arXiv:2301.00095v1 [math.AP] 31 Dec 2022

广义 Steklov 特征函数的精确 L^p 估计与节点集的大小

XIAOQI HUANG、YANNICK SIRE、XING WANG 和 CHENG ZHANG

Abstract. 我们针对带边界紧流形上的 Steklov 特征函数，基于其在边界上的 L^2 范数，证明了精确的 L^p 估计。为此，我们建立了调和延拓算子以及边界上的谱投影算子的 L^p界。此外，我们还推导出 Steklov 谱问题一种变体的节点集大小的下界。我们通过在边界上加入非光滑势来考虑 Steklov 问题的一个广义版本，但即使在没有势的情况下，我们的一些结果也是新的。

1. Introduction

近年来，人们开始研究带有奇异势的 Schr¨odinger 算子的特征函数估计（例如参见 [43], [1], [2], [30], [20], [31], [32], [33]）。在本文中，我们研究带有非光滑势的著名 Steklov 问题的一种推广。关于 Steklov 问题的综述，例如参见 [26], [12]。

设 $(\Omega\ h)$ 是带边界 (M, g) 的光滑流形，其中 $\dim \Omega\ = n + 1 \geq 2$ and $h|_M = g$。带势 V 的 Steklov 特征值问题为

$$\begin{cases} \Delta_h e_\lambda(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \partial_\nu e_\lambda(x) + V(x)e_\lambda(x) = \lambda e_\lambda(x),\ x \in \partial\Omega = M. \end{cases}$$

这里，ν 是 M 上的单位外法向量。于是，特征函数 $e_\lambda(x)$（为简化记号，也记作 e_λ）在边界 M 上的限制是 $\mathcal{D} + V$ 的一个特征函数：

$$(\mathcal{D} + V)e_\lambda(x) = \lambda e_\lambda(x),\ x \in M.$$

这里，$\mathcal{D}$ 是 Dirichlet-to-Neumann 算子 $\mathcal{D}$: $H^{\frac{1}{2}}(M) \to H^{-\frac{1}{2}}(M)$

$$\mathcal{D}f = \partial_\nu u|_M,$$

其中，u 是 f 的调和延拓:

$$\begin{cases} \Delta_h u(x) = 0,\ x \in \Omega, \\ u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega = M. \end{cases} \tag{1.1}$$

这种带势的 Steklov 问题已在 [13] 中从共形几何的角度得到研究，其中势 V 是边界 $\partial\Omega$ 上的平均曲率。关于带边界紧流形上的 Yamabe 问题，相关工作可参见例如[16], [17], [18], [38] 。在本文中，当势仅为有界或 Lipschitz 时，我们也推导出相应的估计。

对于 $m \in \mathbb{R}$，我们将 OPS^m 记为 m阶伪微分算子类。已知 $\mathcal{D} \in OPS^1$，并且可以写成（参见例如 [56, 命题 C.1]）

$$\mathcal{D} = \sqrt{-\Delta_g} + P_0,$$

对于某个 $P_0 \in OPS^0$. 因此，边界 M 上的特征函数界问题（以及其他结果），在模去一个零阶经典伪微分算子后，已在我们之前的论文 [30] 中得到处理。在这一背景下，该模型与相对论物质有关（例如参见 [9, 15, 21,22, 36, 37]）。

在下面的第一个结果中，我们给出了定义域中 Steklov 特征函数的 L^p 范数由其在边界上的 L^2 范数控制的估计。

定理 1. 设 $V \in L^\infty(M)$。那么对于 $\lambda \geq 1$，有

$$\|e_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \lambda^{-\frac{1}{p}+\sigma(p)} \|e_\lambda\|_{L^2(M)}, \quad 2 \leq p \leq \infty, \tag{1.2}$$

其中

$$\sigma(p) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}), & 2 \leq p < \frac{2(n+1)}{n-1} \\ \frac{n-1}{2} - \frac{n}{p}, & \frac{2(n+1)}{n-1} \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

即使对于 $V \equiv 0$，上述结果也是新的。注意，当 $V \equiv 0$ 且 Ω 是单位球 $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$，其边界为 $M = S^n$ 时，该估计是尖锐的。在这种情况下，Steklov 特征函数 $e_\lambda(x) = r^k e_k(\omega)$ 在极坐标 $r \in [0, 1]$、$\omega \in S^n$ 下表示为，其中 $\lambda^2 = k(k + n - 1)$，$k \in \mathbb{N}$，且 $e_k(\omega)$ 是一个 k 次球谐函数，也就是说，它是 S^n 上 k 次齐次调和多项式的限制。显然可见

$$\|e_\lambda\|_{L^p(B(0,1))} \approx \lambda^{-\frac{1}{p}} \|e_\lambda\|_{L^p(S^n)}. \tag{1.3}$$

球面上拉普拉斯特征函数的以下 L^p 估计是尖锐的 S^n

$$\|e_\lambda\|_{L^p(S^n)} \lesssim \lambda^{\sigma(p)} \|e_\lambda\|_{L^2(S^n)}, \tag{1.4}$$

并且，带状球谐函数在 $p \geq {}^{2}{}_{(n+1)\ n-1}$ 处达到等号，最高权球谐函数在 $p \leq {}^{2}{}_{(n+1)\ n-1}$ 处达到等号（例如参见 [47, 49]）。因此，结合（1.3）和（1.4），可知（1.2）是尖锐的。

这一结果的动机是探究 Steklov 特征函数集中在边界附近、并在远离边界处迅速衰减这一特性（例如参见 [29], [39], [14], [23]）。受椭圆型逆边值问题（如 Calderón问题）（例如参见 [8], [35]）的启发，Hislop-Lutzer [29] 证明，对于任意紧集 $K \subset \Omega$,

$$\|e_\lambda\|_{L^2(K)} \leq C_N \lambda^{-N} \|e_\lambda\|_{L^2(M)}, \ \forall N.$$

这一界反映了这样一个事实：随着特征值增大，Steklov 特征函数变得高度振荡，因此会在远离边界处迅速衰减。Hislop-Lutzer [29] 猜想这种衰减实际上是 $e^{-\lambda d_g(K,\ \partial\Omega)}$ 阶的。通过考察单位球$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的情形可以看出，这种指数衰减是最优的。对于实解析曲面（$n = 1$），Polterovich-Sher-Toth [39] 证实了这一点，而特征函数的衰减也是他们关于节点线长度的主要结果中的一个关键特征。他们证明，对于任意具有边界 $M = \partial\Omega$ 的实解析紧黎曼曲面 Ω，以及任意紧集 $K \subset \Omega$，都存在常数 C、$c > 0$，使得

$$\|e_\lambda\|_{L^\infty(K)} \leq C e^{-c\lambda d_g(K,\partial\Omega)} \|e_\lambda\|_{L^2(M)}.$$

他们的方法仅适用于实解析曲面的情形。M. Taylor 向他们介绍了另一种证明这一界的方法。最近，Galkowski-Toth [23]证实了 Hislop-Lutzer猜想对于高维实解析流形成立。此外，这一有趣的集中现象还与特征函数在子流形上的限制估计有关（例如参见 [5], [6], [48], [54]）

在第二个结果中，我们证明节点集测度的如下下界

$$N_\lambda = \{x \in M : e_\lambda(x) = 0\}.$$

定理 2. 若 $V \in Lip^1(M)$，且零是 e_λ 的正则值，则

$$|N_\lambda| \gtrsim \lambda^{\frac{3-n}{2}}.$$

当 $V \equiv 0$ 时，该结果归功于 Wang-Zhu [59], ，其证明思路源自 Sogge-Zelditch[51]。Lipschitz假设用于确保特征函数属于 C^1，从而使 ∇e_λ 在节点集上的限制有意义。假设零是正则值，则是为了确保 Gauss-Green定理成立。

为证明这些定理，我们需要以下关键引理。顺便一提，不需要 Lipschitz势，只需有界势即可。

引理1. 若 $V \in L^\infty(M)$，则以下两个特征函数估计成立

$$\|e_\lambda\|_{L^p(M)} \lesssim \lambda^{\sigma(p)} \|e_\lambda\|_{L^2(M)}, \ 2 \le p \le \infty. \tag{1.5}$$

此外，

$$\|e_\lambda\|_{L^1(M)} \gtrsim \lambda^{-\frac{n-1}{4}} \|e_\lambda\|_{L^2(M)}. \tag{1.6}$$

对于光滑的 V，(1.5)由 Seeger-Sogge [42]证明。事实上，他们得到了满足主符号凸性假设的自伴椭圆伪微分算子的特征函数估计。在纯幂情形（即 $P_0 = 0$），我们三人曾在 [30, 注记1] 中陈述过(1.5)。(1.5)和(1.6)在 S^n上都是尖锐的。事实上，带状球谐函数或最高权球谐函数可以达到等号（例如参见 [47, 49]）。

引理2。如果 $V \in L^\infty(M)$，那么

$$\|e_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \lambda^{-1/p} \|e_\lambda\|_{L^p(M)}, \ 2 \le p \le \infty. \tag{1.7}$$

端点 $p = \infty$ 由最大值原理得出，因为 e_λ 在Ω中是调和的。另一个端点 $p = 2$ 可由迹定理和标准正则性估计得到。然后，通过在Ω上对调和延拓算子应用插值论证，即可证明(1.7)。由(1.3)可知，当$\Omega = B(0, 1)$时，估计(1.7)是尖锐的。

本文结构安排如下。第 2 节证明后文将用到的尖锐热核估计。第 3 节证明引理1。第 4 节证明紧流形上伪微分算子的若干核估计。第 5 节证明定理 1 中的内部特征函数估计。第 6 节证明定理 2 中节点集的大小估计。

在全文中，$X \lesssim Y$（或 $X \gtrsim Y$）表示对于某个与 λ 无关的正常数 C，有 $X \le CY$（或 $X \ge CY$）。该常数可能依赖于 V 和定义域 Ω。$X \approx Y$ 表示 $X \lesssim Y$ 和 $X \gtrsim Y$。

2. Heat kernel bounds

在本节中，我们证明以下算子的热核估计

$$H_V = (-\Delta_g)^{\alpha/2} + P_{\alpha-1} + V,$$

其中， $P_{\alpha-1}$是一个阶为 $\alpha-1$的经典伪微分算子，实值势 V属于闭流形（M， g）上的Kato类。这些结果推广了Gimperlein- Grubb [25, 定理4.3]的结果。当 $P_{\alpha-1}=0$时，欧几里得版本已在 [10] 和 [52]中得到证明。我们利用Duhamel原理和Picard迭代，对紧流形上的这一特殊情形给出了详细证明。随后，我们对这一论证稍作修改，从而得到 H_V的热核上界。尽管我们主要定理中的势仅为有界函数，但我们在最小假设下证明了热核估计，以便将其用于相关研究。

定义 **1.** 对于 $n \geq 2$ 和 $0<\alpha<2$，如果势 V属于Kato类 $\mathcal{K}_\alpha$（M），则称

$$\lim_{r\downarrow 0} \sup_{x\in M} \int_{B_r(x)} d_g(x,y)^{\alpha-n}|V(y)|dy = 0 \tag{2.1}$$

其中， $d_g(\cdot,\cdot)$表示测地距离， $B_r(x)$表示以 x 为中心、半径为 r 的测地球，而 dy表示(M,g)上的体积元。为定义 $n=1$ 和 $0<\alpha<2$的Kato类，我们将(2.1)中的函数 $d_g(x,y)^{\alpha-n}$ 替换为

$$w(x,y) = \begin{cases} d_g(x,y)^{\alpha-1}, & \alpha<1 \\ \log(2+d_g(x,y)^{-1}), & \alpha=1 \\ 1, & \alpha>1. \end{cases}$$

由于 M是紧的，我们有 $\mathcal{K}_\alpha(M) \subset L^1(M)$；对任意$p>\frac{n}{\alpha}$，由H¨older不等式可得 $L^p(M) \subset \mathcal{K}_\alpha(M)$。我们回顾一下，假设 $V\in\mathcal{K}_\alpha(M)$意味着算子$H_V=(-\Delta_g)^{\alpha/2}+V$是自伴且有下界。参见 [30, Proposition2]的证明。只要 $P_{\alpha-1}$ 是自伴的，同样的论证仍可用于证明 $H_V=(-\Delta_g)^{\alpha/2}+P_{\alpha-1}+V$是自伴且有下界。

命题 **1.** 设 $n\geq 1$、 $0<\alpha<2$ 和 $t>0$。设 $p^V(t,x,y)$ 为 $H_V=(-\Delta_g)^{\alpha/2}+V$ 的热核，其中 $V\in\mathcal{K}_\alpha(M)$。则对于任意 $t\in(0,1]$, $x,y\in M$

$$p^V(t,x,y) \approx q_\alpha(t,x,y) \tag{2.2}$$

其中 $q_\alpha(t,x,y)=\min\{t^{-n/\alpha},\ td_g(x,y)^{-n-\alpha}\}$。此外，对于任意 $t>0$、 x、 $y\in M$

$$e^{-C_1 t}q_\alpha(t,x,y) \lesssim p^V(t,x,y) \lesssim e^{C_2 t}q_\alpha(t,x,y) \tag{2.3}$$

对于某些常数 C_1、 $C_2>0$。

命题 **2.** 设 $n\geq 1$、 $0<\alpha<2$ 和 $t>0$。设 $p^V(t,x,y)$ 为 $H_V=(-\Delta_g)^{\alpha/2}+P_{\alpha-1}+V$ 的热核，其中 $V\in\mathcal{K}_\alpha(M)$，且 $P_{\alpha-1}$ 是一个阶为 $\alpha-1$ 的经典伪微分算子。则对于任意 $t>0$、 x、 $y\in M$

$$|p^V(t,x,y)| \lesssim e^{Ct}q_\alpha(t,x,y). \tag{2.4}$$

对于某个常数 $C>0$。

以下关键引理在 [3, 定理 4] 和 [58, 命题 2.4] 中称为 3P不等式。我们指出，这种 3P不等式对所有 $\alpha\in(0,2)$ 都成立，但对高斯核（$\alpha=2$）不成立。

引理 3. 对任意 s、$t>0$和 x，有 $yz\in M$

$$q_\alpha(t,x,z)q_\alpha(s,z,y)\le Cq_\alpha(s+t,x,y)(q_\alpha(t,x,z)+q_\alpha(s,z,y)),$$

其中 $C>0$ 是一个常数。

证明。证明很直接。事实上，利用以下事实：对于 $A,B>0$

$$\min\{A,B\}\approx\frac{AB}{A+B},$$
$$(A+B)^{\frac{n}{\alpha}}\approx A^{\frac{n}{\alpha}}+B^{\frac{n}{\alpha}},$$

以及三角不等式 $d_g(x,y)\le d_g(x,z)+d_g(z,y)$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{q_\alpha(t,x,z)+q_\alpha(s,z,y)}{q_\alpha(t,x,z)q_\alpha(s,z,y)}&=\frac{1}{q_\alpha(t,x,z)}+\frac{1}{q_\alpha(s,z,y)}\\&\approx t^{\frac{n}{\alpha}}+t^{-1}d_g(x,z)^{n+\alpha}+s^{\frac{n}{\alpha}}+s^{-1}d_g(z,y)^{n+\alpha}\\&\approx(t+s)^{\frac{n}{\alpha}}+t^{-1}d_g(x,z)^{n+\alpha}+s^{-1}d_g(z,y)^{n+\alpha}\\&\ge(t+s)^{\frac{n}{\alpha}}+(s+t)^{-1}(d_g(x,z)^{n+\alpha}+d_g(z,y)^{n+\alpha})\\&\approx(t+s)^{\frac{n}{\alpha}}+(s+t)^{-1}(d_g(x,z)+d_g(z,y))^{n+\alpha}\\&\ge(t+s)^{\frac{n}{\alpha}}+(s+t)^{-1}d_g(x,y)^{n+\alpha}\\&\approx\frac{1}{q_\alpha(s+t,x,y)}.\end{aligned}$$

隐含常数可能依赖于 n 和 α。引理 3 的证明至此完成 . □

命题 1 的证明。容易看出，(2.3) 可由 (2.2) 和半群性质推出。因此，只需证明 (2.2)。

由于 (M,g) 是一个闭流形，$-\Delta_g$ 的热核满足双边估计（参见 Li-Yau [34]、Sturm [53]、Saloff-Coste [40]）

$$t^{-n/2}e^{-C_1d_g(x,y)^2/t}\lesssim p_t(x,y)\lesssim t^{-n/2}e^{-C_2d_g(x,y)^2/t},\ t>0,\ x,y\in M$$

对于某些常数 $C_1,C_2>0$。此外，众所周知，半群 $e^{t\Delta_g}$ 和 $e^{-t(-\Delta_g)^{\alpha/2}}$通过次 subordinación 公式相关（例如参见 [25, (4.8)], [27], [60]），由此可知，$H^0=(-\Delta_g)^{\alpha/2}$ 的热核是连续的，并满足双边估计（例如参见 [25, 定理4.2], [4, 定理3.1]）

$$C^{-1}q_\alpha(t,x,y)\le p_0(t,x,y)\le Cq_\alpha(t,x,y),\ t>0,\ x,y\in M. \tag{2.5}$$

热核 $p_0(t,x,y)$ 是 $f\to e^{-tH^0}f=u^0(t,x)$ 的 Schwartz 核，而后者满足热方程

$$\begin{cases}(\partial_t+H^0)u^0(t,x)=0,\ \ (t,x)\in(0,\infty)\times M,\\ u^0|_{t=0}=f.\end{cases} \tag{2.6}$$

类似地，热核 $p^V(t,x,y)$ 是 $f\to e^{-tH_V}f=u_V(t,x)$ 的 Schwartz 核，它满足热方程

$$\begin{cases}(\partial_t+H_V)u_V(t,x)=0,\ \ (t,x)\in(0,\infty)\times M,\\ u_V|_{t=0}=f.\end{cases} \tag{2.7}$$

注意到 (2.6) 和 (2.7) 意味着

$$(\partial_t + H^0)(e^{-tH_V} f - e^{-tH^0} f) = -V(x)e^{-tH_V} f$$

and

$$(e^{-tH_V} f - e^{-tH^0} f)|_{t=0} = 0.$$

根据热方程的 Duhamel原理，我们有

$$\begin{aligned} e^{-tH_V} f - e^{-tH^0} f &= -\int_0^t e^{-(t-r)H^0}(Ve^{-rH_V} f)dr \\ &= -\int_0^t \int_M \int_M p_0(t-r,x,z)V(z)p^V(r,z,y)f(y)dydzdr. \end{aligned}$$

其中， dy 和 dz 表示（M, g）上的体积元。因此， H_V 的热核满足积分方程

$$p^V(t,x,y) = p_0(t,x,y) - \int_0^t \int_M p_0(t-r,x,z)p^V(r,z,y)V(z)dzdr. \tag{2.8}$$

为证明 (2.2)，我们使用 Picard迭代（例如参见 [3], [58]）来构造 (2.8) 的解。对于$t > 0$, $x, y \in M$，令

$$p_m(t,x,y) = p_0(t,x,y) - \int_0^t \int_M p_0(t-r,x,z)p_{m-1}(r,z,y)V(z)dzdr, \quad m \geq 1. \tag{2.9}$$

此外，令

$$\Theta_m(t,x,y) = p_m(t,x,y) - p_{m-1}(t,x,y), \quad m \geq 1$$

且 $\Theta_0(t,x,y) = p_0(t,x,y)$。显然,

$$\Theta_m(t,x,y) = -\int_0^t \int_M p_0(t-r,x,z)V(z)\Theta_{m-1}(r,z,y)dzdr. \tag{2.10}$$

我们断言，存在某个常数 $c_0 > 0$ 以及 $c(t) > 0$

$$|\Theta_m(t,x,y)| \leq (c_0 c(t))^m p_0(t,x,y), \quad m \geq 0. \tag{2.11}$$

为证明这一断言，我们定义

$$c(t) = \sup_{y\in M} \int_0^t \int_M q_\alpha(r,y,z)|V(z)|dzdr. \tag{2.12}$$

显然， V 属于 Kato类意味着

$$\lim_{t\downarrow 0} c(t) = 0. \tag{2.13}$$

事实上，对于 $n \geq 2$,

$$\int_0^t \int_M q_\alpha(r,y,z)|V(z)|dzdr \lesssim \int_{d_g(z,y)<t^{\frac{1}{2\alpha}}} d_g(z,y)^{\alpha-n}|V(z)|dz + \int_M t d_g(z,y)^{\alpha-n}|V(z)|dz,$$

根据定义 (2.1)，这意味着 (2.13) 成立。 $n = 1$ 的情形类似。

Th对于 $m=0$，断言 (2.11) 显然成立。若该断言对 $m-1$ 成立，则由 (2.10) 可得

$$\begin{aligned}|\Theta_m(t,x,y)| &\le (c_0c(t))^{m-1}\int_0^t\int_M p_0(t-r,x,z)p_0(r,z,y)|V(z)|dzdr\\ &\le C(c_0c(t))^{m-1}\int_0^t\int_M p_0(t,x,y)(p_0(t-r,x,z)+p_0(r,z,y))|V(z)|dzdr\\ &\le 2C^2(c_0c(t))^{m-1}p_0(t,x,y)\sup_{y\in M}\int_0^t\int_M q_\alpha(r,y,z)|V(z)|dzdr\\ &= \frac{2C^2}{c_0}(c_0c(t))^m p_0(t,x,y)\end{aligned}$$

其中我们使用了引理 3 和 (2.5) 中的上界。这里 $C>0$ 是一个与m、 s、 t、 x、 y、 z无关的常数。因此，我们可以固定 $c_0\ge 2C^2$，并通过归纳法证明断言 (2.11)。

由 (2.13)，存在 $0<t_0<1$，使得对于任意 $t\in(0,t_0]$，都有 $c_0c(t)\le\frac{1}{3}$。令

$$p^V(t,x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\Theta_m(t,x,y),\quad t\in(0,t_0],\ x,y\in M.$$

该级数一致收敛，并且

$$|p^V(t,x,y)-p_0(t,x,y)|\le\sum_{m=1}^{\infty}|\Theta_m(t,x,y)|\le\frac{c_0c(t)}{1-c_0c(t)}p_0(t,x,y)\le\frac{1}{2}p_0(t,x,y).$$

将此与 (2.5) 结合，可得

$$p^V(t,x,y)\approx q_\alpha(t,x,y),\quad t\in(0,t_0]. \tag{2.14}$$

在 (2.9) 中令 $m\to\infty$，即可得到当 $t\in(0,t_0]$时的 (2.8)。

此外，当 $t\in(0,t_0]$时， $p^V(t,x,y)$ 是满足 (2.14) 的积分方程 (2.8) 的唯一解。事实上，设 $\tilde{p}(t,x,y)$ 是满足 (2.14) 的另一个解，且 $\Theta=p^V-\tilde{p}$。注意，对某个常数 $C>0$，有$|\Theta(t,x,y)|\le Cp_0(t,x,y)$。于是，运用上述相同的归纳论证可得

$$|\Theta(t,x,y)|\le C(c_0c(t))^m p_0(t,x,y),\ \forall m\ge 0.$$

令 $m\to\infty$，可得 $\Theta(t,x,y)=0$，其中 $t\in(0,t_0]$。

对于 $t>t_0$，我们递归定义

$$p^V(t,x,y)=\int_M p^V(t/2,x,z)p^V(t/2,z,y)dz.$$

然后将 $p^V(t,x,y)$ 延拓为定义在 $(0,\infty)\times M\times M$ 上的联合连续函数。此外，估计式 (2.14) 可递归延拓为

$$p^V(t,x,y)\approx q_\alpha(t,x,y),\quad t\in(0,1].$$

这就完成了命题 1 的证明。

命题 2 的证明。证明与命题 1 类似。根据半群性质，只需证明$t\in(0,1]$ 的 (2.4)。如果将 (2.5) 替换为 $H^0=(-\Delta_g)^{\alpha/2}+P_{\alpha-1}$ 的热核估计，则上述论证对 (2.4) 仍然成立（见 [25, 定理4。3]）

$$|p_0(t,x,y)|\le Cq_\alpha(t,x,y),\quad t\in(0,1],\ x,y\in M.$$

3. Global eigenfunction estimates: proof of Lemma 1

为证明引理1，我们首先给出以下预解式估计。

命题3. 对于 $\lambda \geq 1$，我们有

$$\|(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1}\|_{L^2 \to L^p} \lesssim \lambda^{\sigma(p)},\ 2 < p \leq \tfrac{2(n+1)}{n-1}, \tag{3.1}$$

其中

$$\sigma(p) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}), & 2 \leq p < \frac{2(n+1)}{n-1} \\ \frac{n-1}{2} - \frac{n}{p}, & \frac{2(n+1)}{n-1} \leq p \leq \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

证明。对于 $k \in \mathbb{N}$，令 $\chi_{[k,k+1)}$ 表示对应于谱区间 $[k, k+1)$ 的 $\sqrt{-\Delta_g}$ 谱投影算子，并令 $\chi_{[2[\lambda],\infty)}$ 表示投影到区间 $[2[\lambda], \infty)$ 上的谱投影算子，其中 $[\lambda]$ 表示小于 λ 的最大整数。那么对于任意函数 f，由柯西-施瓦茨不等式

$$\begin{aligned} (\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} f &= \sum_{k<2[\lambda]} \frac{1}{k-(\lambda+i)} (k-(\lambda+i))(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} \chi_{[k,k+1)} f \\ &\quad + \chi_{[2[\lambda],\infty)} (\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} f \\ &\lesssim \Big(\sum_{k<2[\lambda]} \big| (k-(\lambda+i))(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} \chi_{[k,k+1)} f \big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \big| \chi_{[2[\lambda],\infty)} (\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} f \big| \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此，由闵可夫斯基不等式

$$\begin{aligned} \|(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} f\|_{L^p} &\leq \Big(\sum_{k<2[\lambda]} \|(k-(\lambda+i))(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} \chi_{[k,k+1)} f\|_{L^p}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|\chi_{[2[\lambda],\infty)} (\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} f\|_{L^p} \end{aligned} \tag{3.4}$$

为处理右侧的第一项，注意到 $\chi_{[k,k+1)} = \chi_{[k,k+1)} \circ \chi_{[k,k+1)}$，并根据 [44], 中的经典结果

$$\|\chi_{[k,k+1)} f\|_{L^p} \lesssim (1+k)^{\sigma(p)} \|f\|_{L^2} \lesssim \lambda^{\sigma(p)} \|f\|_{L^2},\ \text{if } k < 2[\lambda]. \tag{3.5}$$

因此，

$$\begin{aligned} &\sum_{k<2[\lambda]} \|(k-(\lambda+i))(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} \chi_{[k,k+1)} f\|_{L^p}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \lesssim \lambda^{\sigma(p)} \sum_{k<2[\lambda]} \|(k-(\lambda+i))(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} \chi_{[k,k+1)} f\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \lesssim \lambda^{\sigma(p)} \sum_{k<2[\lambda]} \|\chi_{[k,k+1)} f\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \lesssim \lambda^{\sigma(p)} \|f\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中在第二个不等式中，我们用到了谱定理，即:

$$\|(k-(\lambda+i))(\sqrt{-\Delta_g} - (\lambda+i))^{-1} \chi_{[k,k+1)} f\|_{L^2} \lesssim \|\chi_{[k,k+1)} f\|_{L^2},\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

为处理第二项，我们利用 Sobolev估计可知：

$$\begin{aligned}(3.8)\qquad &\|\chi_{[2[\lambda],\infty)}(\sqrt{-\Delta_g}-(\lambda+i))^{-1}f\|_{L^p}\\ &\lesssim \|\chi_{[2[\lambda],\infty)}(\sqrt{-\Delta_g})^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\sqrt{-\Delta_g}-(\lambda+i))^{-1}f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

当 $2<p\leq {}^{2}\!/_{(n+1)n-1}$ 时，容易验证 $n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})<1$，因此由谱定理，

$$(3.9)\qquad \|\chi_{[2[\lambda],\infty)}(\sqrt{-\Delta_g})^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\sqrt{-\Delta_g}-(\lambda+i))^{-1}f\|_{L^2}\lesssim\|f\|_{L^2},$$

这比 (3.1) 中所需的界更好。 □

现在我们来证明引理1，这可通过与 [2] 中类似的方法得到。回顾 $\mathcal{D}=\sqrt{-\Delta_g}+P_0$，利用第二预解式公式，我们有

$$\begin{aligned}(3.10)\quad (\mathcal{D}+V-(\lambda+i))^{-1}&=(\sqrt{-\Delta_g}-(\lambda+i))^{-1}\\ &\quad-(\sqrt{-\Delta_g}-(\lambda+i))^{-1}(P_0+V)(\mathcal{D}+V-(\lambda+i))^{-1}.\end{aligned}$$

由于 $P_0\in OPS^0$，且 $\mathcal{D}+V$ 的特征值均为实数，由谱定理可得

$$(3.11)\qquad \|P_0(\mathcal{D}+V-(\lambda+i))^{-1}\|_{L^2\to L^2}\lesssim\|(\mathcal{D}+V-(\lambda+i))^{-1}\|_{L^2\to L^2}\lesssim 1.$$

类似地，由于 $V\in L^\infty(M)$，我们有

$$(3.12)\qquad \|V(\mathcal{D}+V-(\lambda+i))^{-1}\|_{L^2\to L^2}\lesssim 1.$$

因此，由 (3.10)、(3.11)、(3.12) 和 (3.1) 可得

$$(3.13)\qquad \|(\mathcal{D}+V-(\lambda+i))^{-1}\|_{L^2\to L^p}\lesssim\lambda^{\sigma(p)},\ 2<p\leq\tfrac{2(n+1)}{n-1}.$$

若令 $\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}$ 表示与区间 $[\lambda,\lambda+1)$ 上的 $\sqrt{-\Delta_g}+P_0+V$ 相关联的谱投影算子，则由 (3.13) 可得

推论 1。令 $V\in L^\infty(M)$，则有

$$(3.14)\qquad \|\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}f\|_{L^p}\lesssim\lambda^{\sigma(p)}\|f\|_{L^2},\ 2<p\leq\infty.$$

注意，若在 (3.14) 中取 $f=e_\lambda$，并利用 $\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}e_\lambda=e_\lambda$ 这一事实，即可得到 (1.5)。

推论 1 的证明。若 $2<p\leq {}^{2}\!/_{(n+1)n-1}$，则令其中的 $f=\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}f$，并结合以下事实，即可由 (3.13) 得出

$$(3.15)\qquad \|(\mathcal{D}+V-(\lambda+i))\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}\|_{L^2\to L^2}\lesssim 1.$$

若 $p\geq {}^{2}\!/_{(n+1)n-1}$，我们将使用命题 2 中的热核估计。更明确地说，令 $H_V=\sqrt{-\Delta_g}+P_0+V$，注意若 $V\in L^\infty(M)$，则 (2.1) 成立，其中 $\alpha=1$，因此 $V\in\mathcal{K}_1(M)$；由命题 2 可知，这意味着对于 e^{-tH_V}，我们有核估计 (2.4)。因此，根据 (2.4) 和杨氏不等式，我们得到：

$$(3.16)\qquad \|e^{-tH_V}\|_{L^p(M)\to L^q(M)}\lesssim t^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},\quad \text{if } 0<t\leq 1,\text{ and } 1\leq p\leq q\leq\infty.$$

若固定 $t=\lambda^{-1}$ 和 $p_c=\frac{2(n+1)}{n-1}$，并应用上述界，则对于 $p>\frac{2(n+1)}{n-1}$，

$$\begin{aligned}\|\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}f\|_{L^p} &\lesssim \lambda^{n(\frac{1}{p_c}-\frac{1}{p})}\|e^{\lambda^{-1}H_V}\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}f\|_{L^{p_c}}\\ &= \lambda^{n(\frac{1}{p_c}-\frac{1}{p})}\|\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}e^{\lambda^{-1}H_V}\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}f\|_{L^{p_c}}\\ &\lesssim \lambda^{n(\frac{1}{p_c}-\frac{1}{p})}\lambda^{\frac{n-1}{2}-\frac{n}{p_c}}\|e^{\lambda^{-1}H_V}\chi^V_{[\lambda,\lambda+1)}f\|_{L^2}\\ &\lesssim \lambda^{\frac{n-1}{2}-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^2},\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中第三行在 $p=p_c$ 处应用了（3.14），最后一行应用了谱定理。由于当 $p\geq p_c$ 时 $\frac{n-1}{2}-\frac{n}{p}=\sigma(p)$，推论 1 的证明至此完成。 □

要证明引理1，还需证明（1.6）。利用 Sogge-Zelditch [51], 中的论证，我们注意到，（1.6）可由 H¨older 不等式和（ 1.5 ）推出

$$\|e_\lambda\|^{\frac{1}{\theta}}_{L^2(M)}\leq\|e_\lambda\|_{L^1(M)}\|e_\lambda\|^{\frac{1}{\theta}-1}_{L^p(M)}\lesssim\|e_\lambda\|_{L^1(M)}(\lambda^{\sigma(p)}\|e_\lambda\|_{L^2(M)})^{\frac{1}{\theta}-1}=\|e_\lambda\|_{L^1(M)}\lambda^{\frac{n-1}{4}}\|e_\lambda\|^{\frac{1}{\theta}-1}_{L^2(M)}.$$

Here $2<p<\frac{2(n+1)}{n-1}$, and $\theta=\frac{p}{p-1}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$.

4. Kernels of Pseudo-differential operators

本节证明一个有用的引理，该引理涉及紧流形上伪微分算子的核估计。

Le引理 4. 设 $\mu\in\mathbb{R}$，且 $m\in C^\infty(\mathbb{R})$ 属于符号类 S^μ，也就是说，假设 t *hat*

$$|\partial_t^\alpha m(t)|\leq C_\alpha(1+|t|)^{\mu-\alpha},\quad\forall\alpha. \tag{4.1}$$

如果 $P=\sqrt{-\Delta_g}$，那么 $m(P)$ 是一个 μ 阶伪微分算子。此外，如果 $R\geq 1$，则算子 $m(P/R)$ 的核对所有 $N\in\mathbb{N}$ 都满足

$$|m(P/R)(x,y)|\lesssim\begin{cases}R^n\big(Rd_g(x,y)\big)^{-n-\mu}\big(1+Rd_g(x,y)\big)^{-N}, & n+\mu>0\\ R^n\log(2+(Rd_g(x,y))^{-1})\big(1+Rd_g(x,y)\big)^{-N}, & n+\mu=0\\ R^n(1+Rd_g(x,y))^{-N}, & n+\mu<0.\end{cases} \tag{4.2}$$

证明 $m(P)$ 是一个 μ 阶伪微分算子的事实，请参见 [45, 定理 4.3.1] 。核的估计式 (4.2) 可视为紧流形上的重缩放版本，与 [55, 第 241] 页命题 1 中的欧几里得估计相对应。我们的意思是，这些估计在对角线附近成立（即 $d_g(x,y)$ 小于流形 M 的单射半径），而在对角线邻域之外，这些估计为 $O(R^{-N})$。粗略地说，忽略低阶项后，$m(P/R)(x,y)$ 等于

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}m(|\xi|/R)e^{id_g(x,y)\xi_1}d\xi$$

在对角线附近，它满足 (4.2) 中的估计；而在对角线的某个固定邻域之外， $m(P/R)(x,y)$ 为 $O(R^{-N})$。为求完整，我们使用 Hadamard参数子给出详细证明。

（4.2）的证明。由于 $P=\sqrt{-\Delta_g}$ 的谱非负，我们可以假设 m（t）是 $\mathbb{R}$上的偶函数。设 $\delta>0$ 小于（M,g）的单射半径。设 $\rho\in C_0^\infty$（$-1,1$)

为偶函数，并且在（$-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}$）上满足 $\rho\equiv 1$。因此我们可以写成

$$\begin{aligned} m(P/R) &= \frac{R}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{m}(tR)\cos(tP)dt \\ &= \frac{R}{2\pi}\int \rho(t)\hat{m}(tR)\cos(tP)dt + \frac{R}{2\pi}\int (1-\rho(t))\hat{m}(tR)\cos(tP)dt. \end{aligned} \tag{4.3}$$

为处理 (4.3) 中的第一项，我们需要使用 Hadamard参数子（例如参见 [46, 第 1.2 节和定理 3.1.5]）。对于 $0<t<\delta$ 和 $N_0>n+3$，我们有

$$\cos tP(x,y) = \sum_{\nu=0}^{N_0}\omega_\nu(x,y)\partial_t E_\nu(t,d_g(x,y)) + R_{N_0}(t,x,y) \tag{4.4}$$

其中首项

$$\partial_t E_0 = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{id_g(x,y)\xi_1}\cos(t|\xi|)d\xi \tag{4.5}$$

并且 E_ν 满足 $2\partial_t E_\nu = tE_{\nu-1}$，且对任意 $R>0$，$\partial_t E_\nu(t/R,r) = R^{n-2\nu}\partial_t E_\nu(t,Rr)$。这里，$\omega_\nu\in C^\infty(M\times M)$，且 $\omega_0(x,x)=1,\forall x\in M$。对于 $\nu\geq 1$，我们有如下显式公式（例如参见 [46, 第 1.2] 节）

$$\begin{aligned} E_\nu = \nu!(2\pi)^{-n}\int_{0\leq s_1\leq\ldots\leq s_\nu\leq t}\int_{\mathbb{R}^n} e^{id_g(x,y)\xi_1}\frac{\sin(t-s_\nu)|\xi|}{|\xi|}\frac{\sin(s_\nu-s_{\nu-1})|\xi|}{|\xi|}\cdot\ldots \\ \cdot\frac{\sin(s_2-s_1)|\xi|}{|\xi|}\frac{\sin s_1|\xi|}{|\xi|}d\xi ds_1\ldots ds_\nu. \end{aligned}$$

因此，对于 $\nu\geq 1$，我们可以得到（例如参见 [46, 第 1.2] 节）

$$\begin{aligned} \partial_t E_\nu = \tfrac{1}{2}tE_{\nu-1} &= \int e^{id_g(x,y)\xi_1}a_\nu(t,|\xi|)d\xi \\ &= \sum_{\pm}\sum_{j=0}^{\nu-1} a_{j\nu}^{\pm}\int e^{id_g(x,y)\xi_1\pm it|\xi|}t^{j+1}|\xi|^{-2\nu+1+j}d\xi, \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中 $a_{j\nu}^{\pm}$ 是常数，且 $a_\nu\in C^\infty$。余项核 $R_{N_0}\in C^{N_0-n-3}$ 满足

$$|\partial_{t,x,y}^\alpha R_{N_0}(t,x,y)| \lesssim |t|^{2N_0+2-n-|\alpha|},\quad |\alpha|\leq N_0-n-2. \tag{4.7}$$

接着将 (4.4) 代入 (4.3) 的第一项。我们先处理 (4.4) 中首项的贡献。根据 (4.5)，可写为

$$\begin{aligned} \frac{R}{2\pi}\iint \rho(t)\hat{m}(tR)\cos(t|\xi|)e^{id_g(x,y)\xi_1}dtd\xi = \int m(|\xi|/R)e^{id_g(x,y)\xi_1}d\xi + \\ \frac{R}{2\pi}\iint(1-\rho(t))\hat{m}(tR)\cos(t|\xi|)e^{id_g(x,y)\xi_1}dtd\xi := I_1+I_2. \end{aligned}$$

利用性质 (4.1) 和分部积分可知，对于任意 $N\in\mathbb{N}$

$$|I_1| \lesssim \begin{cases} R^n\big(Rd_g(x,y)\big)^{-n-\mu}\big(1+Rd_g(x,y)\big)^{-N}, & n+\mu>0 \\ R^n\log(2+(Rd_g(x,y))^{-1})\big(1+Rd_g(x,y)\big)^{-N}, & n+\mu=0 \\ R^n(1+Rd_g(x,y))^{-N}, & n+\mu<0 \end{cases} \tag{4.8}$$

and

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\lesssim \Big| R\iiint (1-\rho(t))(tR)^{-N} m^{(N)}(s) e^{-itRs}\cos(t|\xi|) e^{id_g(x,y)\xi_1} ds dt d\xi \Big| \\
&\lesssim R^{-N+1} \iint (1+||\xi|-R|s||)^{-N_1}(1+|s|)^{-N+\mu} ds d\xi \\
&\lesssim R^{-N} \int (1+|\xi|/R)^{-N+\mu} d\xi \\
&\lesssim R^{-N+n}. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

这里我们选择 $N_1 > N > n+\mu$。

类似地，我们可以处理式 (4.4) 中其余各项的贡献。对于每个 $\nu \geq 1$，我们可以写成

$$
\begin{aligned}
\frac{R}{2\pi}\int \rho(t)\hat{m}(tR)\partial_t E_\nu(t, d_g(x,y))dt = \frac{R}{2\pi}\int \hat{m}(tR)\partial_t E_\nu(t, d_g(x,y))dt - \\
\frac{R}{2\pi}\int (1-\rho(t))\hat{m}(tR)\partial_t E_\nu(t, d_g(x,y))dt := I_3 + I_4.
\end{aligned}
$$

利用缩放性质 $\partial_t E_\nu(t/R, r) = R^{n-2\nu}\partial_t E_\nu(t, Rr)$ 和公式 (4.6)，通过分部积分可得

$$
\begin{aligned}
|I_3| &= (2\pi)^{-1} R^{n-2\nu} \Big| \int \hat{m}(t)\partial_t E_\nu(t, Rd_g(x,y))dt \Big| \\
&= (2\pi)^{-1} R^{n-2\nu} \Big| \sum_{\pm}\sum_{j=0}^{\nu-1} a_{j\nu}^{\pm} \iint e^{iRd_g(x,y)\xi_1 \pm it|\xi|} \hat{m}(t) t^{j+1} |\xi|^{-2\nu+1+j} dt d\xi \Big| \\
&= R^{n-2\nu} \Big| \sum_{\pm}\sum_{j=0}^{\nu-1} i^{-j-1} a_{j\nu}^{\pm} \int e^{iRd_g(x,y)\xi_1} m^{(j+1)}(\pm|\xi|)|\xi|^{-2\nu+1+j} d\xi \Big| \\
&\lesssim R^{n-2\nu}(1+Rd_g(x,y))^{-N} + \sum_{j=0}^{\nu-1} \Big| \int e^{iRd_g(x,y)\xi_1} m^{(j+1)}(|\xi|)|\xi|^{-2\nu+1+j}\varphi(|\xi|) d\xi \Big| \qquad (4.10) \\
&\lesssim \begin{cases} R^{n-2\nu}\big(Rd_g(x,y)\big)^{-n-\mu}\big(1+Rd_g(x,y)\big)^{-N}, & n+\mu > 0 \\ R^{n-2\nu}\log(2+(Rd_g(x,y))^{-1})\big(1+Rd_g(x,y)\big)^{-N}, & n+\mu = 0 \\ R^{n-2\nu}(1+Rd_g(x,y))^{-N}, & n+\mu < 0 \end{cases} \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

其中，$\varphi \in C^\infty$ 在原点附近为零，而在无穷远处附近等于一。(4.10) 中的第一项由 a_ν 在 (4.6) 中于 $\xi = 0$ 附近的光滑性以及分部积分得到。此外，

$$
\begin{aligned}
|I_4| &\lesssim \sum_{\pm}\sum_{j=0}^{\nu-1} \Big| R\iiint (1-\rho(t))(tR)^{-N} m^{(N+j+1)}(s) e^{-itRs} e^{id_g(x,y)\xi_1 \pm it|\xi|} \phi_{j\nu}(|\xi|) d\xi ds dt \Big| \\
&\lesssim R^{-N+1} \iint (1+||\xi|-R|s||)^{-N_1}(1+|s|)^{-N+\mu} ds d\xi \\
&\lesssim R^{-N} \int (1+|\xi|/R)^{-N+\mu} d\xi \\
&\lesssim R^{-N+n}. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

(4.4) 中的余项 R_{N_0} 很容易处理。事实上，对于 $n+\mu<N\leq N_0-n-2$，利用 (4.7) 分部积分可得

$$\begin{aligned}\Big|\frac{R}{2\pi}\int\rho(t)\hat{m}(tR)R_{N_0}(t,x,y)dt\Big| &\lesssim R^{-N+1}\Big|\iint\rho(t)t^{-N}R_{N_0}(t,x,y)m^{(N)}(s)e^{-itRs}dsdt\Big|\\ &\lesssim R^{-N+1}\int(1+R|s|)^{-N}(1+|s|)^{\mu-N}ds\\ &\lesssim R^{-N+1}. \end{aligned}\tag{4.13}$$

为处理 (4.3) 中的第二项，我们注意到，对于 $\lambda\geq 0$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{R}{2\pi}\int(1-\rho(t))\hat{m}(tR)\cos(t\lambda)dt\Big| &\lesssim \Big|R\iint(1-\rho(t))(tR)^{-N}m^{(N)}(s)e^{-itRs}\cos(t\lambda)dtds\Big|\\ &\lesssim R^{-N+1}\int(1+|\lambda-R|s||)^{-N_1}(1+|s|)^{-N+\mu}ds\\ &\lesssim R^{-N}(1+\lambda/R)^{-N+\mu}.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\Big|\frac{R}{2\pi}\int(1-\rho(t))\hat{m}(tR)\cos(tP)(x,y)dt\Big| &\lesssim R^{-N}\sum_j(1+\lambda_j/R)^{-N+\mu}|e_j(x)e_j(y)|\\ &\lesssim R^{-N}\sum_k(1+k/R)^{-N+\mu}\sum_{\lambda_j\in[k,k+1)}|e_j(x)e_j(y)|\\ &\lesssim R^{-N}\sum_k(1+k/R)^{-N+\mu}(1+k)^{n-1}\\ &\lesssim R^{-N+n}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

这里我们使用了拉普拉斯特征函数的 L^∞ 界（例如参见 [45, 引理 4.2.4]）

$$\sum_{\lambda_j\in[k,k+1)}|e_j(x)e_j(y)|\lesssim\sup_{x\in M}\sum_{\lambda_j\in[k,k+1)}|e_j(x)|^2\lesssim(1+k)^{n-1}.$$

结合估计 (4.8)、(4.9)、(4.11)、(4.12)、(4.13) 和 (4.14)，证明完毕。

5. Interior Eigenfunction estimates

本节证明定理 1 中的特征函数估计。我们只需证明引理2，随后由引理1中的 L^p 界即可推出定理 1。为此，我们将使用以下引理。

引理 5. 对任意 $f\in H^{1/2}(\partial\Omega)$，令 $u\in H^1(\Omega)$ 为狄利克雷边值问题 (1.1) 的弱解。则存在常数 $C>0$，使得

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}.\tag{5.1}$$

该引理已在 [14, 命题 2.17] 中证明。它由迹定理和标准正则性估计推出（例如参见 [28, 定理 1.5.1.2、定理1.5.1.3、推论2.2.2.4、推论2.2.2.6]）。

引理 6. 设 $Q\in OPS^0$。那么，对于 $1<p<\infty$，Q 在 L^p 上有界，即

$$\|Qf\|_{L^p}\leq C\|f\|_{L^p}.$$

这里， L^p 范数可以取在 $\mathbb{R}^n$ 和紧流形上。证明参见例如 [45, 定理 3.1.6、定理 4.3。1]

定理 1 的证明。只需考虑两种情况： $p=\infty$ 和 $p<\infty$。

情况 1： $p=\infty$。在这种情况下，由最大值原理（例如参见 [24, 定理 8.1]），由于 e_λ 在 Ω 中是调和函数，我们得到

$$\|e_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \lesssim \|e_\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \tag{5.2}$$

并且由于 $V\in L^\infty(M)$，根据引理1，我们有

$$\|e_\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega))} \lesssim \lambda^{\frac{n-1}{2}}\|e_\lambda\|_{L^2(\partial\Omega))},$$

由此可得，在情况 $p=\infty$ 下，(1.2) 成立。

情况 2： $p<\infty$。在这种情况下，我们固定一个满足以下条件的 Littlewood-Paley 鼓包函数 $\beta\in C_0^\infty((1/2,2))$

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\beta(2^{-\ell}s)=1,\quad s>0.$$

并定义

$$\beta_0(s)=1-\sum_{\ell>0}\beta(2^{-\ell}|s|),\ \ \beta_\ell(s)=\beta(2^{-\ell}|s|),\ \text{ for }\ \ell>0.$$

设 $P=\sqrt{-\Delta_g}$。则对于 $\ell\geq 0$，我们有

$$\|\beta_\ell(P)f\|_{L^p(\partial\Omega))}\lesssim\|f\|_{L^p(\partial\Omega))},\ 1\leq p\leq\infty. \tag{5.3}$$

隐　式常数与 ℓ 无关。事实上，由引理 4 可得核估计 es

$$|\beta_\ell(P)(x,y)|\lesssim 2^{n\ell}(1+2^\ell d_g(x,y))^{-N}.$$

由杨氏不等式可得 (5.3)。

令 T_H 为从 $\partial\Omega$ 到 Ω 的调和延拓算子。由引理 5，我们有 e

$$\|T_H(\beta_\ell(P)f)\|_{L^2(\Omega)}\lesssim\|\beta_\ell(P)f\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\lesssim 2^{-\ell/2}\|f\|_{L^2(\partial\Omega)}. \tag{5.4}$$

由最大值原理和 (5.3)，我们得到

$$\|T_H(\beta_\ell(P)f)\|_{L^\infty(\Omega)}\lesssim\|\beta_\ell(P)f\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\lesssim\|f\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \tag{5.5}$$

由 (5.4)、(5.5) 和插值，我们得到频率局部化调和延拓算子的以下 L^p 估计

$$\|T_H(\beta_\ell(P)f)\|_{L^p(\Omega)}\lesssim 2^{-\frac{\ell}{p}}\|f\|_{L^p(\partial\Omega)},\ 2\leq p\leq\infty. \tag{5.6}$$

因此，若 $2^\ell\gtrsim\lambda$，则有

$$\|T_H(\sum_{2^\ell\gtrsim\lambda}\beta_\ell(P)e_\lambda)\|_{L^p(\Omega)}\lesssim\sum_{2^\ell\gtrsim\lambda}2^{-\frac{\ell}{p}}\|e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)}\lesssim\lambda^{-1/p}\|e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)}. \tag{5.7}$$

因此，只需考虑 $2^\ell\lesssim\lambda$。令 $\tilde\beta\in C_0^\infty$，其中 $\tilde\beta\equiv 1$ 在 (1/2, 2) 的某邻域内，并定义 $\tilde\beta_\ell(s)=\tilde\beta(2^{-\ell}|s|)$。由 (5.6) 得

$$\|T_H(\beta_\ell(P)e_\lambda)\|_{L^p(\Omega)}=\|T_H(\beta_\ell(P)\tilde\beta_\ell(P)e_\lambda)\|_{L^p(\Omega)}\lesssim 2^{-\frac{\ell}{p}}\|\tilde\beta_\ell(P)e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)}. \tag{5.8}$$

此外，对于 $2 \le p < \infty$

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde{\beta}_\ell(P) e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)} \\
&= (1+\lambda)^{-1} \|\tilde{\beta}_\ell(P)(1+\sqrt{-\Delta_g}+P_0+V) e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)} \\
&\lesssim (1+\lambda)^{-1} \|\tilde{\beta}_\ell(P)(1+\sqrt{-\Delta_g}) e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)} + (1+\lambda)^{-1} \|\tilde{\beta}_\ell(P)(P_0+V) e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)} \\
&\lesssim (1+\lambda)^{-1} 2^\ell \|e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)} + (1+\lambda)^{-1} \|e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

这里用到了 (5.3)、引理 6 以及以下事实： $V \in L^\infty$。利用 (5.8) 和 (5.9)，可得

$$
\|T_H(\sum_{2^\ell \lesssim \lambda} \beta_\ell(P) e_\lambda)\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \sum_{2^\ell \lesssim \lambda} (1+\lambda)^{-1} 2^\ell 2^{-\frac{\ell}{p}} \|e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)} \lesssim \lambda^{-1/p} \|e_\lambda\|_{L^p(\partial\Omega)}. \tag{5.10}
$$

由此得到引理 2 中的 (1.7)。利用引理 1 中的 L^p 界，即完成定理 1 的证明。

6. Measure of nodal set

本节证明定理 2 中的节点集估计。

首先，我们建立紧流形上索 Sobole夫空间的一些一般结果。这些结果将用于证明特征函数的正则性，也可能对今后的研究有所帮助，因此我们给出详细证明。

设 $s > 0$ 和 $1 < p < \infty$。我们可以通过局部坐标在 M 上定义索 Sobole夫范数

$$
\|f\|_{W^{s,p}(M)} = \sum_\nu \|(I-\Delta)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.1}
$$

其中 $f_\nu = (\phi_\nu f) \circ \kappa_\nu^{-1}$，且 $\{\phi_\nu\}$ 是从有限覆盖 $M = \cup \Omega_\nu$, and $\kappa_\nu : \Omega_\nu \to \Omega_\nu \subset \mathbb{R}^n$ 中取的单位分解； $\kappa_\nu : \Omega_\nu \to \Omega_\nu \subset \mathbb{R}^n$ 是坐标映射。为简单起见，我们有时不区分 between Ω_ν 和 Ω_ν, f_ν 和 $\phi_\nu f$，因为它们在坐标映射下完全相同。

此外，我们还可以通过伪微分算子定义另一种索 Sobole夫范数

$$
\|f\|_{H^{s,p}(M)} = \|(I-\Delta_g)^{s/2} f\|_{L^p(M)}. \tag{6.2}
$$

根据 [45, 定理 4.3.1],，我们可知 $(I-\Delta_g)^{s/2}$ 是一个阶为s、椭圆主符号为 $(\sum g^{jk}(x)\xi_j\xi_k)^{s/2}$ 的可逆伪微分算子。此外，若将 (6.2) 中的 $(I-\Delta_g)^{s/2}$ 替换为任意一个阶为 s 的可逆伪微分算子，根据引理 6，仍可得到一个等价范数。

我们证明这两种索 Sobole夫范数是等价的。

命题 4. 对于 $s > 0$ 和 $1 < p < \infty$，有

$$
\|f\|_{W^{s,p}(M)} \approx \|f\|_{H^{s,p}(M)}.
$$

隐含常数与 f 无关。

作为推论，定义 (6.1) 中不同的单位分解和此类坐标图册所给出的范数是等价的。当 $p = 2$ 时，命题 4 可由 Plancherel 定理以及零阶伪微分算子的 L^2-有界性推出，参见例如 [46, 第 4.2] 节。$p \neq 2$ 的情形更复杂，而且很难找到合适的参考文献。为自行证明这一点，我们从以下关键引理入手。粗略地说，该引理确立了任意两个同阶伪微分算子之间的“线性关系”。

¯引理 7. 设 $s > 0$。设 V_1、 V、Ω 为开集，满足 $V_1 \subset V \subset \Omega$。设 P_1、 $P \in OPS^s$ 的符号分别支撑在 V_1、 V 中，且¯。若 P 的主符号 $\bar{p}(x,\xi)$ 在 V_1 上是椭圆的，即，¯对任意 $x \in V_1$,

$$\bar{p}(x,\xi) \neq 0, \ \forall \xi \neq 0,$$

那么存在一个符号支撑于 V_1 的 $Q \in OPS^0$，使得

$$P_1 - QP \in OPS^0. \tag{6.3}$$

证明。设 $p_1(x,\xi)$ 是 P_1 在 Ω 上的符号。由于 $\bar{p}(x,\xi)$ 在 $p_1(x,\xi)$ 的支撑集上是椭圆的，我们有

$$\frac{\varphi(\xi)p_1(x,\xi)}{\bar{p}(x,\xi)} \in S^0 \tag{6.4}$$

其中 $\varphi \in C^\infty$ 在原点附近为零，而在无穷远处附近等于一。记相应的零阶伪微分算子为 Q_0。令 $R_{-1} = P_1 - Q_0 P$。那么根据 Kohn-Nirenberg 定理（例如参见 [45, 定理 3.1.1]），我们有 $R_{-1} \in OPS^{s-1}$。R_{-1} 的符号支撑于 V_1。若 $s \leq 1$，则令 $Q = Q_0$ 即可完成证明，因为 $P_1 - Q_0 P \in OPS^{s-1} \subset OPS^0$。

接下来，需要考虑 $s > 1$。令 $k = \lceil s \rceil \geq 2$。我们需要为 $1 \leq i \leq k-1$递归地构造 $Q_{-i} \in OPS^{-i}$、$R_{-i-1} \in OPS^{s-i-1}$。如果 $r_i(x,\xi)$ 是 R_{-i}的符号，且 Q_{-i}的符号为

$$\frac{\varphi(\xi)r_i(x,\xi)}{\bar{p}(x,\xi)} \in S^{-i}, \tag{6.5}$$

那么利用 Kohn-Nirenberg 定理可得 $R_{-i-1} = R_{-i} - Q_{-i}P \in OPS^{s-i-1}$。 R_{-i-1} 的符号支集包含于 V_1中。令

$$Q = \sum_{i=1}^{k-1} Q_{-i}.$$

Q的符号支集包含于 V_1中。于是 $P_1 - QP = R_{-k} \in OPS^{s-k} \subset OPS^0$。 □

命题 4 的证明。基本思路是验证以下两个等价关系

$$\|(I-\Delta_g)^{s/2} f\|_{L^p(M)} \approx \sum_\nu \|(I-\Delta_g)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(M)} \approx \sum_\nu \|(I-\Delta)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.6}$$

第一个等价关系是直接的。事实上，关系式 。由闵可夫斯基不等式可得。至于另一个方向，我们利用引理 6 可知

$$\begin{aligned} \|(I-\Delta_g)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(M)} &= \|(I-\Delta_g)^{s/2} M_{\phi_\nu} (I-\Delta_g)^{-s/2} ((I-\Delta_g)^{s/2} f)\|_{L^p(M)} \\ &\lesssim \|(I-\Delta_g)^{s/2} f\|_{L^p(M)}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

其中 M_{ϕ_ν} 表示乘以 $\phi_\nu(x)$ 的算子。将 (6.7) 对 ν 求和，即可得到 (6.6) 中的第一个等价关系。

为了证明 (6.6) 中的第二个等价关系，只需证明对于每个 ν

$$\|(I-\Delta_g)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(M)} \approx \|(I-\Delta)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.8}$$

对于 (6.1) 中的每个 Ω_ν，$\phi_\nu \in C_0^\infty(\Omega_\nu)$，我们都可以找到 Ω_ν 的开子集 V_ν，U_ν，W_ν，以及截断函数 $\psi_\nu \in C_0^\infty(V_\nu)$ $\psi_{\nu 1} \in C_0^\infty(U_\nu)$ $\psi_{\nu 2} \in C_0^\infty(W_\nu)$ $\eta_\nu \in C_0^\infty(\Omega_\nu)$，使得

$$\operatorname{supp} \phi_\nu \subset\subset U_\nu \subset V_\nu \subset\subset W_\nu$$

¯ ¯ ¯以及 $\psi_\nu \equiv 1$ 在 U_ν上， $\psi_{\nu 2} \equiv 1$ 在 V_ν 上， $\eta_\nu \equiv 1$ 在 W_ν上。

令 $P_\nu = \psi_\nu(I-\Delta)^{s/2}$, $P_{\nu 1} = \psi_{\nu 1}(I-\Delta_g)^{s/2}M_{\eta_\nu}$。我们看到 $M_{\eta_\nu} \in OPS^0$，并且 P_ν, $P_{\nu 1} \in OPS^s$。注意， P_ν 的主符号为 $\psi_\nu(x)|\xi|^s$，它在 U_ν上是椭圆的。根据引理 7，我们可以找到支撑于 U_ν 中的 $Q_{\nu 1} \in OPS^0$，使得

$$P_{\nu 1} - Q_{\nu 1}P_\nu \in OPS^0.$$

于是由引理 6 得到局部估计

$$\|P_{\nu 1}(f_\nu)\|_{L^p(\Omega_\nu)} = \|(P_{\nu 1} - Q_{\nu 1}P_\nu)(f_\nu) + Q_{\nu 1}P_\nu(f_\nu)\|_{L^p(\Omega_\nu)} \lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|P_\nu f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)}. \tag{6.9}$$

此外，若 $P_{\nu 2} = \psi_{\nu 2}(I-\Delta_g)^{s/2}M_{\eta_\nu}$，则 $P_{\nu 2}$的主符号为 $\psi_{\nu 2}(x)(\sum g^{jk}(x)\xi_j\xi_k)^{s/2}$，它在 V_ν上是椭圆的。类似地，将引理 7 应用于 P_ν 和 $P_{\nu 2}$，可得到局部估计

$$\|P_\nu(f_\nu)\|_{L^p(\Omega_\nu)} \lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|P_{\nu 2}f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)}. \tag{6.10}$$

接下来，我们处理非局部部分。记

$$(1-\psi_\nu)(I-\Delta)^{s/2}f_\nu = (1-\psi_\nu)(I-\Delta)^{s/2}(\phi_\nu\eta_\nu f) = (1-\psi_\nu)(I-\Delta)^{s/2}M_{\phi_\nu}(\eta_\nu f). \tag{6.11}$$

由于 $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(1-\psi_\nu), \operatorname{supp}\ \phi_\nu) = \delta_\nu > 0$，利用分部积分可知，$(1-\psi_\nu)(I-\Delta)^{s/2}M_{\phi_\nu}$ 的核满足

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}(1-\psi_\nu(x))e^{i(x-y)\cdot\xi}\phi_\nu(y)(1+|\xi|^2)^{s/2}d\xi\Big| \lesssim (1+|x-y|)^{-N},\ \forall N.$$

由杨氏不等式可得

$$\|(1-\psi_\nu)(I-\Delta)^{s/2}(f_\nu))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\eta_\nu f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)}. \tag{6.12}$$

类似地，利用紧流形上伪微分算子的核在对角线之外光滑这一事实，我们有

$$\|(1-\psi_{\nu 1})(I-\Delta_g)^{s/2}(f_\nu)\|_{L^p(M)} = \|(1-\psi_{\nu 1})(I-\Delta_g)^{s/2}(\phi_\nu\eta_\nu f)\|_{L^p(M)} \lesssim \|\eta_\nu f\|_{L^p(M)} = \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \tag{6.13}$$

and

$$\|(1-\psi_{\nu 2})(I-\Delta_g)^{s/2}(f_\nu)\|_{L^p(M)} \lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)}. \tag{6.14}$$

将（6.9）与非局部估计（6.12）和（6.13）结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}
\|(I-\Delta_g)^{s/2}f_\nu\|_{L^p(M)} &\lesssim \|(1-\psi_{\nu 1})(I-\Delta_g)^{s/2}f_\nu\|_{L^p(M)} + \|\psi_{\nu 1}(I-\Delta_g)^{s/2}f_\nu\|_{L^p(M)} \\
&\lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|\psi_{\nu 1}(I-\Delta_g)^{s/2}f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&= \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|P_{\nu 1}f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&\lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|P_\nu f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&= \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|(I-\Delta)^{s/2}f_\nu - (1-\psi_\nu)(I-\Delta)^{s/2}f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&\lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|(I-\Delta)^{s/2}f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|(I-\Delta)^{s/2}f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

这里在最后一步，我们将引理 6 应用于 $(I-\Delta)^{-s/2} \in OPS^0$。

类似地，结合式 (6.10) 与非局部估计 (6.12) 和 (6.14)，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|(I-\Delta)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|(1-\psi_\nu)(I-\Delta)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\psi_\nu (I-\Delta)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|\psi_\nu (I-\Delta)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&= \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|P_\nu f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&\lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|P_{\nu 2} f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&= \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|(I-\Delta_g)^{s/2} f_\nu - (1-\psi_{\nu 2})(I-\Delta_g)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} \\
&\lesssim \|f_\nu\|_{L^p(\Omega_\nu)} + \|(I-\Delta_g)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(M)} \\
&\lesssim \|(I-\Delta_g)^{s/2} f_\nu\|_{L^p(M)}.
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

在最后一步中，我们对 $(I-\Delta_g)^{-s/2} \in OPS^0$ 使用了引理 6。因此，(6.8) 的证明完成。由此，命题 4 的证明也告完成。

设 $[\mathcal{D}, V] = \mathcal{D}V - V\mathcal{D}$。我们需要以下交换子估计。

引理 8。设 $1 < p < \infty$。给定 $P \in OPS^1$，

$$\|[P, f]u\|_{L^p} \le C\|f\|_{\mathrm{Lip}^1}\|u\|_{L^p}.$$

这里，$\|f\|_{\mathrm{Lip}^1}$是 f的 Lipschitz 范数。

这里，L^p 范数可以取在 $\mathbb{R}^n$ 和紧流形上。参见 Taylor[57] 中的命题 1.3。该结果由 Calder´ 在 [7] 上针对经典一阶伪微分算子证明；Coifman-Meyer [11] 针对 OPS^1证明了该结果。

引理 9. 若 $V \in Lip^1(M)$，则 $e_\lambda \in C^{1,\alpha}(M)$，对任意 $0 < \alpha < 1$。

证明。由索伯列夫嵌入（例如参见 [19]），我们只需证明$\|e_\lambda\|_{W^{2,p}(M)} < \infty$ 对任意$1 < p < \infty$ 成立。事实上，利用引理 8 中的交换子估计以及方程 $(\mathcal{D}+V)e_\lambda = \lambda e_\lambda$，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{D}(Ve_\lambda)\|_{L^p(M)} &\le \|V(\mathcal{D}+V)e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|V^2 e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|[\mathcal{D}, V]e_\lambda\|_{L^p(M)} \\
&\lesssim \lambda\|V\|_{L^\infty}\|e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|V\|_{L^\infty}^2\|e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|V\|_{\mathrm{Lip}^1}\|e_\lambda\|_{L^p(M)} \\
&\lesssim (1+\lambda)\|e_\lambda\|_{L^p(M)}.
\end{aligned}
$$

因此，由命题 4 可得

$$
\begin{aligned}
\|e_\lambda\|_{W^{2,p}(M)} &\approx \|(1+\mathcal{D})^2 e_\lambda\|_{L^p(M)} \\
&\lesssim \|(1+\mathcal{D})(1+\mathcal{D}+V)e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|\mathcal{D}(Ve_\lambda)\|_{L^p(M)} + \|V\|_{L^\infty}\|e_\lambda\|_{L^p(M)} \\
&\lesssim (1+\lambda)(\|(1+\mathcal{D})e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|e_\lambda\|_{L^p(M)}) \\
&\le (1+\lambda)(\|(1+\mathcal{D}+V)e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|V\|_{L^\infty}\|e_\lambda\|_{L^p(M)} + \|e_\lambda\|_{L^p(M)}) \\
&\lesssim (1+\lambda)^2\|e_\lambda\|_{L^p(M)}.
\end{aligned}
$$

□

接下来，我们证明节点集估计。令

$$
\begin{aligned}
N_\lambda &= \{x \in M : e_\lambda(x) = 0\}, \\
D_+ &= \{x \in M : e_\lambda(x) > 0\},
\end{aligned}
$$

$$D_- = \{x \in M : e_\lambda(x) < 0\}.$$

我们有 $\partial D_\pm = N_\lambda$。首先，我们将流形 M 表示为（本质上）不相交的并

$$M = \bigcup_{j\geq 1} D_{j,+} \cup \bigcup_{j\geq 1} D_{j,-} \cup N_\lambda$$

其中 $D_{j,\ +}$ 和 $D_{j,\ -}$ 分别是 e_λ的正节点域和负节点域，即集合 D_+ 和 D_-的连通分支。为简单起见，我们假设只有两个节点域 D_+ 和 D_-。由于根据引理 9， ∇e_λ 是连续的，并且我们假设零是 e_λ的正则值，因此可以在每个边界为$\partial D_\pm$的节点域 $D_\pm$ 上应用 Gauss-Green定理。于是有

$$\int_{D_+} div(f\nabla e_\lambda) dV_g = \int_{N_\lambda} \langle f\nabla e_\lambda, \nu_-\rangle dS = -\int_{N_\lambda} f|\nabla e_\lambda| dS$$

$$\int_{D_-} div(f\nabla e_\lambda) dV_g = \int_{N_\lambda} \langle f\nabla e_\lambda, \nu_+\rangle dS = \int_{N_\lambda} f|\nabla e_\lambda| dS.$$

$$2\int_{N_\lambda} f|\nabla e_\lambda| = \int_{D_-} div(f\nabla e_\lambda) - \int_{D_+} div(f\nabla e_\lambda). \tag{6.17}$$

注意，根据柯西-施瓦茨不等式

$$\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda| \lesssim (\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda|^2)^{\frac{1}{2}} |N_\lambda|^{\frac{1}{2}}.$$

因此，要估计 $|N_\lambda|$的下界，只需估计 $\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda|$ 和 $\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda|^2$。

引理 10. 若 $V \in Lip^1(M)$，则

$$\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda| \geq \frac{\lambda^2}{4} \|e_\lambda\|_{L^1(M)}.$$

引理 11. 若 $V \in Lip^1(M)$，则

$$\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda|^2 \lesssim \lambda^3 \|e_\lambda\|_{L^2(M)}.$$

利用这两个引理和特征函数估计 (1.6)，我们得到定理 2 中节点集的下界

$$|N_\lambda| \gtrsim \lambda^{\frac{3-n}{2}}.$$

6.1. 引理 10 的证明。我们令 $f = 1$ in (6.17)。因此

$$2\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda| = \int_{D_-} \Delta_g e_\lambda - \int_{D_+} \Delta_g e_\lambda.$$

由于 $\sqrt{-\Delta_g} = \mathcal{D} - P_0$，我们有

$$-\Delta_g = (\mathcal{D}+V)^2 - (\mathcal{D}V - V\mathcal{D}) - 2V(\mathcal{D}+V) + V^2 - 2P_0(\mathcal{D}+V) + 2P_0V + Q_0,$$

其中 $Q_0 = P_0\mathcal{D} - \mathcal{D}P_0 + P_0^2 \in OPS^0$。因此,

$$\begin{aligned}2\int_{N_\lambda} |\nabla e_\lambda| &= \int_{D_+} - \int_{D_-} (\lambda^2 e_\lambda - [\mathcal{D}, V]e_\lambda - 2\lambda V e_\lambda + V^2 e_\lambda - 2\lambda P_0 e_\lambda + 2P_0 V e_\lambda + Q_0 e_\lambda)\\ &\geq \lambda^2 \|e_\lambda\|_{L^1(M)} - \|[\mathcal{D}, V]e_\lambda\|_{L^1(M)} - 2\lambda \|V e_\lambda\|_{L^1(M)} - \|V^2 e_\lambda\|_{L^1(M)}\\ &\qquad - 2\lambda \|P_0 e_\lambda\|_{L^1(M)} - 2\|P_0 V e_\lambda\|_{L^1(M)} - \|Q_0 e_\lambda\|_{L^1(M)}.\end{aligned}$$

由 H¨older 不等式和 (1.6)，可得

$$\|e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \lambda^{\frac{(n-1)\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}} \|e_\lambda\|_{L^1(M)},\ 0 < \varepsilon < 1.$$

结合此估计与引理 8，可得

$$\|[\mathcal{D}, V]e_\lambda\|_{L^1(M)} \lesssim \|[\mathcal{D}, V]e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \|V\|_{\mathrm{Lip}^1} \|e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \lambda \|V\|_{\mathrm{Lip}^1} \|e_\lambda\|_{L^1(M)},$$

if $\varepsilon > 0$ 足够小。此外，若 $\varepsilon > 0$ 足够小，则由引理 6 可得

$$\lambda \|V e_\lambda\|_{L^1(M)} \lesssim \lambda \|V\|_{L^\infty} \|e_\lambda\|_{L^1(M)}$$

$$\|V^2 e_\lambda\|_{L^1(M)} \lesssim \|V\|_{L^\infty}^2 \|e_\lambda\|_{L^1(M)}$$

$$\lambda \|P_0 e_\lambda\|_{L^1(M)} \lesssim \lambda \|P_0 e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \lambda \|e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \lambda^{\frac{3}{2}} \|e_\lambda\|_{L^1(M)}$$

$$\|P_0 V e_\lambda\|_{L^1(M)} \lesssim \|P_0 V e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \|V e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \lambda \|V\|_{L^\infty} \|e_\lambda\|_{L^1(M)}$$

$$\|Q_0 e_\lambda\|_{L^1(M)} \lesssim \|Q_0 e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \|e_\lambda\|_{L^{1+\varepsilon}(M)} \lesssim \lambda \|e_\lambda\|_{L^1(M)}.$$

因此，引理 10 的证明完成。

6.2. 引理 11 的证明。令 $f = \sqrt{1 + |\nabla e_\lambda|^2}$ 属于 (6.17)。然后

$$\begin{aligned}2\int_{N_\lambda} \sqrt{1 + |\nabla e_\lambda|^2}\, |\nabla e_\lambda| &= \int_{D_-} div(\sqrt{1 + |\nabla e_\lambda|^2} \nabla e_\lambda) - \int_{D_+} div(\sqrt{1 + |\nabla e_\lambda|^2} \nabla e_\lambda)\\ &\lesssim \int_M |div(\sqrt{1 + |\nabla e_\lambda|^2} \nabla e_\lambda)|\\ &\lesssim \int_M \sqrt{1 + |\nabla e_\lambda|^2}\, |\nabla^2 e_\lambda|\\ &\lesssim (\|e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|\nabla e_\lambda\|_{L^2(M)}) \|\nabla^2 e_\lambda\|_{L^2(M)}\\ &\lesssim \lambda^3 \|e_\lambda\|_{L^2(M)}.\end{aligned}$$

这里我们在最后一步使用特征函数的 Sobolev估计。事实上，我们有以下 Sobolev估计

$$\begin{aligned}\|\nabla e_\lambda\|_{L^2(M)} &\lesssim \|\mathcal{D} e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|e_\lambda\|_{L^2(M)}\\ &\leq \|(\mathcal{D} + V)e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|V e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|e_\lambda\|_{L^2(M)}\\ &\lesssim \lambda \|e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|V\|_{L^\infty} \|e_\lambda\|_{L^2(M)}\\ &\lesssim \lambda \|e_\lambda\|_{L^2(M)},\end{aligned}$$

同样，我们可以利用引理 8 得到

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 e_\lambda\|_{L^2(M)} &\lesssim \|\mathcal{D}^2 e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|\mathcal{D} e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|e_\lambda\|_{L^2(M)} \\ &\lesssim \|(\mathcal{D}+V)^2 e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|[\mathcal{D}, V] e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|V(\mathcal{D}+V) e_\lambda\|_{L^2(M)} + \\ &\quad \|V^2 e_\lambda\|_{L^2(M)} + \lambda \|e_\lambda\|_{L^2(M)} \\ &\lesssim \lambda^2 \|e_\lambda\|_{L^2(M)} + \lambda \|V\|_{\mathrm{Lip}^1} \|e_\lambda\|_{L^2(M)} + \|V\|_{L^\infty}^2 \|e_\lambda\|_{L^2(M)} \\ &\lesssim \lambda^2 \|e_\lambda\|_{L^2(M)}.\end{aligned}$$

至此，引理 11 得证。

Acknowledgements

Y.S. 部分获得美国国家科学基金会 DMS 资助项目 2154219 的资助。C.Z. 部分获得清华大学的启动经费资助。

References

[1] M. Blair、Y. Sire、C. Sogge，《具有临界奇异势的流形上 Schr¨odinger 算子的准模态、特征函数与谱投影界》，《几何分析杂志》31（2021），第 7 期，6624–6661。[2] M. D. Blair、X. Huang、Y. Sire 和 C. D. Sogge，《涉及奇异势的带边界紧流形上的一致 Sobolev 估计》。《伊比利亚美洲数学评论》38（2022），第 4 期，1239–1286。[3] K. Bogdan 和 T. Jakubowski，《梯度算子扰动的分数阶拉普拉斯算子的热核估计》，《数学物理通讯》271（2007），179–198。[4] K. Bogdan、A. St´os 和 P. Sztonyk，《d-集上稳定过程的 Harnack 不等式》，《数学研究》158（2003），163–198。[5] J Bourgain，《黎曼曲面拉普拉斯算子特征函数的测地线限制与 lp 估计》。《美国数学会汇刊》，226：27–25，2009。[6] N. Burq、P. Gerard 和 N. Tzvetkov，《拉普拉斯–贝尔特拉米特征函数在子流形上的限制》。《杜克数学杂志》138：445–486，2007。[7] A. Calderon，《奇异积分算子的交换子》，《美国国家科学院院刊》，美国 53（1965），1092–1099。[8] A. Calder´on，《一个反边界值问题》，《数值分析及其在连续介质物理中的应用研讨会》，巴西数学学会，里约热内卢，（1980），65–73。[9] R. Carmona、W. Masters 和 B. Simon，《相对论 Schr¨odinger 算子：特征函数的渐近行为》。《泛函分析杂志》91（1990），第 1 期，117–142。[10] Z.-Q. Chen、P. Kim 和 R. Song，《费曼–卡茨扰动下非局部算子的狄利克雷热核估计的稳定性》，《美国数学会汇刊》367.7（2015）：5237–5270。[11] R. Coifman 和 Y. Meyer，《奇异积分交换子与多线性算子》，《傅里叶研究所科学年刊》28（1978），177–202。[12] B. Colbois、A. Girouard、C. Gordon、D. Sher，《Steklov 特征值问题的一些近期进展》，预印本 arXiv: 2212 12528 。[13] Cox、Graham、Jakobson、Dmitry、Karpukhin、Mikhail、Sire、Yannick，《节点集导出的共形不变量。II. 带边界流形》。《谱理论杂志》11（2021），第 2 期，387–409。[14] Di Cristo、Michele；Rondi、Luca，《椭圆方程解相对于边界频率的内部衰减》。《印第安纳大学数学杂志》70（2021），第 4 期，1303–1334。[15] I. Daubechies 和 E. H. Lieb，《具有库仑相互作用的单电子相对论分子》。《数学物理通讯》90（1983），第 4 期，497–510。[16] J. Escobar，《带边界流形上的 Yamabe 问题》。《微分几何杂志》 35 （ 1992 ），21–84。[17] J. Escobar，《将黎曼度量共形变形为边界上具有常平均曲率的标量平坦度量》。《数学年刊》136（1992），1–50。[18] J. Escobar，《带边界紧流形上具有给定标量曲率与平均曲率的度量的唯一性与非唯一性》。《泛函分析杂志》202（2003），424–442。

[19] Evans, Lawrence C.《偏微分方程》。第二版。数学研究生丛书，19。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2010 +749 。xxii R.L. Frank 和 J. Sabin，《具有奇异势的尖锐 [20] Weyl 定律》。预印本 arXiv: 2007 04284 。R. L. Frank、[21] E. H. Lieb 和 R. Seiringer，《核电荷不超过临界值时磁场中的相对论物质的稳定性》。《数学物理通讯》275（2007），第 2 期，479–489。[22] R. L. Frank、E. H. Lieb 和 R. Seiringer，《分数阶 Schr¨odinger 算子的 Hardy-Lieb-Thirring 不等式》。《美国数学会杂志》21（2008），第 4 期，925–950。[23] Galkowski, Jeffrey；Toth, John A.《Steklov 特征函数的逐点界》。《几何分析杂志》29（2019），第 1 期，142–193。[24] Gilbarg, David；Trudinger, Neil S.《二阶椭圆偏微分方程》。1998 年版重印本。《数学经典丛书》。施普林格出版社，柏林，2001。[25] H. Gimperlein 和 G. Grubb，《伪微分算子、分数阶拉普拉斯算子与狄利克雷到诺伊曼算子的热核估计》，《演化方程杂志》14（2014），49–83。[26] Girouard, Alexandre；Polterovich, Iosif，《Steklov 问题的谱几何（综述文章）》。《谱理论杂志》7（2017），第 2 期，321–359。[27] A. Grigor'yan，《度量测度空间上的热核与函数论》，载于：《流形、图与度量空间上的热核与分析》（巴黎，2002），《当代数学》338，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2003，143–172。[28] P. Grisvard，《非光滑区域中的椭圆问题》，Pitman，波士顿、伦敦、墨尔本，1985。[29] Hislop, P. D.；Lutzer, C. V.《 R^d中多重连通区域上的狄利克雷到诺伊曼映射的谱渐近》。《反问题》17（2001），第 6 期，1717–1741。[30] X. Huang、Y. Sire、C. Zhang，《相对论型 Schr¨odinger 算子的谱簇估计》。《纯粹与应用数学杂志》（第九辑）155（2021），32–61。[31] X. Huang 和 C. D. Sogge，《具有临界奇异势的 Schr¨odinger 算子的 Weyl 公式》，即将发表于《偏微分方程通讯》[32] X. Huang 和 C. Zhang，《具有奇异势的 Schrodinger 算子的逐点 Weyl 定律》。arXiv:2103.05531，即将发表于《数学进展》。[33] X. Huang 和 C. Zhang，《平坦环面上具有奇异势的 Schr¨odinger 算子的尖锐逐点 Weyl 定律》，预印本 arXiv: 2109 13370 。P. Li 和 S.T. Yau，《Schr¨odinger 算 [34] 子的抛物核》，《数学学报》156（1986），153–201。[35] N. Mandache，《Schr¨odinger 方程反问题中的指数不稳定性》，《反问题》17（2001），1435–1444。[36] E. H. Lieb 和 H.-T. Yau，《作为量子力学极限的恒星坍缩钱德拉塞卡理论》。《数学物理通讯》112（1987），第 1 期，147–174。[37] E. H. Lieb 和 H.-T. Yau，《相对论物质的稳定性与不稳定性》。《数学物理通讯》118（1988），第 2 期，177–213。[38] F. Marques，《将度量共形变形为边界上具有常平均曲率的标量平坦度量》。《分析与几何通讯》15，第 2 期（2007），381–405。[39] I. Polterovich；D.A. Sher；J. A. Toth，《实解析黎曼曲面上 Steklov 特征函数的节点线长度》。《数学杂志》754（2019），17–47。[40] ´ 1992， 2 L. Saloff-Coste，[41] 《关于 Poincare、Sobolev 与 Harnack 不等式的一则注记》，IMRN，第。R.L. Schilling、R. Song 和 Z. Vondracek，《伯恩斯坦函数》，Walter de Gruyter，柏林，2010。[42] A. Seeger 和 C.D. Sogge，《微分算子特征函数的界》，《印第安纳数学杂志》38（1989），669–682。[43] B. Simon，《Schr¨odinger 半群》。《美国数学会通报》（新系列），7(3)：447–526，1982。[44] C. D. Sogge，《关于紧流形上二阶椭圆算子的谱簇的 Lp 范数》。《泛函分析杂志》77(1)：123–138，1988。[45] C. D. Sogge，《经典分析中的傅里叶积分》，剑桥数学丛书第 210 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2017。[46] C. D. Sogge，《杭州讲座：拉普拉斯算子的特征函数》，数学年刊研究丛书第 188 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2014。[47] C. D. Sogge，《拉普拉斯算子特征函数讲义》，《数学分析专题》，337–360，《分析与应用计算丛书》，3，World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2008。[48] C. D. Sogge，《Kakeya-Nikodym 平均与特征函数的 Lp 范数》。《东北数学杂志》63：519–538，2011。

[49] C. D. Sogge. 关于特征函数集中问题. 偏微分方程日（2015），第9篇，11页。[50] C. Sogge、X. Wang 和 J. Zhu. Steklov 特征函数内部节点集的下界. 美国数学会会刊，144:4715–4722，2016。[51] C. D. Sogge 和 S. Zelditch，节点集豪斯多夫测度的下界，《数学研究快报》18（2011），25-37。[52] R. Song，《含不连续加性泛函的 Feynman-Kac 半群》，理论概率杂志，第8卷，第4期，1995。[53] K.T. Sturm，《流形上的热核估计》，《数学年刊》292（1992），149-162。[54] Daniel Tataru. 波动方程边界迹的正则性. 比萨高等师范学院科学类年刊，26(1):185–206，1998。[55] E.M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993。[56] M. Taylor，《伪微分算子与非线性偏微分方程》。数学进展，100。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1991。[57] M. Taylor，《交换子估计》。美国数学会会刊 131（2003），第5期，1501-1507。[58] F. Wang 和 X.C. Zhang，《扰动下分数阶扩散算子的热核》，《数学论坛》27（ 2015 973 994 ），- X. Wang 和 J. Zhu，Steklov 特征函数节点集的一个下界。《数学研究快报》22（2015），第 [59] 4, 1243 1253 - V. M. Zolotarev，《一维稳定分布》，《数学译丛》65，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1986。[60]

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742, United States
Email address: xhuang49@umd.eduDepartment of Mathematics, Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, United States*Email address*: ysire1@jhu.eduDepartment of Mathematics, Hunan University, Changsha, HN 410012, China*Email address*: kwxing@gmail.com
Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084, China*Email address*: czhang98@tsinghua.edu.cn