arXiv:2301.00208v1 [math.OA] 31 Dec 2022

有限 C*-代数上的保可逆映射

MARTIN MATHIEU 和 FRANCOIS SCHULZ

Abstract. 我们证明，从巴拿赫代数到具有忠实迹态的 C*-代数的每个满射含幺线性映射，只要保持可逆元，就必为 Jordan 同态，从而推广了 Aupetit 于 1998 年关于有限 von Neumann 代数的结果。

1. Introduction

如果一个线性映射 T 在两个含幺复 Banach 代数之间保持谱，那么对于定义域代数中的每个元素 a，其谱 $\sigma(a)$ 都与$\sigma(Ta)$一致。如果陪域是半单的且 T 是满射，则 T 必然有界（这是 Aupetit [1, 定理 5.5.2]的结果）。如果定义域也是半单的，则T 是单射；这由 Zem´anek 对根基的刻画（[1,定理 5.3.1]）可知:

$$\sigma(a+x) = \sigma(Ta+Tx) = \sigma(Tx) = \sigma(x) \quad \text{for each } a \text{ such that } Ta = 0 \text{ and every}$$

这意味着 a 属于根基，而在半单情形下根基为零。此外， $T1 = 1$，也就是说， T 是含幺的。因此，半单巴拿赫代数之间的满射保谱映射是拓扑同构，人们自然会思考它是否也是某种代数结构的同构。

Jordan 同态是一个线性映射 T，具有如下性质：对定义域中的所有 a， $T(a^2) = (Ta)^2$（这等价于对所有 a 和 b， $T(ab+ba) = TaTb+TbTa$）。事实证明，约当同构保持谱，人们已经投入了大量工作来探究逆命题在多大程度上成立。关于这一主题历史的精彩综述见 [2]；相关问题还可参见 [8], [13] 和 [14] 。

在 [3], Aupetit 证明，冯·诺依曼代数之间每个满射保谱线性映射都是约当同构。不难看出，只需其中一个代数是实秩零的含幺 C^*-代数，而另一个是含幺半单巴拿赫代数即可。然而，对于一般的C^*-代数，这个问题仍未解决。另一个已知结果是，关于 T 的假设可以放宽为一个满射含幺保可逆线性映射（即，对所有 a，有 $\sigma(Ta) \subseteq \sigma(a)$）；此时的结论是 T 为 Jordan 同态。

2020年数学主题分类：47B48、47A10、46L05、46L30、16W10、17C65。关键词和短语：C*-代数、迹态、约旦同态、保可逆映射。

在早先的一篇论文中， [2], Aupetit 已经针对有限 von Neumann 代数得到了同一结论。该结果的主要工具是 Fuglede–Kadison 行列式Δ；其定义和性质见 [9, 第 105] 页。它与有限迹 τ的关系为：对每个可逆元素 a， $\Delta(a) = \exp(\tau(\log |a|))$。在我们的方法中，我们绕开行列式，只使用（忠实的）迹态，从而得到以下推广。

定理。设 B 是一个含幺复巴拿赫代数，且 A 是一个有限含幺 C^* 代数。设 T: $B \to A$ 是保持可逆元的满射含幺线性映射。则 T 是 Jordan 同态。

我们大体遵循 Aupetit 的论证，但为了强调其中的差异，在下一节中我们将证明拆分为一系列引理。

2. Preliminaries

设 A 是一个含幺 C^* 代数。若 A 配备了一个忠实迹态，我们就称其为有限的；也就是说，存在一个线性泛函 τ，满足 $\tau(1) = 1 = \|1\|$、 $\tau(ab) = \tau(ba)$ 对所有 a、$b \in A$ 都成立，并且 $\tau(a^*a) = 0$ 蕴含 $a = 0$。这样的泛函必然是正的且有界。

我们将 A 的所有态（范数为 1 的正线性泛函）的集合记为 S，并将其中所有谱态 f 的子集记为 Sp；也就是说， $f \in S$ 且对每个 $x \in A$ 都有 $|f(x)| \le \rho(x)$，其中 $\rho(x)$ 表示 x 的谱半径。已知（[7, §13] 中的定理 4）每个 $f \in Sp$ 都具有迹性质，即对所有 a、$b \in A$， $f(ab) = f(ba)$，并且对于每个 $a \in A$， $f(a) \in \operatorname{co} \sigma(a)$，即 a 的谱 $\sigma(a)$ 的凸包；参见 §13] 中的 [7,引理 2 或 [1, 引理 4.1.15]。

反过来，由后续论证可知，每个迹态 τ 都属于 Sp。对于 $a \in A$，记 $V(a) = \{f(a) \mid f \in S\}$ 其（代数）数值域 [7]。如 [5, 引理], 所示，并归因于 [11, §2], $\operatorname{co}\sigma(a) = \bigcap_{b \in G(A)} V(bab^{-1})$，其中$G(A)$ 表示 A中的可逆元群。显然， $\tau(a)$ 属于上述等式的右侧，因此 $\tau \in Sp$。（另参见 [12]。）

引理 2.1. 设 A 是一个带单位的 C^*-代数，且具有忠实迹态 τ。假设$g\colon \mathbb{C} \to A$ 是一个取值于 $G(A)$ 的整函数。那么映射 $g_\tau\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,$g_\tau(\lambda) = \tau(\log(|g(\lambda)|)$ 是调和函数。

证明。定理 1.11 的证明中已经完全以迹表述的论证，可逐字照用。□

下文中， T 表示定义在（复、含幺）巴拿赫代数 B 上、取值于有限维含幺 C^* 代数 A 的满射含幺线性映射。我们假设 T 保持可逆元，因此 $TG(B) \subseteq G(A)$。由 [1, 定理 5.5.2] 可知， T 有界。

固定 a、$b \in B$，并定义

$$g\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow G(A), \quad g(\lambda, \mu) = T(e^{\lambda a} e^{\mu b}) e^{-\lambda T a} e^{-\mu T b}.$$

那么 g 是一个分别整函数。其级数展开如下 s

$$\begin{aligned} g(\lambda,\mu) = 1 &+ \frac{\lambda^2}{2}\big(T(a^2) - (Ta)^2\big) + \frac{\mu^2}{2}\big(T(b^2) - (Tb)^2\big) \\ &+ \lambda\mu\big(T(ab) - TbTa\big) + \frac{\lambda^3}{6}\big(T(a^3) + 2(Ta)^3 - 3T(a^2)Ta\big) \\ &+ \frac{\lambda^2\mu}{2}\big(T(a^2b) + (Ta)^2Tb + Tb(Ta)^2 - T(a^2)Tb - 2T(ab)Ta\big) \\ &+ \frac{\lambda\mu^2}{2}\big(T(ab^2) + 2TbTaTb - 2T(ab)Tb - T(b^2)Ta\big) \\ &+ \frac{\mu^3}{6}\big(T(b^3) + 2(Tb)^3 - 3T(b^2)Tb\big) + \text{remainder} \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中，余项仅包含关于 λ 和 μ 的四次或更高次项；我们将在主定理的证明中充分利用这一点。

由引理 2.1，函数

$$g_\tau\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_\tau(\lambda,\mu) = \tau(\log(|g(\lambda,\mu)|))$$

关于 λ 和 μ 分别调和，因此存在一个分别整函数 $h(\lambda,\mu)$，使得对所有 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，都有 Re $h(\lambda,\mu) = g_\tau(\lambda,\mu)$。

接下来将证明以下三个引理；其证明见第 3 节。

引理 2.2. 对所有 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，都有 $e^{g_\tau(\lambda,\mu)} \le \|g(\lambda,\mu)\|$。

引理 2.3。在上述记号和注意事项下，令 $g^*(\lambda,\mu)$ 表示 $(g(\lambda,\mu))^*$。那么存在 $r>0$，使得对所有满足 $|\lambda|,|\mu|<r$ 的 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，都有

$$2\operatorname{Re} h(\lambda,\mu) = \tau\big(\log(g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)\big) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\tau\big((1-g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu))^k\big). \tag{2.2}$$

Lem理 2.4。对于零的邻域中的所有 λ,μ，$\tau\big(\log(g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)\big) = 0$.

3. Proofs of the Lemmas and the Main Theorem

第一个引理的论证与 [2] 不同，因为我们无法利用行列式，在谱的凸包中确定恰当的值。

引理 2.2 的证明。正如上文所观察到的，对于所有 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，$\tau(\log(|g(\lambda,\mu)|)) \in \operatorname{co}\sigma(\log(|g(\lambda,\mu)|))$。由于 $\log(|g(\lambda,\mu)|)$ 的谱包含于 $\mathbb{R}$，因此对于某些满足 $s\le t$ 的 $s,t\in\sigma(\log(|g(\lambda,\mu)|)$，有 $\operatorname{co}\sigma(\log(|g(\lambda,\mu)|)) = [s,t]$。由于指数函数严格递增，谱映射定理意味着

$$e^{g_\tau(\lambda,\mu)} \in [e^s,e^t] = \operatorname{co}\sigma(e^{\log(|g(\lambda,\mu)|)}) = \operatorname{co}\sigma(|g(\lambda,\mu)|).$$

因此，$0 < e^{g_\tau(\lambda,\mu)} \le \rho(|g(\lambda,\mu)|)$，因此，

$$\begin{aligned} e^{2\,g_\tau(\lambda,\mu)} &\le \rho(|g(\lambda,\mu)|)^2 = \rho(|g(\lambda,\mu)|^2) \\ &= \rho(g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)) = \|g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)\| \\ &= \|g(\lambda,\mu)\|^2 \end{aligned}$$

如所声称。 □

接下来的论证相当直接。

引理 2.3 的证明。由于 $g(0,0) = T1 = 1$，根据连续性，存在 $r > 0$，使得对所有满足 $|\lambda|$、$|\mu| < r$ 的 λ、μ，都有 $\|1 - g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)\| < 1$。因此，对数的级数展开给出

$$-\log(g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1 - g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu))^k. \tag{3.1}$$

g_τ 的定义意味着

$$2\,\mathrm{Re}\,h(\lambda,\mu) = 2\,\tau(\log(|g(\lambda,\mu)|)) = \tau(\log(|g(\lambda,\mu)|^2)) = \tau\big(\log(g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)\big). \tag{3.2}$$

结合这两个恒等式即可得到所要结论。 □

第三个引理的证明完全沿用了 Aupetit 的论证。（[2] 第 61 页底部和第 62 页顶部似乎有一些印刷错误。）

引理 2.4 的证明。对于所有 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$，我们有

$$\left|e^{h(\lambda,\mu)}\right| = e^{\mathrm{Re}\,h(\lambda,\mu)} = e^{g_\tau(\lambda,\mu)} \le \|g(\lambda,\mu)\|$$

由引理 2.2 可得。由于

$$\|g(\lambda,\mu)\| \le \|T\|\, e^{|\lambda|(\|a\|+\|Ta\|)+|\mu|(\|b\|+\|Tb\|)}$$

因此，对于适当的 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$（[4, 引理 3.2]），有 $e^{h(\lambda,\mu)} = e^{\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma}$。由于 $g_\tau(0,0) = 0$，我们有 $|e^\gamma| = 1$，因此可以假设 $\gamma = 0$（因为我们只需要 γ 的实部¯ ¯）。因此，$2\,\mathrm{Re}\,h(\lambda,\mu) = \alpha\lambda + \beta\mu + \bar\alpha\lambda + \beta\bar\mu$。由引理 2.3 可得

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \bar\alpha\bar\lambda + \bar\beta\bar\mu = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\tau\big((1 - g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu))^k\big)$$

对于所有满足 $|\lambda|, |\mu| < r$ 的 λ, μ，存在适当的 $r > 0$。式 (2.1) 中 $g(\lambda,\mu)$ 的级数展开不含 λ 的任何幂，也不含一阶的 μ 幂，因此式 (3.1) 中的级数展开也不可能含有这些项。这意味着 α 和 β 都等于零。

现在由 (2.2) 可得 $\tau\big(\log(g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu)\big) = 0$。 □

现在，我们已经具备了所有工具，可以通过改编 [2] 定理 1.12 中的论证来证明我们的主定理。

定理的证明。令 $f(\lambda,\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\tau\big((1-g^*(\lambda,\mu)g(\lambda,\mu))^k\big)$，对所有满足 $|\lambda|,|\mu|<r$ 的 λ,μ 均成立，其中 $r>0$ 适当选取（由引理 2.3 给出）。由引理 2.4，$f=0$，因此

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu}f(0,0)=0=\frac{\partial^3}{\partial\lambda^2\partial\mu}f(0,0).$$

将级数展开 (2.1) 代入对数级数后，利用这些恒等式可得

$$\tau\big(T(ab)-TaTb\big)=0 \tag{3.3}$$

and

$$\tau\big(T(a^2b)+(Ta)^2Tb+Tb(Ta)^2-T(a^2)Tb-2\,T(ab)Ta\big)=0 \tag{3.4}$$

对所有 a、$b\in B$ 均成立。由 (3.3) 可得

$$\tau(T(a^2b))=\tau(T(a^2)Tb)$$

and

$$\tau(T(a^2b))=\tau(T(a(ab)))=\tau(TaT(ab))$$

因此 (3.4) 化简为

$$\tau((Ta)^2Tb)=\tau(TaT(ab)),$$

利用迹性质可得。因此

$$\tau((Ta)^2Tb)=\tau(T(a^2)Tb).$$

由于 T 是满射，我们可以选取 $b\in B$，使得 $Tb=((Ta)^2-T(a^2))^*$，因此，对每个 $a\in B$，由最后一个恒等式可得

$$\tau\big(((Ta)^2-T(a^2))((Ta)^2-T(a^2))^*\big)=0.$$

τ 的忠实性意味着 T 是一个 Jordan 同态。 □

4. 结论

本节汇总主定理的一些推论及其强化结果，并将其与性质相似的开放问题联系起来。

设 T 是两个半单含单位 Banach 代数之间的满射线性映射，并且保持每个元素的谱。那么 T 是单射（如引言中所述），且 $T1=1$。后者例如可由下式推出

$$\sigma((T1-1)+Tx)=\sigma(T1+Tx)-1=\sigma(1+x)-1=\sigma(x)=\sigma(Tx)$$

以及 T 的满射性推出；这意味着，对陪域中的所有 y，都有 $\sigma((T1-1)+y)=\sigma(y)$。因此，根据 Zem´ánek 对根基的刻画，$T1-1=0$。

因此，我们得到一个对称的情形，可以将定理应用于 T或其逆映射，从而得到以下推论。

推论 4.1. 设 T 是两个半单含单位 Banach 代数之间的满射保谱线性映射。若其中一个是配备忠实迹态的含单位 C^*代数，则 T 是约当同构。

这是对 Kaplansky 提出的一个由来已久且仍未解决的问题的又一项贡献。1970 年，他曾问上述结论在不对 Banach 代数作任何额外假设的情况下是否成立。更多参考文献见 [2] 和 [10]。

定理证明中的所有步骤，唯独最后一步，可以针对含幺 C^*-代数上的每个迹态分别进行。因此，假设可以放宽为存在一个忠实迹态族，即一族 τ_i 满足：对于所有 $i \in I$，若 $\tau_i(a^*a) = 0$，则 $a = 0$。

特别地，由于简单含幺 C^*-代数上的任意迹态都是忠实的，我们得到以下结果。

推论 4.2. 设 $T\colon B \to A$ 是到一个带有迹态的简单含幺 C^*-代数 A 上的满射含幺保可逆线性映射。那么 T 是一个 Jordan 同态。

注 4.3. 我们对“有限”C^*-代数的术语用法并不完全标准。在 [6,III.1.3.1], 中，如果含幺 C^*-代数 A 的单位元是有限投影，就称其为有限；也就是说，不存在与 1 在 Murray–von Neumann 意义下等价的真子投影。每个带有忠实迹态的含幺 C^*-代数在此意义下都是有限的，但反过来一般不成立（尽管对于稳定有限的精确 C^*-代数，反过来也成立）。我们在此更倾向于采用一种不涉及任何投影的定义。

我们还可以从另一个方向加强主定理。令 $G_1(B)$ 表示 $G(B)$ 的主连通分支，其中 B 是一个含幺巴拿赫代数。已知，参见例如 [1, 定理 3.3。7], , $G_1(B) = \{e^{x_1} \cdots e^{x_n} \mid x_i \in B, n \in \mathbb{N}\}$。$x \in B$ 的相应指数谱为

$$\sigma_\varepsilon(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - x \notin G_1(B)\}.$$

在某些情况下，考虑指数谱比考虑较小谱更自然、更方便，参见例如 [1, 定理 3.3。8]。从主要结果的证明可知，只需映射 T 将 B 中任意两个指数的乘积映到 A 中的一个可逆元即可。由此得到以下推论。

推论 4.4. 设 B 是一个含幺复巴拿赫代数，A 是一个含幺有限 C^*-代数。设 $T\colon B \to A$ 是一个满射含幺线性映射，满足 $TG_1(B) \subseteq G(A)$。则 T 是一个 Jordan 同态。

两个巴拿赫代数 A 与 B 之间的谱等距映射是满足以下条件的线性映射：S，使得对所有 $x \in A$，都有 $\rho(Sx) = \rho(x)$。显然，每个保谱映射都是谱等距映射，每个约当同构也如此。与上文提到的 Kaplansky 问题相关的一个猜想指出，两个 C^*代数之间的每个含幺满射谱等距映射都是约当同构。该猜想已在许多情形下得到证实，参见例如 [13, 14], , 但一般情形仍未解决。值得注意的是，文献[15] 中已证明：若 A是一个实秩零且没有迹态的含幺 C^*代数，则该猜想成立。因此，上述推论 4.1 朝着证实这一一般猜想迈进了一步。

致谢。本文的研究工作是在第二作者访问贝尔法斯特女王大学期间完成的。他谨向 Martin Mathieu 教授以及贝尔法斯特女王大学数学科学研究中心致谢，感谢他们的热情接待，并感谢南非国家研究基金会提供的经费支持（NRF 项目编号：129692）。

References

[1] B. Aupetit，《谱理论入门》，Springer-Verlag，纽约，1991。[2] B. Aupetit，《保持谱的变换》，载于：Banach Algebras '97，第13届国际巴拿赫代数会议论文集，布劳博伊伦，1997年7月20日至8月3日，M. Mathieu 和 E. Albrecht（编），de Gruyter，柏林，1998年，第55–78页。[3] B. Aupetit，《巴拿赫代数或 Jordan–巴拿赫代数之间的保谱线性映射》，J. London Math. Soc. 62 (2000)，917–924。[4] B. Aupetit 和 H. du T. Mouton，《巴拿赫代数中的迹与行列式》，Studia Math. 121 (1996)，115–136。[5] S. K. Berberian，《有限类冯·诺依曼代数中的迹与谱的凸包》，Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969)，211–212。[6] B. Blackadar，《算子代数：C*-代数与冯·诺依曼代数理论》，《数学科学百科全书》122，Springer-Verlag，柏林，2006。[7] F. F. Bonsall 和 J. Duncan，《算子及赋范代数元素的数值域》，London Math. Soc. Lecture Notes 2，剑桥大学出版社，剑桥，1971。[8] R. Brits、F. Schulz 和 C. Tour´e，《C*-代数上同构的谱刻画》，Arch. Math. 113 (2019)，391–398。[9] J. Dixmier，《希尔伯特空间上的算子代数》，Gauthier-Villars，巴黎，1957。[10] L. W. Harris，《巴拿赫代数的保可逆线性映射》，载于：《复分析与动力系统》，Contemp. Math. 364，Israel Math. Conf. Proc.，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，2004；第59–66页。.[11] S. Hildebrandt，《关于算子的数值域》，Math. Ann. 163 (1966)，230–247。[12] M. Mathieu，《C*-代数上的谱有界迹》，Bull. Austral. Math. Soc. 68 (2003)，169–173。[13] M. Mathieu，《谱有界算子问题集》，Asian-Eur. J. Math. 2 (2009)，487–501。[14] M. Mathieu，《谱有界算子与复分析之间的相互作用》，Irish Math. Soc. Bull. 72 (2013)，1–13。[15] M. Mathieu，《约旦同态的刻画》，Acta Sci. Math. (Szeged) 86 (2020)，697–701。

Mathematical Sciences Research Centre, Queen's University Belfast, Belfast BT7 1NN, Northern Ireland电子邮箱：m.m@qub.ac.uk

Department of Mathematics and Applied Mathematics, Faculty of Science, University of Johannesburg, P.O. Box 524, Auckland Park, 2006, South Africa电子邮箱：francoiss@uj.ac.za