arXiv:2301.00140v1 [math.OA] 31 Dec 2022

[1]

谱三元组、狄利克雷空间与离散群的量子微分

FABIO E.G. CIPRIANI、JEAN-LUC SAUVAGEOT

摘要。我们研究本质离散谱三元组 $(\mathcal{A}, h, D)$ 满足的自然条件，在这些条件下，$a \in \mathcal{A}$ 的量子微分 da 属于由单位长度$ds = D^{-1}$生成的理想。我们还研究 da的奇异值的上下界，并将这一一般框架应用于狄利克雷空间的自然谱三元组，尤其是由负定函数产生的离散群对偶上的谱三元组。

1. 引言

在非交换几何 [Co] 中，谱三元组 $(\mathcal{A}, h, D)$ 由希尔伯特空间 h 上的一个有界算子 $\mathcal{A} \subseteq B$ 的 $*$-代数构成；在该空间上还作用着一个稠密定义的自伴（狄拉克）算子 D，并且对所有 $a \in \mathcal{A}$，交换子 $[D, a] \in B(h)$ 都是有界的。$(\mathcal{A}, h, D)$ 的单位长度 或线元 （[Co] 第7章）由紧算子

$$\mathbf{ds} = D^{-1},$$

旨在编码该结构的非交换度量方面。体元由谱密度算子给出：$\mathbf{dv} = \rho(D)$ [CS3], ，其中 $\rho(x) := N_{|D|}(x)^{-1}$ 是 $|D|$的计数函数的倒数，体现了非交换测度论方面。它可写作 $\mathbf{dv} = \sigma(\mathbf{ds})$，其中 $\sigma(x) := N_{|D|}(x^{-1})^{-1}$ 是紧算子 ds 的谱密度函数。其他基本无穷小（即紧算子）是元素 $a \in \mathcal{A}$的量子微分 $da := i[F, a]$，其中 $(\mathcal{A}, h, F)$ 是与该谱三元组相关联的 Fredholm 模。在紧致光滑流形的黎曼几何这一经典情形中，$\mathcal{A}$ 是光滑函数代数，D 是狄拉克算子，F 是希尔伯特变换；借助伪微分演算的工具，可以建立 da诸元、ds 及其奇异值之间的联系。然而，即使在这一交换情形下，当只要求 $\mathcal{A}$ 是利普希茨函数或索博列夫函数代数时，也需要进行更精细的分析，例如一维分形和拟共形流形的情形（参见 A. Connes-D. Sullivan 在 [Co] 中的研究，以及 M. Hilsum 在 [Hil]中的研究）。一般而言，元素 $a \in \mathcal{A}$ 的较高光滑性，必须从其量子微分 da 更强的紧性中读出；归根结底，该量子微分将属于由单位长度 ds 生成的理想。

在这项工作中，我们根据 $da's$ 的奇异值来估计其奇异值，而不对狄拉克算子 D 施加任何谱增长条件，只要求最小且自然的光滑性：$\mathcal{A}$ 是自同构群 $\alpha(a, t)$ 的生成元的定义域 $\mathcal{A}_D$ 中的一个子代数：$= e^{itD} a e^{-itD}$；或者它位于交集 $\mathcal{A}_D \cap \mathcal{A}_{|D|}$ 中，该交集与自同构群 $\beta(a, t)$ 的生成元的定义域 $\mathcal{A}_{|D|}$ 相交：$= e^{it|D|} a e^{-it|D|}$（换言之，与 D 或 $|D|$ 的交换子是有界的）。在量子力学中，α 表示由狄拉克哈密顿量支配的系统中可观测量的海森堡时间演化

[1]本研究得到法国国家科学研究中心 Ypatia 数学科学实验室 - 意大利国家高等数学研究院 Ypatia 数学科学实验室（LYSM）的支持。日期：2022年12月30日。2020 数学主题分类。58B34, 31C25, 46L57,47A11。

D 而在黎曼几何中，根据埃戈罗夫定理， β 表示测地流。为了处理更多例子（包括即将给出的例子），我们允许狄拉克算子具有无限维核，同时假设它在核之外具有离散谱，即在其核的正交补 D^{-1} $ker(D)^{\perp}$ 上具有紧逆算子。

本研究将狄利克雷空间纳入非交换几何（NCG）的应用范围。这类空间是交换或非交换的 C* or 冯·诺伊曼代数，带有一个特殊的二次型 $\mathcal{E}$ ，该二次型满足一种特征性的压缩性质，称为狄利克雷型，并表示一个能量泛函。这个泛函推广了黎曼流形上的狄利克雷积分，并使发展一种无核的非交换势理论成为可能。在狄利克雷空间中，狄拉克算子是一个 2×2 矩阵

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \partial^* \\ \partial & 0 \end{pmatrix}$$

由导子 ∂定义，导子表示狄利克雷能量型的微分平方根 （参见 [CS1]），其意义是

$$\mathcal{E}[a] = \|\partial a\|^2_{\mathcal{H}}.$$

自然的例子包括量子力学中哈密顿量的基态表示、量子统计力学中收敛至 KMS 平衡态的完全正马尔可夫半群，以及量子概率中量子 Lévy 过程的生成元。在本文最后一部分，我们特别研究与可数离散群上的负定函数相关的狄利克雷空间的量子微分。

下面对本文内容作较为详细的介绍。第 2 节中，我们引入本质离散谱三元组（$\mathcal{A}, h, D$），这是对经典概念的略微扩展，应用于狄利克雷空间时将会用到。本节中，我们考察与这些三元组相关的典范弗雷德霍姆算子 F_0 及其一个技术性变体 F ，并证明它们在 $\mathcal{A}$上给出了等价的弗雷德霍姆模。分析基于量子微分 da 关于梯度$i[D, a]$ 和线元 ds 的新旧表示。特别地，我们证明 da属于由 $\sqrt{|}$ds| 生成的理想，且奇异值 $\mu_{4k}(da)$ 受奇异值μ_k(ds) 控制，其比值与 Lipsc~~hitz~~ 半范数 $\|[D, a]\|$成正比。假设交换子 $[|D|, a]$ 也有界，我们证明 da属于由 ds 生成的理想，且 $\mu_{2k}(da)$ 受 μ_k(ds) 支配。我们还证明，它们的比值渐近接近半范数 $\|[D, a]\|$, $\|[|D|, a]\|$之和的五倍。对于离散谱三元组，该估计得到改进，可控制 $\mu_{k+d}(da)$, 其中 $d := \dim \ker(D)$。第 3 节中，我们在带有下半连续忠实迹（A, τ）的 C*-代数上，为狄利克雷空间（$\mathcal{E}, \mathcal{F}$）引入典范的本质离散谱三元组和弗雷德霍姆模。这里，狄拉克算子是导子 ∂ 与散度 ∂^* 构成的反对角矩阵，它们由 $\mathcal{E}$典范地确定；而 $\mathcal{A}$ 是 Lipschitz 代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ ，由狄利克雷代数$\mathcal{B} := \mathcal{F} \cap A$ 中具有有界场算子（亦称能量密度）的元素构成。我们证明，光滑子代数 $\mathcal{A}^2_{,\mathcal{E}}{}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$中属于冯·诺伊曼代数 $M := L^{\infty}(A, \tau)$ 上 $\mathcal{E}$ 的生成元 L 定义域的元素，与 $|D|$的交换子有界。这些结果源于如下紧性与有界性：当 $\gamma \in (0, 1/2)$ 时，与根算子 $(I + L)^{\gamma}$ 的交换子在 $L^2(A, \tau)$ 上是紧的；当 $\gamma = 1/2$时，它们有界。

在第4节中，我们证明了当交换子 $[\sqrt{I + L}, a]$ 为紧算子时，量子微分 da的奇异值下界。在这种情况下， da的奇异值由线元 ds 的奇异值从上下两方面加以控制。我们尤其考虑生成元为 L 的 L^{β} （0, 1）根算子的狄利克雷型 $\beta \in$ 。

在最后的第5节中，我们分析由离散群上的负型函数构造的狄利克雷型。我们引入缓慢负型函数这一类函数，以上全部分析均适用于此类函数；我们还证明，这一类函数包含自由群的长度函数，以及任意离散群上任意适当负型函数的任意根算子。

2. 本质离散谱三元组及其弗雷德霍姆模

为了涵盖狄利克雷空间的应用，我们考虑以下类型的谱三元组：

De定义 2.1. $(\mathcal{A}, h, D)$ 称为本质离散，若 $\sigma(D) \setminus \{0\}$ 是离散的 .

因此，若 $0 \in \sigma(D)$，则允许该值是一个具有无限重数的特征值；也就是说，记 P_0 为投影到 $\ker(D)$ 上的正交投影，我们假设 $(I - P_0)D$ 作为作用于 $(I - P_0)(h)$ 上的算子具有离散谱。

我们采用如下约定： D^{-1} 和 $|D|^{-1}$ 表示在 $\ker(D) = P_0 h$ 上恒等于零、并在 $(I - P_0)(h)$ 上取通常函数演算的算子。按照这一约定，这两个算子都是紧算子，并且满足以下恒等式

$$DD^{-1} = D^{-1}D = |D|\,|D|^{-1} = |D|^{-1}|D| = I - P_0, \qquad D|D|^{-1} = sign(D)$$

其中，最后一个是与 $\mathbb{R}$上的符号函数对应的符号算子。 $|D|$ 谱的非零部分将枚举如下：

$$0 < \lambda_1(|D|) \leq \lambda_2(|D|) \cdots \leq \lambda_n(|D|) \leq \lambda_{n+1}(|D|) \leq \cdots$$

其中，每个特征值 $\lambda_n(|D|)$均按其重数重复列出。

2.1.弗雷德霍姆算子与量子微分。在交换情形下，若 D 是定义在闭紧黎曼流形 M的克利福德代数上的狄拉克算子，则符号算子 $F_{cl} := sign(D)$是一个 0 阶 ΨDO，因为 D 是微分算子，而 $|D|$ 是一个同样为 1 阶的 ΨDO 。根据伪微分演算，与光滑函数 $a \in C^\infty(M)$ 的交换子 $[F_{cl}, a]$ 是 -1 阶的 ΨDO，因此 $[F_{cl}, a]|D|$和 $|D|[F_{cl}, a]$ 作为 0 阶 ΨDO是有界的。换言之，与光滑函数的交换子 $[F_{cl}, a]$ 属于由线元 $\mathrm{ds} = |D|^{-1}$生成的（紧算子的）对称主理想。如果函数 a 仅为利普希茨函数，则无法推出这一性质，因为在这种情况下伪微分演算并不适用。本节旨在对具有利普希茨性质的 $a \in \mathcal{B}(h)$施加相当温和的假设，从而在一般的非交换几何框架下获得类似的估计。

为考虑一般情形，我们将以下自伴有界算子与狄拉克算子关联起来

$$F := P_0 + \frac{D}{\sqrt{1 + D^2}}$$

事实上，它是一个弗雷德霍姆算子，这一点可由下式得出

$$F^2 - I = P_0 + (I - P_0)\frac{D^2}{I + D^2} - I_h = -(I - P_0)\frac{I}{I + D^2}.$$

我们还将考虑另一种自伴弗雷德霍姆算子：

$$F_0 := P_0 + D\,|D|^{-1}.$$

它是一个正交对称，与 F 相差一个紧算子。更准确地说

$$F^2 = I, \qquad F - F_0 = (I - P_0)T\,|D|^{-2} \tag{2.1}$$

where $T := -\dfrac{D}{|D|}\dfrac{D^2}{\sqrt{I+D^2}(|D|+\sqrt{I+D^2})}$ is a contraction.

算子 $i[F_0,a]$、$i[F,a]$ 都记作 da，是 $a\in\mathcal{A}$（[Co] 第 4 章）的量子微分。我们先从一个观察开始:

引理 2.2. 下列恒等式成立

$$[P_0,a]=P_0\,\alpha_0\,|D|^{-1}+|D|^{-1}\beta_0\,P_0\qquad a\in\mathcal{A}$$

对于适当的算子 α_0，$\beta_0\in B(h)$，其中 $\|\alpha_0\|=\|\beta_0\|=\|[D,a]\|$。

证明. 所述表示可由以下恒等式推出

$$\begin{aligned}P_0a-P_0aP_0&=P_0a(I-P_0)=P_0aDD^{-1}=P_0[a,D]D^{-1}=P_0[a,D]|D|D^{-1}|D|^{-1}\\ P_0aP_0-aP_0&=(I-P_0)aP_0=D^{-1}DaP_0=D^{-1}[D,a]P_0=|D|^{-1}|D|D^{-1}[D,a]P_0.\end{aligned}$$

□

命题 2.3. 对于 $a=a^*\in\mathcal{A}$，我们有如下界

$$-\,||\,[D,a]\,||\,(I+D^2)^{-1/2}\le i\,\Big[\frac{D}{\sqrt{1+D^2}},\,a\Big]\le||\,[D,a]\,||\,(I+D^2)^{-1/2}\tag{2.2}$$

$$-\,||\,[D,a]\,||\,|D|^{-1}\le i\,(I-P_0)\,\Big[\frac{D}{\sqrt{1+D^2}},\,a\Big]\,(I-P_0)\le||\,[D,a]\,||\,|D|^{-1}\tag{2.3}$$

and

$$-\,\|[D,a]\|\cdot|D|^{-1}\le i\,(I-P_0)\,\Big[\,\frac{D}{|D|},\,a\,\Big]\,(I-P_0)\le\|[D,a]\|\cdot|D|^{-1}.\tag{2.4}$$

证明。注意到，双重不等式 (2.3) 是 (2.2) 的直接推论，因为 $(I-P_0)\,\dfrac{1}{\sqrt{1+D^2}}(I-P_0)\le|D|^{-1}$。

为了证明 (2.2) 中的双重不等式，我们照例使用（参见 [SWW] 命题 1）以下恒等式（在强收敛意义下）

$$\frac{D}{\sqrt{I+D^2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}t^{-1/2}\frac{D}{tI+I+D^2}dt$$

由此我们推出

$$\begin{aligned}
i\big[\frac{D}{\sqrt{1+D^2}},\,a\big] &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\, i\,\Big[\frac{D}{tI+I+D^2},\,a\Big]dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\left(\frac{I}{tI+I+D^2}i[D,a]+I\big[\frac{I}{tI+I+D^2},\,a\,\big]\,D\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\left(\frac{I}{tI+I+D^2}i[D,a]-\frac{I}{tI+I+D^2}i[D^2,a]\frac{D}{tI+I+D^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\Big(\frac{I}{tI+I+D^2}i[D,a]-\frac{D}{tI+I+D^2}i[D,a]\frac{D}{tI+I+D^2} \\
&\qquad\qquad -\frac{I}{tI+I+D^2}i[D,a]\frac{D^2}{tI+I+D^2}\Big)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\Big(\frac{I}{tI+I+D^2}i[D,a]\big(I-\frac{D^2}{tI+I+D^2}\big) \\
&\qquad\qquad -\frac{D}{tI+I+D^2}i[D,a]\frac{D}{tI+I+D^2}\Big)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\Big(\frac{tI+I}{tI+I+D^2}i[D,a]\frac{I}{tI+I+D^2} \\
&\qquad\qquad -\frac{D}{tI+I+D^2}i[D,a]\frac{D}{tI+I+D^2}\Big)dt\,.
\end{aligned}$$

注意到 $i[D,a]$ 是自伴的，因此 $-||\,[D,a]\,||\,I \le i[D,a] \le ||\,[D,a]\,||\,I$，由此，上述恒等式给出

$$\begin{aligned}
i\big[\frac{D}{\sqrt{1+D^2}},\,a\big] &\le ||\,[D,a]\,||\,\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\Big(\frac{tI+I}{(tI+I+D^2)^2}+\frac{D^2}{(tI+I+D^2)^2}\Big)dt \\
&= ||\,[D,a]\,||\,\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\frac{I}{tI+I+D^2}\,dt \\
&= ||\,[D,a]\,||\,(I+D^2)^{-1/2}
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
i\big[\frac{D}{\sqrt{1+D^2}},\,a\big] &\ge -||\,[D,a]\,||\,\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\Big(\frac{tI+I}{(tI+I+D^2)^2}+\frac{D^2}{(tI+I+D^2)^2}\Big)dt \\
&= -||\,[D,a]\,||\,\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{-1/2}\frac{I}{tI+I+D^2}\,dt \\
&= -||\,[D,a]\,||\,(I+D^2)^{-1/2}\,.
\end{aligned}$$

双重不等式 (2.4) 可以用同样的方法证明，只需作显而易见的调整；也可以由 [SWW] 中的命题 1 推出，其中在 D 可逆的情形下陈述了同一不等式。事实上，一方面

$$i\,(I-P_0)\,\big[\,\frac{D}{|D|},\,a\,\big]\,(I-P_0) = i\big[\,(I-P_0)\,\frac{D}{|D|}\,(I-P_0)\,,\,(I-P_0)a(I-P_0)\,\big] = i\big[\,\frac{D}{|D|},\,(I-P_0)a(I-P_0)\,\big]$$

并且，由于 $\|\big[\,D,(I-P_0)a(I-P_0)\,\big]\| = \|[D,a]\|$，$(D,\ (I-P_0)h,\ (I-P_0)\mathcal{A}(I-P_0))$ 是一个谱三元组，其中 D 在 $(I-P_0)h$ 上可逆。□

利用上述界限，我们证明了 $\mathcal{A}$ 中元素的量子微分属于 $B(h)$ 中由 $\sqrt{|\mathrm{ds}|} = |D|^{-1/2}$ 生成的对称主理想。

命题 2.4. 对于任意固定的 $a = a^* \in \mathcal{A}$

i) 存在有界算子 $\alpha, \beta, \gamma \in B(h)$ 使得

$$i[F, a] = \alpha |D|^{-1} + |D|^{-1}\beta + |D|^{-1/2}\gamma\,|D|^{-1/2},$$

其中 $||\alpha|| \leq 2\,||\,[D, a]\,||$, $||\beta|| \leq 2\,||\,[D, a]\,||$, $||\gamma|| \leq ||\,[D, a]\,||$;

ii) 用 F_0 代替 F时，也有类似的表示。

证明。 i) 对于 $[P_0, a]$, 参见上文的引理 2.2。由于 $DP_0 = 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} P_0[(1+D^2)^{-1/2}D, a] &= -P_0 a D(1+D^2)^{-1/2}(I-P_0) = P_0[D,a](1+D^2)^{-1/2}(I-P_0) \\ &= P_0[D,a]\frac{|D|}{\sqrt{1+D^2}}|D|^{-1} = P_0[D,a]\frac{|D|}{\sqrt{1+D^2}}|D|^{-1}(1-P_0). \end{aligned}$$

类似地,

$$[(1+D^2)^{-1/2}D, a]P_0 = (1-P_0)|D|^{-1}\frac{|D|}{\sqrt{1+D^2}}\,[D,a]P_0.$$

对于 $(I-P_0)[(1+D^2)^{-1/2}D, a](I-P_0) = (I-P_0)[(1+D^2)^{-1/2}D, (I-P_0)a(I-P_0)](I-P_0)$，可应用命题 2.3 的 (2.3)，这等价于断言

$$-||\,[D,a]\,||\,|D|^{-1} \leq i\big[\frac{D}{\sqrt{I+D^2}}, (I-P_0)a(I-P_0)\big] \leq -||\,[D,a]\,||\,|D|^{-1}\,.$$

ii) 可由命题 2.3 中的 (2.4) 以及与上述相同的证明得出。 □

作为上述表示的第一个推论，我们有

推论 2.5。 若$(\mathcal{A},\ h,\ D)$ 是一个本质离散谱三元组，则$(\mathcal{A},\ h,\ F_0)$ 和$(\mathcal{A},\ h,\ F)$ 本质酉等价，且均为弗雷德霍姆模。

证明。 由恒等式 (2.1)、引理 2.2 和命题 2.3 可得。 □

第二个推论　　涉及量子微分的奇异值上界　　.

推论 2.6. 若$(\mathcal{A}, h, D)$ 是一个本质离散谱三元组，则量子微分的奇异值由 *Lipschitz* 半范数和 D^{-1} 的奇异值控制

$$\mu_{4k}(i[F_0, a]) \leq 5\,\|\,[D,a]\,\|\,\mu_k(|D|^{-1}) = 5\,\|\,[D,a]\,\|\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1} \qquad a = a^* \in \mathcal{A}, \quad k \geq 0,$$

$$\mu_{4k}(i[F, a]) \leq 5\,\|\,[D,a]\,\|\,\mu_k(|D|^{-1}) = 5\,\|\,[D,a]\,\|\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1} \qquad a = a^* \in \mathcal{A}, \quad k \geq 0.$$

用线元和量子微分的术语来说，我们证明了以下界

$$\mu_{4k}(da) \leq 5\,\|\,[D,a]\,\|\,\mu_k(\mathbf{ds}) \qquad a = a^* \in \mathcal{A}, \quad k \geq 0.$$

证明. 应用命题 2.4 和奇异值的规则 [Co] 第 4 章附录 C，可得

$$\begin{aligned} \mu_{4k}(i[F,a]) &\leq \mu_k(\alpha|D|^{-1}) + \mu_k(|D|^{-1}\beta) + \mu_{2k}(|D|^{-1/2}\gamma\,|D|^{-1/2}) \\ &\leq \|\alpha\|\mu_k(|D|^{-1}) + \|\beta\|\mu_k(|D|^{-1}) + \|\gamma\|\mu_k(|D|^{-1/2})^2 \\ &\leq 5\,\|\,[D,a]\,,\mu_k(|D|^{-1}) = 5\,\|\,[D,a]\,\|\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1}\,. \end{aligned}$$

并且对于 $\mu_{4k}(i[F_0, a])$ 也同样成立。 □

2.2. **改进量子微分奇异值的估计**。 这里我们考虑一个自然条件，在该条件下，元素 $a \in \mathcal{A}$ 的量子微分 da 属于 $\mathcal{K}(h)$ 中由线元 ds 生成的主理想。于是，量子微分算子 d 可视为从 $\mathcal{A}$ 到由 ds 生成的理想 $\mathcal{I}_D \subseteq \mathcal{K}(h)$ 的一个导子；该理想被视为范数闭包 $A := \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}(h)$ 上的 A- 双模。

引理 2.7. 设 $a \in \mathcal{A}$ 满足交换子 $[\,|D|, a\,]$ 有界。那么有

(2.5)
$$
\begin{aligned}
[P_0, a](I - P_0) &= P_0[a, D]F_0\,|D|^{-1} \\
\Big[\frac{D}{|D|}, a\Big](I - P_0) &= -D|D|^{-1}[\,|D|, a\,]\,|D|^{-1} + [D, a]\,|D|^{-1} \\
\Big[\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}, a\Big](I - P_0) &= -\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}\,\Big[\sqrt{I + D^2}, a\Big]\,\frac{|D|}{\sqrt{I + D^2}}|D|^{-1} + [D, a]\,\frac{|D|}{\sqrt{I + D^2}}|D|^{-1}
\end{aligned}
$$

and

(2.6)
$$
\begin{aligned}
[P_0, a]P_0 &= -|D|^{-1}F_0[D, a]P_0 \\
\Big[\frac{D}{|D|}, a\Big]\,P_0 &= |D|^{-1}[D, a]P_0 \\
\Big[\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}, a\Big]\,P_0 &= |D|^{-1}\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}[D, a]P_0\,.
\end{aligned}
$$

证明。 我们依次计算：

$$
\begin{aligned}
[P_0, a](I - P_0) &= P_0 a(I - P_0) = P_0 aDD^{-1} = P_0[a, D]D^{-1} = P_0[a, D]F_0|D|^{-1} \\
\Big[\frac{D}{|D|}, a\Big](I - P_0) &= D[\,|D|^{-1}, a](I - P_0) + [D, a]\,|D|^{-1} \\
&= D(I - P_0)[\,|D|^{-1}, a](I - P_0) + [D, a]\,|D|^{-1} \\
&= -D|D|^{-1}[\,|D|, a\,]\,|D|^{-1} + [D, a]\,|D|^{-1} \\
\Big[\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}, a\Big](I - P_0) &= D\Big[\frac{I}{\sqrt{I + D^2}}, a\Big](I - P_0) + [D, a]\,\frac{I - P_0}{\sqrt{I + D^2}} \\
&= D(I - P_0)\Big[\,|D|^{-1}, a\Big](I - P_0) + [D, a]\,|D|^{-1} \\
&= -D\frac{I}{\sqrt{I + D^2}}\big[\,\sqrt{I + D^2}, a\big]\,\frac{I - P_0}{\sqrt{I + D^2}} + [D, a]\,\frac{I - P_0}{\sqrt{I + D^2}} \\
&= -D\frac{I}{\sqrt{I + D^2}}\big[\,\sqrt{I + D^2}, a\big]\,\frac{ID|}{\sqrt{I + D^2}}\,|D|^{-1} + [D, a]\,\frac{|D|}{\sqrt{I + D^2}}\,|D|^{-1} \\
[P_0, a]P_0 &= -(I - P_0)aP_0 = -D^{-1}[D, a]P_0 = -|D|^{-1}F_0[D, a]P_0 \\
\Big[\frac{D}{|D|}, a\Big]P_0 &= \frac{D}{|D|}aP_0 = |D|^{-1}[D, a]P_0 \\
\Big[\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}, a\Big]P_0 &= \frac{D}{\sqrt{I + D^2}}aP_0 \\
&= \frac{I - P_0}{\sqrt{I + D^2}}\,\big[D, a\big]\,P_0 \\
&= |D|^{-1}\frac{|D|}{\sqrt{I + D^2}}\,[D, a]\,P_0\,.
\end{aligned}
$$

□

命题 2.8。 设 $a \in \mathcal{A}$ 使得交换子 $[\,|D|, a\,]$ 有界。那么存在有界算子 α_0 和 β_0，使得

$$i[F_0, a] = \alpha_0 \, |D|^{-1} + |D|^{-1} \, \beta_0$$

与 $\|\alpha_0\| \leq \|\,[D, a]\,\|$, $\|\beta_0\| \leq \|\,[D, a]\,\| + \|\,[\,|D|, a\,]\,\|$ 和 $\beta_0 P_0 = 0$。因此，量子微分$da = i[F_0, a]$ 属于由线元 **ds** 生成的对称理想 $\mathcal{I}_D \subseteq \mathcal{B}(h)$ 。

证明。 这是由前面的引理 2.7 直接得出的结论。 □

关于交换子 $[F, a]$ 的类似结果需要一个预备引理:

引理 2.9。 设 $a \in \mathcal{A}$ 满足交换子 $[|D|, a]$ 有界，则 ***i)*** 下述界成立
$\|[\sqrt{1+D^2}, a]\,\| \leq \|[|D|,\, a]\,\| + 2\|a\|$。
ii) 有

$$\|(I - P_0)\big[\sqrt{1+D^2}, a\big]\,(I - P_0)\| \leq C_1(\lambda_1)\|\big[|D|, a\big]\|.$$

其中， $C_1(\lambda_1) = \sqrt{1+\lambda_1^{-2}}$和 $\lambda_1 := \lambda_1(|D|) > 0$ 是 $|D|$ 的第一个非零特征值。

证明。 **i)** 中的估计由恒等式 $\sqrt{1+D^2} = |D| + \dfrac{I}{\sqrt{1+D^2}+|D|}$ 和界 $\|(\sqrt{1+D^2}+|D|)^{-1}\| \leq 1$ 得出。同一恒等式还意味着

$$\begin{aligned}(I - P_0)\big[\sqrt{1+D^2}, a\big](I - P_0) =& (I - P_0)\big[\,|D|, a\,\big](I - P_0) \\ &- \frac{I - P_0}{\sqrt{1+D^2}+|D|}\,\big[\,\sqrt{1+D^2},\, a\,\big]\,\frac{I - P_0}{\sqrt{1+D^2}+|D|} \\ &- \frac{I - P_0}{\sqrt{1+D^2}+|D|}\,\big[\,|D|,\, a\,\big]\,\frac{I - P_0}{\sqrt{1+D^2}+|D|}\end{aligned}$$

以及不等式

$$\begin{aligned}\big\|\,(I - P_0)[\sqrt{I+D^2}, a\,](I - P_0)\,\big\| \leq& \big\|\,[\,|D|, a\,]\big\| + (\sqrt{1+\lambda_1^2}+\lambda_1)^{-2}\big\|\,(I - P_0)[\,|D|, a\,](I - P_0)\,\big\| \\ &+(\sqrt{1+\lambda_1^2}+\lambda_1)^{-2}\big\|\,(I - P_0)[\sqrt{I+D^2}, a\,](I - P_0)\,\big\|\end{aligned}$$

进而提供

$$\big(1-(\sqrt{1+\lambda_1^2}+\lambda_1)^{-2}\big)\big\|\,(I - P_0)[\sqrt{I+D^2}, a\,](I - P_0)\,\big\| \leq \big(1+(\sqrt{1+\lambda_1^2}+\lambda_1)^{-2}\big)\,\|[\,|D|, a\,]\|$$

以及与之结果的

$$\begin{aligned}C_1(\lambda_1) &= \frac{1+(\sqrt{1+\lambda_1^2}+\lambda_1)^{-2}}{1-(\sqrt{1+\lambda_1^2}+\lambda_1)^{-2}} = \frac{1+(\sqrt{1+\lambda_1^2}-\lambda_1)^2}{1-(\sqrt{1+\lambda_1^2}-\lambda_1)^2} = \frac{1+\lambda_1^2-\lambda_1\sqrt{1+\lambda_1^2}}{\lambda_1\sqrt{1+\lambda_1^2}-\lambda_1^2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1\sqrt{1+\lambda_1^2}-\lambda_1^2} - 1 = \frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}+\lambda_1}{\lambda_1} - 1 = \sqrt{1+\lambda_1^{-2}}\,.\end{aligned}$$

□

注 2.10。 将 $||a||$替换为 $A/A\cap\{D\}'$商空间中a 的范数，可以稍微改进上述估计 **i)**。

命题 2.11。 设 $a \in \mathcal{A}$ 使得交换子 $[\,|D|, a\,]$ 是有界的。那么存在有界算子 α_1、$\beta_1 \in \mathcal{B}(h)$ 使得

$$i[F, a] = \alpha_1 |D|^{-1} + |D|^{-1}\beta_1$$

其中 $\|\alpha_1\| \leq 2\|\,[D, a]\,\|$, $\|\beta_1\| \leq 3\|\,[D, a]\,\| + C_1(\lambda_1)\|\,[\,|D|, a]\,\|$ （或者，可以选择 $\|\beta_1\| \leq 3\|\,[D, a\,]\| + \|\,[\,|D|, a]\,\| + 2||a||$) 和 $\beta_1 = \beta_1 P_0$，且量子微分 $da = i[F, a]$ 属于由线元 **ds**生成的对称理想 $\mathcal{I}_D \subseteq \mathcal{B}(h)$ 。

证明。 这是引理 2.7 和 2.9 的直接推论。 □

推论 2.12。 设 $a \in \mathcal{A}$ 满足交换子 $[\,|D|, a\,]$ 有界，则量子微分的奇异值受以下控制

$$\mu_{2k}(i[F_0, a]) \leq (||\alpha_0|| + ||\beta_0||)\,\mu_k(|D|^{-1}) = (||\alpha_0|| + ||\beta_0||)\,\|\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1}$$
$$\mu_{2k}(i[F, a]) \leq (||\alpha_1|| + ||\beta_1||)\,\mu_k(|D|^{-1}) = (||\alpha_1|| + ||\beta_1||)\,\|\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1}$$

其中 α_0, β_0, α_2 和 β_1 由命题 *2.8* 和 *2.11* 给出。用线元和量子微分表示，我们有

$$\mu_{2k}(da) \leq const.\mu_k(\mathbf{ds}) \qquad a = a^* \in \mathcal{A}, \quad k \geq 0.$$

证明。应 用命题 2.8 和 2.11，方法与推论 2.6 的证明类似。 □

Fro根据本命题，在离散谱的情况下，我们可推出以下 :

推论 2.13。 设 $a \in \mathcal{A}$, $a = a^*$ 满足交换子 $[\,|D|, a]$ 有界，并假设 D 的核是有限维的。则有以下估计

$$\mu_{k+d}(i[F_0, a]) \leq ||\alpha_0||\,\mu_k(|D|^{-1}) = ||\alpha_0||\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1}$$
$$\mu_{k+d}(i[F, a]) \leq ||\alpha_1||\,\mu_k(|D|^{-1}) = ||\alpha_1||\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1}.$$

其中 α_0 和 α_1 分别由命题 *2.8* 和 *2.11* 给出，且 $d = dim(ker(D))$。特别地，$||\alpha_0|| \leq ||\,[D, a]\,||$ 和 $||\alpha_1|| \leq 2||\,[D, a]\,||$。用线元和量子微分表示，我们有

$$\mu_{k+d}(da) \leq const.\mu_k(\mathbf{ds}) \qquad a = a^* \in \mathcal{A}, \quad k \geq 0.$$

2.3. **从渐近观点看相同的估计**。 在上述双重 Lipschitz 假设下，我们证明了一些渐近上更为精确的估计。

命题 2.14。 设 $a \in \mathcal{A}$ 使得交换子 $[\,|D|, a\,]$ 有界。则存在有界算子 $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \in B(h)$ 使得

$$i[F, a] = \alpha_3 |D|^{-1} + |D|^{-1}\beta_3 + |D|^{-1}\gamma_3 |D|^{-1}$$

其中 $\|\alpha_3\| \leq 2\|\,[D, a]\,\|$、 $\|\beta_3\| \leq 3\|\,[D, a]\,\| + \|\,[\,|D|, a]\,\|$ 和 γ_3 有界。

证明。 根据引理 2.7，我们有

$$[P_0, a] = \sigma_0 |D|^{-1} + |D|^{-1}\tau_0 \text{ with } ||\sigma_0|| \leq ||\,[D, a]\,|| \; ||\tau_0|| \leq ||\,[D, a]\,||$$
$$\left[\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}, a\right] P_0 = |D|^{-1}\tau_1 \text{ with } ||\tau_1|| \leq ||\,[D, a]\,||$$
$$\left[\frac{D}{\sqrt{I + D^2}}, a\right](I - P_0) = \sigma_1 |D|^{-1} - \frac{D}{\sqrt{I + D^2}}[\sqrt{I + D^2}, a]\frac{D}{\sqrt{I + D^2}} \text{ with } ||\sigma_1|| \leq ||\,[\,|D|, a]\,||.$$

我们计算

$$[\sqrt{I+D^2},a]=[\,|D|,a]+\Big[\frac{I}{\sqrt{I+D^2}+|D|},a\Big]$$
$$=[\,|D|,a]-\frac{I}{\sqrt{I+D^2}+|D|}\,\big[\sqrt{I+D^2}+|D|,a\big]\frac{I}{\sqrt{I+D^2}+|D|}$$

并注意到$\big[\sqrt{I+D^2}+|D|,a\big]$是一个有界算子。综上，我们得到所需结果。 □

我们需要一个引理，对 K. Fan 的一个结果（[GK] 第二章第 5 节定理 2.3）稍作改进。为求完整起见，我们给出详细证明。

引理 2.15. 设 T 和 σ 是两个紧算子。则存在一个整数 d_1 以及两个数列 $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ 和 $(\varepsilon'_k)_{k\geq 0}$，使得 $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=\lim_{k\to\infty}\varepsilon'_k=0$ 且

$$(1-\varepsilon'_k)\mu_{k+d_1}(T)\leq\mu_k\big(T(I+\sigma)\big)\leq(1+\varepsilon_k)\mu_k(T)\,.$$

证明. 回顾一下（[Connes 第 4 章第 2] 节）：

$$\mu_k(T)=\inf||P^\perp T||=\inf||T\,Q^\perp||$$

其中 P 或 Q 遍历秩小于 k的正交投影集合，并且下确界确实是一个最小值；当 P（分别为 Q）是对应于 $|T^*|$（分别为 $|T|$）的前 k 个较大特征值的正交投影时，该最小值可取到。

令 P_k（分别为 Q_k）是对应于 $|T^*|$（分别为$|T|$）的前 k 个特征值的正交投影：我们有 $\mu_k(T)=||P_k^\perp T||$且 $P_kT=TQ_k$，因此 $P_k^\perp T=TQ_k^\perp=P_k^\perp TQ_k^\perp$。注意，由于 $k\to\infty$，Q_k 单调递增地趋向于 $I-q_0$，因此 $Q_k^\perp$ 趋向于q_0，其中 q_0 是投影到 T的核上的正交投影。注意，由于 σ 是紧的，$\lim_{k\to\infty}||Q_k^\perp(I-q_0)\sigma||=0$。现在计算

$$\mu_k\big(T(I+\sigma)\big)\leq||P_k^\perp T(I+\sigma)||$$
$$=||P_k^\perp TQ_k^\perp(I-q_0)(I+\sigma)||$$
$$\leq||P_k^\perp T||\,\big(1+||Q_k^\perp(I-q_0)\sigma||\big)$$

这给出了所需的不等式，其中 $\varepsilon_k=||Q_k^\perp(I-q_0)\sigma||$。
现在注意，存在一个紧算子 τ，使得 $(I+\sigma)(I+\tau)=I-p_1$，其中p_1 是投影到 $ker(I+\sigma^*)=Im(I+\sigma)^\perp$上的正交投影。这是一个有限秩投影，其秩为 d_1。应用刚刚证明的不等式，可得

$$\mu_{k+d_1}(T)=\mu_{k+d_1}\big(T(I-p_1)+Tp_1\big)$$
$$\leq\mu_k\big(T(I-p_1)\big)+\mu_{d_1}(Tp_1)=\mu_k\big(T(I-p_1)\big)$$
$$=\mu_k\big(T(I+\sigma)(I+\tau)\big)$$
$$\leq\mu_k\big(T(I+\sigma)\big)\,(1+\widetilde{\varepsilon}_k)$$

且 $\lim_{k\to\infty}\widetilde{\varepsilon}_k=0$。证明至此结束。 □

推论 2.16。 设 $a\in\mathcal{A}$ 满足交换子 $[\,|D|,a\,]$ 有界。那么我们有 s

$$\mu_{2k}\big(i[F,a]\big)\leq\big(5||\,[D,a]\,||+||\,|D|,a]\,||\big)\,(1+\varepsilon_k)\,\lambda_{k+1}(|D|)^{-1}\ \textit{with}\ \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0\,.$$

3. 狄利克雷空间的谱三元组

本节中，我们构造带有迹的 aC*-代数上的狄利克雷空间的谱三元组，并应用前述结果研究相关的 Fredholm 模。

3.1. 狄利克雷型及其切双模。 关于迹 C*-代数上的狄利克雷型的定义和性质，参见 [AHK], [C1], [C2], [CS1], [DL], [S]。下面列出本文所需的主要性质，并约定后文所用的记号。

下文中，(A,τ) 是一个 C*-代数，配备了忠实、稠密定义的下半连续迹；$M:=\pi_\tau(A)''\subseteq B(L^2(A,\tau))$ 是相应的冯·诺伊曼代数，它作用于 GNS 表示 $\pi_\tau\colon A\to B(L^2(A,\tau))$ 的希尔伯特空间上。

我们考虑 $L^2(A,\tau)$ 上的一个完全狄利克雷形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$，以及其稠密定义的正自伴生成元 $(L,D(L))$，使得 $\mathcal{E}$ 是二次型$D(L)\ni\xi\to(\xi|L\xi)$ 的闭包，并且有 $\mathcal{F}=D(L^{1/2})$，且对 $\xi\in\mathcal{F}$ 有 $\mathcal{E}[\xi]=\|L^{1/2}\xi\|^2$。

从现在起，我们假设 $(L,D(L))$ 在零点之外具有离散谱。
狄利克雷型的特征性质包括：
i) 半群 $\{e^{-tL}:\ t>0\}$ 将 $L^2(A,\tau)\cap M$ 映射到自身，并扩张为一个 σ-弱连续的、M上的完全正压缩半群，仍以同一符号表示；ii) 预解式 $\{(I+tL)^{-1}:\ t>0\}$ 将 $L^2(A,\tau)\cap M$ 映射到自身，并扩张为一个 σ-弱连续的、M上的完全正压缩预解式，仍以同一符号表示。
M上半群的生成元，记为 $(L,D_M(L))$，其定义域为

$$D_M(L):=\{x\in M:\ L(x):=\lim_{t\downarrow 0}(x-e^{-tL}x)/t\quad \text{exists}\,\sigma-\text{weakly in}\,M\}$$

对于任意 $t>0$，它都与 $(I+tL)^{-1}(M)$ 重合。
狄利克雷代数 $\mathcal{B}:=\mathcal{F}\cap A$是 A的一个对合子代数。我们假设 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ 是 正则的，也就是说，$\mathcal{B}$在各自的拓扑下，既在 A中稠密，也在 $L^2(A,\tau)$ 中稠密，并且它是一个型核。

3.2. 狄利克雷空间的切双模与场算子。 让我们回顾 [CS1] 的主要结果：对任意正则狄利克雷型 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$，都存在一个对称的 A 双模 $(\mathcal{H},\mathcal{J})$，以及一个对称导子 $\partial\colon\mathcal{B}\to\mathcal{H}$，即一个满足下述条件的线性映射

$$\partial(a^*)=\mathcal{J}(\partial a)\qquad a,b\in\mathcal{B},$$

以及莱布尼茨法则

$$\partial(ab)=a\partial b+(\partial a)b\qquad a,b\in\mathcal{B},\tag{3.1}$$

它作为一个从 $L^2(A,\tau)$ 到 $\mathcal{H}$ 的稠密定义算子是可闭的，并且满足

$$\mathcal{E}[a]=\|\partial a\|^2_{\mathcal{H}}\qquad a\in\mathcal{B}\,.$$

$a\in\mathcal{B}$ 的场算子或能量密度是如下正线性形式 $\Gamma[a]\in A^*_+$

$$\langle\Gamma[a],b\rangle=(\partial a|(\partial a)b)_{\mathcal{H}}\qquad b\in A\,.$$

场算子的一个有用近似（参见 [CS1]）如下：

引理 3.1。 *i)* 对任意 $\varepsilon>0$, $L_\varepsilon:=\dfrac{L}{1+\varepsilon L}$在 $L^2(A,\tau)$上生成一个有界狄利克雷型。*ii)* 令 $\Gamma_\varepsilon[a]:=\dfrac{1}{2}\big(a^*L_\varepsilon(a)+L_\varepsilon(a)^*a-L_\varepsilon(a^*a)\big)\in M\cap L^1(A,\tau)$对于 $a\in\mathcal{B}$，有

$$\langle\Gamma[a],b\rangle=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\tau\big(\Gamma_\varepsilon[a]\,b\big)\qquad b\in A.\tag{3.2}$$

注 3.2。 i) 正则狄利克雷型为位势论结构提供了 C*-代数，它推广了黎曼流形上的经典狄利克雷积分；

ii) 导子 $(\partial, \mathcal{B})$ 是可闭的，其闭包的定义域与型定义域 $\mathcal{F}$ 重合。在不会引起混淆时，我们将用相同的记号 ∂ 表示其闭包；
iii) 一般而言，伴随算子 散度算子 ∂^* 从 $\mathcal{H}$ 到 $L^2(A,\tau)$ 并无公式，除非存在一个子代数 $\mathcal{B}_0$，它包含于 A 且属于 L 的定义域，并满足

$$\partial^*(\partial(a)b) = \frac{1}{2}\big(L(ab) + L(a)b - aL(b)\big)\,,\ a,b \in \mathcal{B}_0.$$

在狄利克雷积分的经典情形下，导子与梯度算子相同，其伴随算子则为散度算子。文献 [CGIS] 中给出了一个分形上的计算示例：当这类子代数 $\mathcal{B}_0$ 退化为 1_A 的倍数时，如何计算导子和散度。

3.3. **狄利克雷空间的利普希茨代数**。 这里我们选出狄利克雷代数 $\mathcal{B}$ 的一个子代数，它在此处发挥的作用相当于黎曼流形上的利普希茨函数代数。

引理 3.3。 *1.* 对于 $a \in \mathcal{B}$，以下条件等价：*i)* 场算子 $\Gamma[a]$ 关于迹 τ 绝对连续，且其拉东–尼科迪姆导数 $\dfrac{d\Gamma[a]}{d\tau}$ 有界（简写为 $\Gamma[a] \in \mathcal{M}$）

$$(\partial a|(\partial a)b)_{\mathcal{H}} = \tau(b\Gamma[a]) \qquad b \in A;$$

ii) 存在一个常数 $C_a \geq 0$，使得

$$|\langle \Gamma[a], b\rangle| \leq C_a \tau(|b|) \qquad b \in \mathcal{B};$$

iii) 向量 量 $\partial a \in \mathcal{H}$ 是右-τ-有界的，即存在一个常数 $C_a \geq 0$，使得

$$\|\partial(a)b\|^2_{\mathcal{H}} \leq C_a \tau(b^*b), \quad b \in \mathcal{B}.$$

2. 其元素及其伴随元均满足上述条件的集合 $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$的一个 $*$-子代数。

证明。 1.显然，2.则由对称性和导子 (3.1) 的莱布尼茨法则得出。□

定义 3.4. $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$称为狄利克雷空间（$\mathcal{E}, \mathcal{F}$）的利普希茨代数。对于$a \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$，我们将 $R(a)$ 记为：由以下关系刻画的有界算子 $L^2(A,\tau) \to \mathcal{H}$

$$R(a) : L^2(A,\tau) \to \mathcal{H} \qquad R(a)b := (\partial a)b \qquad b \in \mathcal{B}\,.$$

注 3.5. 注意，由于 ∂ 满足莱布尼茨法则，对于 $b \in \mathcal{B}$，有

$$R(a)b = \partial(a)b = \partial(ab) - a\partial b = [\partial, a]b$$

因此 a 属于 当且仅当它与导子 ∂的交换子有界时，才属于 $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$。

3.4. **光滑子代数**。我们证明，利普希茨代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ 包含一个由生成元的算子定义域中的元素构成的子代数。

命题 3.6. 设 $D_M(L)$ 为冯·诺伊曼代数上生成元的定义域。那么空间

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}}^{2,\infty} := \mathcal{A}_{\mathcal{E}} \cap D_M(L)$$

是利普希茨代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ 的一个 $*$-子代数。

证明。首先注意，对于 $t>0$，由于 $(I+tL)^{-1}$ 是M的一个 *-弱连续压缩算子，且 $\mathcal{E}$关于 τ 是对称的，所以 $(I+tL)^{-1}$ 也将是预对偶$L^1(A,\tau) = M_*$的一个压缩算子。然后注意，$\mathcal{B}^2 \subset L^1(A,\tau)$ 在 $L^1(A,\tau)$ 中稠密：事实上，如果 $x\in M$与 $\mathcal{B}^2$正交，则对所有 $a,b\in\mathcal{B}$ 都有 $0=\tau(bax) = (a^*|xb)_{L^2(A,\tau)}$，从而 $x=0$。因此，$\mathcal{B}\cap L^1(A,\tau)$ 在 $L^1(A,\tau)$ 中稠密。现在考虑 $a\in\mathcal{A}^2,_{\mathcal{E}}{}^{\infty}$。根据 [CS], 对于 $b\in\mathcal{B}$，有

$$2\langle\Gamma[a],b\rangle = (L^{1/2}(a)|L^{1/2}(ab))_{L^2(A,\tau)} + (L^{1/2}(ab^*)|L^{1/2}a)_{L^2(A,\tau)} - (L^{1/2}(a^*a)|L^{1/2}b)_{L^2(A,\tau)}$$

因此，若 $\Gamma[a]\in M$ 和 $L(a)\in M$，则存在一个常数 C 使得

$$\left(L^{1/2}(a^*a)|L^{1/2}b)_{L^2(A,\tau)}\right| \le C\,\tau(|b|)\,,\ b\in\mathcal{B}\cap L^1(A,\tau).$$

特别地，对于任意的 $t>0$和 $b\in\mathcal{B}\cap L^1(A,\tau)$，$b\ge 0$：

$$\begin{aligned}\langle L(\frac{I}{I+tL}(a^*a)),b\rangle_{L^2(A,\tau)} &= \langle L^{1/2}(a^*a), L^{1/2}(\frac{I}{I+tL}(b))\rangle_{L^2(A,\tau)}\\ &\le C\,\tau(\frac{I}{I+tL}(b)) \le C\tau(b)\,.\end{aligned}$$

该估计意味着 $\left\|L((I+tL)^{-1}(a^*a))\right\|_M \le C$ 在 $t>0$上一致有界。由于 $\lim_{t\downarrow 0}(I+tL)^{-1}(a^*a) = a^*a$ 在 M 中依 σ-弱收敛，并且 L 是定义在 M 上的 σ-弱闭算子，我们已证明 $a^*a\in D_M(L)$。 □

3.5. 离散群上适当的条件负型函数所给出的例子。设 G 是一个具有 Haagerup 性质的离散群，ℓ 是定义在 G上的一个适当的条件负型函数。在 $l^2(G) = L^2(C^*_{red}(G),\tau)$中，由 ℓ 乘法定义的算子 L 是狄利克雷型的生成元

$$\mathcal{E}: l^2(G)\to[0,+\infty] \qquad \mathcal{E}[a] = \sum_{g\in G}|a(g)|^2.$$

（τ 是 G的约化 C^*代数上的典范迹）。
令 λ 为 $A = C^*_{red}(G)$的左正则表示，并将 $\mathcal{A}_\infty$ 定义为 $C^*_{red}(G)$中元素$a = \sum_{g\in G} a(g)\lambda(g)$ 构成的代数，其傅里叶系数序列具有有限支集（$\{g\in G\,,\ a(g)\neq 0\}$ 是有限的）。已知存在 G 在希尔伯特空间 $\mathfrak{h}$ 上的酉表示π 以及一个1-上循环

$$c: G\to\mathfrak{h}. \qquad c(gg') = c(g) + \pi(g)c(g')$$

使得条件负定型函数 ℓ 可表示为

$$\langle c(g'),c(g)\rangle_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{2}\big(\ell(g)+\ell(g')-\ell(g'^{-1}g)\big)\,, \qquad \ell(g) = \|c(g)\|^2\,, \quad g,g'\in G.$$

切双模于是为 $\mathcal{H} = \mathfrak{h}\otimes l^2(G)$，其中 G 通过对角表示 $\pi\otimes\lambda$进行左作用，并通过 $1_{\mathfrak{h}}\otimes\rho$ 进行右作用；其中 ρ是 G在 $\ell^2(G)$上的右作用。对于 $a\in\mathcal{A}_\infty$，表示 $\mathcal{E}$ 的导子为

$$\partial a = \sum_G a(g)c(g)\otimes\delta_g\,,\ a\in\mathcal{A}_\infty$$

并且场算子 确实是 $\mathcal{A}_\infty$的一个元素

$$\begin{aligned}\Gamma[a] &= \sum_{g_1,g_2\in G} \overline{a(g_2)}\, a(g_1)\langle c(g_2), c(g_1)\rangle_{\mathfrak{h}} \lambda(g_2^{-1}g_1)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{g_1,g_2\in G} \overline{a(g_2)}\, a(g_1)\big(\ell(g_2)+\ell(g_1)-\ell(g_2^{-1}g_1)\big)\lambda(g_2^{-1}g_1).\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}^2,{}_L{}^\infty \subset \mathcal{A}_L$，这意味着 $\mathcal{A}_L$ 和 $\mathcal{A}^2,{}_L{}^\infty$ 都是 A 的稠密子代数。

注 3.7。 注意，只要 $\ell(g)\neq 0$， $\Gamma[\lambda(g)] = \ell(g) I_{\ell^\infty(G)}$ 就是 $\mathcal{A}_\infty$ 中的可逆元素；也就是说，对于 G 中除有限个元素之外的元素，此结论成立。

因此，由于 $< b, \Gamma[a]b >= ||R(a)b||^2$，有

$$R(\lambda(g))^* R(\lambda(g)) = \ell(g)\, I_{\ell^\infty(G)} \tag{3.3}$$

3.6. **狄利克雷空间的谱三元组**。 从现在起直至本文结束，我们假设狄利克雷型 $\mathcal{E}$ 的生成元 L 在其核以外具有离散谱。考虑三元组

$$(L^2(A,\tau)\oplus\mathcal{H}\,,\,\mathcal{A}_\mathcal{E}\,,\,D)$$

其中，狄利克雷代数 $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ 作为 A 的子代数，在 $L^2(A,\tau)\oplus\mathcal{H}$ 上通过 A 在左侧的对角作用来作用，该作用同时作用于 $L^2(A,\tau)$ 和 $\mathcal{H}$，而狄拉克算子 定义为

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \partial^* \\ \partial & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 3.8。 三元组 $(L^2(A,\tau)\oplus\mathcal{H}\,,\,\mathcal{A}_\mathcal{E},\,D)$ 是一个本质离散谱三元组。特别地

i) 导子的交换子 与 $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ 在 $L^2(A,\tau)$ 和 $\mathcal{H}$ 上的作用由下式给出：

$$[\partial, a\,] = R(a) \quad for\ all \quad a\in\mathcal{A}_\mathcal{E} \quad with \quad R(a)b = (\partial a)b \quad for\ all \quad b\in\mathcal{B};$$

ii) 对于 $a\in A_\mathcal{E}$，有 $\|[D,a]\| = \max(\|R(a)\|, \|R(a^*)\|)$ 且

$$\big[D,a\big] = \begin{pmatrix} 0 & [\partial^*, a] \\ [\partial, a] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R(a^*)^* \\ R(a) & 0 \end{pmatrix};$$

iii) 在导子 ∂的极分解 $\partial = u\,L^{1/2}$ 中，偏等距算子 $u : L^2(A,\tau)\to\mathcal{H}$ 满足 $u^*u = I_{L^2(A\tau)} - p_0$ 和 $uu^* = I_\mathcal{H} - q_0$，其中 p_0 和 q_0 分别是到 $ker(\partial) = ker(L)$ 和 $ker(\partial^*) = Im(\partial)^\perp$上的正交投影；

iv) 有 $D^2 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & uLu^* \end{pmatrix}$ 和 $|D| = \begin{pmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & uL^{1/2}u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^*\partial & 0 \\ 0 & \partial u^* \end{pmatrix}$；

v) 若我们将 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots$ L 的非零特征值列出，则 $|D|$ 的对应列法为 $\sqrt{\lambda}_1\le\sqrt{\lambda}_1\le\sqrt{\lambda}_2\le\sqrt{\lambda}_2\le\cdots\le\sqrt{\lambda}_n\le\sqrt{\lambda}_n\le\cdots$，即 $\lambda_n(|D|) = \lambda_{[\ (n+1)/2]}^{1/2}$，且 $\mu_n(|D|^{-1}) = \lambda_{[n/2]+1}^{-1/2}$（$[r]$ 为实数 r 的整数部分）；

vi) 到 D 的核上的投影为 $P_0 = \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$。

证明。 由引理 3.3 可直接得出。 □

对于紧量子群，以上类型的谱三元组已在[CFK] 定理 8.4 中构造，其出发点是 GNS 对称非交换 Lévy 过程的狄利克雷型。

注记 3.9。 在所有有趣的例子中， $ker(\partial^*)$都是无限维的，因此，即使 L具有有限维核（这通常会发生）， P_0 一般也可能具有无限秩。

3.7. **狄利克雷空间的 Fredholm 模**。根据第 2.1 小节，并采用定理 3.8 中的记号，与狄利克雷空间相关联的 Fredholm 算子为

$$F_0 = P_0 + \frac{D}{|D|} = \begin{pmatrix} p_0 & u^* \\ u & q_0 \end{pmatrix} \text{ and } F = P_0 + \frac{D}{\sqrt{1+D^2}} = \begin{pmatrix} p_0 & \frac{I}{\sqrt{I+L}}\partial^* \\ \partial\frac{I}{\sqrt{I+L}} & q_0 \end{pmatrix}.$$

它们相差一个由 $|D|^{-2}$ 生成的理想中的元素（参见第 2.1 小节）。
命题 2.4，推论 2.6 以及定理 3.8 的 v) 点导出如下表示

命题 3.1 **0.** *i)* 对于 $a = a^* \in \mathcal{A}_\mathcal{E}$，存在有界算子 α、 β 和 γ，使得

$$i[F, a] = \alpha|D|^{-1} + |D|^{-1}\beta + |D|^{-1/2}\gamma\,|D|^{-1/2}$$

其中 $||\alpha|| \leq 2\,||\,[D, a] = 2||R(a)||$, $||\beta|| \leq 2\,||R(a)||$, $||\gamma|| \leq ||\,R(a)\,||$;
ii) $\mu_{8k}([F, a]) \leq 5\max(||R(a)||\,||R(a^*||)\,\lambda_{k+1}^{-1/2}$，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

注记 3.11. 当利普希茨代数在 A 中不稠密时，例如在后临界有限分形上的调和形式情形中， $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ 退化为常函数，此时弗雷德霍姆模的另一种自然选择是 $(\mathcal{H}, A, \widetilde{F})$，其中 $\widetilde{F} = q_0^\perp - q_0$ 是 $\mathcal{H}$ 上相对于梯度子空间 $Im(\partial) = q_0(\mathcal{H})$ 的正交对称。这正是 [CS2] 中针对后临界有限分形所采用的方法]。
这种替代选择会导致量子导数的估计不同（参见 [CS2]）。然而，除去一个符号差异，它们导出相同的 K-同调类，如下所示

引理 3.12. 如果 L 具有离散谱，且 $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ 在 A中稠密，则 *Fredholm* 模$(L^2(A, \tau) \oplus \mathcal{H}, A, F)$和 $\left(L^2(A, \tau) \oplus \mathcal{H}, A, I \oplus (-\widetilde{F})\right)$ 是同伦的。
证明。 我们忽略 p_0，因为它是有限维的。$(L^2(A, \tau) \oplus \mathcal{H}, A, F)$ 和 $(L^2(A, \tau) \oplus \mathcal{H}, A, F_0)$ 显然是同伦的（通过这一族 $(L^2(A, \tau) \oplus \mathcal{H}, A, (1-t)F + t\,F_0), t \in [0, 1]$）；而 $(L^2(A, \tau) \oplus \mathcal{H}, A, F_0)$ 和 $\left(L^2(A, \tau) \oplus \mathcal{H}, A, I \oplus (-\widetilde{F})\right)$ 则通过以下弗雷德霍姆算子族同伦相连

$$\begin{pmatrix} \sin\,\theta\, I & \cos\,\theta\, u^* \\ \cos\,\theta u & (1+\sin\,\theta)q_0 - \sin\,\theta\, I \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, \pi/2].$$

□

3.8. **与光滑子代数元素的交换子**。 在本小节中，我们从某个自伴元素 $a \in \mathcal{A}^2{}_L{}^\infty$ 出发。目标是证明交换子$[\,|D|, a\,]$有界，从而可以应用命题 2.11。我们先给出一些中间结果。

引理 3.13。 $[L, a]\dfrac{1}{\sqrt{1+L}}$ 是一个有界算子。

证明。 我们来计算，对于 $c \in A$ 和 $b \in Dom_{L^2}(L) \cap \mathcal{B}$，并利用 [CS 中确立的规则、平方根算子] 以及 A-A 双模 $\mathcal{H}$ 的对称性：

$$\begin{aligned}(c|[L, a]b) &= \tau(c^*(L(ab) - aL(b))) = \tau(c^*(-2\Gamma(a^*, b) + L(a)b) \\ &= -2(\partial(a^*)c, \partial b) + (c, L(a)b) \\ &= -2(c, R(a^*)^*\partial b) + (c, L(a)b)\end{aligned}$$

由此我们推得

$$[L,a] = -2R(a^*)^*\partial + L(a)\,. \tag{3.4}$$

□

因此，我们得出以下结论：

引理 3.14. 对于 $\gamma \in (0,1/2)$，$(I+L)^{1/2-\gamma}\,[(I+L)^{\gamma}, a\,]$ 是一个有界算子。因此，$[(I+L)^{\gamma}, a\,]$ 是一个紧算子。

证明：我们从以下内容开始

$$\begin{aligned}\left[(1+L)^{\gamma}\,,\,a\,\right] &= C_\gamma \int_0^{+\infty} t^{\gamma-1}\left[\frac{1+L}{t+1+L}\,,\,a\right]dt\\ &= -C_\gamma \int_0^{+\infty} t^{\gamma-1}\left[\frac{t}{t+1+L}\,,\,a\right]dt\\ &= C_\gamma \int_0^{+\infty} t^{\gamma}\frac{1}{t+1+L}\,[L,a]\,\frac{1}{t+1+L}\,dt\\ &= C_\gamma \int_0^{+\infty} t^{\gamma}\frac{1}{t+1+L}\,[L,a]\frac{1}{\sqrt{1+L}}\,\frac{\sqrt{1+L}}{t+1+L}\,dt\,.\end{aligned}$$

结合 $x, y \in L^2(A,\tau)$，引理 3.13 给出某个常数 C'，使得：

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\, y,\,\left[(1+L)^{\gamma}\,,\,a\,\right]x\,\right\rangle\right| &\le C'\int_0^{+\infty} t^{\gamma}\,\left\|\frac{1}{t+1+L}\,y\right\|\,\left\|\frac{\sqrt{1+L}}{t+1+L}\,x\,\right\|dt\\ &\le C'\left(\int_0^{+\infty} t^{2\gamma}\left\langle\, y\,,\,\frac{1}{(t+1+L)^2}\,y\right\rangle dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty}\left\langle\, x\,,\,\frac{1+L}{(t+1+L)^2}\,x\right\rangle dt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

容易验证，$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2\gamma}\,\frac{1}{(t+1+L)^2}\,dt$ 与 $(1+L)^{2\gamma-1}$成比例，并且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+L}{t+1+L(\,)^2}\,dt$ 是恒等算子。

由此，$\left|\left\langle\, y,\,\left[(1+L)^{\gamma},\,a\,\right]x\,\right\rangle\right| \le C''||(1+L)^{\gamma-1/2}y\,||\;||x||$ 以及结果 □

作为推论，我们得到

引理 3.15。$[\sqrt{1+L}\,,a\,]$ 是一个有界算子。

证明。将引理 3.14 应用于 $\gamma = 1/4$：$(I+L)^{1/4}[(I+L)^{1/4}, a]$ 以及 $[(I+L)^{1/4}, a](I+L)^{1/4}$都是有界算子（对于后者，考虑其伴随算子）。莱布尼茨法则给出

$$[(1+L)^{1/2}, a] = (1+L)^{1/4}\,[\,(1+L)^{1/4}, a\,] \,+\, [(1+L)^{1/4},\,a\,]\,(1+L)^{1/4}$$

这是一个有界算子。 □

现在我们可以证明本节的主要结果：

命题 3.16。对于 $a \in A^2_{,\,L^\infty}$ 算子 $[\,|D|, a]$ 是有界的。因此，定理 *2.11* 的结论对 a成立。

证明。 设 $\partial = uL^{1/2}$ 是 ∂的极分解。
由于 $[\partial, a] = [u, a]\, L^{1/2} + u\,[a, L^{1/2}]$ 和 $u\,[a, L^{1/2}]$ 有界， $[u, a]\, L^{1/2}$ 是一个有界算子。现在我们有

$$\begin{aligned}\left[(\partial\partial^*)^{1/2}, a\right] &= \left[uL^{1/2}u^*, a\right] \\ &= [\partial, a]u^* + uL^{1/2}\,[u^*, a] \\ &= [\partial, a]u^* + u\big([a^*, u]L^{1/2}\big)^*\end{aligned}$$

这是一个有界算子。证明完毕。 □

4. 量子微分奇异值的下界

本节我们讨论能够为奇异值 $\mu_k(i[F, a])$提供下界的条件，并给出满足这些条件的一般性和具体示例。

4.1. 狄利克雷空间量子微分的下界 s.

命题 4.1. 假设 $a \in A^2{}_L{}^\infty$ 满足以下三个条件：

i) 交换子 $[\sqrt{I + L}, a]$ 是紧算子。ii) $R(a)^*R(a)$ 具有有限维核iii) $R(a)^*R(a)$ 在$\ker(R(a))^\perp$ 上可逆。

那么存在一个整数 k_0 和一个常数 $C(a)$ 使得

$$\mu_k(i[F, a]) \geq C(a)\,(1 + \varepsilon(k))\,\lambda_{k+k_0}(L)^{-1/2}$$

其中， $C(a)$ 是 $|R(a)|$ 在 $ker(R(a))^\perp$ 上的谱下确界， $\varepsilon(k)$ 是一个当 $k \to \infty$ 时趋于0 的数列，而 $k_0 = dim(ker(L)) + 1$。

证明。 我们先从一个观察开始：由于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\partial\frac{I}{\sqrt{I+L}}, a] & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 & [\frac{I}{\sqrt{I+L}}\partial^*, a] \\ [\partial\frac{I}{\sqrt{I+L}}, a] & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\mu_k([F, a]) \geq \mu_k\big([\partial\frac{I}{\sqrt{I + L^2}}, a]\big)\,.$$

于是我们有

$$[\partial\frac{I}{\sqrt{I + L}}, a] = [\partial, a]\frac{I}{\sqrt{I + L}} - \partial\frac{I}{\sqrt{I + L}}\left[\sqrt{I + L}\,, a\right]\frac{I}{\sqrt{I + L}}$$

即，由于 $[\partial, a]$ 等于 $R(a)$， $\partial\dfrac{I}{\sqrt{I + L}}$是有界的且 $\left[\sqrt{I + L}\,, a\right]$ 是紧的，我们得到

$$[\partial\frac{I}{\sqrt{I + L}}, a] = \big(R(a) + \kappa\big)\frac{I}{\sqrt{I + L}}$$

其中 κ 是紧的。应用引理 2.15，结论得证。 □

接下来，我们将说明上述结果的条件是切实可行的。特别是，根据注 3.7 中的公式 3.3，只要 $\mathcal{E}$ 是离散群 G 上与适当的负型函数 ℓ 相关联的狄利克雷型，且 $a = \lambda(g), g \in G$, $\ell(g) \neq 0$，条件 ii) 就成立。

4.2. **生成元的根算子**。([CS1])。
假设$\mathcal{E}$是定义在$L^2(A,\tau)$上的一个（对称、正则、完全）狄利克雷型，其生成元为$\widetilde{L}$，且$\mathcal{A}^{2,\infty}_{\widetilde{L}}$在$A$中稠密，因此$\mathcal{A}_{\widetilde{L}}$在$A$中稠密。任取$\beta\in(0,1)$，令$\widetilde{\mathcal{E}}$为生成元为$L=L^\beta$的狄利克雷型（参见 [CS1] 第10.4节）。半群e^{-tL}称为半群$e^{-t\widetilde{L}}$的从属半群（见 [C1]）。

引理 4.2。我们有$A^{2,\infty}_{\widetilde{L}}\subset A^{2,\infty}_{L}$。

证明。我们从正算子根算子的标准公式开始：

$$\widetilde{L}^\beta=C_\beta\int_0^{+\infty}t^{\beta-1}\frac{\widetilde{L}}{t+\widetilde{L}}dt=C_\beta\int_0^{+\infty}s^{-\beta}\frac{\widetilde{L}}{I+s\widetilde{L}}ds \tag{4.1}$$

其中$C_\beta=\sin(\beta\pi)/\beta\pi$。由于$\dfrac{I}{I+s\widetilde{L}}$作为$M$上的完全正压缩作用，对于$a\in\mathcal{A}^{2,\infty}_{\widetilde{L}}$一方面有

$$\big\|\frac{\widetilde{L}}{I+s\widetilde{L}}(a)\big\|_M|\le\|\widetilde{L}(a)\|_M$$

因此积分在M中对$s\to0$收敛；另一方面

$$\big\|\frac{\widetilde{L}}{I+s\widetilde{L}}(a)\big\|_M=\frac{1}{s}\big\|a-\frac{I}{I+s\widetilde{L}}(a)\big\|_M\le\frac{2}{s}||a||_M$$

因此积分在M中当$s\to+\infty$时收敛。我们已证明$\mathcal{A}^{2,\infty}_{\widetilde{L}}\subset D_M(L)$。由于$\mathcal{A}^{2,\infty}_{\widetilde{L}}$是一个自伴代数，对于$a\in\mathcal{A}^{2,\infty}_{\widetilde{L}}$，我们还有$a^*\in D_M(L)$和$a^*a\in D_M(L)$，因此$\Gamma[a]=\frac12\big(a^*L(a)+L(a)^*a-L(a^*a)\big)\in M$。由此证明了$\mathcal{A}^{2,\infty}_{\widetilde{L}}\subset\mathcal{A}_L$。□

推论 4.3。设$L=\widetilde{L}^\beta$如公式 *(4.1)* 所示，则存在$\mathcal{A}^{2,\infty}_{L}$的一个稠密自伴子代数$\mathcal{A}_\infty$，使得对于任意$a\in\mathcal{A}_\infty$，交换子$[\sqrt{I+L},a]$是一个紧算子。

证明。取$\mathcal{A}_\infty=\mathcal{A}^{2,\infty}_{\widetilde{L}}$并应用引理 3.14，其中$\gamma=\beta/2$。□

5. 离散群上的缓增条件负定函数

本节回到第 3.5 小节的框架。因此，G是具有 Haagerup 性质的离散群，τ是$C^*_{red}(G)$上的典范迹，ℓ是G上的适当负型函数，L是$\ell^2(G)=L^2(C^*_{red}(G),\tau)$中由$\ell$相乘的算子，而$\mathcal{E}_\ell$是生成元为$L$的狄利克雷型。我们回顾一下，$\mathcal{A}_\infty$是$A=C^*_{red}(G)$中由具有有限支集的$a=\sum_{g\in G}a(g)\lambda(g)$构成的稠密$*$-子代数。

5.1. **1-循环的渐近正交性**。先从一个简单的观察开始：对于固定的$g\in G$，我们有

$$\ell(g^{-1}g')=\ell(g)+\ell(g')-2(c(g)|c(g'))=\ell(g')+O(\ell(g'))^{1/2}\qquad\text{as } g'\to\infty\,.$$

我们将证明，只要负型函数ℓ满足上述渐近估计的加强形式，命题 4.1 就适用于狄利克雷型$\mathcal{E}_\ell$。

定义 5.1。（缓慢条件负型函数）如果条件负型函数$\ell:G\to[0,+\infty)$是真正常的，并且对于任意固定的$g\in G$，则称其为缓慢 函数。

$$\ell(g^{-1}g')=\ell(g')+o(\ell(g'))^{1/2}\qquad\text{as } g'\to\infty\,. \tag{5.1}$$

命题 5.2。 设 $\ell:\ G\to 0,+\infty)$ 是缓慢条件负型函数。那么，对于任意满足 $\ell(g)\neq 0$ （即除有限多个 $g\in G$ 之外均成立）的 $a=\lambda(g)$，命题 ***4.1*** 适用于狄利克雷型 $\mathcal{E}_\ell$，因此存在一个序列 $\varepsilon(k)\ \to 0$，使得

$$\sqrt{\ell(g)}\,(1+\varepsilon(k))\,\lambda_{k+1}(L)^{-1/2}\le \mu_k\big(i\big[F,\lambda(g)\,\big]\big)\le 5\,\sqrt{\ell(g)}\,\lambda_{[k/8]+1}(L)^{-1/2}\,.$$

证明。 容易验证，对于这样的 $a=\lambda(g)$、$[\sqrt{I+L},a]=k_g\lambda(g)$，其中 k_g 是由函数 $g'\to\sqrt{1+l(g^{-1}g')}\ -\sqrt{1+\ell(g')}$ 定义的乘法算子。验证

$$\begin{aligned}\sqrt{1+l(g^{-1}g')}-\sqrt{1+\ell(g')}&=\frac{\ell(g^{-1}g')-\ell(g')}{\sqrt{1+l(g^{-1}g')}+\sqrt{1+\ell(g')}}\\&=\frac{o(\ell(g')^{1/2})}{\sqrt{1+l(g^{-1}g')}+\sqrt{1+\ell(g')}}\end{aligned}$$

当 $g'\to\infty$ 时趋于 0，因此 k_g 是紧算子。命题 4.1 的条件 (i) 得到满足。命题 4.1 的条件 (ii) 由注 3.7 中的恒等式 (3.3) 给出。相关估计来自命题 4.1、推论 2.6、定理 3.8 的结论 5 以及注 3.7 中的恒等式 (3.3)。□

推论 5.3。 设 ℓ 是 G上的适当条件负定函数。那么，对任意 $\beta\in(0,1)$，$\ell:=\ell^\beta$都是缓增条件负定函数，且命题 ***4.1*** 适用于狄利克雷型 $\mathcal{E}_\ell$。

证明。 固定 g，并令 g' 趋于 ∞。如上所述，有 $\widetilde{\ell}(g^{-1}g')\ =\widetilde{\ell}(g')+O(\widetilde{\ell}(g')^{1/2})\ =\widetilde{\ell}(g')\big(1+O(\widetilde{\ell}(g')^{-1/2}\big)$，因此

$$\ell(g^{-1}g'))=\widetilde{\ell}(g^{-1}g')^\beta=\widetilde{\ell}(g')^\beta(1+O(\widetilde{\ell}(g')^{-1/2})=\ell(g')+o(\ell(g'))\,.$$

□

推论 5.4。 设 $G=\mathbb{F}_p$ 是具有 p 个生成元的自由群，且 ℓ 是长度函数，并且是条件负定的（参见 [Haa]）。则命题 ***4.1*** 适用于狄利克雷型 $\mathcal{E}_\ell$，其中 $a=\lambda(g)$ 满足 $g\neq e$，因此存在常数 $C_1,C_2>0$ 和整数 k_0，使得

$$C_1(\mathrm{Log(k)})^{-1/2}\le\mu_k(i[F,a])\le C_2(\mathrm{Log(k)})^{-1/2},\ k\ge k_0$$

其中 C_1（分别为 C_2）可任意接近$\sqrt{\ell(g)}$（分别为 $5\sqrt{\ell(g)}$），只要 K_0 取得足够大。

证明。 第一个假设显然成立：由于 ℓ 是长度函数，我们有 $|\ell(s^{-1}t)-\ell(t)|\le\ell(s)$，因此 ℓ 是适当的、缓慢增长的条件负型函数。对于第二个假设，检查一下在 G中半径为 m的球 B_m，其 $B_m=\{g\in G\,|\,\ell(g)\ \le\ m\}$的基数为 $|B_m|=1+\dfrac{p}{p_k-1}(2p-1)^m$。由于当 $|B_k|\le m<\|B_{k+1}|$时 $\lambda_k=m$，我们得到$\lambda_k\sim$ $\mathrm{Log}(2\mathrm{p}\ -1),\ \ k\to\infty$。推论 2.6 和命题 5.2 给出了所需结果。□

5.2. **作为缓慢条件负型函数的权函数**。 我们在此证明，离散群上的所有权函数 都是慢负型函数。

设 ℓ 是群 G 上的条件负型函数（关于单位元对称且严格为正），且（$\mathfrak{h}_\ell$，π_ℓ，c）是关联的1-上循环 $c:\ G\to\mathfrak{h}_\ell$ 满足

$$(5.2)\quad c(st)=c(s)+\pi_\ell(s)c(t)\,,\quad ||c(t)||^2=\ell(t)\,,\quad (c(s)|c(t))_H=\frac{1}{2}\big(\ell(s)+\ell(t)-\ell(s^{-1}t)\big)\,.$$

容易验证， $\mathfrak{h}_\ell$ 中的向量 $c(s)$ $c(t)$ 正交，当且仅当 e 介于s和 t之间，即 $\ell(s^{-1}t) = \ell(s) + \ell(t)$。函数$\sqrt{\ell}$ 也是条件负定的，并通过以下方式在 G 上给出一个左不变度量:

$$d_{\sqrt{\ell}}(s,t) := \sqrt{\ell(s^{-1}t)} \qquad s,t \in G\,.$$

余循环是度量空间（G,$d_{\sqrt{\ell}}$）到希尔伯特空间 $\mathfrak{h}_\ell$ 中的等距嵌入

$$\begin{aligned}\|c(t) - c(s)\|_{\mathfrak{h}_\ell} &= \|c(ss^{-1}t) - c(s)\|_{\mathfrak{h}_\ell} = \|c(s) + \pi_\ell(s)(c(s^{-1}t)) - c(s)\|_{\mathfrak{h}_\ell} \\ &= \|c(s^{-1}t))\|_{\mathfrak{h}_\ell} = \sqrt{\ell(s^{-1}t)} = d_{\sqrt{\ell}}(s,t) \qquad s,t \in G\,.\end{aligned}$$

慢负型函数的特征性质可表示为

$$\ell(s) + \ell(t) - \ell(s^{-1}t) = o(\sqrt{\ell(t)}) \qquad t \to \infty,$$

对每个固定的 $s \in G$，可将其重新表述为

$$0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\ell(s) + \ell(t) - \ell(s^{-1}t)}{2\sqrt{\ell(s)}\sqrt{\ell(t)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(c(s)|c(t))_{\mathfrak{h}_\ell}}{\|c(s)\|_{H_\ell} \cdot \|c(t)\|_{\mathfrak{h}_\ell}}, \qquad s \in G.$$

因此，该性质指的是当 $t \in G$ 和任意固定的$s \in G$ 嵌入希尔伯特空间 $\mathfrak{h}_\ell$ 时，二者的 渐近正交性 。

我们回顾一下， 权在离散群 G ([deH]) 上是一个负型函数，使得

$$\ell : G \to [0, +\infty) \qquad \ell(st) \le \ell(s) + \ell(t).$$

引理5.5. 离散群 G 上的任何真权函数都是缓增的条件负定负型函数。

证明. 由于权满足 $|\ell(s) - \ell(t)| \le \ell(s^{-1}t)$，我们有 $0 \le \ell(s) + \ell(t) - \ell(s^{-1}t) \le 2(\ell(s) \wedge \ell(t))$，并且

$$\frac{\ell(s) + \ell(t) - \ell(s^{-1}t)}{2\sqrt{\ell(s)}\sqrt{\ell(t)}} \le \frac{\ell(s) \wedge \ell(t)}{\sqrt{\ell(s)}\sqrt{\ell(t)}}.$$

由于 ℓ是真正的，我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ell(s) + \ell(t) - \ell(s^{-1}t)}{2\sqrt{\ell(s)}\sqrt{\ell(t)}} \le \lim_{t\to\infty} \frac{\ell(s) \wedge \ell(t)}{\sqrt{\ell(s)}\sqrt{\ell(t)}} = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\ell(s)}{\ell(t)}} = 0\,.$$

□

注5.6. 权函数在 G 上导出一个左不变度量: $d_\ell(s,t) := \ell(s^{-1}t)$。若 $k := \inf\{\ell(t) : t \in G, t \ne e\}$，则余循环是度量空间 (G, d_ℓ) 到实希尔伯特空间 $\mathfrak{h}_\ell$ 的 Lipschitz嵌入

$$\|c(t) - c(s)\|_H = \sqrt{\ell(s^{-1}t)} \le \sqrt{k^{-1}\ell^2(s^{-1}t)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\ell(s^{-1}t) = \frac{1}{\sqrt{k}}d_\ell(s,t) \qquad s,t \in G\,.$$

Exam例如包括自由群 $\mathbb{F}_n$ 和海森堡群的长度函数。

REFERENCES

[AHK]S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn，C*–代数上的狄利克雷型与马尔可夫半群，《数学物理通讯》56 (1977)，173-187。[C1]F. Cipriani，冯·诺伊曼代数标准形式上的狄利克雷型与马尔可夫半群，《泛函分析杂志》147 (1997)，259-300。[C2] F. Cipriani，“非交换空间上的狄利克雷型”，Springer 编，L.N.M. 1954，2007。

[CFK] F. Cipriani, U. Franz, A. Kula，紧量子群上莱维过程的对称性、其马尔可夫半群与势理论，《泛函分析杂志》266 (2014)，第5期，2789–2844。[CS1] F. Cipriani, J.-L. Sauvageot，作为狄利克雷型平方根的导子，《泛函分析杂志》201 (2003)，第1期，78–120。[CS2]F. Cipriani, J.-L. Sauvageot，后向有限自相似分形上的弗雷德霍姆模及其共形几何，《数学物理通讯》286 (2009)，第2期，541–558。[CS3] F. Cipriani, J.-L. Sauvageot，非交换几何中的可测性、谱密度与超迹，即将在《非交换几何杂志》发表。[Co] A. Connes，《非交换几何》，Academic Press，纽约，1994。[DL] E.B. Davies, J.M. Lindsay，非交换对称马尔可夫半群，《数学杂志》210 (1992)，379-411。[deH] P. de la Harpe，《几何群论专题》，芝加哥数学讲座，芝加哥大学出版社，2000。[GK] I. C. Gohberg, M.G. Krein，《线性非自伴算子理论导论》，Transl. Math. Monogr., 18, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯，R.I., 1969；.[Haa] U. Haagerup，一个具有度量逼近性质的非核C^*-代数的例子，《数学发明》50 (1978)，第3期，279-293。[Hil] M. Hilsum，利普希茨流形上的符号算子与无界 Kasparov 双模，《数学讲义》，1132《算子代数及其与拓扑学和遍历理论的联系》（Busteni, 1983）（1985），254-288。[S] J.-L. Sauvageot，量子狄利克雷型、微分演算与半群，《量子概率与应用 V》，《数学讲义》1442 (1990), 334-346[SWW] E. Schrhoe, M. Walze, J.-M. Warzecha，由弗雷德霍姆模构造谱三元组，《巴黎科学院学报》系列 I 数学 326 (1998)，1195–1199。[V] D. Voiculescu，关于相对于赋范理想的拟中心近似单位的存在性。I，《泛函分析杂志》91 (1990)，第1期，1-36。

(F.E.G.C.) 米兰理工大学，数学系，莱昂纳多·达·芬奇广场32号，
20133 米兰　　，意大利。
电子邮箱地址：fabio.cipriani@polimi.it

(JLS) Jussieu数学研究所—巴黎左岸，法国国家科学研究中心—巴黎西岱大学，F-75205 巴黎 Cedex 13，法国电子邮箱地址：jean-luc.sauvageot@imj-prg.fr