arXiv:2301.00121v1 [math.QA] 31 Dec 2022

循环双对角对

ˇ Paul Terwilliger 和 Arjana Zitnik

摘要

若方阵满足以下条件，则称其为循环双对角矩阵：(i) 每个非零元素都位于对角线上、次对角线上或右上角；(ii) 每个次对角线元素均非零，且右上角的元素非零。令 $\mathbb{F}$ 表示一个域，令 V 表示 $\mathbb{F}$ 上的一个非零有限维向量空间。我们考虑一对 $\mathbb{F}$-线性映射 $A : V \to V$ 和 $A^* : V \to V$，它们满足以下两个条件：

- 存在 V 的一个基，使得相对于该基，表示 A 的矩阵是循环双对角矩阵，而表示 A^* 的矩阵是对角矩阵；
- 存在 V 的一个基，使得相对于该基，表示 A^* 的矩阵是循环双对角矩阵，而表示 A 的矩阵是对角矩阵。

我们称这样的对为 V 上的循环双对角对。我们在仿射等价意义下对循环双对角对进行分类。解有两个无限族，我们将对其进行详细描述。

关键词。双对角对；Hessenberg 对；Leonard 对；三对角对。2020年数学主题分类。主分类：17B37；次分类：15 A21.

1 引言

在一篇著名论文中， [2], Richard Askey 和 James Wilson 引入了 q-Racah 正交多项式族。 [26], Doug Leonard 证明了， q-Racah 多项式是具有正交多项式对偶的最一般的正交多项式。在 [3,定理 5 中， 1], Eiichi Bannai 和 Tatsuro Ito 给出了 Leonard 定理的一个全面版本。为阐明并简化 Leonard 定理， [29] 第一作者引入了 Leonard 对的概念。粗略地说，Leonard 对由非零有限维向量空间上的两个可对角化线性映射构成，每个映射在另一个映射的一组特征基上都呈不可约三对角形式。在 [29, 定义 1 中， 4]出现了 Leonard 对的一个“有向”版本，称为 Leonard 系统。在 [29,定理 1 中， 9]Leonard 系统被按同构分类。文章 [36] 以现代视角介绍了这一分类，并详细回顾了相关历史。根据[29, 定理 1， 12] Leonard 对满足两个称为三对角关系的多项式关系。关于 Leonard 对的一些重要论文见 [30–35]。

在 [19]Tatsuro Ito、Kenichiro Tanabe 和第一作者将三对角对的概念引入，作为 Leonard 对的推广。三对角系统的概念

也被引入。在 [18, 推论 18.1] 中，对代数闭域上的三对角系统进行了分类（按同构分类）。在 [24, 小节 1.4]中，说明了三对角系统如何诱导底层向量空间的张量积分解。在 [22, 23] 中，三对角对与 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的某些有限维不可约模相关联。在 [19, 定理 10.1]中证明了每个三对角对都满足三对角关系。关于三对角对的一些重要论文有 [5–9, 20, 21, 27]。

过去 20 年间，文献中出现了一些关于 Leonard 对和三对角对概念的变体。接下来的几个段落将概述这些变体。

在 [14] Ali Godjali 提出了 Hessenberg 对这一概念，将其作为三对角对的一种推广。他在 [14, 推论 1.9]中证明，每个 Hessenberg 对都会诱导出底层向量空间的分裂分解。在 [15] Godjali 研究了 Hessenberg 对的一种特殊情形，称为 TH 对。他定义了 TH 系统，并在 [15, 定理 6.3]中对这些系统进行了同构分类。在 [16, 小节 18] 中，TH 系统通过西/南 Vandermonde 矩阵来刻画。

在 [10] Darren Funk-Neubauer 提出了双对角对这一概念，作为三对角对的一种变体。在 [10, 定理 5.1] 中，双对角对被按同构分类。在 [10, 定理 5.10、5.11] 中，这一分类通过 $\mathfrak{sl}_2$ 和 U_q（$\mathfrak{sl}_2$）的平衡表示来诠释。在 [11] Funk-Neubauer 提出了双对角三元组这一概念。在 [11, 定理 4.1] 中，他展示了每个双对角对如何扩展为一个双对角三元组。在 [11, 定理 4.3]中，双对角三元组被按同构分类。相关工作见 [12] 。

在 [4] Pascal Baseilhac、Azat Gainutdinov 和 Thao Vu 将循环三对角对的概念作为三对角对的一种推广引入。他们利用循环三对角对研究 Onsager 代数的一种高阶推广。在 [4, 附录 A] 中给出了一些循环三对角对的例子。如何将循环三对角对按同构分类，仍是一个未解决的问题。

Jae-ho Lee 在 [25] 引入了圆形 Hessenberg 对的概念。这是 TH 对的一种特殊情形，也是循环三对角对的一种特殊情形。在 [25, 定理 5.6]中，在假设该对满足三对角关系的条件下，对圆形黑森堡对进行了分类。该分类得到四个无限族的解 [25, 例 5.1–5.4]。

本文引入循环双对角对的概念。这是双对角对的一种变体，也是圆形 Hessenberg 对的一个特例。我们着重研究这一特例，是因为它使我们能够在不预先假设三对角关系成立的情况下进行分类。我们将展示两个循环双对角对的无限族，并引入仿射等价的概念。我们的主要结果是，每个循环双对角对都仿射等价于这两个族中的某个成员。在下一小节中，我们将正式定义循环双对角对，并详细陈述我们的结果。

2 定义与结果陈述

本小节引入循环双对角对的概念。为定义这一概念，我们首先解释方阵为循环双对角矩阵的含义。以下矩阵是循环双对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

循环双对角表示：(i) 每个非零元素都位于对角线上、次对角线上或右上角；(ii) 每个次对角线元素均非零，且右上角的元素非零。

接下来，我们定义循环双对角对。在本文余下部分，$\mathbb{F}$表示一个域.

定义 2.1. 设 V 表示一个非零的有限维 $\mathbb{F}$ 上向量空间。我们称定义在 V 上的循环双对角对为一对 $\mathbb{F}$-线性映射 $A: V \to V$ 和$A^*: V \to V$，它们满足以下两个条件：

(i) 存在 V 的一个基，使得相对于该基，表示 A 的矩阵为循环双对角矩阵，而表示 A^* 的矩阵为对角矩阵；

(ii) 存在 V 的一组基，使得相对于这组基，表示 A^* 的矩阵是循环双对角矩阵，而表示 A 的矩阵是对角矩阵。

定义 2.2。定义 2.1 中的循环双对角对称为定义在 $\mathbb{F}$ 上。

定义 2.3。参照定义 2.1，假设 A, A^* 是定义在 V 上的循环双对角对。那么，有序对 A^*, A 是定义在 V 上的循环双对角对，称为 A, A^* 的对偶。

接下来，我们给出一些循环双对角对的例子。第一个例子很简单。设 V 表示一个定义在 $\mathbb{F}$ 上、维数为一的向量空间。那么，任意一对 $\mathbb{F}$-线性映射 $A: V \to V$ 和 $A^*: V \to V$ 都是定义在 V 上的循环双对角对。

下一个例子则更为深入。考虑向量空间 $V = \mathbb{F}^5$ （列向量）。假设 $q \in \mathbb{F}$ 是一个本原 5th 次单位根。考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \operatorname{diag}(1, q, q^2, q^3, q^4).$$

这些矩阵满足

$$A^5 = I, \qquad (A^*)^5 = I, \qquad A^*A = qAA^*,$$

其中 I 表示单位矩阵。我们断言， A, A^* 在 V 上的作用构成一个循环双对角对。为此，我们检查 A, A^* 是否满足定义 2.1 中的条件。矩阵 A 是循环双对角矩阵，而矩阵 A^* 是对角矩阵。因此，由 I的列组成的 V 的一组基满足定义 2.1 中的条件 (i)。定义一个矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & q^2 & q^3 & q^4 \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 & q^8 \\ 1 & q^3 & q^6 & q^9 & q^{12} \\ 1 & q^4 & q^8 & q^{12} & q^{16} \end{pmatrix}.$$

矩阵 P 是范德蒙德矩阵，因此可逆。容易验证 $A^*P = PA$。在此方程中，对等式两边分别取转置，得到 $PA^* = A^{-1}P$。重新整理此方程，得到 $AP = P(A^*)^{-1}$。这些结果表明，由 P的各列组成的 V的基满足定义 2.1 的条件 (ii)。我们已经证明，数对 A, A^* 在 V 上构成一个循环双对角对。

前述循环双对角对属于一个循环双对角对的无限族。在描述这个族之前，我们先引入一些记号。本文中提到的所有向量空间和代数，均默认定义在 $\mathbb{F}$上。取一个整数 $d \geq 1$。令 $\mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 表示由所有元素均属于 $\mathbb{F}$的 $d+1\times d+1$矩阵构成的代数。我们用 0, 1, 2, . . . , d 为这些矩阵的行和列编号。令 $\mathbb{F}^{d+1}$ 表示由具有 $d+1$ 个坐标且所有分量均属于 $\mathbb{F}$的列向量构成的向量空间。我们用 0, 1, 2, . . . , d为这些坐标编号。注意，$\mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$通过左乘作用于 $\mathbb{F}^{d+1}$。令 $I \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$表示单位矩阵。

引理 2.4。取一个整数 $d \geq 1$，并考虑向量空间 $V = \mathbb{F}^{d+1}$。假设 $q \in \mathbb{F}$ 是一个本原 n^{th} 次单位根，其中 $n = d + 1$。定义矩阵 A、$A^* \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 如下。对于 $1 \leq i \leq d$，有 $A_{0,\ d} = 1$，以及 $A_{i,\ i-1} = 1$。 A 的所有其他元素均为零。矩阵 A^* 是对角矩阵，对于 $0 \leq i \leq d$，有 $A^*_{i,\ i} = q^i$。于是， A、A^* 在 V 上构成一个循环双对角对。此外

$$A^n = I, \qquad (A^*)^n = I, \qquad A^*A = qAA^*. \tag{1}$$

证明。关系式 (1) 很容易验证。定义一个矩阵 $P \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$，其对于 $0 \leq i$、$j \leq d$ 的 (i, j)-元素为 q^{ij}。矩阵 P 是范德蒙德矩阵，因而可逆。容易验证 $A^*P = PA$ 和 $AP = P(A^*)^{-1}$。因此， A、A^* 在 V 上构成一个循环双对角对。 □

注 2.5。(1) 中右侧的关系是量子环面代数的定义关系；例如参见 [17]。

在下一个例子中，我们回到向量空间 $V = \mathbb{F}^5$。假设 $q \in \mathbb{F}$是一个本原5^{th} 单位根。选取一个不属于 1、q、q^2、q^3、q^4的 $\varepsilon \in \mathbb{F}$。考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 1-\varepsilon \\ 1-q^{-1}\varepsilon & q^{-1}\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q^{-2}\varepsilon & q^{-2}\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q^{-3}\varepsilon & q^{-3}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q^{-4}\varepsilon & q^{-4}\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad A^* = \mathrm{diag}(1, q, q^2, q^3, q^4).$$

容易验证

$$A^5 = I, \qquad (A^*)^5 = I, \qquad \frac{qAA^* - A^*A}{q-1} = \varepsilon I.$$

我们将证明， A, A^* 在 V 上的作用构成一个循环双对角对。这是以下结果的一个特例。

引理 2.6. 取一个整数 $d \geq 1$，并考虑向量空间 $V = \mathbb{F}^{d+1}$。假设$q \in \mathbb{F}$ 是一个本原的 n^{th} 次单位根，其中 $n = d+1$。取一个不属于 $1, q, q^2, \ldots, q^d$的 $\varepsilon \in \mathbb{F}$ 。按如下方式定义 $\mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 中的矩阵 $A = A(q, \varepsilon)$。对于$0 \leq i \leq d$，有 $A_{i,\,i} = q^{-i}\varepsilon$ 。我们有 $A_{0,\,d} = 1 - \varepsilon$，并且对于 $1 \leq i \leq d$，有 $A_{i,\,i-1} = 1 - q^{-i}\varepsilon$ 。 A的所有其他元素均为零。我们定义 $\mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 中的对角矩阵 $A^* = A^*(q)$，其满足：对于 $0 \leq i \leq d$，有 $A^*_{i,\,i} = q^i$ 。于是， A, A^* 在 V 上的作用构成一个循环双对角对。此外

$$A^n = I, \qquad (A^*)^n = I, \qquad \frac{qAA^* - A^*A}{q-1} = \varepsilon I. \tag{2}$$

证明。定义矩阵 $P = P(q, \varepsilon) \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$，其 (i, j)-项为

$$P_{i,j} = q^{ij}\frac{(\varepsilon q^{-i}; q)_j}{(\varepsilon q; q)_j} \qquad (0 \leq i, j \leq d). \tag{3}$$

上述记号将在第 3 节中解释。下面两个关系可通过矩阵乘法验证：

$$A(q, \varepsilon)P(q, \varepsilon) = P(q, \varepsilon)A^*(q^{-1}), \tag{4}$$
$$A^*(q)P(q, \varepsilon) = P(q, \varepsilon)A(q^{-1}, \varepsilon). \tag{5}$$

我们断言 $P(q, \varepsilon)$ 是可逆的。为证明这一断言，我们证明

$$P(q, \varepsilon)P(q^{-1}, \varepsilon) = \frac{(q; q)_d}{(\varepsilon q; q)_d} I. \tag{6}$$

简记 $Y = P(q, \varepsilon)P(q^{-1}, \varepsilon)$。注意，若将 q 替换为 q^{-1}，则 (4)、(5) 仍然成立。由此可知， Y 与 $A(q, \varepsilon)$ 以及 $A^*(q)$ 可交换。矩阵 Y 与 $A^*(q) = \mathrm{diag}(1, q, \ldots, q^d)$ 可交换，因此 Y 是对角矩阵。写作 $Y = \mathrm{diag}(y_0, y_1, \ldots, y_d)$。对于 $1 \leq i \leq d$，我们比较 $A(q, \varepsilon)Y = YA(q, \varepsilon)$ 两侧的 $(i, i-1)$- 项；这得到 $y_{i-1} = y_i$。因此， $y_0 = y_1 = \cdots = y_d$，所以 $Y = y_0 I$。我们有

$$P(q, \varepsilon)P(q^{-1}, \varepsilon) = y_0 I. \tag{7}$$

对于（7）中左侧的乘积，我们利用矩阵乘法计算 (0,0) 项，并将结果表示为基本超几何级数 [13]；由此得到

$$y_0 = \sum_{j=0}^{d} \frac{(\varepsilon; q)_j}{(\varepsilon q; q)_j} = {}_2\phi_1\left(\left.\begin{matrix} q^{-d}, \varepsilon \\ \varepsilon q \end{matrix}\right| q, 1\right) = \frac{(q; q)_d}{(\varepsilon q; q)_d}.$$

在上面一行中，最后一个等式是 q-范德蒙德求和公式 [13,附录 II]:

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-d}, b \\ c \end{matrix}\middle| q, \frac{cq^d}{b}\right) = \frac{(b^{-1}c;q)_d}{(c;q)_d} $$

与 $b=\varepsilon$ 和 $c=\varepsilon q$。我们已验证 (6)，故断言得证。根据该断言以及 (4)、(5)， A、 A^* 在 V 上构成一个循环双对角对。关于 (2) 中的关系，最后两个关系可通过矩阵乘法验证，第一个关系则可由第二个关系利用 (4) 得到。

□

注 2.7. 对于引理 2.6 中的循环双对角对，若令 $\varepsilon=0$，则得到引理 2.4 中的循环双对角对。

注记 2.8. 参见引理 2.6， n^{th} 的本原根的个数取决于 $\mathbb{F}$ 和 n；这个数可能为零。例如，若 Char($\mathbb{F}$) 整除 n，则 $\mathbb{F}$ 不含 n^{th} 的本原根。

定义 2.9. 引理 2.6 中的循环双对角对 A、 A^* 称为 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε).

在下一个例子中，我们回到向量空间 $V=\mathbb{F}^5$。假设 Char($\mathbb{F}$) $=5$。取一个不属于 0、1、2、3、4 的 $\gamma\in\mathbb{F}$。考虑矩阵

$$ A=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ -1-\gamma & 1+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\gamma & 2+\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3-\gamma & 3+\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4-\gamma & 4+\gamma \end{pmatrix}, \qquad A^*=\mathrm{diag}(0,1,2,3,4). $$

可以验证

$$ A^5=A, \qquad (A^*)^5=A^*, \qquad AA^*-A^*A+A-A^*=\gamma I. $$

我们将证明， A, A^* 在 V 上的作用构成一个循环双对角对。这是下面结果的一个特例。

引理 2.10。取一个整数 $d\geq 1$，并考虑向量空间 $V=\mathbb{F}^{d+1}$。假设$n=d+1$ 是素数，且 Char($\mathbb{F}$) $=n$。取一个不属于 0、1、2、. . . , d的 $\gamma\in\mathbb{F}$。我们按如下方式定义 Mat$_{d+1}$($\mathbb{F}$) 中的矩阵 $A=A(\gamma)$。对于 $0\leq i\leq d$，有 $A_{i,\,i}=i+\gamma$。有 $A_{0,\,d}=-\gamma$，并且对于 $1\leq i\leq d$，有 $A_{i,\,i-1}=-i-\gamma$。 A 的所有其他元素均为零。我们定义一个对角矩阵 $A^*\in$ Mat$_{d+1}$($\mathbb{F}$)，使得对于 $0\leq i\leq d$，有 $A^*_{i,\,i}=i$。那么， A, A^*在 V 上的作用构成一个循环双对角对。此外

$$ A^n=A, \qquad (A^*)^n=A^*, \qquad AA^*-A^*A+A-A^*=\gamma I. \tag{8} $$

证明。定义矩阵 $P=P(\gamma)\in$ Mat$_{d+1}$($\mathbb{F}$)，其 (i, j)-项为

$$ P_{i,j}=\frac{(-i-\gamma)_j}{(1-\gamma)_j} \qquad (0\leq i,j\leq d). \tag{9} $$

上述记号已在第 3 节中说明。以下两个关系可通过矩阵乘法验证：

$$A(\gamma)P(\gamma) = P(\gamma)A^*, \tag{10}$$
$$A^*P(\gamma) = P(\gamma)A(-\gamma). \tag{11}$$

我们断言， $P(\gamma)$是可逆的。为证明这一点，我们证明

$$P(\gamma)P(-\gamma) = \frac{d!}{(1-\gamma)_d} I. \tag{12}$$

将 $Y = P(\gamma)P(-\gamma)$ 简记为.....注意，将 γ 替换为 $-\gamma$ 后，(10)、(11) 仍然成立。由此可知， Y 与 $A(\gamma)$ 及 A^* 可交换。矩阵 Y 与 $A^* = \mathrm{diag}(0, 1, 2, \ldots, d)$ 可交换，因此 Y 是对角的。记 $Y = \mathrm{diag}(y_0, y_1, \ldots, y_d)$。对于 $1 \le i \le d$，我们比较 $A(\gamma)Y = YA(\gamma)$ 两侧的 $(i, i-1)$-项；这得到 $y_{i-1} = y_i$。因此 $y_0 = y_1 = \cdots = y_d$，从而 $Y = y_0 I$。我们有

$$P(\gamma)P(-\gamma) = y_0 I. \tag{13}$$

对于 (13) 左侧的乘积，我们使用矩阵乘法计算 (0,0)-项，并将结果表示为关于超几何级数 [1] 的形式；由此得到

$$y_0 = \sum_{j=0}^{d} \frac{(-\gamma)_j}{(1-\gamma)_j} = {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}-d, -\gamma \\ 1-\gamma\end{matrix}\right| 1\right) = \frac{d!}{(1-\gamma)_d}.$$

在上面一行中，最后一个等式是范德蒙德求和公式 [1,第 2]章：

$${}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}-d, b \\ c\end{matrix}\right| 1\right) = \frac{(c-b)_d}{(c)_d}$$

其中 $b = -\gamma$和 $c = 1-\gamma$。我们已经验证了（12），因此断言得证。由该断言以及（10）、（11）可知， A， A^* 在 V上作用为一个循环双对角对。关于（8）中的关系，最后两个关系由矩阵乘法验证，而第一个关系由第二个关系利用（10）得到。 □

定义 2.11。在引理 2.10 中的循环双对角对 A， A^* 将被记作 CBP($\mathbb{F}$； d， γ)。

接下来，我们定义循环双对角对的同构概念。

定义 2.12。设 A， A^* 表示向量空间 V上的一个循环双对角对，并设B， B^* 表示向量空间 $\mathcal{V}$上的一个循环双对角对。我们称从 A， A^* 到 B， B^* 的循环双对角对的同构为向量空间的一个同构 σ： $V \to \mathcal{V}$，使得 $\sigma A = B\sigma$ 和 $\sigma A^* = B^*\sigma$。如果存在从A， A^* 到 B， B^*的循环双对角对的同构，我们就称循环双对角对 A， A^* 和B， B^* 同构。

在第7节中，我们运用同构和对偶性的概念来诠释引理 2.6、2.10 的证明。

接下来，我们证明引理 2.6、2.10 中的循环双对角对彼此不同构。

引理 2.13. 以下 (i)、(ii) 对 $d \geq 1$ 成立。

(i) 假设 Char($\mathbb{F}$) $\neq d+1$。那么循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε) 和 CBP($\mathbb{F}$; d, q', ε') 同构，当且仅当二者均

$$q = q', \qquad \varepsilon = \varepsilon'.$$

(ii) 假设 Char($\mathbb{F}$) $= d+1$。那么循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, γ) 和 CBP($\mathbb{F}$; d, γ') 同构，当且仅当 $\gamma = \gamma'$。

引理 2.13 的证明将在第 5 节完成。

接下来，我们说明如何调整一个循环双对角对，从而得到另一个循环双对角对。

引理 2.14. 设 A, A^* 表示向量空间 V 上的一个循环双对角对。取标量 $s, s^*, t, t^* \in \mathbb{F}$，其中 s, s^* 非零。那么，$sA + tI, s^*A^* + t^*I$ 这一对是 V 上的一个循环双对角对。

证明。显然。 □

定义 2.15. 参照引理 2.14，称数对 $sA + tI, s^*A^* + t^*I$ 是 A, A^* 的仿射变换。

Ne接下来，我们为循环双对角对定义仿射等价的概念。

定义 2.16. 设 A, A^* 和 B, B^* 表示 $\mathbb{F}$ 上的循环双对角对。若存在 A, A^* 的一个仿射变换与 B, B^* 同构，则称 A, A^* 与 B, B^* 仿射等价。

接下来，我们将仿射等价的概念应用于引理 2.6、2.10 中的循环双对角对。

引理 2.17. 以下 (i)、(ii) 对于 $d \geq 1$ 成立。

(i) 假设 Char($\mathbb{F}$) $\neq d+1$。那么循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε) 和 CBP($\mathbb{F}$; d, q', ε') 仿射等价，当且仅当两者均

$$q = q', \qquad \varepsilon' \in \{\varepsilon, q\varepsilon, q^2\varepsilon, \ldots, q^d\varepsilon\}.$$

(ii) 假设 Char($\mathbb{F}$) $= d+1$。那么循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, γ) 和 CBP($\mathbb{F}$; d, γ') 仿射等价，当且仅当

$$\gamma' - \gamma \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}.$$

引理 2.17 的证明将在第 6 节完成。

以下是我们的主要结果。

定理 2.18。取一个整数 $d \geq 1$。设 A, A^* 表示定义在维数为 $d+1$ 的向量空间上的循环双对角对。首先假设 Char($\mathbb{F}$) $\neq d+1$。则 A, A^* 与至少一个有序对 q, ε对应的 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε) 仿射等价。接下来假设 Char($\mathbb{F}$) $=d+1$。则 A, A^* 与至少一个 γ对应的 CBP($\mathbb{F}$; d, γ) 仿射等价。

定理 2.18 的证明将在第 4 节完成。

我们有一条评注。

引理 2.19. 以下 (i)、(ii) 对 $d \geq 1$ 成立。

(i) 假设 Char($\mathbb{F}$) $\neq d+1$，并将 A, A^* 记作 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε)。则 A, A^* 与 $qA, q^{-1}A^*$ 同构。(ii) 假设 Char($\mathbb{F}$) $= d+1$，并将 A, A^* 记作 CBP($\mathbb{F}$; d, γ)。则 A, A^* 与 $A-I$, A^*-I同构。

引理 2.19 的证明将在第 8 节完成。

在第 9 节，我们讨论循环双对角对与 Jae-ho Lee [25] 引入的圆形黑森堡对之间的关系。

3 预备知识

本小节回顾本文将全程用到的一些基本概念和记号。回顾自然数 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 和整数 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$。回顾第 2 节中的域 $\mathbb{F}$。对于 a、 $q \in \mathbb{F}$ 和 $r \in \mathbb{N}$，定义

$$(a;q)_r = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{r-1}).$$

我们将 $(a;q)_0 = 1$ 解释为。对于 $a \in \mathbb{F}$ 和 $r \in \mathbb{N}$，定义

$$(a)_r = a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1).$$

我们解释 $(a)_0 = 1$。令 λ 表示一个不定元。代数 $\mathbb{F}[\lambda]$ 由所有系数均属于 $\mathbb{F}$的 λ 中的多项式构成。固定一个整数 $d \geq 1$，并令 V 表示一个维数为 $d+1$的向量空间。令 End(V) 表示由从 V 到 V的 $\mathbb{F}$-线性映射构成的代数。接下来回顾每个基 $\{v_i\}_{i=0}^d$ 如何给出一个代数同构 End(V) $\to$ Mat$_{d+1}$($\mathbb{F}$)。对于 $A \in$ End(V) 和 $X \in$ Mat$_{d+1}$($\mathbb{F}$)，当 $Av_j = \sum_{i=0}^d X_{i,j} v_i$ 对于 $0 \leq j \leq d$成立时，我们称 X 关于 $\{v_i\}_{i=0}^d$ 表示 A。该同构将 A 映射到 Mat$_{d+1}$($\mathbb{F}$) 中唯一一个关于$\{v_i\}_{i=0}^d$表示 A 的矩阵。对于 $A \in$ End(V)，当 V 由 A的特征子空间张成时，我们称 A 可对角化。当 A 可对角化且 A 的每个特征子空间维数均为一时，我们称 A 重数自由。假设 A 重数自由，并令 $\{V_i\}_{i=0}^d$ 表示 A的一个特征子空间排列。和 $V = \sum_{i=0}^d V_i$ 是直和。对于 $0 \leq i \leq d$，令$\theta_i \in \mathbb{F}$ 表示 A 在 V_i上的特征值。根据构造，标量 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ 两两不同。对于 $0 \leq i \leq d$，定义 $E_i \in$ End(V)，使得 $(E_i - I)V_i = 0$，且若 $i \neq j (0 \leq j \leq d)$，则 $E_i V_j = 0$。因此 E_i 是投影 $V \to V_i$。我们称 E_i 为与 A相关联的本原幂等元

与 V_i（或 θ_i）相关联。我们有 (i) $E_iE_j = \delta_{i,\ j}E_i$ $(0 \le i, j \le d)$; (ii) $I = \sum_{i=0}^{d} E_i$; $V_i = E_iV$ (iii) $0 \le i \le d$); (iv) $\mathrm{tr}(E_i) = 1$ $(0 \le i \le d)$; (v) $A = \sum_{i=0}^{d} \theta_i E_i$; (vi) $AE_i = \theta_i E_i = E_i A$ $(0 \le i \le d)$。
此外

$$E_i = \prod_{\substack{0 \le j \le d \\ j \ne i}} \frac{A - \theta_j I}{\theta_i - \theta_j} \qquad (0 \le i \le d). \tag{14}$$

令 M 表示由 A 生成的 $\mathrm{End}(V)$ 的子代数。向量空间 M 的一组基为 $\{A^i\}_{i=0}^{d}$，且还有 $0 = \prod_{i=0}^{d}(A - \theta_i I)$。此外，元素 $\{E_i\}_{i=0}^{d}$ 构成向量空间 M 的一组基。取标量 s、$t \in \mathbb{F}$，使得 $s \ne 0$。映射 $sA + tI$ 是重数自由的，其特征值为 $\{s\theta_i + t\}_{i=0}^{d}$。对于 $0 \le i \le d$，映射 E_i 是与 $s\theta_i + t$ 相关联的 $sA + tI$ 的本原幂等元。简记 $n = d + 1$。当且仅当 $q^n = 1$ 且对于 $1 \le i \le d$ 有 $q^i \ne 1$ 时，标量 $q \in \mathbb{F}$ 称为本原 n^{th} 次单位根。若 $q \in \mathbb{F}$ 是本原 n^{th} 次单位根，则在代数 $\mathbb{F}[\lambda]$ 中，

$$\lambda^n - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - q) \cdots (\lambda - q^d).$$

如果 $\mathrm{Char}(\mathbb{F}) = n$，那么在代数 $\mathbb{F}[\lambda]$ 中，

$$\lambda^n - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - d).$$

这一事实是费马小定理 [28, 定理 1.50] 的一个版本。对于 $i, j \in \mathbb{Z}$，我们称 $i \equiv j \pmod{n}$，当且仅当 n 整除 $i - j$ 时。

4 定理 2.18 的证明

在本小节中，我们的目标是证明定理 2.18。在整个小节中，我们固定一个整数 $d \ge 1$、一个维数为 $d + 1$ 的向量空间 V，以及定义在 V 上的一个循环双对角对 A, A^*。
以下结果是 [15,引理 2.1] 的一个特例；为求完整起见，我们将给出一个简短的证明。

引理 4.1。（参见 [15, 引理 2.1]。） A, A^* 各自都是重数自由的。

证明。我们首先考虑 A。根据定义 2.1(ii)，映射 A可对角化；我们证明 A 的每个特征子空间维数均为一。为此，只需证明 A 具有$d + 1$ 个特征子空间。令 $\{v_i\}_{i=0}^{d}$ 表示满足定义 2.1(i) 的 V的一组基。矩阵 $B \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 表示相对于 $\{v_i\}_{i=0}^{d}$的 A。根据构造，B 是循环双对角矩阵。特别地，对于 B，次对角线上的每个元素都非零，次对角线下方的每个元素都为零。对于 $0 \le r \le d$，我们考察 B^r的各个元素。对于 $0 \le i$，当 $i - j = r$时，$j \le d$的第 $(i,\ j)$ 个元素非零；当 $i - j > r$时，该元素为零。因此，矩阵$\{B^r\}_{r=0}^{d}$ 线性无关。由此以及线性代数可知，映射 $\{A^r\}_{r=0}^{d}$ 线性无关。因此，A 的最小多项式次数为 $d + 1$。由于 A 可对角化，该最小多项式没有重根。因此，A 有 $d + 1$ 个不同的特征值，因而有 $d + 1$ 个特征子空间。由此我们证明了 A 是重数自由的。同理可证明 A^* 是重数自由的。

□

定义 4.2。令 M（分别为 M^*）表示由 A（分别由A^*）生成的 End(V) 的子代数。

注意， $\{A^i\}_{i=0}^d$是 M的一组基，而 $\{(A^*)^i\}_{i=0}^d$是 M^*的一组基。

定义 4.3. 令 $\{E_i\}_{i=0}^d$（分别为 $\{E_i^*\}_{i=0}^d$）表示 A（分别为 A^*）的本原幂等元的一种排列。对于 $0 \le i \le d$，令 $0 \ne v_i \in E_iV$和 $0 \ne v_i^* \in E_i^*V$。注意，$\{v_i\}_{i=0}^d$（分别为$\{v_i^*\}_{i=0}^d$）是 V的一组基。当基 $\{v_i\}_{i=0}^d$（分别为 $\{v_i^*\}_{i=0}^d$）满足定义 2.1(ii)（分别为定义 2.1(i)）时，排列$\{E_i\}_{i=0}^d$（分别为$\{E_i^*\}_{i=0}^d$）称为标准排列。

接下来我们说明定义 4.3 中的标准排序并非唯一。在此说明中，我们讨论 A 的本原幂等元；对 A^* 的本原幂等元也有类似的讨论。

定义 4.4. 设 E 和 F 表示 A 的本原幂等元。当存在 $\alpha \in \mathbb{F}$ 使得 $(A^* - \alpha I)EV = FV$ 时，我们记 $E \to F$。

引理 4.5. 对于 A 的每个本原幂等元 E，存在唯一的 A 的本原幂等元 F，使得 $E \to F$。此外， $E \ne F$。

*Pr*证明。由于 A^* 以循环双对角形式作用于 A 的特征子空间 . □

引理 4.6. 设 $\{E_i\}_{i=0}^d$ 表示 A 的本原幂等元的一个排序。当且仅当 $E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_d \to E_0$ 时，该排序是标准排序。

证明。根据定义 2.1 和 4.3。 □

引理 4.7。 A的本原幂等元恰有 $d+1$ 种标准排序。

证明。根据引理 4.5 和 4.6，对于 A的每个本原幂等元 E，都存在唯一一种标准排序 $\{E_i\}_{i=0}^d$，使得 A 的本原幂等元满足 $E = E_0$。结论得证。

□

定义 4.8。在本小节余下部分，我们固定 A的本原幂等元的一种标准排序 $\{E_i\}_{i=0}^d$，以及 A^*的本原幂等元的一种标准排序 $\{E_i^*\}_{i=0}^d$。对于 $0 \le i \le d$，令 θ_i（分别地， θ_i^*）表示 A（分别地， A^*）关于 E_i（分别地， E_i^*）的特征值。

注意， $\{E_i\}_{i=0}^d$是 M的一组基，且 $\{E_i^*\}_{i=0}^d$是 M^*的一组基。

关于 E_i, E_i^*, θ_i, θ_i^* 中的下标 i，我们有一条评注。由于循环双对角对具有循环性质，我们涉及这些下标的计算将按模 n 进行，其中 $n = d+1$。详情见下列定义。

定义 4.9。对于 $X \in \{E, E^*, \theta, \theta^*\}$ 和 $i \in \mathbb{Z}$，我们定义 $X_i = X_r$，其中 $0 \le r \le d$ 和 $i \equiv r$（模 n）。

定义 4.10。对于 $0 \le i \le d$，定义

$$a_i = \mathrm{tr}(AE_i^*), \qquad a_i^* = \mathrm{tr}(A^*E_i). \tag{15}$$

引理 4.11。以下 (i)、(ii) 对于 $0 \le i \le d$ 成立：

(i) $\mathrm{tr}(AE_i^*) = \mathrm{tr}(E_i^*AE_i^*) = \mathrm{tr}(E_i^*A)$;

(ii) $\mathrm{tr}(A^*E_i) = \mathrm{tr}(E_iA^*E_i) = \mathrm{tr}(\{v5)$.

证明。(i) 根据线性代数，对于所有 $X, Y \in \mathrm{End}(V)$，均有 $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$。由此及 $(E_i^*)^2 = E_i^*$ 可得结论。
(ii) 证明类似于 (i)。 □

引理 4.12。对于 $0 \le i \le d$，我们有

$$E_i^*AE_i^* = a_iE_i^*, \qquad E_iA^*E_i = a_i^*E_i.$$

证明。我们验证左侧的等式。简记 $\mathcal{A} = \mathrm{End}(V)$。原始幂等元 E_i^*的秩为一，因此 E_i^*是 $E_i^*\mathcal{A}E_i^*$ 的一组基。因此，存在 $\alpha_i \in \mathbb{F}$ 使得 $E_i^*AE_i^* = \alpha_iE_i^*$。在该等式中，对两边分别取迹，并结合 (15)、引理 4.11(i) 以及 $\mathrm{tr}(E_i^*) = 1$，得到 $a_i = \alpha_i$。我们已验证左侧的等式。右侧的等式可用类似方法验证。 □

引理 4.13。对于 $0 \le i \le d$，我们有

$$(A - a_iI)E_i^*V = E_{i+1}^*V, \qquad (A^* - a_i^*I)E_iV = E_{i+1}V.$$

证明。我们验证左侧的等式。根据定义 4.4 和引理 4.6，存在$\alpha_i \in \mathbb{F}$，使得 $(A - \alpha_iI)E_i^*V = E_{i+1}^*V$。在此等式两边应用 E_i^*，并利用引理 4.12 计算结果；可得

$$0 = E_i^*(A - \alpha_iI)E_i^*V = (a_i - \alpha_i)E_i^*V.$$

当然 $E_i^*V \ne 0$，因此 $\alpha_i = a_i$。我们已经验证了左侧的等式。右侧的等式同理可证。 □

引理 4.14。对于 $0 \le i$、$j \le d$，以下 (i)、(ii) 成立。

(i) $E_i^*AE_j^* = \begin{cases} 0, & \text{if } i-j \notin \{0,1\} \pmod n; \\ \ne 0, & \text{if } i-j \equiv 1 \pmod n. \end{cases}$

(ii) $E_iA^*E_j = \begin{cases} 0, & \text{if } i-j \notin \{0,1\} \pmod n; \\ \ne 0, & \text{if } i-j \equiv 1 \pmod n. \end{cases}$

证明。由引理 4.13 可得。 □

以下引理 4.14 的推广将会很有用。

引理 4.15. 以下 (i)、(ii) 对 $0 \le i$、j、$r \le d$ 成立。

(i) $E_i^*A^rE_j^* = \begin{cases} 0, & \text{if } i-j \notin \{0,1,\ldots,r\} \pmod n; \\ \ne 0, & \text{if } i-j \equiv r \pmod n. \end{cases}$

(ii) $E_i(A^*)^r E_j = \begin{cases} 0, & \text{if } i-j \notin \{0,1,\ldots,r\} \pmod n; \\ \neq 0, & \text{if } i-j \equiv r \pmod n. \end{cases}$

证明。这是引理 4.14 的直接推论。 □

引理 4.16. 对于 $0 \le i、\ j \le d$，以下结论成立：

(i) $E_i E_j^* \neq 0$;
(ii) $E_i^* E_j \neq 0$。

证明. (i) 利用 (14) 和引理 4.15(i),

$$E_{j+d}^* E_i E_j^* = E_{j+d}^* \left(\prod_{\substack{0 \le \ell \le d \\ \ell \neq i}} \frac{A - \theta_\ell I}{\theta_i - \theta_\ell} \right) E_j^* = E_{j+d}^* A^d E_j^* \prod_{\substack{0 \le \ell \le d \\ \ell \neq i}} \frac{1}{\theta_i - \theta_\ell} \neq 0.$$

因此 $E_i E_j^* \neq 0$。
(ii) 证明与 (i) 类似。 □

引理 4.17. 在下文的 (i)–(iv) 中，我们分别给出向量空间 End(V) 的一组基：

(i) $E_i E_j^*$ $(0 \le i, j \le d)$;
(ii) $A^i (A^*)^j$ $(0 \le i, j \le d)$;
(iii) $E_i^* E_j$ $(0 \le i, j \le d)$;
(iv) $(A^*)^i A^j$ $(0 \le i, j \le d)$.

证明. (i) End(V) 的维数为 $(d+1)^2$, ，这正是所列向量的个数。因此，只需证明所列向量线性无关。假设

$$0 = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} \alpha_{i,j} E_i E_j^* \qquad (\alpha_{i,j} \in \mathbb{F}).$$

我们证明，对于 $0 \le r, s \le d$，有 $\alpha_{r,\ s} = 0$。设 r, s 给定。我们有

$$0 = E_r \left(\sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} \alpha_{i,j} E_i E_j^* \right) E_s^* = \alpha_{r,s} E_r E_s^*.$$

由引理 4.16(i)，我们有 $E_r E_s^* \neq 0$，所以 $\alpha_{r,\ s} = 0$。
(ii) 由 (i) 及定义 4.2、4.8 下方的注记可得。
(iii)、(iv) 类似于 (i)、(ii) 的证明。 □

接下来的三个引理给出了关于 A 和 $\{E_i^*\}_{i=0}^d$ 的结果；类似的结果也适用于 A^* 和 $\{E_i\}_{i=0}^d$。

引理 4.18. 设 θ 表示 A 的一个特征值，设 $0 \neq \xi \in V$ 表示相应的特征向量。则以下 (i)–(iii) 成立：

(i) 向量 $E_i^*\xi$ 是 $E_i^*V(0 \le i \le d)$ 的一个基;

(ii) 向量 $\{E_i^*\xi\}_{i=0}^d$ 构成 V的一组基;

(iii) 基 $\{E_i^*\xi\}_{i=0}^d$ 满足定义 2.1(i)。

证明. (i) E_i^*V的维数为一，因此只需证明 $E_i^*\xi \neq 0$。存在一个整数 $j\,(0 \le j \le d)$，使得 $\theta = \theta_j$。子空间 E_jV的维数为一且包含ξ，所以 ξ张成 E_jV。因此， $E_i^*\xi$张成 $E_i^*E_jV$。根据引理 4.16(ii)，我们有 $E_i^*E_j \neq 0$，因此$E_i^*E_jV \neq 0$。由这些评注可得 $E_i^*\xi \neq 0$。

(ii) 由 (i)，且因为和 $V = \sum_{i=0}^d E_i^*V$是直和。(iii) 根据
定义 4.8。 □

引理 4.19。我们沿用引理 4.18 中的基 $\{E_i^*\xi\}_{i=0}^d$ 。令 B （分别为 B^*）表示 $\mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 中关于 $\{E_i^*\xi\}_{i=0}^d$ 表示 A （分别为 A^*）的矩阵。则以下 (i)–(iv) 成立:

(i) B 是循环双对角矩阵，且行和为常数 θ;

(ii) $B_{i,\ i} = a_i$ 对于 $0 \le i \le d$;

(iii) $B_{0,\ d} = \theta - a_0$，且 $B_{i,\ i-1} = \theta - a_i$ 对于 $1 \le i \le d$;

(iv) B^* 是对角矩阵，其中 $B^*_{i,\ i} = \theta_i^*$ 对于 $0 \le i \le d$。

证明。(i) 根据定义 2.1(i) 和引理 4.18(iii)，矩阵 B 是循环双对角矩阵。定义一个所有分量均为 1 的向量 $\mathbf{1} \in \mathbb{F}^{d+1}$。我们有 $B\mathbf{1} = \theta\mathbf{1}$，因为 $\xi = \sum_{i=0}^d E_i^*\xi$ 是 A 的特征向量，其特征值为 θ。由 $B\mathbf{1} = \theta\mathbf{1}$，矩阵 B 的行和为常数 θ。(ii) 根据引理 4.12。

（iii）由上述 (i)、(ii) 可得。

（iv）根据定义 2.1(i) 和引理 4.18(iii)，矩阵 B^* 是对角矩阵。由定义 4.8 可得 $B^*_{i,\ i} = \theta_i^*$ 对于 $0 \le i \le d$。 □

Lemma 4.20. 设 θ 为 A 的一个特征值。那么对于 $0 \le i \le d$，有 $\theta \neq a_i$ 。

证明。设 $0 \neq \xi \in V$ 为 A 的一个特征向量，其特征值为 θ，并设 $B \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$ 表示相对于基 $\{E_i^*\xi\}_{i=0}^d$的 A 。根据引理 4.19(i)，矩阵 B 是循环双对角矩阵。因此，对于 $1 \le i \le d$，有 $B_{0,\ d} \neq 0$ 以及 $B_{i,\ i-1} \neq 0$ 。结合引理 4.19(iii)，即得所需结果。 □

我们的下一个总体目标是推导出一个涉及 A 和 A^*的关系。
接下来的两个引理给出了关于 A 和 $\{E_i^*\}_{i=0}^d$的结果；对于 A^* 和$\{E_i\}_{i=0}^d$，也有类似的结果。

引理 4.21. 以下结论 (i)、(ii) 对 $0 \le i \le d$成立:

(i) $E_i^*A = E_i^*AE_i^* + E_i^*AE_{i-1}^*$;
(ii) $AE_i^* = E_i^*AE_i^* + E_{i+1}^*AE_i^*$。

证明。(i) 利用引理 4.14(i)，我们有

$$E_i^* A = E_i^* AI = \sum_{j=0}^{d} E_i^* AE_j^* = E_i^* AE_i^* + E_i^* AE_{i-1}^*.$$

(ii) 利用引理 4.14(i)，我们有

$$AE_i^* = IAE_i^* = \sum_{j=0}^{d} E_j^* AE_i^* = E_i^* AE_i^* + E_{i+1}^* AE_i^*.$$

□

引理 4.22. 对于 $0 \le i \le d$,

$$AE_i^* - a_i E_i^* = E_{i+1}^* AE_i^* = E_{i+1}^* A - a_{i+1} E_{i+1}^*.$$

证明. 左侧的等式由引理 4.12 和引理 4.21(ii) 得出。右侧的等式由引理 4.12 和引理 4.21(i) 得出。 □

下面引入一些记号。定义

$$M^* AM^* = \mathrm{Span}\{XAY | X, Y \in M^*\}.$$

命题 4.23. 以下 (i)、(ii) 成立。

(i) $M^* AM^* + M^* = AM^* + M^*$;
(ii) $M^* AM^* + M^* = M^* A + M^*$。

证明。（i）为了得到包含关系 $\subseteq$，我们使用引理 4.12、4.14(i)、4.22，得到

$$\begin{aligned} M^* AM^* &= \mathrm{Span}\{E_i^* AE_j^* | 0 \le i, j \le d\} \\ &= \mathrm{Span}\{E_i^* AE_j^* | 0 \le i, j \le d,\ i - j \in \{0, 1\} \pmod n\} \\ &= \mathrm{Span}\{E_i^* AE_i^* | 0 \le i \le d\} + \mathrm{Span}\{E_{i+1}^* AE_i^* | 0 \le i \le d\} \\ &\subseteq AM^* + M^*. \end{aligned}$$

包含关系 $\supseteq$ 成立，因为 $I \in M^*$。
（ii）与（i）的证明类似。 □

命题 4.24。存在唯一的序列 q, α, β, γ，其元素是 $\mathbb{F}$ 中的标量，满足

$$qAA^* - A^* A + \alpha A - \beta A^* = \gamma I. \tag{16}$$

证明。首先，我们证明序列 q, α, β, γ 存在。利用命题 4.23，我们得到

$$A^* A \in M^* A \subseteq M^* A + M^* = AM^* + M^*.$$

因此，存在 $X, Y \in M^*$，使得 $A^*A = AX + Y$。元素 $\{(A^*)^r\}_{r=0}^d$ 构成 M^* 的一组基。记

$$X = \sum_{r=0}^{d} \alpha_r (A^*)^r, \qquad Y = \sum_{r=0}^{d} \beta_r (A^*)^r, \qquad \alpha_r, \beta_r \in \mathbb{F}.$$

我们断言，对于 $2 \le r \le d$，$\alpha_r = 0$ 和 $\beta_r = 0$。为证明这一断言，我们假设它不成立，并导出矛盾。存在一个整数 r $(2 \le r \le d)$，使得 $\alpha_r \neq 0$ 或$\beta_r \neq 0$。定义

$$m = \max\{r | 2 \le r \le d,\ \alpha_r \neq 0 \text{ or } \beta_r \neq 0\}.$$

由构　　造得 $2 \le m \le d$。此外，对于 $m+1 \le r \le d$，$\alpha_r = 0$ 和 $\beta_r = 0$。因此

$$X = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r (A^*)^r, \qquad Y = \sum_{r=0}^{m} \beta_r (A^*)^r.$$

令 $0 \le i \le d$。由引理 4.15(ii)和构造可得

$$E_{m+i} X E_i = \alpha_m E_{m+i} (A^*)^m E_i, \qquad E_{m+i} Y E_i = \beta_m E_{m+i} (A^*)^m E_i.$$

另　　由引理 4.14(ii)和 $m \ge 2$，可得 $E_{m+i} A^* E_i = 0$。现在我们可以论证

$$\begin{aligned} 0 &= E_{m+i} A^* E_i \theta_i \\ &= E_{m+i} A^* A E_i \\ &= E_{m+i} (AX + Y) E_i \\ &= \theta_{m+i} E_{m+i} X E_i + E_{m+i} Y E_i \\ &= (\theta_{m+i} \alpha_m + \beta_m) E_{m+i} (A^*)^m E_i. \end{aligned}$$

由引理 4.15(ii)，我们有 $E_{m+i}(A^*)^m E_i \neq 0$。根据这些评注，$0 = \theta_{m+i}\alpha_m + \beta_m$ 适用于 $0 \le i \le d$。特别是,

$$0 = \theta_0 \alpha_m + \beta_m, \qquad 0 = \theta_1 \alpha_m + \beta_m.$$

我们有 $\theta_0 \neq \theta_1$，因此 $\alpha_m = 0$ 和 $\beta_m = 0$。这与 m的定义矛盾，所以该断言得证。根据该断言，$X = \alpha_0 I + \alpha_1 A^*$ 和 $Y = \beta_0 I + \beta_1 A^*$。用此计算$A^*A = AX + Y$，得到 (16)，其中

$$q = \alpha_1, \qquad \alpha = \alpha_0, \qquad \beta = -\beta_1, \qquad \gamma = -\beta_0.$$

我们已证明序列 q、α、β、γ 存在。该序列是唯一的，因为根据引理 4.17(ii)，以下映射线性无关:

$$AA^*, \quad A, \quad A^*, \quad I.$$

□

定义 4.25。　　命题 4.24 中的序列 q, α, β, γ 称为 A, A^* 的轮廓　　.

引理 4.26. 以下 (i)、(ii) 对于 $0 \le i \le d$ 成立：

(i) $q\theta_{i+1} = \theta_i + \beta$;

(ii) $\theta^*_{i+1} = q\theta^*_i + \alpha$。

证明。(i) 在方程（16）中，将每一项左乘 E_{i+1}，右乘E_i。利用 $E_{i+1}A^*E_i \neq 0$ 化简结果。

(ii) 在方程（16）中，将每一项左乘 E^*_{i+1}，右乘 E^*_i。利用 $E^*_{i+1}AE^*_i \neq 0$ 化简结果。

□

引理 4.27。以下 (i)、(ii) 对 $0 \le i \le d$ 成立：

(i) $a_i\big(\theta^*_i(q-1)+\alpha\big) = \beta\theta^*_i + \gamma$;

(ii) $a^*_i\big(\theta_i(1-q)+\beta\big) = \alpha\theta_i - \gamma$.

证明。(i) 在方程（16）中，将每一项左右两侧分别乘以 E^*_i。利用 $E^*_iAE^*_i = a_iE^*_i$ 化简结果。

(ii) 在方程（16）中，将每一项左右两侧分别乘以 E_i。利用 $E_iA^*E_i = a^*_iE_i$ 化简结果。

□

引理 4.28. 标量 α, β 满足以下不等式。

(i) 假设 $q \neq 1$。则

$$\alpha \neq (1-q)\theta^*_0, \qquad \beta \neq (q-1)\theta_0.$$

(ii) 假设 $q = 1$。则

$$\alpha \neq 0, \qquad \beta \neq 0.$$

证明. 关于 α 的不等式由引理 4.26(ii) 取 $i = 0$ 和 $\theta^*_1 \neq \theta^*_0$ 得出。关于 β 的不等式由引理 4.26(i) 取 $i = 0$ 和 $\theta_1 \neq \theta_0$ 得出。 □

引理 4.29. 对于 $0 \le i \le d$，有

$$\frac{\theta_{i+1}-\theta_0}{\theta_1-\theta_0} = \sum_{\ell=0}^{i} q^{-\ell}, \qquad \frac{\theta^*_{i+1}-\theta^*_0}{\theta^*_1-\theta^*_0} = \sum_{\ell=0}^{i} q^{\ell}. \tag{17}$$

证明。我们验证左侧的等式。利用引理 4.26(i),

$$\begin{aligned}
&\theta_{i+1} - q^{-i-1}\theta_0 \\
&= \theta_{i+1} - q^{-1}\theta_i + q^{-1}(\theta_i - q^{-1}\theta_{i-1}) + q^{-2}(\theta_{i-1} - q^{-1}\theta_{i-2}) + \cdots + q^{-i}(\theta_1 - q^{-1}\theta_0) \\
&= (1 + q^{-1} + q^{-2} + \cdots + q^{-i})q^{-1}\beta.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\theta_{i+1} - \theta_0 &= \theta_{i+1} - q^{-i-1}\theta_0 + (q^{-i-1}-1)\theta_0 \\
&= \big(1 + q^{-1} + q^{-2} + \cdots + q^{-i}\big)\big(q^{-1}\beta + (q^{-1}-1)\theta_0\big) \\
&= \big(1 + q^{-1} + q^{-2} + \cdots + q^{-i}\big)(\theta_1 - \theta_0).
\end{aligned}$$

这验证了式 (17) 左侧的等式。式 (17) 右侧的等式也可以类似地验证。

□

引理 4.30。我们有 $\sum_{\ell=0}^{d} q^\ell = 0$，并且对于 $0 \le i \le d-1$，有 $\sum_{\ell=0}^{i} q^\ell \ne 0$。

证明。我们有 $\theta_{d+1}^* = \theta_0^*$，且对于 $0 \le i \le d-1$，$\theta_{i+1}^* \ne \theta_0^*$。根据引理 4.29，可得结论。 □

回忆 $n = d+1$。

引理 4.31。标量 q 与 Char($\mathbb{F}$) 的关系如下。

(i) 假设 Char($\mathbb{F}$) $\ne n$。那么 q 是一个本原 n^{th} 次单位根。

(ii) 假设 Char($\mathbb{F}$) $= n$。那么 $q = 1$。

证明。首先假设 $q = 1$。由引理 4.30，$n = 0$ 属于 $\mathbb{F}$，且 1、2、.....、d 在 $\mathbb{F}$ 中均非零。因此 Char($\mathbb{F}$) $= n$。接下来假设 $q \ne 1$。由引理 4.30，$q^n = 1$ 且对于 $1 \le j \le d$，$q^j \ne 1$。因此 q 是一个本原 n^{th} 次单位根。在这种情况下 Char($\mathbb{F}$) $\ne n$；否则 $0 = q^n - 1 = (q-1)^n$，这将导致 $q = 1$，产生矛盾。由这些评述即可得到结论。 □

在定义 4.8、4.10 和命题 4.24 中，我们引入了描述循环双对角对 A、A^* 的各种参数。接下来，我们考察这些参数如何受到 A、A^* 的仿射变换的影响。

取 $\mathbb{F}$ 中的标量 s、s^*、t、t^*，其中 s、s^* 非零。考虑循环双对角对

$$A^\vee = sA + tI, \qquad (A^*)^\vee = s^*A^* + t^*I. \tag{18}$$

注意，$\{E_i\}_{i=0}^d$ 和 $\{E_i^*\}_{i=0}^d$ 分别是 $A^\vee$ 和 $(A^*)^\vee$ 的本原幂等元的排列。这些排列是标准的。对于 $0 \le i \le d$，令 $\theta_i^\vee$（分别令 $(\theta_i^*)^\vee$）表示 E_i（分别表示 E_i^*）对应于 $A^\vee$（分别对应于 $(A^*)^\vee$）的特征值。此外，定义

$$a_i^\vee = \operatorname{tr}(A^\vee E_i^*), \qquad (a_i^*)^\vee = \operatorname{tr}\big((A^*)^\vee E_i\big).$$

令 $q^\vee$、$\alpha^\vee$、$\beta^\vee$、$\gamma^\vee$ 表示 $A^\vee$、$(A^*)^\vee$ 的轮廓。

引理 4.32。我们将使用式 (18) 中的循环双对角对 $A^\vee, (A^*)^\vee$。在下表中，我们用 A, A^* 的相应参数来描述 $A^\vee, (A^*)^\vee$ 的各个参数。

参数	参数描述
$\theta_i^\vee$	$s\theta_i + t$
$(\theta_i^*)^\vee$	$s^*\theta_i^* + t^*$
$a_i^\vee$	$sa_i + t$
$(a_i^*)^\vee$	$s^*a_i^* + t^*$

参数	参数描述
$q^\vee$	q
$\alpha^\vee$	$s^*\alpha + t^*(1-q)$
$\beta^\vee$	$s\beta + t(q-1)$
$\gamma^\vee$	$ss^*\gamma + ts^*\alpha - st^*\beta + tt^*(1-q)$

证明。第一张表可由定义 4.8、4.10 及式 (18) 下方的讨论验证。第二张表可由命题 4.24 及引理 4.32 上方的评注验证。 □

接下来，我们定义循环双对角对 A, A^* 称为规范化的含义 .

定义 4.33. 设 E （分别地， E^*）表示 A（分别地， A^*）的一个本原幂等元。设 θ（分别地， θ^*）表示相应的特征值。当 $\alpha, \beta, \theta, \theta^*$ 满足下表中的要求时，称循环双对角对 A, A^* 关于 E 和 E^* 规范化：

case	α	β	θ	θ^*
Char($\mathbb{F}$) $\neq n$	0	0	1	1
Char($\mathbb{F}$) $= n$	1	1	0	0

接下来，我们通过施加仿射变换将 A, A^* 化为规范形式 .

引理 4.34。我们将循环双对角对 A, A^* 规范化如下 .

(i) 假设 Char($\mathbb{F}$) $\neq n$。则循环双对角对

$$\frac{(q-1)A - \beta I}{(q-1)\theta_0 - \beta}, \qquad \frac{(1-q)A^* - \alpha I}{(1-q)\theta_0^* - \alpha}$$

相对于 E_0 和 E_0^* 是规范化的。

(ii) 假设 Char($\mathbb{F}$) $= n$。则循环双对角对

$$\frac{A - \theta_0 I}{\beta}, \qquad \frac{A^* - \theta_0^* I}{\alpha}$$

相对于 E_0 和 E_0^* 是规范化的。

证明。利用引理 4.28、4.31、4.32 和定义 4.33 可直接验证。 □

引理 4.35. 假设循环双对角对 A, A^* 关于 E_0 和 E_0^* 经过规范化。

(i) 假设 Char($\mathbb{F}$) $\neq n$。则

$$\frac{qAA^* - A^*A}{q-1} = \varepsilon I,$$

其中 $\varepsilon = \gamma/(q-1)$。此外

$$\theta_i = q^{-i}, \qquad \theta_i^* = q^i, \qquad a_i = q^{-i}\varepsilon, \qquad a_i^* = q^i\varepsilon, \qquad (0 \le i \le d).$$

(ii) 假设 Char($\mathbb{F}$) $= n$。则

$$AA^* - A^*A + A - A^* = \gamma I.$$

此外

$$\theta_i = i, \qquad \theta_i^* = i, \qquad a_i = i + \gamma, \qquad a_i^* = i - \gamma, \qquad (0 \le i \le d).$$

证明。根据定义 4.33 计算命题 4.24 和引理 4.26、4.27。 □

引理 4.36. 假设循环双对角对 A, A^* 关于 E_0 和 E_0^* 规范化。

(i) 假设 Char(𝔽) $\neq n$。那么引理 4.35(i) 中的标量 ε 不属于 $1, q, q^2, \ldots, q^d$。 (ii) 假设 Char(𝔽) $= n$。那么引理 4.35(ii) 中的标量 γ 不属于 0, 1, 2, . . ., d。

证明. 使用引理 4.20 以及引理 4.35 中的数据。 □

命题 4.37. 假设循环双对角对 A, A^* 关于 E_0 和 E_0^* 规范化。

(i) 假设 Char(𝔽) $\neq n$。那么循环双对角对 A, A^* 与 CBP(𝔽; d, q, ε) 同构，其中 q, ε 来自引理 4.35(i)。 (ii) 假设 Char(𝔽) $= n$。那么循环双对角对 A, A^* 与 CBP(𝔽; d, γ) 同构，其中 γ 来自引理 4.35(ii)。

证明。(i) 根据引理 4.31(i)， q 是一个本原 n^{th} 单位根。根据引理 4.36(i)， ε 不属于 1、q、q^2、……、q^d。循环双对角对 CBP(𝔽; d, q, ε) 已在引理 2.6 中描述。由引理 4.35(i)，我们有 $\theta_0 = 1$。因此，1 是 A 的一个特征值；令 $0 \neq \xi \in V$ 表示对应的特征向量。考虑引理 4.18 中的 V 的基 $\{E_i^* \xi\}_{i=0}^d$。令 B （分别地， B^*）表示 Mat$_{d+1}$(𝔽) 中关于 $\{E_i^* \xi\}_{i=0}^d$ 表示 A （分别地， A^*）的矩阵。利用引理 4.19（取 $\theta = 1$）以及引理 4.35(i) 中的数据，我们得到 CBP(𝔽; d, q, ε) 等于 B, B^*。结论得证。
(ii) 根据引理 4.31(ii)，Char(𝔽) $= n$。根据引理 4.36(ii)， γ 不属于 0, 1, 2, . . . , d。循环双对角对 CBP(𝔽; d, γ) 在引理 2.10 中有描述。由引理 4.35(ii)，我们有 $\theta_0 = 0$。因此，0 是 A的一个特征值；令 $0 \neq \xi \in V$ 表示相应的特征向量。考虑引理 4.18 中的 V 的基 $\{E_i^* \xi\}_{i=0}^d$。令 B （分别为 B^*）表示相对于 $\{E_i^* \xi\}_{i=0}^d$， A （分别为 A^*）的表示矩阵 Mat$_{d+1}$(𝔽)。利用引理 4.19（其中$\theta = 0$）以及引理 4.35(ii)中的数据，我们得到 CBP(𝔽; d, γ) 等于 B, B^*。结论由此得证。 □

定理 2.18 可直接由引理 4.34 和命题 4.37 得出。

5 引理 2.13 的证明

在本小节中，我们证明引理 2.13。
引理 2.13 的证明 (i) 假设 CBP(𝔽; d, q, ε) 和 CBP(𝔽; d, q', ε') 同构。我们将证明 $q = q'$和 $\varepsilon = \varepsilon'$。记 A, A^*为 CBP(𝔽; d, q, ε)，记 B, B^* 为 CBP(𝔽; d, q', ε')。根据定义 2.12，存在一个可逆的 $P \in$ Mat$_{d+1}$(𝔽)，使得$PA = BP$和 $PA^* = B^*P$。矩阵 A^*是对角矩阵，其对角元两两不同。矩阵 B^* 是对角矩阵，其对角元两两不同。

考察 $PA^* = B^*P$ 的各个元素，我们发现存在集合$\{0, 1, 2, \ldots, d\}$的一个置换 p，使得对于 $0 \le i, j \le d$,

$$j = p(i) \quad \Leftrightarrow \quad P_{i,j} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^*_{j,j} = B^*_{i,i}.$$

我们有 $A^*_{0,\,0} = 1 = B^*_{0,\,0}$。因此 $p(0) = 0$。接下来我们证明 P 是对角的。矩阵 A 和 B 是循环双对角的。对于 $1 \le i \le d$，我们考察 $PA = BP$中的 $(i、\ p(i-1))$项；这给出

$$P_{i,p(i)}A_{p(i),p(i-1)} = B_{i,i-1}P_{i-1,p(i-1)}.$$

根据构造，$B_{i、\ i-1} \neq 0$ 以及 $P_{i-1、\ p(i-1)} \neq 0$。因此 $A_{p(i)、\ p(i-1)} \neq 0$。显然，$p(i) \neq p(i-1)$, 所以 $p(i) = p(i-1) + 1$。利用归纳法和 $p(0) = 0$，我们得到 $p(i) = i$，对于$0 \le i \le d$ 成立。我们已经证明 P 是对角的。因此，P 与 A^*可交换，所以$A^* = B^*$。因此 $q = q'$。此外，对于 $0 \le i \le d$，我们有 $A_{i、\ i} = B_{i、\ i}$，这意味着$\varepsilon = \varepsilon'$。逻辑方向的一方面已证完。现在考虑相反的逻辑方向。假设 $q = q'$和 $\varepsilon = \varepsilon'$。那么 CBP($\mathbb{F}$; d、q、ε) 和 CBP($\mathbb{F}$; d、q'、ε') 相同，因此同构。

(ii) 与 (i) 的证明类似。 □

6 引理 2.17 的证明

本小节将证明引理 2.17。

我们先对引理 2.6 中的矩阵 $A = A(q, \varepsilon)$ 和 $A^* = A^*(q)$ 作一些评注。

引理 6.1. 使用上述记号,

$$(A^* - \varepsilon I)A(q, q\varepsilon) = qA(q, \varepsilon)(A^* - \varepsilon I).$$

证明. 根据引理 2.6 中的数据，通过矩阵乘法即可常规验证。 □

引理 6.2. 引理 6.1 中的映射 $A^* - \varepsilon I$ 是循环双对角对的同构，将 $A(q, q\varepsilon)$ A^* 映至 $qA(q, \varepsilon)$ A^*。

证明. 定义矩阵 $P = A^* - \varepsilon I$。矩阵 P 可逆，因为 ε 不在 $1, q, q^2, \ldots, q^d$ 之中。根据引理 6.1 及其构造,

$$PA(q, q\varepsilon) = qA(q, \varepsilon)P, \qquad PA^* = A^*P.$$

根据定义 2.12，结论得证。 □

推论 6.3. 循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε) 和 CBP($\mathbb{F}$; $d, q, q\varepsilon$) 仿射等价。

证明。由定义 2.9、2.16 和引理 6.2 可得。 □

推论 6.4。以下循环双对角对彼此仿射等价：

$$\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, q, q^i\varepsilon) \qquad i \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}.$$

证明。由推论 6.3，且仿射等价是一种等价关系。 □

接下来，我们对引理 2.10 中的矩阵 $A = A(\gamma)$ 和 A^* 作一些评注。

引理 6.5。采用上述记号，

$$(A^* + \gamma I)A(\gamma - 1) = \big(A(\gamma) - I\big)(A^* + \gamma I).$$

证明。利用引理 2.10 中的数据，通过矩阵乘法即可直接验证。 □

引理 6.6。引理 6.5 中的映射 $A^* + \gamma I$ 是一个循环双对角对的同构，它将 $A(\gamma - 1)$ A^* 映到 $A(\gamma) - I, A^*$。

证明。定义矩阵 $P = A^* + \gamma I$。矩阵 P 可逆，因为 γ 不属于 $0, 1, 2, \ldots, d$。由引理 6.5 及其构造，

$$PA(\gamma - 1) = \big(A(\gamma) - I\big)P, \qquad PA^* = A^*P.$$

根据定义 2.12，结论得证。 □

推论 6.7. 循环双对角对 $\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, \gamma)$ 和 $\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, \gamma - 1)$ 仿射等价。

证明. 根据定义 2.11、2.16 和引理 6.6。 □

推论 6.8. 下列循环双对角对彼此仿射等价：

$$\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, \gamma + i) \qquad i \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}.$$

证明。根据推论 6.7，并且由于仿射等价是一种等价关系。 □

引理 2.17 的证明 (i) 假设 $\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, q, \varepsilon)$ 与 $\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, q', \varepsilon')$ 仿射等价。我们将证明 $q = q'$ 和 $\varepsilon' \in \{\varepsilon, q\varepsilon, q^2\varepsilon, \ldots, q^d\varepsilon\}$。将 $\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, q, \varepsilon)$ 记作 A, A^*，将 $\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, q', \varepsilon')$ 记作 B, B^*。A, A^* 的轮廓为 q, α, β, γ，其中

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \varepsilon(q - 1). \tag{19}$$

B, B^* 的轮廓为 $q', \alpha', \beta', \gamma'$，其中

$$\alpha' = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = \varepsilon'(q' - 1). \tag{20}$$

根据假设，存在标量 $s, s^*, t, t^* \in \mathbb{F}$，其中 s, s^* 非零，使得 $sA + tI, s^*A^* + t^*I$ 与 B, B^* 同构。定义 $A^\vee = sA + tI$ 和 $(A^*)^\vee = s^*A^* + t^*I$。$A^\vee$ 的轮廓 $q^\vee, \alpha^\vee, \beta^\vee, \gamma^\vee$，$(A^*)^\vee$，由引理 4.32 描述。循环双对角对 $A^\vee, (A^*)^\vee$ 和 B, B^* 同构，因此它们具有相同的轮廓：

$$q^\vee = q', \qquad \alpha^\vee = \alpha', \qquad \beta^\vee = \beta', \qquad \gamma^\vee = \gamma'.$$

使用式 (19)、(20) 和引理 4.32 中的第二个表计算上述方程。得到

$$q = q', \qquad t = 0, \qquad t^* = 0, \qquad ss^*\varepsilon = \varepsilon'.$$

根据构造，循环双对角对 sA, s^*A^* 和 B, B^* 同构。因此sA 与 B具有相同的特征值，而 s^*A^* 与 B^*具有相同的特征值。标量 1 是 A的一个特征值，因此标量 s 是 sA的一个特征值。 B 的特征值为 $1, q, q^2, \ldots, q^d$。由这些评注可得 $s \in \{1, q, q^2, \ldots, q^d\}$。标量 1 是 A^*的一个特征值，因此标量 s^* 是 s^*A^*的一个特征值。 B^* 的特征值为 $1, q, q^2, \ldots, q^d$。由这些评注可得 $s^* \in \{1, q, q^2, \ldots, q^d\}$。现在我们可以进行如下论证

$$\varepsilon' = ss^*\varepsilon \in \{\varepsilon, q\varepsilon, q^2\varepsilon, \ldots, q^d\varepsilon\}.$$

接下来，我们反转逻辑方向。假设 $q' = q$ and $\varepsilon' \in \{\varepsilon, q\varepsilon, q^2\varepsilon, \ldots, q^d\varepsilon\}$。根据推论 6.4, CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε) 与 CBP($\mathbb{F}$; d, q', ε') 仿射等价。

(ii) 假设 CBP($\mathbb{F}$; d, γ) 与 CBP($\mathbb{F}$; d, γ') 仿射等价。我们将证明 $\gamma' - \gamma \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$。记 A, A^* 为 CBP($\mathbb{F}$; d, γ)，记 B, B^* 为 CBP($\mathbb{F}$; d, γ')。 A, A^* 的轮廓为 q, α, β, γ，其中

$$q = 1, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 1. \tag{21}$$

B, B^* 的轮廓为 $q', \alpha', \beta', \gamma'$，其中

$$q' = 1, \qquad \alpha' = 1, \qquad \beta' = 1. \tag{22}$$

根据假设，存在标量 s, s^*, t, t^*，属于 $\mathbb{F}$，且 s, s^*非零，使得 $sA+tI, s^*A^*+t^*I$ 同构于 B, B^*。定义 $A^\vee = sA + tI$ 和 $(A^*)^\vee = s^*A^* + t^*I$。根据引理 4.32， $A^\vee, (A^*)^\vee$ 的轮廓 $q^\vee, \alpha^\vee, \beta^\vee, \gamma^\vee$ 有如下描述。循环双对角对 $A^\vee, (A^*)^\vee$与 B, B^* 同构，因此它们具有相同的轮廓：

$$q^\vee = q', \qquad \alpha^\vee = \alpha', \qquad \beta^\vee = \beta', \qquad \gamma^\vee = \gamma'.$$

利用 (21)、(22) 以及引理 4.32 中的第二个表对上述方程求值，得到

$$s = 1, \qquad s^* = 1, \qquad \gamma' - \gamma = t - t^*.$$

根据构造，循环双对角对 $A + tI, A^* + t^*I$ 和 B, B^* 同构。因此， $A+tI$ 与 B 具有相同的特征值，而 A^*+t^*I 与 B^* 具有相同的特征值。标量 0 是 A 的一个特征值，因此标量 t 是 $A+tI$ 的一个特征值。 B 的特征值为 0, 1, 2, . . . , d。由这些评注可知 $t \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$。标量 0 是 A^* 的一个特征值，因此标量 t^* 是 $A^* + t^*I$ 的一个特征值。 B^* 的特征值为 0, 1, 2, . . . , d。由这些评注可知 $t^* \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$。现在我们可以进行如下论证

$$\gamma' - \gamma = t - t^* \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}.$$

接下来，我们反转逻辑方向。假设 $\gamma' - \gamma \in \{0, 1, 2, \ldots, d\}$。那么，根据推论 6.8，CBP($\mathbb{F}$; d, γ) 与 CBP($\mathbb{F}$; d, γ') 仿射等价。□

7 同构与对偶性

对于循环双对角对，对偶性和同构的概念分别在定义 2.3 和定义 2.12 中进行了说明。在本小节中，我们运用这些概念来阐释引理 2.6、2.10 的证明。

命题 7.1。我们在引理 2.6 中提及循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε)。式 (3) 中的矩阵 $P(q, \varepsilon)$ 是从 $A(q^{-1}, \varepsilon)$ $A^*(q^{-1})$ 到 $A^*(q)$ $A(q, \varepsilon)$ 的循环双对角对同构。

证明。在引理 2.6 的证明中，我们证明了 $P(q, \varepsilon)$ 可逆。结合 (4)、(5) 和定义 2.12，即得所述结果。 □

推论 7.2。以下对象在循环双对角对的同构意义下互为对偶：

$$\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, q, \varepsilon); \qquad \mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, q^{-1}; \varepsilon).$$

证明。由定义 2.3 和命题 7.1 可得。 □

命题 7.3。我们在引理 2.10 中提及循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, γ)。式 (9) 中的矩阵 $P(\gamma)$ 是从 $A(-\gamma)$ A^* 到$A^*, A(\gamma)$ 的循环双对角对同构。

证明。我们在引理 2.10 的证明中证明了 $P(\gamma)$ 可逆。结合 (10)、(11) 和定义 2.12，即可得出结论。 □

推论 7.4。以下对象在循环双对角对的同构意义下互为对偶：

$$\mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, \gamma), \qquad \mathrm{CBP}(\mathbb{F}; d, -\gamma).$$

证明。由定义 2.3 和命题 7.3 可得。 □

8 引理 2.19 的证明

本小节的目标是证明引理 2.19。我们的证明策略是展示其中涉及的同构。我们将详细描述这个同构。

回忆引理 2.6 中的循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε)。

定义 8.1. 关于 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε)，定义一个矩阵 $R = R(q, \varepsilon) \in \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{F})$，其元素为 $R_{0,\ d} = 1 - \varepsilon$ 和 $R_{i,\ i-1} = q^i - \varepsilon$，其中 $1 \le i \le d$。R 的所有其他元素均为零。我们称 R 为 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε) 的升矩阵。

例 8.2. 根据定义 8.1，假设 $d = 4$。那么

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\varepsilon \\ q-\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2-\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^3-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^4-\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 8.3. 根据定义 8.1，以下 (i)、(ii) 成立：

(i) $R^{d+1} = (-1)^d(\varepsilon; q)_{d+1} I$;

(ii) R 可逆。

证明。(i) 由矩阵乘法可得。
(ii) 由 (i) 及 $(\varepsilon; q)_{d+1} \neq 0$ 可得。

□

接下来，我们说明 R 与引理 2.6 中的矩阵 $A = A(q, \varepsilon)$ 和 $A^* = A^*(q)$ 的关系。

引理 8.4。采用上述记号，我们有

(i) $A^*A - \varepsilon I = R = q(AA^* - \varepsilon I)$;
(ii) $qAR = RA$ 和 $q^{-1}A^*R = RA^*$。

证明。(i) 根据矩阵乘法，使用引理 2.6 和定义 8.1 中的数据。(ii) 注意到

$$qAR - RA = qA(A^*A - \varepsilon I) - q(AA^* - \varepsilon I)A = 0;$$
$$q^{-1}A^*R - RA^* = q^{-1}A^*q(AA^* - \varepsilon I) - (A^*A - \varepsilon I)A^* = 0.$$

□

接下来，我们说明 R 与 A 和 A^* 的本原幂等元之间的关系。对于 $0 \leq i \leq d$，令 E_i（分别为 E_i^*）表示 A（分别为 A^*）对应于特征值 q^{-i}（分别为 q^i）的本原幂等元。

引理 8.5。使用上述记号，我们有

(i) $RE_i = E_{i+1}R$ 和 $RE_i^* = E_{i+1}^*R$ 对应于 $0 \leq i \leq d$;
(ii) $RE_iV = E_{i+1}V$ 和 $RE_i^*V = E_{i+1}^*V$ 对应于 $0 \leq i \leq d$。

证明。(i) 为得到 $RE_i = E_{i+1}R$，在 (14) 的两边左乘 R，右乘 R^{-1}。结合 $qA = RAR^{-1}$，利用 $\theta_r = q^{-r}$ $(0 \leq r \leq d)$ 计算所得结果。方程 $RE_i^* = E_{i+1}^*R$ 的推导类似。

(ii) 由上面的 (i) 和引理 8.3(ii) 可得。 □

命题 8.6. 使用上述记号，R 是从 A, A^* 到 $qA, q^{-1}A^*$ 的循环双对角对的同构。

证明。由定义 2.12 和引理 8.4(ii) 可得。 □

我们将注意力转向 引理 2.1 中的循环双对角对 CBP($\mathbb{F}$; d, γ) $0.$

定义 8.7. 关于 CBP($\mathbb{F}$; d, γ)，定义一个矩阵 $R = R(\gamma)$，它属于 Mat$_{d+1}(\mathbb{F})$，其元素为 $R_{0,d} = \gamma$ 和 $R_{i,i-1} = i + \gamma$，其中 $1 \leq i \leq d$。R 的所有其他元素均为零。我们称 R为 CBP($\mathbb{F}$; d, γ) 的升矩阵。

例8.8. 关于定义 8.7，假设 $d = 4$。那么

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 1+\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4+\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 8.9. 参照定义 8.7，以下 (i)、(ii) 成立：

(i) $R^{d+1} = (\gamma)_{d+1} I$;

(ii) R 可逆。

证明. (i) 根据矩阵乘法。
(ii) 根据 (i)，且由于 $(\gamma)_{d+1} \neq 0$。 □

接下来，我们描述是 R 与引理 2.10 中的矩阵 $A = A(\gamma)$ 和 A^* 之间的关系。

引理 8.10. 使用上述记号，

(i) $A^* - A + \gamma I = R = AA^* - A^*A$;
(ii) $(A - I)R = RA$ 和 $(A^* - I)R = RA^*$。

证明. (i) 根据矩阵乘法，并利用引理 2.10 和定义 8.7 中的数据可得。(ii) 我们有

$$[A, R] = [A, A^* - A + \gamma I] = [A, A^*] = R,$$
$$[A^*, R] = [A^*, A^* - A + \gamma I] = -[A^*, A] = [A, A^*] = R.$$

□

接下来，我们说明 R 与 A 和 A^*的本原幂等元之间的关系。对于 $0 \leq i \leq d$，令 E_i （分别令 E_i^*）表示 A （分别表示 A^*）中对应于特征值 i的本原幂等元。

引理8.11. 使用上述记号，

(i) 对于 $0 \leq i \leq d$， $RE_i = E_{i+1}R$ 和 $RE_i^* = E_{i+1}^* R$；
(ii) 对于 $0 \leq i \leq d$， $RE_iV = E_{i+1}V$ 和 $RE_i^*V = E_{i+1}^*V$。

证明。(i) 为得到 $RE_i = E_{i+1}R$，在等式 (14) 的左侧乘以 R，右侧乘以 R^{-1}。利用 $\theta_r = r$ ($0 \leq r \leq d$) 以及 $A - I = RAR^{-1}$ 对所得结果进行计算。等式 $RE_i^* = E_{i+1}^* R$ 的获得方式类似。

(ii) 根据 (i) 和引理 8.9(ii)。 □

命题 8.12。在上述记号下， R 是从 A, A^* 到 $A - I, A^* - I$ 的循环双对角对的同构。

证明。根据定义 2.12 和引理 8.10(ii)。 □

引理 2.19 可由命题 8.6 和 8.12 直接得出。

9 循环 Hessenberg 对

在 [25] Jae-ho Lee 提出了圆形 Hessenberg 对的概念。循环双对角对是圆形 Hessenberg 对的一种特殊情形。在引理 2.6 和 2.10 中，我们给出了一些循环双对角对的例子。在本小节中，我们将使用 [25] 的记号来描述这些例子。

在 [25]中，假设 $d \geq 3$；本节中我们始终作出相同的假设 n.

例 9.1。回顾引理 2.6 中的 CBP($\mathbb{F}$; d, q, ε)。这对应于 [25, 例 5.1]，其参数为

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad a^* = 0, \quad b^* = 1, \quad c^* = 0, \quad y = 1 - \varepsilon, \quad z = 0.$$

以下是一些相关参数。参见 [25,例 5.1],

$$\begin{aligned} &\theta_i = q^{-i}, \qquad \theta_i^* = q^i \qquad (0 \leq i \leq d); \\ &\phi_i = (q^i - 1)(q^i - \varepsilon), \qquad \vartheta_i = (q^i - 1)(1 - \varepsilon) \qquad (1 \leq i \leq d). \end{aligned}$$

参见 [25,命题 6.12],

$$\begin{aligned} &b_i = 0 \quad (0 \leq i \leq d-1); \qquad a_i = q^{-i}\varepsilon \quad (0 \leq i \leq d); \\ &c_i = 1 - q^{-i}\varepsilon \quad (1 \leq i \leq d); \qquad \xi = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

参见 [25,命题 6.11],

$$\begin{aligned} &b_i^* = 0 \quad (0 \leq i \leq d-1); \qquad a_i^* = q^i\varepsilon \quad (0 \leq i \leq d); \\ &c_i^* = 1 - q^i\varepsilon \quad (1 \leq i \leq d); \qquad \xi^* = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

例 9.2。回顾引理 2.10 中的 CBP($\mathbb{F}$; d, γ)。这对应于 [25, 例 5.2]，其参数为

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad a^* = 0, \quad b^* = 1, \quad c^* = 0, \quad y = -\gamma, \quad z = 0.$$

这里给出一些相关参数。参见 [25,例 5.2],

$$\begin{aligned} &\theta_i = i, \qquad \theta_i^* = i \qquad (0 \leq i \leq d); \\ &\phi_i = -i(i + \gamma), \qquad \vartheta_i = -i\gamma \qquad (1 \leq i \leq d). \end{aligned}$$

参见 [25,命题 6.12],

$$\begin{aligned} &b_i = 0 \quad (0 \leq i \leq d-1); \qquad a_i = i + \gamma \quad (0 \leq i \leq d); \\ &c_i = -i - \gamma \quad (1 \leq i \leq d); \qquad \xi = -\gamma. \end{aligned}$$

参见 [25,命题 6.11],

$$\begin{aligned} &b_i^* = 0 \quad (0 \leq i \leq d-1); \qquad a_i^* = i - \gamma \quad (0 \leq i \leq d); \\ &c_i^* = \gamma - i \quad (1 \leq i \leq d); \qquad \xi^* = \gamma. \end{aligned}$$

10 致谢

第一作者感谢 Jae-ho Lee 就循环双对角对˙和圆形黑森堡对进行的多次讨论。作者感谢 Stefko Miklavi˘c 仔细审阅本文并提出宝贵评注。

参考文献

[1] G. Andrews、R. Askey、R. Roy。《特殊函数》。数学及其应用百科全书，第 71 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999 年。[2] R. Askey 和 J. Wilson。《一组推广 Racah 系数或 6–j 符号的正交多项式》。SIAM J. Math. Anal. 10（1979）1008–1016。[3] E. Bannai 和 T. Ito。《代数组合学 I：关联方案》。Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc.，门洛帕克，加利福尼亚州，1984 年。[4] P. Baseilhac、A. M. Gainutdinov、T. T. Vu。《循环三对角对、高阶 Onsager 代数与正交多项式》。Linear Algebra Appl. 522（2017）71–110； arXiv:1607.00606。[5] P. Baseilhac 和 K. Shigechi。《一种新的流代数与反射方程》。Lett. Math. Phys. 92（2010）47–65； arXiv:0906.1482。[6] S. Bockting-Conrad。《与三对角对相关的两个交换算子》。Linear Algebra Appl. 437（2012）242–270； arXiv:1110.3434。[7] S. Bockting-Conrad。《 q-Racah 型三对角对、双降算子 ψ 以及量子代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 》。Linear Algebra Appl. 445（2014）256–279；arXiv:1307.7410。[8] S. Bockting-Conrad。《涉及三对角对双降算子 ψ 的某些 q-指数公式》； arXiv:1907.01157。[9] S. Bockting-Conrad 和 P. Terwilliger。《伪装的代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 》。Linear Algebra Appl. 459（2014）548–585； arXiv:1307.7572。[10] D. Funk-Neubauer。《双对角对、李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 与量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 》。J. Algebra Appl. 12（2013）1250207，共 46 页； arXiv:1108.1219。[11]D. Funk-Neubauer。《双对角三元组》。Linear Algebra Appl. 521（2017）104–134；arXiv:1612.04882。[12] D. Funk-Neubauer。《双对角三联组与四面体代数》。Comm. Algebra 50（2022）3453–3472； arXiv:2107.06408.[13] G. Gasper 和 M. Rahman。《基本超几何级数》。Richard Askey 作序。第二版。数学及其应用百科全书，第 96 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2004 年。

[14] A. Godjali。《线性变换的黑森堡对》。Linear Algebra Appl. 431（2009）1579–1586； arXiv:0812.0019。[15]A. Godjali。《薄黑森堡对》。Linear Algebra Appl. 432（2010）3231–3249；arXiv:0911.4118。[16] A. Godjali。《薄黑森堡对与双重范德蒙德矩阵》。Linear Algebra Appl. 436（2012）3018–3060； arXiv:1107.5369。[17] A. Gupta。《量子劳朗多项式上的模》。J. Aust. Math. Soc. 91（2011）323–341； arXiv:1105.0596。[18] T. Ito、K. Nomura、P. Terwilliger。《尖三对角对的分类》。Linear Algebra Appl. 435（2011）1857–1884； arXiv:1001.1812。[19] T. Ito、K. Tanabe、P. Terwilliger。《与 P-和 Q-多项式关联方案相关的某些代数》，载于《编码与关联方案》（新泽西州皮斯卡特维，1999），美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2001 年，第 167–192 页； arXiv:math/0406556。[20] T. Ito 和 P. Terwilliger。《三对角对的形状》。J. Pure Appl. Algebra 188（2004）145–160； arXiv:math/0304244。[21] T. Ito 和 P. Terwilliger。《 q-四面体代数及其有限维不可约模》。Comm. Algebra 35（2007）3415–3439； arXiv:math/0602199。⁀[22] T. Ito 和 P. Terwilliger。《三对角对与量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 》。Ramanujan J. 13（2007）39–62； arXiv:math/0310042。[23] T. Ito 和 P. Terwilliger。《 q-Racah 型三对角对》。J. Algebra 322（2009）68–93； arXiv:0807.0271。[24] T. Ito 和 P. Terwilliger。《增广三对角代数》。Kyushu J. Math. 64（2010）81–144； arXiv:0904.2889。[25] J. -H. Lee。《圆形黑森堡对》。Linear Algebra Appl. 655（2022）202–235； arXiv:2209.02194。[26] D. A. Leonard。《正交多项式、对偶性与关联方案》。SIAM J. Math. Anal. 13（1982）656–663。[27] K. Nomura。《三对角对分裂分解的细化》。Linear Algebra Appl. 403（2005）1–23。[28] J. Rotman。《抽象代数入门》。第二版。普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河，新泽西州，2000 年。[29] P. Terwilliger。《相对于另一个变换的特征基均为三对角的两个线性变换》。Linear Algebra Appl. 330（2001）149–203； arXiv:math/0406555。

[30] P. Terwilliger. 从 24 个角度看 Leonard 对。特殊函数会议（亚利桑那州坦佩，2000）。《洛基山数学杂志》32（2002）827–888； arXiv:math/0406577.[31] P. Terwilliger. Leonard 对与 q-Racah 多项式。《线性代数及其应用》387（2004）235–276； arXiv:math/0306301.[32] P. Terwilliger. 两个线性变换各自相对于另一个变换的特征基均为三对角；TD-D 标准形与 LB-UB 标准形。《代数杂志》291（2005）1–45； arXiv:math/0304077.[33] P. Terwilliger. 两个线性变换各自相对于另一个变换的特征基均为三对角；关于参数数组的评注。《设计、编码与密码学》34（2005）307–332； arXiv:math/0306291.[34] P. Terwilliger. 两个线性变换各自相对于另一个变换的特征基均为三对角：关于分裂分解的评注。《计算与应用数学杂志》178（2005）437–452； arXiv:math/0306290.[35] P. Terwilliger. 关于正交多项式 Askey 方案的代数方法。正交多项式与特殊函数，255–330，《数学讲义》，1883，Springer，柏林，2006； arXiv:math/0408390.[36] P. Terwilliger. 关于 Leonard 系统分类的札记。《图与组合》37（2021）1687–1748； arXiv:2003.09668。

Paul Terwilliger 数学系 威斯康星大学 480 Lincoln Drive 麦迪逊，WI 53706-1388 美国 邮箱：
terwilli@math.wisc.edu

ˇArjana Zitnik 数学与物理学院 卢布尔雅那大学，以及 IMFM Jadranska 19，1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚 邮箱：
Arjana.Zitnik@fmf.uni-lj.si