X 上均为 $\mathscr{C}^2$ 可微，当且仅当 X 是非奇异的；并且不存在这样的奇异正规 Kähler 空间，使其 Kähler 度量在正则轨迹上为凯勒-爱因斯坦度量。

事实上，当弱凯勒-爱因斯坦度量在奇点附近（局部）与标准诱导 Kähler 度量等价时，我们的方法仍然适用；例如，当弱凯勒-爱因斯坦度量的系数局部有界时。

附录 A. 与 L^2 除法问题相关的幂的一致界

理想成员关系是交换代数、代数几何和多复变函数中的一个重要研究对象，例如著名的希尔伯特零点定理、Briançon-Skoda 定理等。本部分主要关注与 L^2 除法问题相关的幂的统一界，这是一类特殊的理想成员关系。设 X 是一个维数为 n 的 Stein 流形，且 $=(g_1,\dots,g_r)\cdot\mathcal{O}_X$ 是 X 上由全纯函数 $g_1,\dots,g_r$ 生成的理想层。一般而言，除法问题是指：给定正整数 $k\in\mathbb{N}$ 和 X 上的全纯函数 f，我们希望确定 f 何时可由全纯函数 $g_1,\dots,g_r$ 生成；更确切地说，何时可以在 X 上找到全纯函数 $h_1,\dots,h_r\in a^{k-1}$，使得

$$f=\sum_{m=1}^{r}g_m\cdot h_m.$$

根据 Stein 流形上的冈-卡当理论，当且仅当 $f\in a^k$ 时，除法问题可解。

注意，条件 $f\in a^k$ 是纯代数的，因此自然会问，是否可以找到一个解析条件来替代代数条件。容易看出，$f\in a^k$ 意味着 $|f|e^{-\varphi_k}$ 在 X 上局部有界，或者更一般地属于 L^2_{loc}；其中 $\varphi_k:=k\log|g|$，且 $|g|^2:=|g_1|^2+\cdots+|g_r|^2$。另一方面，$|f|e^{-\varphi_k}$ 局部有界等价于 $f\in\overline{a^k}$，即 a^k 在 $\mathcal{O}_X$ 中的整闭包（见定理 2.12）。因此，一个有趣的问题是，我们能否建立 L^2 版本的除法问题的可解性。

设 $\varphi\in\mathrm{Psh}(X)$ 是 X 上的多重次调和函数，并记为

$$A^2_{\mathrm{loc}}(X,\varphi):=\left\{f\in\mathcal{O}_X(X)\,\middle|\,|f|^2e^{-2\varphi}\text{ is locally integrable on }X\right\}.$$

于是，我们提出以下 L^2 除法问题：

问题 A.1. 设 X 是一个 n 维 Stein 流形，配有多重次调和函数 $\varphi\in\mathrm{Psh}(X)$，且 $=(g_1,\dots,g_r)\cdot\mathcal{O}_X$ 是由 X 上的全纯函数 $g_1,\dots,g_r$ 生成的理想层。给定正整数 $k\in\mathbb{N}$ 和 $f\in A^2_{\mathrm{loc}}(X,\varphi+\varphi_k)$，是否存在全纯函数 $h_1,\dots,h_r\in A^2_{\mathrm{loc}}(X,\varphi+\varphi_{k-1})$，使得

$$f=\sum_{m=1}^{r}g_m\cdot h_m?$$

A.1. 问题 A.1 的一个解。不幸的是，对于一般的 k，问题 A.1 的答案是否定的（见例 A.2）。受 Skoda 的 L^2 除法定理（参见定理 1.1）的启发，似乎可以找到一个仅依赖于 n 的一致整数 k_0, ，使得对于任意满足 $k\geq k_0$ 的 k，问题 A.1 都有解。本部分旨在给出与问题 A.1 相关的幂的一致下界，并且该下界是最优的。特别地，我们将证明以下

定理 A.1。存在一个一致整数 $k_0=\min\{n,r\}$，使得对于任意 $k\geq k_0$，问题 A.1 的解均为正。此外，一致下界 $k_0=\min\{n,r\}$是最优的。

事实上，一致整数 $k_0=\min\{n,r\}$ 的最优性可由下例直接看出：

例 A.2。设 $B_n(0)$ 是以原点 $\mathbf{0}=(\mathbf{0}',\mathbf{0}'')$ 为中心的单位球，位于 $\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^{n-r}(1\leq r\leq n)$ 中，并在 $B_n(0)$ 上取 $g_1=z_1,\dots,g_r=z_r,f\equiv 1,\varphi\equiv 0$。那么，对于每个 $k<k_0=r$，问题 A.1 的答案均为否定的。

事实上，由于在任意点 $(\mathbf{0}',z'')$ 处，对数典范阈值 $\mathrm{LCT}_{(\mathbf{0}',z'')}(\varphi_k)=r\,k>1$ of φ_k，可以推导出 $f\in A^2_{\mathrm{loc}}(B_n(0),\varphi+\varphi_k)$。然后，我们根据以下事实推断：

f 在 $B_n(0)$ 中没有零点，因此不存在定义在 $B_n(0)$ 上的全纯函数 $h_1, \ldots, h_r$，使得 $f = \sum_{m=1}^{r} g_m \cdot h_m$.

定理 A.1 的证明。由局部消失定理（定理 2.8）以及定理 1.3 证明中的论证可知，对于任意 $k \geq \min\{n,r\}$，我们有

$$\mathscr{I}(\varphi + \varphi_k) = \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}(\varphi + \varphi_{k-1}).$$

Let

$$\tau : \mathscr{I}(\varphi + \varphi_{k-1})^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{I}(\varphi + \varphi_k)$$

令其为由下式定义的层同态

$$\tau(h_{1,x}, \ldots, h_{r,x}) = \sum_{m=1}^{r} g_m \cdot h_{m,x}$$

对于任意芽 $h_{m,x} \in \mathscr{I}(\varphi + \varphi_{k-1})_x$。于是，我们有层的正合序列

$$\mathscr{I}(\varphi + \varphi_{k-1})^{\oplus r} \xrightarrow{\tau} \mathscr{I}(\varphi + \varphi_k) \longrightarrow 0.$$

由 Stein 流形上的冈-嘉当理论可知，所诱导的截面序列

$$\Gamma\big(X, \mathscr{I}(\varphi + \varphi_{k-1})^{\oplus r}\big) \xrightarrow{\tau^*} \Gamma\big(X, \mathscr{I}(\varphi + \varphi_k)\big) \longrightarrow 0$$

也是正合的，这意味着任意截面 $f \in \Gamma\big(X, \mathscr{I}(\varphi + \varphi_k)\big)$ 都可写成像 $f = \sum_{m=1}^{r} g_m \cdot h_m$，其中 $h_m \in \Gamma\big(X, \mathscr{I}(\varphi + \varphi_{k-1})\big)$ 是某个截面。

□

注 A.3.（定理 A.1 的另一种证明思路）。事实上，我们还可以给出定理 A.1 证明的另一种思路，该证明基于 Guan-Zhou [21] 建立的乘子理想的强开性，以及 Skoda 关于全纯函数的 L^2 除法定理（见定理 1.1）。

由于该结论是局部的，由引理 2.14 可知，只需证明 $\mathscr{I}(\varphi+\varphi_k) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathscr{I}(\varphi+\varphi_{k-1})$ 在 $r \leq n$ 的情形下成立。给定 $f \in \Gamma\big(X, \mathscr{I}(\varphi+\varphi_k)\big)$，缩小 X 后，我们可以假设 X 是 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球，并且

$$\int_X |f|^2 e^{-2(\varphi+\varphi_k)} d\lambda_n = \int_X |f|^2 \cdot |g|^{-2k} e^{-2\varphi} d\lambda_n < +\infty.$$

于是，对于每个 $k \geq r$，由乘子理想的强开性，存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\int_X |f|^2 e^{-2(\varphi+(1+\varepsilon)\varphi_k)} d\lambda_n = \int_X |f|^2 \cdot |g|^{-2(1+\varepsilon)k} e^{-2\varphi} d\lambda_n < +\infty,$$

如有必要，可缩小 X。最后，结合定理 1.1，我们得出所需结果。

A.2. 问题 A.1 的全局 L^2 版本。设 (X, ω) 是一个 n 维 Stein 流形，其上有一个 Kähler形式 ω。设 $\varphi \in \mathrm{Psh}(X)$，且 $\mathscr{I} = (g_1, \ldots, g_r) \cdot \mathcal{O}_X$ 是由 X 上的全纯函数 $g_1, \ldots, g_r$ 生成的理想层。记

$$A^2(X, \varphi) := \left\{ f \in \mathcal{O}_X(X) \,\middle|\, \int_X |f|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega < +\infty \right\}.$$

于是，我们得到问题 A.1 的如下全局类比：

问题 A.2. 是否存在一个一致整数 k_0，使得对于每个 $k \geq k_0$ 以及 $f \in A^2(X, \varphi+\varphi_k)$，都存在 $h_1, \ldots, h_r \in A^2(X, \varphi + \varphi_{k-1})$ 满足

$$f = \sum_{m=1}^{r} g_m \cdot h_m ?$$

作为定理 1.1 的直接推论，我们得到以下结果

定理 A.4. 设 X 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个伪凸域。那么，存在一致整数 $k_0 = \min\{n + 2, r + 1\}$，使得问题 A.2 的解为肯定的。

注 A.5. (1) 更一般地，定理 A.4 对任意具有光滑多重次调和函数 $\varphi \in \mathrm{Psh}(X)$的完备凯勒域 $\mathbb{C}^n$ 也成立。(2) 在这种情况下，结合例 A.2 可得，最优一致下界 k_0 至少为 $\min\{n,r\}$，至多为 $\min\{n + 2,r + 1\}$。

参考文献

[1] A. Andreotti, E. Vesentini, 《复流形上 Laplace-Beltrami 方程的 Carleman估计》, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 25 (1965), 81–130.[2] T. Aubin, 《紧凯勒流形上的 Monge-Ampère 型方程》, Bull. Sci. Math. (2) 102 (1978), 63–95.[3] R. J. Berman, 《具有凯勒-爱因斯坦度量的 $\mathbb{Q}$-Fano 簇的 K-多重稳定性》, Invent. Math. 203 (2016), 973–1025.[4] R. J. Berman, S. Boucksom, P. Eyssidieux 等, 《对数Fano簇上的凯勒-爱因斯坦度量与凯勒-里奇流》, J. Reine Angew. Math. 751 (2019), 27–89. [5] R. J. Berman, H. Guenancia, 《稳定簇和对数典范对上的凯勒-爱因斯坦度量》, Geom. Funct. Anal. 24 (2014), 1683–1730.[6] J. Briançon, H. Skoda, 《关于 $\mathbb{C}^n$ 上一点处全纯函数芽理想的整闭包》, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A 278 (1974), 949–951. [7] S.-K. Chiu, G. Székelyhidi, 《奇异凯勒-爱因斯坦度量的高阶正则性》, 预印本, arXiv: 2202.11083.[8] V. Datar, X. Fu, J. Song, 《孤立对数典范奇点附近的凯勒-爱因斯坦度量》, 预印本, arXiv: 2106.05486.[9] T. de Fernex, R. Docampo, 《雅可比差异与有理奇点》, J. Eur. Math. Soc. 16 (2014), 165–199.[10] J.-P. Demailly, 《代数几何中的解析方法》, Higher Education Press, Beijing, 2010. [11] F. S. Deng, J. F. Ning, Z. W. Wang, X. Y. Zhou, 《关于 L^p 估计的全纯向量丛正性》, 即将在 Math. Ann. 发表, https://doi.org/10.1007/s00208-021-02348-7. [12] L. Ein, S. Ishii, M. Musta.tˇa, 《通过 Mather差异构造乘子理想》, 载于《极小模型与极端射线》（京都, 2011）, Adv. Stud. Pure Math., Vol. 70, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2016, pp. 9–28. [13] L. Ein, R. Lazarsfeld, 《几何有效零点定理》, Invent. Math. 137 (1999), 427–448.[14] P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi, 《奇异凯勒-爱因斯坦度量》, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), 607–639.[15] J. E. Fornæss, 《锥体中 $\overline{\partial}$ 的 L^2 结果》, 载于《复分析及相关主题》（Cuernavaca, 1996）, Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 114, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 67–72. [16] J. E. Fornæss, E. A. Gavosto, 《复空间上的柯西-黎曼方程》, Duke Math. J. 93 (1998), 453–477.[17] J. E. Fornæss, N. Øvrelid, S. Vassiliadou, 《$\overline{\partial}$ 的局部 L^2 结果：孤立奇点情形》, Internat. J. Math. 16 (2005), 387–418.[18] X. Fu, H.-J. Hein, X. Jiang, 《复双曲尖点上凯勒-爱因斯坦度量的渐近行为》, 预印本, arXiv: 2108.13390.[19] H. Grauert, R. Remmert, 《相干解析层》, Grundlehren Math. Wiss., Vol. 265, Springer-Verlag, Berlin, 1984.[20] Q. A. Guan, Z. Q. Li, 《通过 Ohsawa-Takegoshi延拓定理刻画正则点》, J. Math. Soc. Japan 70 (2018), 403–408. [21] Q. A. Guan, X. Y. Zhou, 《Demailly强开性猜想的证明》, Ann. of Math. (2) 182 (2015), 605–616. 另见 arXiv: 1311.3781.[22] V. Guedj, H. Guenancia, A. Zeriahi, 《奇异凯勒-爱因斯坦势的连续性》, 即将在 Int. Math. Res. Not. IMRN 发表, https://doi.org/10.1093/imrn/rnab294.[23] V. Guedj, A. Zeriahi, 《退化复 Monge-Ampère方程》, EMS Tracts in Mathematics, Vol. 26, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017. [24] H.-J. Hein, S. Sun, 《具有孤立锥形奇点的卡拉比-丘流形》, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 126 (2017), 73–130.[25] L. Hörmander, 《$\overline{\partial}$ 算子的 L^2 估计与存在性定理》, Acta Math. 113 (1965), 89–152. [26] L. Hörmander, 《多复变函数论导论》, 第3版, North-Holland Mathematical Library, Vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. [27] C. Huneke, 《诺特环中的一致界》, Invent. Math. 107 (1992), 203–223. [28] R. Lazarsfeld, 《代数几何中的正性 II》, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[29] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier, 《理想的整闭包与等奇异性》, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 17 (2008), 781–859.[30] C. Li, 《Fano簇上的 G-一致稳定性与凯勒-爱因斯坦度量》, Invent. Math. 227 (2022), 661– 744.[31] C. Li, G. Tian, F. Wang, 《关于奇异Fano簇的 Yau–Tian–Donaldson猜想》, Comm. Pure Appl. Math. 74 (2021), 1748–1800.[32] C. Li, G. Tian, F. Wang, 《奇异Fano簇的 Yau–Tian–Donaldson猜想的一致版本》, Peking Math. J. 5 (2022), 383–426. [33] Z. Q. Li, 《奇异复空间上的 Nadel-Ohsawa 乘子理想层》, 投稿中。另见 arXiv: 2003.11717.[34] Z. Q. Li, 《与多重次调和函数相关的解析伴随理想层 II》, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) XXII (2021), 183–193.[35] Z. Q. Li, 《关于具有奇点的解析局部环上的 Briançon-Skoda 定理》, J. Algebra 577 (2021), 45–60.[36] Y. Liu, C. Xu, Z. Zhuang, 《计算稳定性阈值的赋值的有限生成及其在 K-稳定性中的应用》, Ann. of Math. (2) 196 (2022), 507–566. [37] S. Matsumura, 《Kähler态射下高阶直接像的乘子理想层单射定理》, Algebr. Geom. 9 (2022), 122–158.[38] N. Øvrelid, S. Vassiliadou, 《某些奇异复空间的 L^2-$\overline{\partial}$ 上同调群》, Invent. Math. 192 (2013), 413–458.[39] W. L. Pardon, M. A. Stern, 《复射影簇的 L^2-$\overline{\partial}$ 上同调》, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 603–621.[40] R. Richberg, 《连续严格伪凸函数》, Math. Ann. 175 (1968), 257–286.[41] J. Ruppenthal, 《紧复空间上 $\overline{\partial}$ 算子的 L^2 理论》, Duke Math. J. 163 (2014), 2887– 2934.[42] Y.-T. Siu, 《多重属数的不变性》, Invent. Math. 134 (1998), 661–673. [43] Y.-T. Siu, 《复几何与代数几何中的乘子理想层》, Sci. China Ser. A 48 (2005), 1–31. [44] H. Skoda, 《将 L^2 技术应用于带权全纯函数代数中的理想理论》, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 5 (1972), 545–579. [45] H. Skoda, 《半正向量丛的满射态射》, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 (1978), 577–611.[46] I. Swanson, C. Huneke, 《理想、环与模的整闭包》, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 336, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.[47] G. Székelyhidi, 《极值Kähler度量导论》, Graduate Studies in Math., Vol. 152, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.[48] C. Xu, 《Fano簇的 K-稳定性：一种代数几何方法》, EMS Surv. Math. Sci. 8 (2021), 265–354.[49] C. Xu, 《K-稳定性：代数几何与复几何近期的交汇》, Notices Amer. Math. Soc. 69 (2022), 1126–1136.[50] S.-T. Yau, 《紧Kähler流形的里奇曲率与复Monge–Ampère方程 I》, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339–411.