arXiv:2301.00266v2 [math.SG] 7 May 2023

奇异辛流形上的作用-角坐标与KAM理论

Eva Miranda

Arnau Planas

几何与动力系统实验室，数学系 & IMTech，加泰罗尼亚理工大学，巴塞罗那和CRM，贝拉特拉数学研究中心电子邮箱： evamiranda@upc.edu

数学系，加泰罗尼亚理工大学，巴塞罗那

电子邮箱： arnau.planas.bahi@gmail.com

2020 数学主题分类。 53D05, 53D20, 70H08, 37J35, 37J40 ; 37J39, 58D19关键词和短语。 amsbook,AMS-LATEX

两位作者均获得西班牙国家研究署 AEI /10.13039/501100011033 项目 PID2019-103849GB-I00 以及 AGAUR Gencat 项目 2021 SGR 00603 的资助。Eva Miranda 通过加泰罗尼亚高等研究院颁发的 ICREA 学术奖 2021，以及亚历山大·冯·洪堡基金会颁发的弗里德里希·威廉·贝塞尔研究奖获得资助。Eva Miranda 还获得西班牙国家研究署通过 Severo Ochoa 和 Mar´ıa de Maeztu 卓越研发中心与单位计划提供的资助（项目 CEX2020-001084-M）。此外，Eva Miranda 还感谢“流体动力学中的计算、动力学与几何复杂性”项目提供的部分资助，该项目属于 BBVA 基金会 2021 年科学研究项目资助计划。

谨以此文纪念 Amelia Galcer´an Sorribes。

目录

序言 vii

第1部分. 引言与预备知识 1

第1章. 引言 3 1.1. 本专著的结构与结果 3

第2章. 奇异辛流形入门 7 2.1. b-泊松流形 7 2.2. 关于 b^m-辛流形 10 2.3. 奇异化 b^m-泊松流形 12

第3章. KAM理论速成课程 15

第2部分：作用-角坐标与余切模型 19

第4章： b^m-辛流形的作用-角变量定理 23 4.1. 基本定义 23 4.2. 关于 b^m-可积系统 24 4.3. b^m-可积系统示例 26 4.4. 寻找环面作用 29 4.5. b^m-辛流形上的作用-角坐标 32 第5章：通过余切提升重述作用-角坐标 37 5.1. 辛几何中的余切提升与 Arnold-Liouville-Mineur 37 5.2. b^m-辛流形的情形 38

第3部分： b^m-辛流形的 KAM定理 41

第6章 一个新的 KAM 定理 43 6.1. 关于证明结构 43 6.2. 技术结果 50 6.3. 关于 b^m-辛流形的 KAM 定理 69 第7章 b^m-可积系统的去奇异化 93 第8章 b^m-辛流形上 KAM 定理的去奇异化 97 第9章 天体力学中的应用 101 9.1. 开普勒问题 101

9.2. 两个固定中心问题 102 9.3. 双重碰撞与 McGehee 坐标 103 9.4. 限制性三体问题 105 9.5. 天体力学与流体力学中的逃逸轨道 106

参考文献 109

序言

我坦言，我羡慕那些行星——它们有自己的轨道，前路畅通无阻。
《间奏曲》，米哈伊洛·科丘宾斯基。

本专著探讨一类称为 b^m-泊松流形的泊松流形上的可积系统的分类与微扰问题。这是辛范畴之外首个已建立微扰理论的泊松流形类别。尽管 b^m-泊松流形这一类并不足以涵盖种类繁多的泊松流形，但这项研究可视为研究一般泊松流形微扰理论的第一步。只要泊松流形能够描述为一个 E-辛流形（[**NT01**] 和 [**MS21**]），本专著所发展的理论便不只是对泊松几何的温和推广；这一玩具例子还为在一般泊松流形领域考察 KAM 理论铺平了道路。约化定理与 b^m-辛流形近期已在 [**MM22**] 中得到探索。本专著推动了相关理论的发展，开启了对这些流形上的微扰理论的研究，从而补全了对其动力学研究的其他方面，例如近期关于阿诺德猜想的工作 [**BMO22**]。

辛几何一直是物理学的通用语言，因为位置—动量对可以在余切丛上建模。余切丛自然带有一个辛形式，即一个非退化的闭2-形式。余切丛的辛形式由刘维尔一形式的微分给出。

b^m-泊松流形是这样的流形：它们在一个超曲面之外是辛的，并且沿该超曲面满足某些横截性。它们通常用于对带边界的辛流形上的问题进行建模，例如研究其变形量子化和天体力学。由于在临界集的补集上这些流形是辛的，将对哈密顿动力学的研究扩展到这一领域，对于理解辛流形紧化后的哈密顿动力学至关重要。天体力学中使用的若干正则化变换（如 McGehee 正则化或 Moser正则化）提供了此类紧化的例子。

b^m—泊松流形的一个有趣性质是，可以借助 b^m形式的语言来研究它们。也就是说，我们可以研究这样的形式：它们在临界集之外是辛形式，并且可以光滑延拓为李代数丛上的形式，从而推广德拉姆形式；德拉姆形式是流形的切丛上的标准李代数丛上的形式。要考虑b^m形式，就用 b^m切丛替代标准切丛。这

使我们能够通过用 b^m切丛的对偶替代余切丛，来仿照辛几何。然而，泊松几何仍留下了自己的印记：一些可识别为泊松结构的模类的新不变量，早在半局部层面便已出现。

与最初的预期相反，目前为止，关于 b^m-辛流形的一些结果与 b-情形并不相似。考察这些更一般的奇点，有助于更好地理解一般的泊松情形及其不同的复杂程度。以下现象便是一个例证：在研究这些系统的量子化时，出现了一种有趣的规律，使得偶数情形和奇数情形的量子化截然不同 [**GMW18b, GMW21**] ，而由此得到的模型在 b-情形下是有限维的。要理解不同次数 m之间的关系并非易事：Guillemin-Miranda-Weitsman 在 [**GMW17**] 中提出的去奇异化技术，后来被证明在研究环面 b^m-辛流形的复杂性性质 [**GMW18a**]以及在这一框架下研究阿诺德猜想 [**BMO22**]方面具有重要应用。在这部专著中，我们将探讨这些流形的一个新侧面：微扰理论。

在本专著的第二部分，我们研究这些流形上的可积系统。在温和条件下，这些奇异流形上的可积系统在刘维尔环面邻域内具有相应的“广义”环面哈密顿作用。我们利用这一广义哈密顿群作用，证明刘维尔环面邻域内存在作用-角坐标。我们证明的作用-角坐标定理给出了刘维尔环面附近的一个半局部标准形，该标准形对应于 b^m-辛结构；它取决于刘维尔环面所在临界集连通分支的模权，以及相关环面作用的模权。这一作用-角变量定理使我们能够将刘维尔环面的一个邻域与环面通过平移作用于自身所诱导的 b^m-余切提升相识别。将作用-角变量定理解释为余切提升，使我们得以明确模权是其唯一的半局部不变量。在此过程中，我们将这一作用-角坐标定理与辛流形的经典作用-角坐标定理，以及折叠辛流形的作用-角变量定理进行比较（[**CM22**]）。

在本专著的第三部分中，我们研究这一新框架下的微扰理论，并探讨其在物理系统中的一些潜在应用。具体而言，我们证明了一个适用于 b^m-泊松流形的KAM定理，这一结果显然对 [**KMS16a**] 中针对 b-泊松流形得到的定理作了精炼和改进。结合这一结果，以及将 Guillemin-Miranda-Weitsman 的去奇异化技术推广到可积系统领域，我们得到了一个适用于折叠辛流形的 KAM定理，而此前KAM理论从未在这类流形上得到研究。此外，我们还得到了一个全新的辛流形KAM定理，其中扰动保留了一个特定超曲面。在天体力学中，这个特定超曲面可以是无穷远直线或碰撞集。天体力学中的逃逸轨道通常可以紧化为与这些奇异结构相关联的奇异轨道。

巴塞罗那，2023年5月，Eva Miranda 和 Arnau Planas

第1部分

引言与预备知识

第 1 章

引言

辛几何和泊松几何都源于对经典力学的研究。两者都是广阔的研究领域，受到广泛关注，并取得了丰硕成果。然而，泊松结构远比辛结构一般，因此辛几何中的大多数重要成果都难以直接推广到泊松流形。 b^m-泊松结构，也称为 b^m-辛结构，通过以受控的方式扩展辛结构，弥合了这一差距。这使得辛几何中的基本结果能够推广到 b^m-辛几何。不过，要调整变形理论或莫泽理论等理论，还需要做额外工作，详见 [**GMPS15a**] 及其他文献。

b^m-泊松几何的研究源于对带边界辛流形的研究（参见 [**Mel93**] 和 [**NT96**]）。近年来， [**Rad02**]给出的 b-泊松结构分类结果推动了人们对这一领域的兴趣。随后， [**GMP14**] 将这些结构转化为微分形式的语言，并开始运用辛几何工具对其进行研究。之后几年，许多论文探讨了这些结构的不同方面： [**GMP10**], [**GMP14**],[**GMPS15b**], [**GMW17**], [**MOT14**] 以及 [**GLPR17**] 都是其中的例子。

受对带边界流形的研究启发，我们研究一对流形 $(M,\ Z)$，其中 Z 是一个超曲面，并将这对流形称为 b-流形

在此背景下， [**Sco16**] 通过允许泊松结构出现更高程度的退化，推广了 b-辛形式。 b^m-辛结构继承了 b-辛结构的大多数性质。本小册子着重探讨 b^m-辛结构研究的不同方面，主要涵盖可积系统和 KAM理论。首先，我们介绍研究扰动问题所需的一些预备概念。我们给出一个适用于 b^m-泊松结构的作用-角变量定理，并陈述和证明在具有 b^m-辛结构的流形中成立的相应 KAM理论。

1.1. 本专著的结构与结果

1.1.1. 第1部分：引言与预备知识。在预备知识部分，我们介绍引出本册所探讨问题的基本概念。第一部分将介绍 b-泊松流形或 b-辛流形的概念，这是一类在临界超曲面之外为辛流形的泊松流形。对这类流形的研究，缘起于对带边界流形的考察。接下来，我们将讨论这些结构的一种推广，它允许结构具有更高次数的退化： b^m-辛结构。这些结构是我们研究的重点。本书中一个重要的核心概念，是研究这些奇异结构的去奇异化。最后，我们将简要介绍 KAM理论；在最后一章中，该理论将推广到 b^m-流形的情形。

研究动机来自经典天体力学问题中自然出现的若干奇异辛结构实例，这些实例将在本专著的最后一章中讨论。我们还将介绍发现这些实例所面临的困难，以及在探索保守系统时处理这些奇异结构所涉及的微妙之处。

1.1.2. 第2部分：作用-角坐标与余切模型，适用于b^m-可积系统。本章将定义 b^m-函数和 b^m-可积系统的概念。我们将介绍若干源自经典力学的 b^m-可积系统实例。之后，我们将给出适用于 b^m-辛流形的作用-角变量定理的一个版本。

定理 A. 设 (M, x, ω, F) 是一个 b^m-可积系统，其中 $F = (f_1 = a_0 \log(x) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \frac{1}{x^j}, f_2, ..., f_n)$。设 $m \in Z$ 是一个正则点，且经过 m 的积分流形是紧的。设 F_m 是经过 m的刘维尔环面。那么，存在 F_m 的一个邻域 U 以及坐标 $(\theta_1, \ldots, \theta_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) : U \to \mathbb{T}^n \times B^n$，使得：

(1) 我们可以找到一个等价可积系统 $F = (f_1 = a'_0 \log(x) + \sum_{j=1}^{m-1} a'_j \frac{1}{x^j})$，使得 $a'_0, ..., a'_{m-1} \in \mathbb{R}$，(2)

$$\omega|_U = \left(\sum_{j=1}^{m} c'_j \frac{c}{\sigma_1^j} d\sigma_1 \wedge d\theta_n \right) + \sum_{i=2}^{n} d\sigma_i \wedge d\theta_i$$

其中 c 是模周期，且 $c'_j = -(j-1)a'_{j-1}$，此外

(3) 坐标 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 仅依赖于 $f_n, \ldots f_n$。

1.1.3. 第 3 部分：-辛流形上的 KAM理论及其在天体力学中的应用。本章将介绍适用于（奇异）辛流形的若干 KAM定理，包括 b^m-辛流形。

我们首先考察 b^m-辛流形上的微扰理论。然后概述如何构造 b^m-辛同胚，它将是 b^m-辛流形上 KAM定理证明中的关键角色。之后，我们展示证明所需的一些技术结果。尽管这些技术结果与标准的 KAM 理论对应结果相当相似，但仍有一些细微之处需要处理。本章最后证明 b^m-KAM定理，并通过若干应用，在其他奇异情形（折叠辛流形）以及具有指定不变超曲面的辛流形上建立 KAM定理。

第一个KAM定理如下：

定理 B. 令 $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 为一个紧集。令 $H(\phi, I) = \hat{h}(I) + f(\phi, I)$，其中 $\hat{h}$ 是定义在 $\hat{} D_\rho(G)$ 上的 b^m-函数 $\hat{h}(I) = h(I) + q_0 \log(I_1) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{q_i}{I_1^i}$，且 $h(I)$ 和 $f(\phi, I)$ 为解析函数。令 $\hat{u} = \frac{\partial h}{\partial I}$和 $u = \frac{\partial h}{\partial I}$。假设 $|\frac{\partial u}{\partial I}|_{G,\rho_2} \leq M$, $|u|_\xi \leq L$。假设 u是非退化的 $(|\frac{\partial u}{\partial I}| \geq \mu|v|$对某个 $\mu \in \mathbb{R}^+$和$I \in G$。取 $a = 16M$。假设 u 在 G 上是单射，且其值域 $F = u(G)$ 是一个 D-集。令 $\tau > n - 1, \gamma > 0$ 和 $0 < \nu < 1$。令

(1)

$$\varepsilon := \|f\|_{\mathcal{G},\rho} \leq \frac{\nu^2\mu^2\hat{\rho}^{2\tau+2}}{2^{4\tau+32}L^6M^3}\gamma^2, \tag{1.1}$$

(2)

$$\gamma \leq \min(\frac{8LM\rho_2}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}}, \frac{L}{\mathcal{K}'}) \tag{1.2}$$

(3)

$$\mu \leq \min(2^{\tau+5}L^2M, 2^7\rho_1L^4K^{\tau+1}, \beta\nu^{\tau+1}2^{2\tau+1}\rho_1^\tau), \tag{1.3}$$

其中 $\hat{\rho} := \min\left(\frac{\mu}{\nu\rho_1}{}_{12}^{(\tau+2)}1\right)$。定义集合 $\hat{G} = \hat{G}_\gamma := \{I \in \mathsf{G} - \frac{2\gamma}{\mu} | u(I)$ 是 $\tau, \gamma, c, \hat{}$ $q-Dioph.\}$。那么，存在一个实连续映射 $\mathsf{T} : \mathsf{W}_4^{\rho_1}(\mathbb{T}^n) \times \hat{G} \to \mathsf{D}\rho(\mathsf{G})$，它关于角变量是解析的，使得

(1) 对所有 $I \in \hat{G}$，集合 $\mathsf{T}(\mathbb{T}^n \times \{I\})$ 是 H 的一个不变环面，其频率向量等于 $u(I)$。(2) 将 $\mathsf{T}(\phi, I)$ 写成 $= (\phi + \mathsf{T}\phi(\phi, I)\ I + \mathsf{T}_I(\phi, I))$，并附有估计

$$|\mathcal{T}_\phi(\phi, I)| \leq \frac{2^{2\tau+15}ML^2}{\nu^2\hat{\rho}^{2\tau+1}}\frac{\varepsilon}{\gamma^2}$$

$$|\mathcal{T}_I(\phi, I))| \leq \frac{2^{10+\tau}L(1+M)}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}}\frac{\varepsilon}{\gamma}$$

(3) $\mathrm{meas}[(\mathbb{T}^n \times \mathsf{G}) \backslash \mathsf{T}(\mathbb{T}^n \times \hat{G})] \leq C\gamma$，其中 C 是一个非常复杂的常数，取决于 n、μ、D、$\mathrm{diam}F$、M、τ、ρ_1、ρ_2、K 和 L。

此外，我们得到了将标准辛可积系统或折叠可积系统与一个 b^m-可积系统相关联的方法，具体取决于 m 的奇偶性。该方法保证去奇异化系统的动力学与原系统的动力学相同。因此，它定义了该可积系统的一种真正的 去奇异化。

定理 C. 去奇异化将一个 b^m-可积系统转化为偶数 m 下辛流形上的可积系统。对于 m 奇数，去奇异化与之关联的是一个折叠可积系统。这些可积系统满足：

$$X_{f_j}^{\omega} = X_{f_{j\epsilon}}^{\omega_\epsilon}.$$

通过将这一去奇异化技术与之前的b^m-KAM定理结合，我们得以推导出两个新的KAM定理。第一个定理是针对标准辛流形的KAM定理，其中扰动具有特定的表达式。该结果的限制比标准KAM定理更多，但能够保证扰动后给定的超曲面保持不变。这意味着，属于该超曲面的环面在受到扰动后仍留在超曲面上。在多种情形和背景下，这一性质都很有用，例如在天体力学问题中，人们希望监测某个特定的超曲面，如无穷远直线。高阶奇点使我们能够考虑与超曲面相切至某一阶的扰动。

定理 D. 考虑可积系统 F_ε 在辛流形 $(M,\ \omega_\varepsilon)$ 上的一个刘维尔环面邻域，该流形半局部地带有坐标 $(I,\ \phi)$，其中 ϕ 是环面的角坐标，且 $\omega_\varepsilon = c'dI_1\wedge d\phi_i+\sum_{j=1}^n dI_j\wedge d\phi_j$。设 $H=(m-1)c_{m-1}c'I_1+h(\tilde{I})+R(\tilde{I},\ \tilde{\phi})$ 是一个近可积系统，其中

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 &= c'\frac{I_1^{m+1}}{m+1}, \\ \tilde{\phi}_1 &= c'I_1^m\phi_1, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \tilde{I} &= (\tilde{I}_1, I_2, \ldots, I_n), \\ \tilde{\phi} &= (\tilde{\phi}_1, \phi_2, \ldots, \phi_n). \end{cases}$$

那么，应用于 $H_{\text{sing}} = \frac{1}{I_1^{2k-1}} + h(I) + R(I,\phi)$ 的 b^m-KAM定理 6.3 所得到的结果同样适用于该去奇异化系统。

第二个是针对折叠辛流形的 KAM定理，此前尚未在其中研究 KAM理论。

定理 E. 考虑一个可积系统 F_ε 的刘维尔环面的邻域，该系统如折叠辛流形 (M,ω_ε) 的 8.2 节所述，在半局部意义下赋予坐标 (I,ϕ)，其中 ϕ 是该环面的角坐标，且满足$\omega_\varepsilon = 2cI_1dI_1\wedge d\phi_1+\sum_{j=2}^m dI_j\wedge d\phi_j$。设 $H=(m-1)c_{m-1}cI_1^2+h(\tilde{I})+R(\tilde{I},\tilde{\phi})$ 是一个近可积系统，满足

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 &= 2c\frac{I_1^{m+2}}{m+2}, \\ \tilde{\phi}_1 &= 2cI_1^{m+1}\phi_1, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \tilde{I} &= (\tilde{I}_1, I_2, \ldots, I_n), \\ \tilde{\phi} &= (\tilde{\phi}_1, \phi_2, \ldots, \phi_n). \end{cases}$$

那么，将 b^m-KAM定理 6.3 的结果应用于 $H_{\text{sing}} = \frac{1}{I_1^{2k}}+h(I)+R(I,\phi)$，对这个去奇异化系统也同样成立。

最后但同样重要的是，我们通过几个例子阐明 b^m-辛结构与经典力学之间的联系，并讨论其在天体力学和流体力学中的若干潜在应用。

第 2 章

奇异辛流形入门

在本册的第一章中，我们将介绍奇异辛结构的基本概念，以及标准 KAM 理论的一些概念。这两者构成本专著的两大支柱。

设 M 是一个光滑流形，在 M 上的 **泊松结构** 是一个双线性映射 $\{\cdot,\cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$，它是反对称的，并满足雅可比恒等式和莱布尼茨法则。可以通过以下等式用双向量场表示 $\{f,g\}$：$\{f,g\} = \Pi(df \wedge dg)$，其中 Π 是 $\Lambda^2(TM)$ 的一个截面。 Π 是相应的 **泊松双向量**。提及括号或泊松双向量时，我们将不加区分地使用“泊松结构”这一术语。

流形 M^{2n} 上的 b-泊松双向量场 是一种泊松双向量，满足映射

$$F : M \to \bigwedge^{2n} TM : p \mapsto (\Pi(p))^n \tag{2.1}$$

横截于零截面。因此，(M,Π) 这一对称为 **b-泊松流形**，而 F 的消失集 Z 称为 **临界超曲面**。注意， Z 是一个嵌入超曲面。

这类泊松结构由 Radko [**Rad02**] 在二维情形下进行了研究，近些年来也见于许多论文： [**GMP10**], [**GMP14**],[**GMPS15b**], [**GMW17**], [**MOT14**] 以及 [**GLPR17**] 等。

2.1. b-泊松流形

接下来，我们回顾 Olga Radko 给出的 b-泊松曲面的分类定理，以及 Guillemin、Miranda 和 Pires 在 [**GMP14**] 中提出的上同调重述及证明。

下文中，(M,Π) 表示一个带有 b-泊松结构的闭光滑曲面，而 Z 是其临界超曲面。

令 h 为到 Z 的距离函数，如 [**MOT14**][1] 中所述。

定义 2.1. (M,Π) 的**刘维尔体积**是以下极限：$V(\Pi) := \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|h|>\epsilon} \omega^{n\,2}$。

前一个极限存在，且与定义函数 $h$of Z 的选择无关（证明见 [**Rad02**] ）。

定义 2.2. 对于任意 (M,Π) 定向泊松流形，设 Ω 为其上的一个体积形式，并令 u_f 表示光滑函数的哈密顿向量场

[1]请注意，这与 [**Rad02**] 不同，在那里 h 被假设为全局定义函数。[2]对于曲面 $n = 1$。

$f: M \to \mathbb{R}$. **模向量场** X^Ω 定义为如下导子：

$$f \mapsto \frac{\mathcal{L}_{u_f}\Omega}{\Omega}.$$

定义 2.3. 设闭 b-泊松流形 (M, Π) 的临界集 $Z(\Pi)$ 中有一个连通分支 γ，则 Π 绕 γ 的**模周期** 定义如下：

$$T_\gamma(\Pi) := \text{period of } X^\Omega|_\gamma.$$

注记 2.4. b-泊松流形 (M, Z) 的模向量场 X^Ω 在 Z 处不依赖于 Ω 的选取，因为对于不同的体积形式，模向量场之差是一个哈密顿向量场。注意，由于 Π 在临界集上也为零，这个哈密顿向量场在临界集上也为零。

定义 2.5. 令 $\mathsf{M}_n(M) = \mathsf{C}_n(M)/\sim$，其中 $\mathsf{C}_n(M)$ 是互不相交的定向曲线空间；若存在保向微分同胚将一组曲线映射到另一组曲线，并保持曲线的定向，则 $\sim$ 将这两组曲线视为等价。

下述定理利用这些不变量对曲面上的 b-辛结构进行分类：

定理 2.6 (**Radko** [**Rad02**])。考虑闭可定向曲面 M 上的两个 b-泊松结构 Π, Π'。记其临界超曲面为 Z 和 Z'。这两个 b-泊松结构全局等价（即存在一个全局保向微分同胚，将 Π 映至 Π'）当且仅当以下各项相同：

- $[Z]$ 和 $[Z\prime] \in \mathcal{M}_n(M)$ 的等价类，
- Z 和 $Z\prime$ 的连通分支周围的模周期，
- 它们的刘维尔体积。

处理这些结构的适当形式体系由[**GMP10**]引入。

定义 2.7. 一个 b-**流形**[3] 是由一个流形和一个嵌入超曲面组成的有序对 (M, Z)。

这样，Melrose 先前引入的 b-流形概念得以推广，从而可以考虑流形上的其他几何结构。

定义 2.8. b-**向量场** 是指在 b-流形（M，Z）上处处与超曲面 Z 相切的向量场。

定义 2.9. 从（M，Z）到（M'，Z'）的 b-**映射** 是指满足 $\phi^{-1}(Z') = Z$ 且与 Z' 横截的光滑映射 ϕ：$M \to M'$ ϕ。

注意，若 x 是 Z 的局部定义函数，且 $(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ 是 $p \in Z$ 邻域内的局部坐标，那么 $C^\infty(M)$-模的 b 向量场具有以下局部基

$$\{x\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\}. \tag{2.2}$$

[3] b-流形中的“b”意为“边界”。Melrose 最初在 [**Mel93**] 第 2 章中研究带边界流形上的伪微分算子时考虑了这一概念。

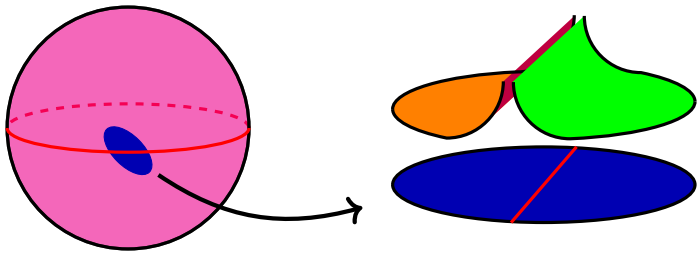

图1. 临界超曲面附近， b-流形上一个 b-函数的艺术化表示。

与 [**GMP10**]，不同，本专著不要求 Z 存在全局定义函数，也不要求 M 具有可定向性。不过，我们要求 Z 的每个点的某个邻域内都存在定义函数。放宽这一条件后， Z 的法丛不必是平凡丛。

给定一个（M, Z） b-流形， [**GMP10**] 表明，存在一个向量丛，记作 ${}^bTM$ ，其光滑截面为 b-向量场。这个丛称为（M, Z）的 **b-切丛** 。

b-余切丛 ${}^bT^*M$ 通过对偶性定义。 **b-形式** 是 b-余切丛的一个截面。在点 $p \in Z$ 附近，这些截面构成的 $C^\infty(M)$-模具有如下局部基：

$$\{\frac{1}{x}dx, dx_1, \ldots, dx_{n-1}\}. \tag{2.3}$$

同理，我们将 **b-次数为** k 的形式定义为丛$\bigwedge^k({}^bT^*M)$的一个截面，这些形式的集合记为 ${}^b\Omega^k(M)$。记 f为到临界超曲面 Z的距离函数[4] ，则对任意 $\omega \in {}^b\,\Omega^k(M)$，我们可以如 [**GMP10**] 中那样写出如下分解：

$$\omega = \alpha \wedge \frac{df}{f} + \beta, \text{ with } \alpha \in \Omega^{k-1}(M) \text{ and } \beta \in \Omega^k(M). \tag{2.4}$$

这种分解使得可以通过设定 $d\omega = d\alpha \wedge \frac{df}{f} + d\beta$. 将德拉姆复形的微分$d$ 延拓到 ${}^b\Omega(M)$

次数为 0 的函数称为 b-函数，并且在 Z 附近可以写成

$$c \log |x| + g,$$

其中 $c \in \mathbb{R}, g \in C^\infty$, 并且 x 是一个局部定义函数。

相应的上同调称为 **b-上同调** ，记作 ${}^bH^*(M)$。

定义 2.10. b-流形 (M^{2n}, Z) 上的 **b-辛** 形式定义为一个非退化闭 b-形式，其次数为 2（即，对于所有 $p \in M$， ω_p 作为 $\Lambda^2({}^bT_p^*M)$ 的元素具有最大秩）。

b-辛形式的概念与 b-泊松结构的概念互为对偶。与双向量场相比，使用微分形式的优势在于，可以“轻松地”移植辛几何工具。

[4]最初在 [**GMP10**] f 中表示一个全局函数，但对于不可定向流形，我们可以改用距离函数。

Radko分类定理 [**Rad02**] 可以用这种语言重新表述。这种表述已在 [**GMP10**]中给出:

定理 2.11（**Radko定理的 b-上同调语言，** [**GMP14**]）。设 S 为一个闭可定向曲面，且 ω_0 和 ω_1 是其上的两个 b-辛形式（S, Z），它们定义相同的 b-上同调类（即$[\omega_0] = [\omega_1]$）。那么存在一个微分同胚 ϕ： $S \to S$，使得 $\phi^*\omega_1 = \omega_0$。

2.2. 关于 b^m-辛流形

2.2.1. 基本定义。通过放宽横截条件，允许出现高阶奇点（[**Arn89**] 和 [**Arn81**]），我们可以考虑其他带奇异性的辛结构，正如Scott在 [**Sco16**] 中对 b^m-辛结构所做的那样。设 m 为一个正整数，一个 b^m**-流形**是一个 b**-流形**（M， Z），并配有附着其上的 b^m-切丛。根据Serre–Swan定理 [**Swa62**]， b^m-切丛是一个向量丛 ${}^{b^m}TM$，其截面由下式给出，

$$\Gamma({}^{b^m}TM) = \{v \in \Gamma(TM) : v(x) \quad \text{is tangent to order } m \text{ to } Z\},$$

其中， x 是 Z 的定义函数，在 Z的每个连通分支的邻域内，并可定义为 x： $M \setminus Z \to (0, \infty)$ $x \in C^\infty(M)$，使得:

- $x(p) = d(p)$ 是从 p 到 Z 的距离函数，对于 p： $d(p) \leq 1/2$
- $x(p) = 1$ 在 $M \setminus \{p \in M$ 上，使得 $d(p) < 1\}$。[5]

（ x 的这一 [使我们能够像 [**MOT14**]中那样，将 [**Sco16**] 中的构造扩展到不可定向情形。）我们可以将 b^m-映射定义为该范畴中的映射（见 [**Sco16**]）。

该丛的截面称为 b^m**-向量场**，其流定义了 b^m-映射。在局部坐标中， b^m-切丛的截面由以下向量场生成:

$$\{x^m \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\}. \tag{2.5}$$

按照 b情形作相应修改，可定义 b^m-余切丛（${}^{b^m}T^*M$）、 b^m-德拉姆复形以及 b^m-辛结构。

闭合 b^m-形式 ω 的**洛朗级数**是在 Z 的管状邻域 U 中对 ω 的一种分解，其形式为

$$\omega = \frac{dx}{x^m} \wedge (\sum_{i=0}^{m-1} \pi^*(\alpha_i)x^i) + \beta \tag{2.6}$$

其中 $\pi : U \to Z$ 是管状邻域到 Z上的投影， α_i 是 Z 上的闭光滑德拉姆形式，而 β 是 M上的德拉姆形式。

在 [**Sco16**] 中已证明，在 Z的一个邻域内，每个闭合的 b^m-形式 ω都可以写成类型为 (2.6) 的洛朗形式，其中固定了一个（半）局部定义函数。

b^m-上同调通过以下定理与德拉姆上同调相关:

[5]于是， b^m-流形将是一个三元组 (M, Z, x)，不过为简便起见，我们称之为一对 (M, Z)，并默认函数 x 是固定的。

定理 2.12（b^m-**Mazzeo-Melrose,** [**Sco16**]）。设（M, Z）是一个 b^m-流形，则：

$$ {}^{b^m}H^p(M) \cong H^p(M) \oplus (H^{p-1}(Z))^m. \tag{2.7}$$

上述定理证明中构造的同构不是正则的（见 [**Sco16**]）。

Moser 路径方法可以推广到 b^m-辛结构（关于从曲面推广到一般流形，见[**MS21**] 和 [**Sco16**] ）：

定理 2.13（**Moser 路径方法**）。设 ω_t 是一个由 b^m-辛形式构成的路径，且这些形式定义相同的 b^m-上同调类 $[\omega_t]$。在（M^{2n}, Z）上，若 M^{2n} 闭且可定向，则存在一个 b^m-辛同胚 φ：（M^{2n}, Z）$\longrightarrow$（M^{2n}, Z）使得 φ^*（ω_1）$= \omega_0$。

Moser 路径方法的一个重要推论是，按照 Radko 的方式，可根据 b^m-上同调类对闭的可定向 b^m-辛曲面 `进行整体分类。

定理 2.14（**闭定向 b^m-曲面的分类,** [**Sco16**]）。设 ω_0 和 ω_1 是闭定向连通 b^m-曲面 （S, Z）上的两个 b^m-辛形式。那么，以下条件等价：

- 它们的 b^m-上同调类相同 $[\omega_0] = [\omega_1]$,
- 这些曲面全局上 b^m-辛同构,
- ω_0 和 ω_1 的刘维尔体积以及以下数值

$$\int_\gamma \alpha_i$$

对所有连通分支 $\gamma \subseteq Z$ 和所有 $1 \leq i \leq m$ 均相同（其中α_i 是两个b^m 次数为 *2* 的形式的 ***Laurent*** 分解中出现的 ***1***-形式， ω_0 和 ω_1）。

定义 2.15. 数值 $[\alpha_i] = \int_\gamma \alpha_i$ 称为连通分支 $\gamma \subset Z$的模权 。

在 [**GMW17**] 中证明了 Moser 路径方法的一个相对版本。由此可得以下关于 b^m-辛流形的局部描述：

定理 2.16（b^m-**达布定理,** [**GMW17**]）。设 ω 是（M, Z）上的一个 b^m-辛形式，且 $p \in Z$。则存在一个以 p 为中心的坐标图 （$U, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$），使得在 U 上，超曲面 Z 由 $x_1 = 0$ 局部定义，并且

$$\omega = \frac{dx_1}{x_1^m} \wedge dy_1 + \sum_{i=2}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

注记 2.17。为简便起见，有时我们会省略对临界集 Z 的明确提及，而直接讨论流形 M 上的 b^m-辛结构，并默认 Z 是 Π^n 的零点集，其中Π 是与 b^m-辛形式对偶的泊松向量场。

接下来，我们给出两个引理，使我们能够将 b^m-辛结构和 b^m-泊松结构视为同一几何结构在 b-流形上的两种不同表述。下面的引理表明，它们互为对偶，因此存在一一对应关系。

引理 2.18. 设 ω 是一个 b^m-辛结构， Π 是其对偶向量场，则 Π 是一个b^m-泊松结构。

证明。最快的方法是取其逆，这是一个双向量场，并注意到它是一个泊松结构（因为 $d\omega = 0$ 意味着 $[\Pi, \Pi] = 0$）。要看出它是 b^m-泊松的，只需在临界集上任意一点的邻域内验证即可。取临界集 Z 上的一点 p，并应用 b^m-达布定理，得到 $\omega = dx_1/x_1^m \wedge dy_1 + \sum_{i>1} dx_i \wedge dy_i$ 这意味着在新的坐标系中

$$\Pi = x_1^m \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i>1} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i}$$

因此 Π 是一个 b^m-泊松结构。

□

反过来，

引理 2.19。 设 Π 是 b^m-泊松的，且 ω 是其对偶向量场，则 ω 是一个b^m-辛结构。

证明。若 Π 横截 `地满足 Thom 条件，且在 Z 上具有 m 阶奇点，那么根据 Weinstein 分裂定理，我们可以在局部写成

$$\Pi = x_1^m \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i>1} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i}$$

现在，它的逆是 $\omega = dx_1/x_1^m \wedge dy_1 + \sum_{i>1} dx_i \wedge dy_i$，这是一种 b^m-辛形式。

□

因此，我们得到了从 b^m-辛结构到 b^m-泊松结构的对应关系。

2.3. b^m-泊松流形的去奇异化

在 [**GMW17**] Guillemin、Miranda 和 Weitsman 提出了一种针对 b^m-辛流形的去奇异化过程，并证明对于给定的 b^m-辛结构，我们可以根据 m的奇偶性，将其与一族折叠辛形式或辛形式对应起来。具体而言，

定理 2.20 (**Guillemin-Miranda-Weitsman**, [**GMW17**]). 设 ω 是闭可定向流形 M 上的一个b^m-辛结构，且 Z 是其临界超曲面。

- 若 $m = 2k$，则存在一族辛形式 ω_ϵ，它们在 ϵ 邻域之外与 b^m-辛形式 ω 重合，并且双向量场族 $(\omega_\epsilon)^{-1}$ 在 C^{2k-1} 拓扑下收敛至泊松结构 ω^{-1}，当 $\epsilon \to 0$ 时。
- 若 $m = 2k+1$，则存在一族折叠辛形式 ω_ϵ，它们在 ϵ 邻域之外与 b^m-辛形式 ω 重合。

根据定理 2.20，任何支持 b^{2k}-辛结构的闭可定向流形必然也支持辛结构。

在 [**GMW17**] 中，给出了偶数和奇数情形的显式公式。这里我们将着重介绍偶数维情形，因为稍后会用到这些公式。

我们简要回顾去奇异化的定义以及 [**GMW17**] 中的主要结果。回顾一下，我们可以将 b^{2k}-形式表示为：

$$\omega = \frac{dx}{x^{2k}} \wedge \left(\sum_{i=0}^{2k-1} x^i \alpha_i \right) + \beta. \tag{2.8}$$

此表达式在给定的 Z 的某个连通分支的 ϵ-管状邻域上成立。此表达式可直接由方程 2.6 得出；关于该结果的证明，请参见 [**Sco16**]。

定义 2.21. 设 (S, Z, x) 是一个 b^{2k}-流形，其中 S 是闭可定向流形，且 ω 是一个 b^{2k}-辛形式。考虑在 Z 的一个连通分支的 ϵ-管状邻域 U_ϵ 上，由表达式 (2.8) 给出的分解。

设 $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R})$ 是一个奇光滑函数，满足对所有 $x \in [-1, 1]$，$f'(x) > 0$，并且在其外满足

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2k-1)x^{2k-1}} - 2 & \text{for} \quad x < -1, \\ \frac{-1}{(2k-1)x^{2k-1}} + 2 & \text{for} \quad x > 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

设 $f_\epsilon(x)$ 定义为 $\epsilon^{-(2k-1)} f(x/\epsilon)$。

f_ϵ-去奇异化 ω_ϵ 是一个定义在 U_ϵ 上的形式，其表达式如下：

$$\omega_\epsilon = df_\epsilon \wedge \left(\sum_{i=0}^{2k-1} x^i \alpha_i \right) + \beta.$$

这一去奇异化过程在文献中也称为**去对数化** 。

注记 2.22. 尽管 f有无穷多种选择，我们假设选定其中一种，并在后续讨论中始终固定该选择。关于函数 f改变时微分形式之间是否存在同伦，值得进一步讨论。

注记 2.23. 由于 ω_ϵ 可以平凡地延拓到整个 S 上，使其在 Z的某个邻域之外与 ω 一致（参见 [**GMW17**]），因此我们可以将 ω 的 f_ϵ-去奇异化视为定义在 S上的形式。

第3章

KAM理论速成

本专著的最后一部分完全致力于证明一个适用于 b^m-辛结构的KAM定理，并探讨其应用。因此，本节旨在简要概述传统的KAM定理。KAM定理的研究背景是一个带有作用-角坐标的辛流形，其中包含一个可积系统。该定理指出，在对哈密顿量施加小扰动后，“大多数”刘维尔环面仍会保留下来。

考虑其中带有作用-角坐标 $\mathbb{T}^n \times G \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ （ϕ_1，……，ϕ_n，I_1，……，I_n）的 $\mathbb{T}^n \times G \subset \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ 以及其中的标准辛形式 ω 。假设该系统的哈密顿函数为 h（I），即一个只依赖于作用坐标的函数。那么，该系统的哈密顿方程为

$$\iota_{X_h}\omega = dh$$

其中， X_h 是生成轨道的向量场。由于 h 不依赖于角变量 ϕ ，该系统很容易求解，其方程为

$$x(t) = (\phi(t), I(t)) = (\phi_0 + ut, I_0),$$

其中 $u = \partial h/\partial I$ 称为频率向量。对于固定的初始条件，这些运动都位于一个刘维尔环面内，称为拟周期运动。

KAM定理研究的是对哈密顿函数施加小扰动后这类系统会发生什么变化，即考虑由哈密顿量 $h(I) + R(I, \phi)$ 描述的系统演化，其中我们将项 $R(I, \phi)$ 视为系统中的小扰动。由此，哈密顿方程可以写成

$$\dot{\phi} = u(I) + \frac{\partial}{\partial I}R(I, \phi), \dot{I} = -\frac{\partial}{\partial \phi}R(I, \phi),$$

另一个需要牢记的重要概念是有理相关。若存在某个 $k \in \mathbb{Z}^n$，使频率 u 满足 $\mathbf{h}u, k\mathbf{i} = 0$ ，则称其有理相关；若不存在满足条件的 k ，则称向量 u 有理无关。有理无关还有一个更强的概念，即丢番图性。若对所有$k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$， $\gamma > 0$ 和 $\tau > n - 1$，向量 u 是 γ,τ-丢番图的，当且仅当 $\mathbf{h}u, k\mathbf{i} \geq \frac{\gamma}{|k|_1^\tau}$。

KAM定理指出，频率向量满足丢番图条件的刘维尔环面在小扰动 $R(I, \phi)$ 下仍然存在。扰动的大小与 γ 和 τ 之间存在相关条件。此外，满足丢番图条件的环面集合的测度为 $1 - C\gamma$，其中 C 是某个常数。

现在，我们给出 [**DG96**] 中所述定理的恰当表述。

定理 3.1（等能KAM定理）。 设$\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$，为紧的，并且 $H(\phi, I) = h(I) + f(\phi, I)$ 在$\mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$上实解析。设 $\omega = \partial h/\partial I$，并假设满足以下界：

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right|_{\mathcal{G},\rho_2} \leq M, \quad |\omega|_{\mathcal{G}} \leq L \quad and \quad |\omega_n(I)| \geq l \forall I \in \mathcal{G}.$$

还假设 ω 在 $\mathcal{G}$ 上是 μ-等能非退化的。对于 $a = 16M/l^2$，假设映射 $\Omega = \Omega_{\omega,h,a}$ 在 $\mathcal{G}$ 上是单射，且其值域 $F = \Omega(\mathcal{G})$是一个 D-集。给定 $\tau > n-1$、$\gamma > 0$ 和 $0 < \nu < 1$，并作如下假设：

$$\varepsilon := \|f\|_{\mathcal{G},\rho} \leq \frac{\nu^2 l^6 \mu^2 \hat{\rho}^{2\tau+2}}{2^{4\tau+32} L^6 M^3} \cdot \gamma^2, \quad \gamma \leq \min\left(\frac{8LM\rho_2}{\nu l \hat{\rho}^{\tau+1}}, l\right),$$

其中我们记 $\rho := \min\left(\frac{\nu\rho_1}{12^{(\tau+2)}}, 1\right)$。定义集合

$$\hat{G} = \hat{G}_\gamma := \left\{ I \in \mathcal{G} - \frac{2\gamma}{\mu} : \omega(I) is \tau, \gamma - Diophantine \right\}.$$

那么，存在一个实连续映射 $\mathcal{T}: \mathcal{W}^{\frac{\rho_1}{4}}(\mathbb{T}^n) \times \hat{} G \to \mathcal{D}_\rho(\mathcal{G})$，它关于角变量是解析的，并满足：

(1) 对每个 $I \in \hat{} G$，集合 $\mathcal{T}(\mathbb{T}^n \times \{I\})$ 是 H 的一个不变环面，其频率向量与 $\omega(I)$ 共线，且其能量为 $h(I)$。

(2) 写出

$$\mathcal{T}(\phi, I) = (\phi + \mathcal{T}_\phi(\phi, I), I + \mathcal{T}_I(\phi, I)),$$

可得估计

$$|\mathcal{T}_\phi|_{\hat{G},(\frac{\rho_1}{4},0),\infty} \leq \frac{2^{2\tau+15} L^2 M}{\nu^2 l^2 \hat{\rho}^{2\tau+1}} \frac{\varepsilon}{\gamma^2}, \quad |\mathcal{T}_I|_{\hat{G},(\frac{\rho_1}{4},0)} \leq \frac{2^{\tau+16} L^3 M}{\nu l^3 \mu \hat{\rho}^{\tau+1}} \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

(3) 测度$[(\mathbb{T}^n \times \mathcal{G}) \setminus \mathcal{T}(\mathbb{T}^n \times \hat{} G)] \leq C\gamma$，其中 C是一个非常复杂的常数，取决于 n、τ、直径F、 D、$\hat{}\rho$、 M、 L、 l、 μ。

注记 3.2. 这个版本的KAM定理是等能版本，它保证扰动后经微分同胚识别出的刘维尔环面的能量与扰动前保持相同。为了简化计算，我们的 b^m-KAM 并非等能的。

此外，我们应指出，此前已有研究探讨了奇异辛流形上的KAM定理。在 [**KMS16a**] 中，作者针对一种特定类型的扰动，证明了一个适用于 b-辛流形的KAM定理。

定理 3.3（适用于 b-泊松流形的KAM定理）。 设 $\mathbb{T}^n \times B_r^n$ 配备标准坐标 (φ, y) 和 b- 辛结构。考虑一个 b- 函数

$$H = k \log |y_1| + h(y)$$

在这个流形上，其中 h 是解析的。设 y_0 是 B_r^n 中第一分量等于零的一个点，使得相应的水平集 $\mathbb{T}^n \times \{y_0\}$ 位于临界超曲面 Z 内。

假设频率映射

$$\tilde{\omega} : B_r^n \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad \tilde{\omega}(y) := \frac{\partial h}{\partial \tilde{y}}(y)$$

在 $y_0 \in B^n$ 处具有丢番图值 $\tilde{\omega} := \tilde{\omega}(y_0)$，并且在 y_0 处是非退化的，即雅可比矩阵 $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}(y_0)$ 是正则的。

那么，环面 $\mathbb{T}^n \times \{y_0\}$ 在对 H进行充分小的、具有上述形式的扰动后仍然存在，也就是说，这些扰动由 ϵP给出，其中 $\epsilon \in \mathbb{R}$ 和$P \in^b C^\infty(\mathbb{T}^n \times B_r^n)$ 具有如下形式

$$P(\varphi, y) = k' \log |y_1| + f(\varphi, y)$$
$$f(\varphi, y) = f_1(\tilde{\varphi}, y) + y_1 f_2(\varphi, y) + f_3(\varphi_1, y_1).$$

更确切地说，如果 $|\epsilon|$ 充分小，那么受扰系统

$$H_\epsilon = H + \epsilon P$$

存在一个不变环面$\mathcal{T}$。

此外，存在一个微分同胚 $\mathbb{T}^n \to \mathcal{T}$ *close*[1] 于恒等映射，它将受扰系统在$\mathcal{T}$ 上的流 γ^t 映到频率向量为下述向量的 $\mathbb{T}^n$ 上的线性流

$$\left(\frac{k + \epsilon k'}{c}, \tilde{\omega} \right).$$

[1]所谓微分同胚“ϵ-接近恒等映射”，是指对于给定的 H, P和 r，存在常数 C，使得 $\mathrm{k}\psi - \mathrm{Idk} < C\epsilon$.

第 2 部分

作用-角坐标与余切模型

在这一部分中，我们研究任意 b^m-泊松流形在不变紧子流形邻域内的半局部分类。所考虑的紧子流形是由可积系统的哈密顿向量场 X_{f_i} 生成的分布 D 的紧不变叶。可积系统由定义在 $2n$ 维辛流形上的一组 n 个函数给出，我们可以将它们排列成映射 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_n)$。从历史上看，引入可积系统的目的正是借助第一积分 f_i 来求解 哈密顿系统 X_H，而在经典情形下，我们将 $H = f_1$ 视为……。事实证明，在辛几何背景下，对于这些轨道／纤维上的任意点 p，分布 D 的紧正则轨道都与纤维 $F^{-1}(F(p))$ 重合。轨道与连通纤维重合这一事实，正是辛对偶的奇妙之处。

正如我们将在本章中看到的，b^m型奇异辛流形或 b^m-泊松流形也呈现出同样的图景。

从几何角度看，研究作用-角坐标有其意义，因为它涉及对 b^m-泊松流形中紧子流形邻域内几何结构的分类。从动力学角度看，这项研究也很有意义，因为这些紧子流形此时与所研究哈密顿系统的不变子集相重合。

从几何角度看，作用-角坐标的存在决定了不变集邻域内 b^m-泊松（或 b^m-辛）结构的唯一几何模型。从动力学角度看，作用-角坐标的存在提供了一个标准形定理，可用于研究哈密顿系统的稳定性和微扰问题（正如我们将在本专著的最后一章中看到的那样）。

从辛几何的角度看，使我们的作用-角坐标定理崭新的一个重要因素是，所研究的系统比哈密顿系统更一般：它是 b^m-哈密顿系统，因为该系统的第一积分可以是并非光滑函数的 b^m-函数。从动力学角度看，这意味着我们在哈密顿不变向量场集合中加入了可积系统的模向量场。

与辛流形的标准作用-角坐标不同，我们的作用-角变量定理还包含 m 与模向量场相关的额外不变量。从上同调的角度看，这些不变量可以解释为：在 Mazzeo-Melrose 对应下，由模向量场确定的 b^m-上同调类在临界超曲面的一阶上同调群上的投影。

作用-角变量坐标系证明的策略是寻找一个环面作用（这也让我们回到了本专著中使用对称性的初衷）。与辛情形不同，仅有哈密顿作用并不足够，因为这样会缺少刘维尔环面的一个方向。我们需要该环面作用是 b^m-哈密顿的。这个证明的结构与 [**KMS16a**] 中的证明相似，但也遇到了严峻的技术难题：为了验证所要考虑的自然 作用是 b^m-哈密顿的，我们需要进一步深入研究，受 [**Sco16**] 的启发，探究模向量场的几何与某个第一积分的泰勒级数系数之间的关系。 c_i 这使我们得以理解此前尚未探讨过的 b^m-泊松结构的几何与分析之间的新联系。

一旦我们证明了这一 b^m-哈密顿作用的存在性，证明过程就与 [**KMS16a**]中的证明十分相似。在本部分的第二章中，我们将作用-角变量定理重新表述为余切提升定理，并以如下箴言概括：每个定义在 b^m-泊松流形上的可积系统，在刘维尔环面邻域内都具有如下形式： b^m-余切提升。

第4章

一个针对 b^m-辛流形的作用-角变量定理

4.1. 基本定义

4.1.1. 关于 b^m-函数。在b^m框架下， b-函数的对应概念定义起来颇为微妙。 ${}^{b^m}\mathsf{C}^\infty(M)$的集合必须满足：对于所有函数 $f \in {}^{b^m}\mathsf{C}^\infty(M)$，其微分 df 是一个 b形式，其中 d 是 b^m外微分。回想一下， ${}^{b^m}\Omega^k(M)$中的形式可以局部写成

$$\alpha \wedge \frac{dx}{x^m} + \beta$$

其中 $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$且 $\beta \in \Omega^k(M)$。还需回想，

$$d\left(\alpha \wedge \frac{dx}{x^m} + \beta\right) = d\alpha \wedge \frac{dx}{x^m} + d\beta.$$

我们需要 df 成为定义良好的1次 b^m形式。令$f = g\frac{1}{x^{k-1}}$，则 $df = dg\frac{1}{x^{k-1}} - g\frac{k-1}{x^k}dx$。当且仅当 g 仅依赖于 x时，这个形式才是一个 b^m形式。若 $f = g\log(x)$，则 $dg\log(x) + g\frac{1}{x}dx$，这要求 $dg = 0$，因此 g 必须为常数。

鉴于以上内容，我们作出如下定义。

定义 4.1。 b^m-函数集按以下公式递归定义

$${}^{b^m}\mathcal{C}^\infty(M) = x^{-(m-1)}\mathcal{C}^\infty(x) + {}^{b^{m-1}}\mathcal{C}^\infty(M)$$

其中，$\mathsf{C}^\infty(x)$ 是定义函数 x 中光滑函数的集合，并且

$${}^{b}\mathcal{C}^\infty(M) = \{g\log|x| + h, g \in \mathbb{R}, h \in \mathcal{C}^\infty(M)\}.$$

注记 4.2。一个 ${}^{b^m}\mathsf{C}^\infty(M)$-函数可写为

$$f = a_0 \log x + a_1 \frac{1}{x} + \ldots + a_{m-1}\frac{1}{x^{m-1}} + h$$

其中 $a_i, h \in \mathsf{C}^\infty(M)$.

注记 4.3。从本章开始，我们只考虑 b^m-流形（M, x, Z），其中 x 定义到 m 阶。也就是说，我们可以将 x 视为某个定义函数的喷流，其与该函数截至 m 阶相一致。这是 Scott 在 [**Sco16**] 中提出的原始观点，我们从现在起采用这一观点。与其他章节不同的是，我们不固定一个特定的函数。

定义 4.4. 若存在 φ（一个 b^m-辛同胚），使得两个 b^m-可积系统 F_1, F_2 等价，也就是说，该微分同胚同时保留ω 和临界集 Z（“直到 m 阶”[1]），并且满足 $\varphi \circ F_1 = F_2$。

[1]也就是说，它保留喷流 x

注记 4.5. 与 b^m-函数 f 相关联的哈密顿向量场是一个光滑向量场。下面利用 b^m-达布定理在局部计算它:

$$\Pi = x_1^m \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} \text{ and } f = a_0 \log x_1 + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \frac{1}{x_1^i} + h.$$

那么，如果我们计算

$$\begin{aligned} df &= \overbrace{a_0}^{c_1} \frac{1}{x_1} + \sum_{i=1}^{m-1} \overbrace{(a_i' - (i-1)a_{i-1})}^{c_i} \frac{1}{x_1^i} dx_1 \\ &\quad - \overbrace{(m-1)a_{m-1}}^{c_m} \tfrac{1}{x_1^m} dx_1 + dh \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{x_1^i} dx_1 + dh. \end{aligned}$$

那么,

$$X_f = \Pi(df, \cdot) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{m-i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \Pi(dh, \cdot), \tag{4.1}$$

我们得到一个光滑向量场。

4.2. 关于 b^m-可积系统

本节给出 b^m-可积系统的定义，并对这类对象作一些观察。

定义 4.6. 设 (M^{2n}, Z, x) 是一个 b^m-流形，且 Π 是其上的 b^m-泊松结构。若 $F = (f_1, \ldots, f_n)$[2] 满足以下条件，则称其为 b^m-可积系统[3]:

(1) $df_1, \ldots, df_n$ 在 M 的稠密子集上以及 Z 的所有点处线性无关；这里，线性无关是指形式 $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ 作为 $\Lambda^n({}^{b^m}T^*(M))$ 的一个截面非零；(2) 函数 f_1,..., f_n 两两泊松对易。

定义 4.7. M 中 df_1,..., df_n 线性无关的点称为**正则** 点。

接下来的几条注记将引出关于第一个函数 f_1 的标准形。

注记 4.8. 注意， df_1,..., df_n 在某一点处线性无关，当且仅当$X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$在该点处线性无关。这是因为映射

$${}^{b^m}TM \to {}^{b^m}T^*M : u \mapsto \omega_p(u, \cdot)$$

是一个同构。

注记 4.9。 df_1,..., df_n 线性无关这一条件必须理解为 $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ 是 $\bigwedge^n({}^{b^m}T^*M)$ 的一个非零截面。

[2] f_i 是 b^m-函数。[3] 在本专著中，我们只考虑最大秩为 n 的可积系统。

注 4.10。根据注记 4.8，向量场 $X_{f_1},\dots,X_{f_n}$ 必须线性无关。这意味着 f_1,..., f_n 中有一个必须是具有最高阶奇点的奇异（非光滑） b^m-函数。若我们写作 $f_i = c_{0,i}\log(x_1) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_{j,i}}{x_1^j} + \tilde{f}_1$

$$X_{f_i} = \sum_{j=1}^{m} x_1^{m-j}\hat{c}_{j,i}\frac{\partial}{\partial y_1} + X_{\tilde{f}_i}$$

其中 $\hat{c}_{j,i}(x) = \frac{d_{(c_{j,i})}}{dx} - (j-1)c_{j-1,i}$。如果不存在具有最高次数奇点的 b^m-函数，那么在 Z 处， $\partial/\partial y_1$ 方向上的所有项都变为 0。因此X_{f_1}，.....， X_{f_n} 在 Z 处不可能具有最大秩。

引理 4.11。 设 $F=(f_1,\ .....,\ f_n)$ 是一个 b^m-可积系统。如果 f_1 具有最高次数奇点，则存在一个等价可积系统 $F\prime=(f\prime 1,\ .....,\ f_n')$，其中 f_1' 具有最高次数奇点，且没有其他 f_i' 具有任何次数的奇点。

Proof. Let $f_i = \underbrace{c_{0,i}\log(x_1) + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{c_{j,1}}{x_1^j}}_{\zeta_i(x_1)} + \tilde{f}_i = \zeta_i(x_1) + \tilde{f}_i$. By remark 4.10[4],

$$X_{f_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_1^{m-j}\hat{c}_{j,i}}_{g_i(x_1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + X_{\tilde{f}_i} = g_i(x_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + X_{\tilde{f}_i}.$$

注意，在 Z 处， $g_i(x_1) = g_i(0) = \hat{c}_{m,i}$。来看由哈密顿向量场 $X_{f_i} = g_i(x_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + X_{\tilde{f}_i}$ 给出的分布。这个分布与下列分布相同:

$$\{X_{f_1}, X_{f_2} - \frac{g_2(x_1)}{g_1(x_1)}X_{f_1},\dots,X_{f_n} - \frac{g_n(x_1)}{g_1(x_1)}X_{f_1}\}. \tag{4.2}$$

注意，对于 $i>1$, $X_{f_i} - \frac{g_i(x_1)}{g_1(x_1)}X_{f_1} = X_{\tilde{f}_i} + \frac{g_2}{g_1(x_1)(x_1)}X_{\tilde{f}_1}$。此外， $g_1(x_1)$ 在 Z 附近不为零，因为在 Z $g_1(x_1) = \hat{c}_{m,1}$。由于这些向量场所给出的分布相同，具有哈密顿向量场 4.2 的可积系统等价于 F。从表达式 4.2 可以清楚地看出，新的向量场彼此对易。新的向量场也确实是哈密顿向量场。令 F' 为具有哈密顿向量场 4.2 的函数集。□

从现在起，我们假设该可积系统只有一个奇异函数，并且该函数为 f_1。

注 4.12. 由于我们要求 $X_{f_1},\dots,X_{f_n}$ 在 Z 的所有点处线性无关，并利用前面的注记 $c_m := c_{m,1} \neq 0$ 在 Z的所有点处。

[4]这里使用了 b^m-达布定理进行计算。

此外，我们可以假设 f_1 的光滑部分为零，因为从所有函数中减去 f_1 的光滑部分会得到一个等价系统。另外，我们可以假设 c_m 为 **1**，因为将 b^m-可积系统的所有函数都除以 c_m 也会得到一个等价系统。

总而言之，我们可以假设 $f_1 = a_0\log(x)+a_1 1/x+\ldots+a_{m-2}1/x^{m-2}+1/x^{m-1}$ **和** $f_2,\ldots,f_n$ **是光滑的，** $a_0\in\mathbb{R}$**，且** $a_1,\ldots,a_{m-2}\in\mathcal{C}^\infty(x)$。

此外，我们将在 [**GMPS17**]，中陈述引理 3.2，因为本节后面会用到它。该结果指出，如果我们在一个 b^m-辛流形上有环面作用（我们将在刘维尔环面的一个邻域内证明这一点），那么可以假设系数 $a_2,\ldots,a_{m-2}$ 为常数。更确切地说

引理 4.13. 存在临界集 $U = Z\times(-\varepsilon,\varepsilon)$的一个邻域，在此邻域中，动量映射 $\mu: M\to\mathfrak{t}^*$ 由下式给出

$$\mu = a_1\log|x| + \sum_{i=2}^{m} a_i\frac{x^{-(i-1)}}{i-1} + \mu_0$$

其中 $a_i\in\mathfrak{t}_L^0$ 和 μ_0 是该叶状结构的辛叶上 T_L-作用的动量映射。

4.3. b^m-可积系统的例子

以下例子说明了为什么必须使用上文所述的 b^m-函数定义。在辛流形上的标准可积系统中，存在一些自然的坐标变换，它们会产生 b^m-辛流形，却无法定义良好的 b^m-可积系统。

例 **4.14**。考虑对二体问题进行时间变换，以得到 n 一个 b^2-可积系统。在经典的二体问题求解方法中，可以得到以下两个守恒量：

$$\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{\mu y^2}{2} + \tfrac{l^2}{2\mu r^2} - \tfrac{k}{r},\\ f_2 &= l, \end{aligned}$$

其辛形式为 $\omega = dr\wedge dy + dl\wedge d\alpha$，其中 r 是两个质点之间的距离，l 是角动量。我们还知道，l 沿着轨道保持不变。由于 l 是一个运动常数，我们可以在其水平集上进行辛约化。辛约化上的形式变为 $dr\wedge dy$。为简化记号，我们将用 x 代替 r。于是 $\omega = dx\wedge dy$。哈密顿函数为 $f = \frac{\mu}{2}y^2 + \frac{l}{2\mu}\frac{1}{x^2} - k\frac{1}{x}$。因此，方程为：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dot{y} &= -\tfrac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

进行时间变换 $\tau = x^3 t$ 然后 $\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{x^3}\frac{dx}{dt}$。采用这个时间坐标后，方程变为：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tfrac{1}{x^3}\tfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dot{y} &= -\tfrac{1}{x^3}\tfrac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

这些方程可以视为由 b^3-辛形式 $\omega = \frac{1}{x^3}dx\wedge dy$ 给出的运动方程。

让我们验证这实际上是一个 b^m-可积系统。

- 所有函数都泊松对易，这一点显而易见，因为我们只有一个函数。
- $df = \mu y dy + (\frac{k}{x^2} - \frac{l}{\mu}\frac{1}{x^3})dx$ 是一个 b^3形式，因为含有 dx 的项不依赖于 y。
- 所有函数彼此独立，这是因为 df 不作为 b^3形式消失。

例4.15。在论文 [**Mar19**] 中，作者在(P, ω_P)上构造了一个 $SL(2,\mathbb{R})$的作用，其中 $P = \{\xi \in \mathbb{C} | i(\xi - \xi) > 0\}$为复半平面，动量映射为 $J_P(\xi) = \frac{R}{\xi_{im}}((|\xi|^2 + 1) 2\xi_r, \pm(|\xi|^2 + 1))$，其中 $\pm$符号取决于经立体投影投影的半球的选择。从现在起，我们取符号 $+$。此外，辛形式 ω_P 具有以下表达式：

$$\omega_P = \pm\frac{R}{\xi_{im}^2} d\xi_r \wedge d\xi_{im}$$

为简化记号，我们将 P 与实半平面 $P = \{x, y \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ 等同。作此等同后，动量映射变为 $J_p(x, y) = \frac{R}{y}(x^2 + y^2 + 1, 2x, x^2 + y^2 + 1)$。显然，这个动量映射并未给出可积系统。辛形式写作：

$$\omega_P = \frac{R}{y^2} dy \wedge dx.$$

如果将直线 $\{y = 0\}$ 纳入 P，并将其视为奇异集，那么这种形式可以看作一个 b^2-形式。我们只考虑 J_P 的一个分量作为 b^m-函数，看看它是否给出一个 b^m-可积系统。首先尝试 $f_1 = \frac{R}{y}(x^2 + y^2 + 1)$，然后尝试 $f_2 = \frac{R}{y}(2x)$。

(1) $f_1 = \frac{R}{y}(x^2 + y^2 + 1)$ 要判断这是否给出一个 b^2-可积系统，我们需要检查三点。(a) 所有函数都泊松对易，这一点显而易见，因为我们只有一个函数。(b) 所有函数都是 b^m-函数。这一点不成立，因为 $df_1 = \frac{R}{y^2}(2xydx + (y^2 - x^2 - 1)dy)$，而第一个分量作为 $\Lambda^1({}^{b^2}T^*M)$ 的截面毫无意义。(c) 所有函数彼此独立。在这种情况下，我们需要检查 df_1 不为零；但由于它不是一个 b^m-形式，因此将其视为 $\Lambda^1({}^{b^2}T^*M)$ 的非零截面毫无意义。(2) $f_2 = \frac{R}{y}(2x)$ (a) 同上。(b) 所有函数都是 b^m-函数。这一点不成立，因为 $df_2 = \frac{2R}{y}dx - \frac{2Rx}{y^2}dy$，而第一个分量作为 $\Lambda^1({}^{b^2}T^*M)$ 的截面毫无意义。(c) 同上。

例 4.16。环面作用给出了可积系统的自然示例，其中分量函数由动量映射给出。在曲面的情形下：曲面上的S^1作用给出了 b^m可积系统的自然示例。只有环面和球面允许圆作用。

下图展示了二球面上两个依次数 m而异的可积系统。右侧是定义该可积系统的动量映射的像。该作用是绕中心轴旋转。

也就是说，考虑球面 S^2 作为一个 b^m-辛流形，其临界集为赤道:

$$(S^2, Z = \{h = 0\}, \omega = \frac{dh}{h^m} \wedge d\theta),$$

其中 $h \in [-1, 1]$ 和 $\theta \in [0, 2\pi)$ 。

对于 $m = 1$: 计算 $\iota_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\omega = -\frac{dh}{h} = -d(\log |h|)$, 可知，函数 $\mu(h, \theta) = \log |h|$ 是动量映射，并定义了一个 b-可积系统。

对于更高的 m 值: $\iota_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\omega = -\frac{dh}{h^m} = -d(-\frac{1}{(m-1)h^{m-1}})$, 而动量映射为 $\mu(h, \theta) = -\frac{1}{(m-1)h^{m-1}}$ ，它定义了一个 b^m-可积系统。

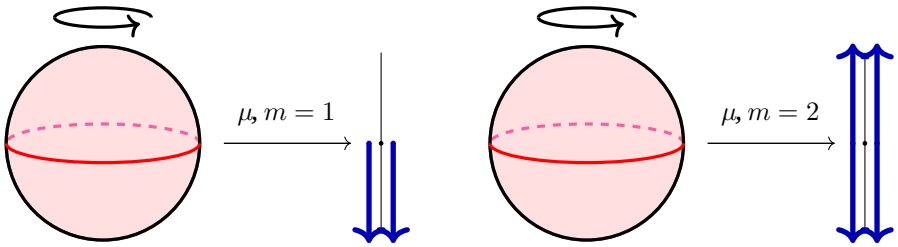

图1. 与 S^1-作用相关的可积系统: 该作用通过旋转作用于 b^m-辛二球面 S^2上的动量映射。

例4.17. 现在考虑作为 b^2-辛流形的二维环面

$$(\mathbb{T}^2, Z = \{\theta_1 \in \{0, \pi\}\}, \omega = \frac{d\theta_1}{\sin^2\theta_1} \wedge d\theta_2)$$

其标准坐标为: $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$。注意，在此例中，临界超曲面$Z$ 并非连通，而是由两个不相交圆组成。考虑绕 θ_2坐标旋转的圆作用，其基本向量场为 $\frac{\partial}{\partial\theta_2}$。由下列计算可得,

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial\theta_2}}\omega = -\frac{d\theta_1}{\sin^2\theta_1} = d\left(\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\right).$$

S^1-作用的基本向量场定义了一个由函数 $-\frac{\text{余弦 }\theta_1}{\text{正弦 }\theta_1}$ 给出的 ${}^{b^2}C^\infty$-可积系统。

例4.18。前一个例子可以推广，从而为任意整数 m 构造出定义在 b^m-辛流形上的 b^m- 可积系统

$$(\mathbb{T}^2, Z = \{\theta_1 \in \{0, \pi\}\}, \omega = \frac{d\theta_1}{\sin^m\theta_1} \wedge d\theta_2).$$

Then

$$\iota_{\frac{\partial}{\partial\theta_2}}\omega = -\frac{d\theta_1}{\sin^m\theta_1} = d\left(\frac{|\cos\theta_1|}{\cos\theta_1}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1-m}{2}; \frac{3-m}{2}; \sin^2(\theta_1)\right)}{(1-m)\sin^{m-1}\theta_1}\right),$$

其中 ${}_2F_1$ 为超几何函数。

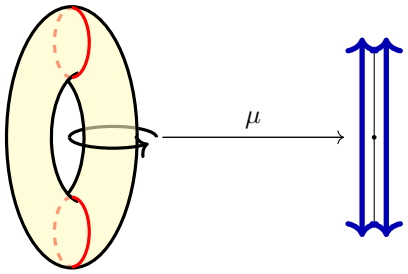

图 2. 由 S^1-作用在 b^2-环面$\mathbb{T}^2$ 上给出的可积系统及其相应的动量映射。

因此，相关的 S^1-作用以函数作为 ${}^{b^m}C^\infty$-哈密顿量

$$-\frac{|\cos\theta_1|}{\cos\theta_1}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1-m}{2};\frac{3-m}{2};\sin^2(\theta_1)\right)}{(1-m)\sin^{m-1}\theta_1}$$

它定义了一个 b^m-可积系统。

现在我们给出几个 b^m-可积系统的例子。

例 4.19. 本例将 b^m-辛流形上的 b^m-可积系统与辛流形上的可积系统作积。设 $(M_1^{2n_1},\ Z,\ x,\ \omega_1)$ 是一个 b^m-辛流形，其上有 $f_1,\ \ldots\ldots,\ f_{n_1}$，构成一个 b^m-可积系统；$(M_2^{2n_2},\ \omega_2)$ 是一个辛流形，其上有 $g_1,\ \ldots\ldots,\ g_{n_2}$，构成一个可积系统。那么，$(M_1\times M_2,\ Z\times M_2,\ x,\ \omega_1+\omega_2)$ 是一个 b^m-辛流形，而 $(f_1,\ \ldots\ldots,\ f_{n_1},\ g_1,\ \ldots\ldots,\ g_{n_2})$ 是高维流形上的一个 b^m-可积系统。

特别是，将前面关于曲面上的 b^m-可积系统和辛流形上的任意可积系统的例子结合起来，我们便得到任意维数下 b^m-可积系统的例子。

例4.20。 **（从余辛流形上的可积系统到 b^m-可积系统：）**

利用 [**GMP14**] 的扩张定理（定理 50），我们可以将任意可积系统（$f_2,\ \ldots\ldots,\ f_n$）扩张为余辛流形（$Z,\ \alpha,\ \omega$）邻域内的一个可积系统：只需在该可积系统中添加一个 b^m-函数 f_1，使新的可积系统为（$f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots,\ f_n$），并考虑相应的 b^m-辛形式：

$$\tilde{\omega}=p^*\alpha\wedge\frac{dt}{t^m}+p^*\omega. \tag{4.3}$$

（t 是 Z 的定义函数。）

4.4. 寻找环面作用

本节通过恢复环面群作用，继续证明 b^m-可积系统的作用-角坐标。该作用与对应于 X_{f_i} 的哈密顿向量场相关联。

这与 b-可积系统中采用的策略相同，见 [**KMS16a**]- 主要难点之一是证明系数 a_1,..., a_n 可以视为

常函数。这使得在一般 b^m-情形下证明 $\mathbb{T}^n$-作用的存在性比在 b-情形下更困难；但一旦得到该作用，我们就可以利用 [**GMW17**] 中的结果，假设系数 $a_1, \ldots, a_n$ 都是常函数。

本节将介绍一些后文会用到的预备知识：

命题 4.21. 设 (M, Z, x, ω) 是一个 b^m-辛流形，其中 Z 连通，模周期为 k。设 $\pi: Z \to S^1 \simeq \mathbb{R}/k\mathbb{Z}$ 是相应映射环面到基底的投影。设 $\gamma: S^1 = \mathbb{R}/k\mathbb{Z} \to Z$ 是任意一个环路，使得 $\pi \circ \gamma$ 定向为正且速度恒为 1。则以下各项相等：

(1) Z 的模周期，(2) $\int_\gamma \iota_{\mathbb{L}}\omega$，(3) 对任意 $^{b^m}$
C$^\infty(M)$-函数， a_{m-1} 的取值

$$f = a_0 \log(x) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \frac{1}{x^j} + h$$

使得哈密顿向量场 X_f 在 Z 中具有与某个 γ同伦的 1-周期轨道。

证明。我们先证明 (1)=(2)，然后证明 (2)=(3)。
(1)=(2) 记 V_{mod} 为模向量场。回想一下，根据 [**GMW17**]， $\iota_{\mathbb{L}}(\mathrm{V}_{mod})$ 是常值函数 1。设 $s: [0, k] \to Z$ 为模向量场的轨道。由于模周期为 k， $s(0)$ 和 $s(k)$ 位于同一叶 L 上。设 $\hat{s}: [0, k+1] \to Z$ 为 s 的一个光滑延拓，使得 $s|_{[k,k+1]}$ 是一条位于 L 中、连接 $\hat{s}(k) = s(k)$ 与 $\hat{s}(k+1) = s(0)$ 的路径。这样，$\hat{s}$ 就成为一个环路。于是，

$$k = \int_0^k 1dt = \int_S \iota_{\mathbb{L}}\omega = \int_{\hat{s}} \iota_{\mathbb{L}}\omega = \int_\gamma \iota_{\mathbb{L}}\omega$$

(2)=(3) 设 $r: [0, 1] \mapsto Z$ 为 X_f 的哈密顿向量场的轨道。回想一下， X_f 满足

$$\iota_{X_f}\omega = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{dx}{x^i} + dh.$$

令 $x^m \frac{\partial}{\partial x}$ 为线性法丛 $\mathbb{L}$的一个生成元。我们知道，X_f 是 1-周期的，且其轨道与 γ同伦。因此，

$$\begin{aligned} k = \textstyle\int_r \iota_{\mathbb{L}}\omega &= \int_0^1 \iota_{x^m \frac{\partial}{\partial x}} \omega(X_f|_{r(t)})dt \\ &= \int_0^1 -(\sum_{j=1}^{m} c_i \frac{dx}{x^i} + dh) \cdot (x^m \frac{\partial}{\partial x})|_{r(t)} dt \\ &= -c_m = -a_{m-1} \end{aligned}$$

□

我们还需要一个适用于 b^m-辛流形的 Darboux-Carath´eodory 定理：

定理 4.22（Darboux-Carath´eodory（b^m-版本））。设

$$(M^{2n}, x, Z, \omega)$$

是一个 b^m-辛流形，且 m 是 Z上的一点。设 $f_1, \dots, f_n$ 是一个 b^m-可积系统。那么存在 b^m-函数 $(q_1, \dots, q_n)$，定义在 m 附近，使得

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dq_i$$

且向量场 $\{X_{f_i}, X_{q_j}\}_{i,j}$ 彼此对易。如果 f_1 不是光滑的（回忆一下，$f_1 = a_0 \log(x) + \sum_{j=1}^{m-1} a_j \frac{1}{x^i}$ 在 $a_n \neq 0$ 上与 Z 和 $a_0 \in \mathbb{R}$ 相伴），则 q_i 可以选为光滑函数，并且 $(x, f_2, \dots, f_n, q_1, \dots, q_n)$ 是一组局部坐标。

证明。证明的第一部分与 [**KMS16a**]中的完全相同。现在假设 $f_1 = a_0 \log(x) + \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{1}{x^i}$。我们修改归纳法，同时要求 μ_i（除了属于 K_i 之外）也属于 $T^*M \subseteq^b T^*M$。在要求 $\mu_i(X_{f_i}) = 1$时，我们也可以提出这个额外条件；只需检验 X_{f_i} 在 TM上不为零即可。这显然成立，因为 X_{f_i} 在 ${}^bTM$ 处不为零，而且

$$0 = \{f_n, f_i\} = \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i \frac{dx}{x^i} \right)(X_{f_i}) = \left(\frac{dx}{x^m} \sum_{i=1}^{m} a_i x^i \right)(X_{f_i}).$$

最后一个表达式中，除次数为 m 的项外，所有项都为零。

那么 dx/x^m 属于 X_{f_i} 的核，因此 X_{f_i} 在 TM 上不为零，并且q_i 可以选为光滑的。

$\{X_x, X_{f_2}, \dots\dots, X_{f_n}, X_{q_1}, \dots X_{q_n}\}$ 彼此对易，因为 $\{X_{f_i}, X_{q_i}\}_{i,j}$彼此对易。于是

$$dx \wedge df_2 \dots \wedge df_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n$$

是 $\bigwedge^n({}^bTM)$ 的一个非零截面。因此

$$(x, f_2, \dots, f_{n-1}, q_1, \dots, q_n)$$

是局部坐标。

□

在继续证明作用-角坐标之前，我们需要证明：在刘维尔环面邻域内，纤维化是半局部平凡的：

引理 4.23（拓扑引理）。设 $m \in Z$ 是一个 b^m-可积系统 (M, x, Z, ω, F)的正则点。假设经过 m的积分流形$\mathcal{F}_m$ 是紧的。那么存在$\mathcal{F}_m$ 的一个邻域 U 以及一个微分同胚

$$\phi : U \simeq \mathbb{T}^n \times B^n$$

它将叶状结构$\mathcal{F}$ 映到平凡叶状结构$\{\mathbb{T}^n \times \{b\}\}_{b \in B^n}$。

证明。我们遵循 [**LGMV08**] 中的步骤。在本例中，唯一需要额外验证的是，由 b^m-哈密顿向量场$^\sim$ 产生的叶状结构，与由 $F := (x, f_2, \dots, f_n)$ 的水平集所确定的叶状结构相同。在我们的情形下，$f_1 = a_0 \log(x) + \sum_{u=1}^{m-1} a_i \frac{1}{x^i}$，其中 $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_i \in C^\infty(x)$,$a_{m-1} = 1$。因此这两个叶状结构相同。接下来，如同在 [**LGMV08**], 中一样，我们取一个

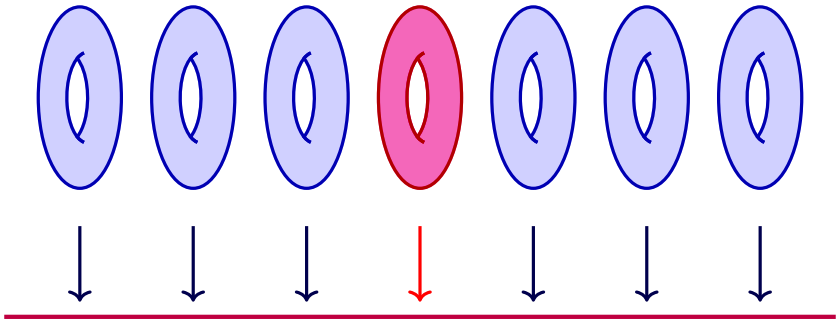

图 4. 刘维尔环面的纤维化：点 $p \in Z$ 所在的中间纤维以洋红色表示，相邻的刘维尔环面以蓝色表示。

在 M 上任取一个黎曼度量，由此定义一个典范投影 $\psi\colon U \to \tilde{\mathbf{F}}_m$。令 $\phi := \psi \times F$。我们得到交换图（图 3）。

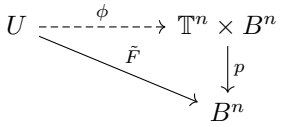

图 3. 构造 b^m-可积系统同构的交换图。

这为 b^m-可积系统提供了必要的等价关系。 □

4.5. b^m-辛流形上的作用-角坐标

在我们的某个刘维尔环面的邻域内，关于 b^m-辛结构的形式，我们只能假设它由 [**Sco16**] 中定义的洛朗级数给出。

也就是说，我们可以假设在 Z 的管状邻域 U 中

$$\omega = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{dx}{x^i} \wedge \pi^*(\alpha_i) + \beta,$$

其中 $\pi\colon U \to Z$ 是管状邻域到 Z 的投影，α_i 是 Z 上的闭光滑德拉姆形式，而 β 是 M 上次数为 2 的德拉姆形式。

在 [**BKM23, MM22**] 中，给出了轨道邻域内群作用的标准形。下面我们给出与该可积系统相关的环面作用的某个轨道邻域内可积系统的标准形。此定理比 [**MM22**] 中给出的 b^m-辛切片定理更精细，因为它还提供了有关第一积分的信息。

证明中的一个重要步骤是为该可积系统关联一个环面作用。当我们讨论相关的余切模型时，这种方法与群作用标准形之间的联系将更加明显。

定理 A（b^m-辛流形上的作用-角坐标）。设 $(M,\ x,\ \omega,\ F)$ 是一个 b^m-可积系统，其中 $F=(f_1=a_0\log(x)+\sum_{j=1}^{m-1}a_j\frac{1}{x^j},\ \ldots,f_n)$，且 a_j 的函数定义在 x 上。设 $m\in Z$ 是一个正则点，并假设由经过 m 的 X_{f_i} 生成的分布的积分流形是紧的。设 F_m 是经过 m 的刘维尔环面。那么，存在 F_m 的一个邻域 U 以及坐标 $(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_n,\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n):\mathrm{U}\ \to\mathbb{T}^n\times B^n$，使得：

(1) 我们可以找到一个等价可积系统 $F=(f_1=a_0'\log(x)+\sum_{j=1}^{m-1}a_j'\frac{1}{x^j},$ ……，$f_n)$，使得 f_1 的系数 a_0'，……，a_{m-1}' 为常数 $\in\mathbb{R}$，

(2)

$$\omega|_{\mathcal{U}}=\left(\sum_{j=1}^{m}c_j'\frac{c}{\sigma_1^j}d\sigma_1\wedge d\theta_1\right)+\sum_{i=2}^{n}d\sigma_i\wedge d\theta_i$$

其中 c 是模周期，且 $c_j'=-(j-1)a_{j-1}'$，此外

(3) 坐标 σ_1，……，σ_n 仅依赖于 $f_1,\ \ldots f_n$。

证明。该证明的思路是构造一个等价的 b^m可积系统，使其基本向量场在 $\mathbb{T}^n\times\{0\}$的某个邻域上定义一个 $\mathbb{T}^n$作用。显然，所有向量场 $X_{f_1},\ldots,X_{f_n}$ 都在每个刘维尔环面 $\mathbb{T}^n\times\{b\}$（其中 $b\in B^n$）上定义了一个环面作用，但这并不能保证它们的流在所有 $\mathbb{T}^n\times B^n$上定义一个环面作用。证明分为三个步骤。第一步是周期的一致化，即我们在 $\mathbb{T}^n\times\{0\}$的某个邻域上定义一个 $\mathbb{R}^n$作用，使得其在每一点处由核定义的格保持不变。由于周期是常数，这使得我们可以通过取商诱导出一个秩为 n 的实际环面作用：一个 $\mathbb{T}^n$ 作用。第二步是验证该作用确实是 b^m-哈密顿的。最后一步中，我们应用定理 4.22，得到 ω的表达式。

(1) 周期的统一化。

令 $\Phi^s_{X_F}$ 表示由作用量的哈密顿向量场共同生成的流：

$$\begin{array}{rcl}\Phi:\mathbb{R}^n\times(\mathbb{T}^n\times B^n) & \to & (\mathbb{T}^n\times B^n)\\ ((s_1,\ldots,s_n),(x,b)) & \mapsto & \Phi^{s_1}_{X_{f_1}}\circ\cdots\circ\Phi^{s_n}_{X_{f_n}}((x,b))\end{array}\tag{4.4}$$

这定义了一个在 $\mathbb{T}^n\times B^n$ 上的 $\mathbb{R}^n$-作用。对于每个 $b\in B^n$ 在单个轨道上$\mathbb{T}^n\times\{b\}$，该作用的核是 $\mathbb{R}^n$ 的离散子群。我们将这个核所给出的格记作 Λ_b。由于轨道是紧的，Λ_b 的秩是最大秩，即 n。这个格称为 $\mathbb{T}^n\times\{b\}$ 的周期格；根据群论中的标准论证，我们知道该格必须具有最大秩，商空间才能是环面。一般而言，我们不能假设 Λ_b 不依赖于 b。周期一致化的过程会以这样的方式修改作用 4.4：对所有 b，都有$\Lambda_b=\mathbb{Z}^n$。考虑以下哈密顿向量场$\sum_{i=1}^n k_iX_{f_i}$。生成该哈密顿向量场的 b^m-函数为：

$$k_1\left(a_0\log(x)+\sum_{j=1}^{m-1}a_j\frac{1}{x^j}\right)+\sum_{i=2}^{n}k_if_i$$

其中回顾一下， a_{m-1} 是恒等于 1 的常数。注意，乘在 $1/x^{m-1}$ 前面的系数是 k_1。根据命题 4.21 $k_1 = c$，模周期。在此情形下 $c = [\alpha_m]$。

因此，对于 $b \in B^{n-1} \times \{0\}$，格 Λ_b 包含于 $\mathbb{R}^{n-1} \times c\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^n$ 中。选取 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : B^n \to \mathbb{R}^n$，使得：

- $(\lambda_1(b) \ldots, \lambda_n(b))$ 是 Λ_b 的一组基，对所有 $b \in B^n$ 均成立，
- λ_i^n 沿着 $B^{n-1} \times \{0\}$ 按 m 阶消失，其中 $i < n$，且 λ_i 沿着 $B^{n-1} \times \{0\}$ 等于 c。

在前面的各点中， λ_i^j 表示 λ_i 的第 j 个分量。第一个条件可通过使用隐函数定理来满足。这是因为 $\Phi(\lambda, m) = m$ 关于 s 坐标是正则的。第二个条件自动成立，因为 $\Lambda_b \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times c\mathbb{Z}$。我们将一致化流定义为：

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{T}^n \times B^n) & \to & (\mathbb{T}^n \times B^n) \\ ((s_1, \ldots, s_n), (x, b)) & \mapsto & \Phi(\sum_{i=1}^n s_i \lambda_i, (x, b)) \end{array} \tag{4.5}$$

(2) $\mathbb{T}^n$作用是 b^m-哈密顿的。这一步的目标是找到b^m函数 σ_1，……， σ_n，使得 X_{σ_i} 是 $\mathbb{T}^n$作用 $Y_i = \sum_{j=1}^n \lambda_i^j X_{f_j}$的基本向量场。

利用 b^m-辛形式的嘉当公式，我们得到：

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{Y_i}\mathcal{L}_{Y_i}\omega & = & \mathcal{L}_{Y_i}(d(\iota_{Y_i}\omega) + \iota_{Y_i} d\omega) \\ & = & \mathcal{L}_{Y_i}(d(-\sum_{j=1}^n \lambda_i^j df_i)) \\ & = & -\mathcal{L}_{Y_i}(\sum_{j=1}^n d\lambda_i^j \wedge df_j) = 0 \end{array}$$

注意， λ_i^j 在 F 的水平集上为常数，因为 $\Phi(\lambda, m) = m$，且 F 的水平集在 Φ作用下保持不变。

回想一下，若 Y 是完备周期向量场，且 P 是一个双向量，并满足 $\mathrm{L}_Y\mathrm{L}_Y P = 0$，则 $\mathrm{L}_Y P = 0$。因此，向量场 Y_i 是泊松向量场。为了证明每个 $\iota_{Y_i}\omega$ 都有一个 ${}^{b^m}\mathsf{C}^\infty$原函数，我们将考察 $[\iota_{Y_i}\omega] = 0$ 在 b^m-上同调中的情形。

一方面，若 $i > 1$， $\iota_{Y_i}\omega$ 在 Z处消失。这是因为 Y_i 没有任何 $\partial/\partial Y$分量。

回顾 [**GMP14**] 中的命题 6：

Proposition 4.24. If $\omega \in^b \Omega(M)$ with $\omega|_Z = 0$, then $\omega \in \Omega(M)$.

类似地，对于 b^m-形式，我们有：

命题 4.25. 若 $\omega \in^{b^m} \Omega(M)$，且 $\omega|_Z$ 消失至 m 阶，则 $\omega \in \Omega(M)$。

因此，由于 $\iota_{Y_i}\omega$ 在 Z 处消失， b^m-形式 $\iota_{Y_i}\omega$ 确实是光滑的。现在我们可以应用标准的庞加莱引理；由于这些形式是闭的，它们局部恰当。这证明所有满足 $i > 1$ 的向量场 Y_i 确实都是哈密顿的。

另一方面， $\iota_{Y_1}\omega = c df_1$ 这一事实显而易见。

那么，由于我们有一个哈密顿环面作用，可以使用 [**GMPS17**], 中的引理 3.2，从而得到一个等价系统，使得 a_i均为常数，此外 $\mathrm{h}a_i', X\mathrm{i} = \alpha_i(X^\omega)$。注意，除以$a_{m-1}'$后，我们仍可假设 $a_{m-1}' = 1$ 与我们的记号一致，但接下来必须将 $f_1 \cdot c$ 相乘。

(3) 应用 Darboux-Carath´eodory 定理。

上述构造为作用坐标提供了一些候选项 $\sigma_1 = cf_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$。

现在应用 Darboux-Carath´eodory 定理，并将形式表示为关于 x的形式：

$$\omega = \left(\sum_{j=1}^{m} c\frac{c_j}{x^j} dx \wedge dq_1 \right) + \sum_{i=2}^{n} d\sigma_i \wedge dq_i.$$

由于向量场 $X_{\sigma_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}$ 是 $\mathbb{T}^n$-作用的基本向量场，流 4.5 在 q_i 坐标上给出了一个线性作用。

请注意，坐标系仅在 U 中定义。对于 U 外但可能位于 U 中某些点的轨道上的点，该坐标系未必有效。我们来看看如何将坐标图延拓到这些点。

定义 U′ 为所有与 U 相交的环面的并集。我们将看到，这些坐标在 U′ 上有效。

令 $\{p_i, \theta_j\}$ 为 $\{\sigma_i, q_j\}$ 的延拓。显然，$\{p_i, \theta_j\} = \delta_{ij}$，这是由其在达布－卡拉索多里定理中的构造方式所决定的。

为说明 $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$，我们取 X_{p_k} 的流，并将表达式延拓到整个 U′：

$$X_{p_k}(\{\theta_i, \theta_j\}) = \{\{\theta_i, \theta_j\}, p_k\} = \{\theta_i, \delta_{ij}\} - \{\theta_j, \delta_{jk}\} = 0.$$

ω 得以保持这一点显而易见，因为 X_{p_k} 是哈密顿向量场，因此它们保持 b^m-辛形式。此外，$t, \theta_1, p_2, \theta_2, \ldots, p_n, \theta_n$ 在 U′ 上线性无关，因此构成环面邻域中的一个坐标系。

□

注记 4.26。在证明中，我们已经看到，存在一个等价的可积系统，其中奇异函数的系数确实是常数。从现在起，在考虑 b^m-可积系统时，我们将作此假设。

注记 4.27。借助去奇异化变换，我们可以得到折叠流形的作用-角坐标定理，就像第 3 部分中针对折叠辛流形的 KAM定理所做的那样。这个折叠作用-角变量定理是 [**CM22**] 中所得定理的一个特殊情形。

第 5 章

通过余切提升重述作用-角坐标

辛流形的作用-角定理（也称为作用-角坐标定理）可以用余切提升来重述。

回顾一下，给定任意流形上的李群作用，其余切提升作用自动是哈密顿的。考虑环面对自身的平移作用，可将该作用提升到其余切丛上，从而得到一个半局部标准形定理，即辛流形的 Arnold-Liouville-Mineur 定理。若现在将这一余切丛上的余切提升替换为到 b^m-余切丛上的提升，就能得到本章主要定理的半局部标准形。

让我们依照 [**KM17**]，回顾辛情形和 b-辛情形。

5.1. 辛几何中的余切提升与 Arnold-Liouville-Mineur

设 G 为一个李群， M 为任意光滑流形。给定群作用ρ： $G \times M \longrightarrow M$，我们将其在 T^*M上的作用定义为余切提升： $\hat{\rho}_g := \rho^*_{g^{-1}}$ ，其中 $g \in G$。于是我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{\hat{\rho_g}} & T^*M \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{\rho_g} & M \end{array}$$

图1. 构造 b^m-可积系统同构的交换图。

其中， π是从 T^*M到 M的典范投影。

余切丛 T^*M 是一个辛流形，其带有由刘维尔一形式 $\omega = -d\lambda$的微分给出的正合辛形式。刘维尔一形式可以内蕴地定义为:

$$\langle \lambda_p, v \rangle := \langle p, (\pi_p)_*(v) \rangle \tag{5.1}$$

其中 $v \in T(T^*M)$ $p \in T^*M$。

一个标准的论证（例如参见 [**GS90**]）表明，余切提升 $\hat{}\rho$是哈密顿的，其动量映射 $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ 由下式给出

$$\langle \mu(p), X \rangle := \langle \lambda_p, X^{\#}|_p \rangle = \langle p, X^{\#}|_{\pi(p)} \rangle,$$

其中 $p \in T^*M$, X是李代数 $\mathfrak{g}$中的一个元素，并且我们用同一个符号$X^\#$ 表示由作用在 T^*M或 M上的作用生成的 X 的基本向量场。这一构造称为**余切提升**。

在流形 M 是环面 $\mathbb{T}^n$ 且群 $\mathbb{T}^n$通过平移作用的特殊情形下，我们得到如下显式结构：令 θ_1，.....，θ_n为 $\mathbb{T}^n$ 上的标准（S^1值）坐标，并令

$$\underbrace{\theta_1, \dots, \theta_n}_{=:\theta}, \underbrace{t_1, \dots, t_n}_{=:t} \tag{5.2}$$

作为 $T^*\mathbb{T}^n$上的相应坐标图，也就是说，我们将坐标 (5.2) 与余切向量 $\sum_i t_i d\theta_i \in T^*_\theta \mathbb{T}^n$对应。刘维尔一形式在这些坐标下为

$$\lambda = \sum_{i=1}^n t_i d\theta_i$$

其负微分是 $T^*\mathbb{T}^n$上的标准辛形式:

$$\omega_{can} = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dt_i. \tag{5.3}$$

记 τ_β 为 $\mathbb{T}^n$上由 $\beta \in \mathbb{T}^n$ 给出的平移，其在 $T^*\mathbb{T}^n$ 上的提升为

$$\hat{\tau}_\beta : (\theta, t) \mapsto (\theta + \beta, t).$$

相对于典范辛形式，提升作用的动量映射 μ_{can}: $T^*\mathbb{T}^n \to \mathfrak{t}^*$ 为

$$\mu_{can}(\theta, t) = \sum_i t_i d\theta_i, \tag{5.4}$$

其中，右侧的 θ_i 显然可视为 $\mathfrak{t}^*$ 中的元素。更简单地，若选取 $\mathfrak{t}$ 的标准基 $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$, 并据此将 $\mathfrak{t}^*$ 与 $\mathbb{R}^n$ 等同，则动量映射就是 $T^*\mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ 到第二个分量的投影。注意， μ 的分量自然在 $T^*\mathbb{T}^n$ 上定义了一个可积系统。

我们可以用辛余切模型的语言重新表述 Arnold-Liouville-Mineur 定理:

定理 5.1。 设 $F = (f_1, ..., f_n)$ 是辛流形(M, ω)上的一个可积系统。则在正则刘维尔环面附近的半局部范围内，该系统等价于余切模型$(T^*\mathbb{T}^n)_{can}$ 在 $T^*\mathbb{T}^n$ 的零截面$(T^*\mathbb{T}^n)_0$ 的某个邻域上的限制。

5.2. b^m-辛流形的情形

我们先介绍环面作用的扭曲 b^m-余切模型。该模型还有额外的不变量：临界集连通分支的模向量场，以及相关环面作用的模权。考虑赋予标准坐标 (θ, t) 的 $T^*\mathbb{T}^n$，其中 $\theta \in \mathbb{T}^n, t \in \mathbb{R}^n$，并再次考虑由环面 $\mathbb{T}^n$ 上的平移提升所诱导的 $T^*\mathbb{T}^n$ 上的作用。现在，我们将把这一作用视为关于某个适当的 b^m- b^m 辛形式的哈密顿作用。类比经典的刘维尔一形式，我们定义如下非光滑一形式，它在超曲面 $Z = \{t_1 = 0\}$ 之外有定义:

$$\left(cc_1 \log|t_1| + \sum_{i=2}^{m} cc_i \frac{t_1^{-(i-1)}}{-(i-1)}\right) d\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} t_i d\theta_i.$$

对该形式求微分后，我们得到 $T^*\mathbb{T}^n$ 上的一个 b^m-辛形式，称之为 $T^*\mathbb{T}^n$ 上的**扭曲 b^m-辛形式**（符号取反后），其不变量为 $(cc_1, \ldots, cc_m)$：

$$\omega_{tw,c} := \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \frac{c}{t_1^j} dt_1 \wedge d\theta_1\right) + \sum_{i=2}^{n} dt_i \wedge d\theta_i, \tag{5.5}$$

其中 c 是模周期。提升作用的动量映射为

$$\mu_{tw,q_0,\ldots,q_{m-1}} := (q_0 \log|t_1| + \sum_{i=2}^{m} q_i t_1^{-(i-1)}, t_2, \ldots, t_n), \tag{5.6}$$

其中我们将 $\mathfrak{t}^*$ 视为 $\mathbb{R}^n$，并将 $c_j = -$ 视为 $(j-1)$ q_{j-1}。

我们将此提升作用与 b^m-辛形式 5.5 一起称为模周期为 c、不变量为 $(c_1, \ldots c_m)$ 的**扭曲 b^m-余切提升**。注意，动量映射的各分量在 $(T^*\mathbb{T}^n, \omega_{tw,\,(cc_1,\ldots,cc_m)})$ 上定义了一个 b^m-可积系统。

扭曲 b^m-余切提升的模型使我们能够以下述方式表述 b^m-可积系统的作用角坐标定理：

定理5.2。设 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ 是 b^m-辛流形 (M, ω) 上的一个 b^m-可积系统。那么，在正则刘维尔环面 $\mathbb{T}$ 周围半局部地，该系统等价于余切模型 $(T^*\mathbb{T}^n)_{tw,\,(cc_1,\ldots,cc_m)}$ 在 $(T^*\mathbb{T}^n)_0$ 的某个邻域上的限制，其中该环面位于 M 的临界超曲面 Z 内。这里，c 是包含 $\mathbb{T}$ 的 Z 连通分支的模周期，而常数 $(c_1, \ldots, c_m)$ 是与该可积系统及其相应环面作用相关的不变量。

第 3 部分

适用于 b^m-辛流形的 KAM定理

KAM定理阐释了可积系统在小扰动下的行为。更准确地说，它研究可积系统在作用-角坐标中，其哈密顿量受到小扰动时会如何响应。可积系统在作用-角坐标中的轨道可以看作环面上的线性轨道。KAM定理给出了一种方法，将这些原始轨道变换为某个变换后环面上的其他线性轨道。KAM定理指出，只要扰动足够小，大多数这类环面以及系统在这些环面上的线性解都会保留下来。

本部分将给出一个关于 b^m-辛流形的新 KAM 定理，并附有详细证明。本部分的第一章将介绍该定理。此外，我们还将用另外三章讨论其应用：

(1) 对 b^m-可积系统进行去奇异化。 我们提出一种方法，利用 [**GMW17**]中介绍的 b^m-辛流形去奇异化，从 b^m-可积系统构造标准的光滑可积系统。这个去奇异化的可积系统是唯一确定的。**(2) 在 b^m-辛流形上对 KAM 定理进行去奇异化**。 本节将 b^m-可积系统的去奇异化与适用于 b^m-辛流形的 KAM 定理结合起来，从而推导出原有的 KAM 定理，以及一个全新的、适用于折叠辛形式的 KAM 定理。**(3) 在天体力学中的潜在应用**。 我们概述天体力学中的一系列示例，这些示例为研究提供了启发，其中正则化变换会产生 b^m-辛形式。我们还讨论微扰理论在这一框架下的一些潜在应用。

第 6 章

一个新的 KAM 定理

本章旨在构建适用于 b^m-辛流形且采用 b^m-可积系统的 KAM 理论。本章的核心是构造恰当的论述，并证明 b^m-辛流形上的 KAM 定理的等价版本。

本章分为不同的部分:

（1）**证明结构**。本节将介绍主要定理的正式陈述和证明中将要出现的主要思想。该定理的思想是构造一个由b^m-辛同胚组成的序列，使其极限将哈密顿量变换为只依赖于作用坐标的形式。（2）**技术结果和定义**。本节介绍一些对于主要定理的证明至关重要的技术结果和定义。（3）**关于 b^m-辛流形上的 KAM定理**。本节给出本章主要结果的陈述和证明。证明分为 6 个部分。第一部分定义将用于定义 b^m-辛同胚序列的参数。第二部分精确地构造这一 b^m-辛同胚序列。第三部分说明，在每一步中，变换后的哈密顿函数的频率映射序列都收敛。第四部分说明 b^m-辛同胚序列

ms

收敛。在第五部分，我们得到了关于原始扰动下轨道稳定性的结果。在第六部分，我们给出了界，以说明不变环面与未扰动时的环面有多接近。最后，我们给出了不变环面集合测度的一个界。

6.1. 证明结构

我们首先将研究简化为扰动不是 b^m-函数，而是解析函数的情形。这是因为，任何纯奇异扰动都只影响模向量场方向上的分量，因而可以轻易控制。

证明的思路与经典KAM理论的情形非常相似。我们希望构造一个微分同胚，使变换后的哈密顿量只依赖于作用坐标。但无法一步就构造出这个微分同胚。和经典情形一样，我们要做的是构造一列微分同胚，使哈密顿量中依赖角变量的部分在每一步都减小。其思路是在每一步去掉其傅里叶表达式中的前 K 项，同时使 K 快速增大。具体做法是

假设该微分同胚是由某个哈密顿函数生成的流在时间 1 时得到的。这样便可以结合李级数与傅里叶级数，求出生成该微分同胚的哈密顿函数的表达式。最终的微分同胚将是每一步得到的所有微分同胚的复合。与经典情形一样，证明中的主要难点之一是证明这些微分同胚收敛，并给出其范数的一些界。

我们还要指出，对于我们的 b^m-辛设置，所考虑的微分同胚在 m 阶以内保持临界集的定义函数不变，这一点在后文中将起到重要作用。还需特别注意，任何由 b^m-函数给出的扰动都无法变换临界集。

接下来，我们给出一些技术性定义和结果。我们定义进行所有估计时将要使用的范数，并为定理的证明和陈述设定记号。我们定义 b^m-辛流形的临界集邻域的非共振概念，研究所有可能的非共振向量所构成的集合，并陈述归纳引理；该引理为我们构造的微分同胚序列的每一步提供估计和构造方法。

经过以上讨论，我们便可以恰当地陈述 b^m-版本的 KAM 定理。与经典KAM定理的一个重要区别在于，我们必须保证在 Z 处，非共振向量的集合不会变成整个频率集合。这个条件可以理解为：扰动小于某个常数乘以模周期的倒数。

按照 [**DG96**]中的结构，定理的证明分为六个步骤。由于每一步都会用到归纳引理，我们首先定义将要应用该引理的参数和集合。随后，我们验证确实可以应用该引理，并为引理所得结果给出一些额外估计。接着，我们证明频率向量序列收敛。对于正则变换序列，我们也进行同样的处理。然后，我们对最终微分同胚各分量的大小给出一些界。接下来，我们刻画在扰动下仍然存在的环面。最后，我们对这些环面构成的集合的测度给出一些估计。

请注意，我们的 b^m-KAM定理在若干方面改进了 [**KMS16a**]中的结果。首先，它适用于 b^m-辛结构，而不仅仅适用于b-辛结构。此外，我们还给出了一些 [**KMS16a**],中未曾得到的估计。这些估计在临界集 Z的邻域内有意义，而 [**KMS16a**]仅研究了 Z处的行为。最后，我们所考虑的扰动类型要一般得多，因为我们不对扰动的形式施加任何条件，只对其大小作出限制。

6.1.1. 将问题化为解析扰动。在标准 KAM 理论中，我们假设有一个仅依赖于作用坐标的解析哈密顿量 $h(I)$，并在其上加入一个小的解析扰动 $R(\phi,\ I)$。这个受扰系统称为近可积系统。接着，寻找˜ ˜一个新的坐标系，使得 $h(I) + R(\phi,\ I) = h(I)$，其中大多数拟周期轨道得以保留，并且可以通过坐标变换映射到未受扰的拟周期轨道。

在我们的设定中，我们可以假设 $h(I)$不是解析的，而是一个 b^m函数。此外，扰动 $R(\phi, I)$也可以视为一个 b^m函数。在

下文中，我们将论证，不失一般性地，实际上可以假设该扰动是解析的。

更精确地说。设 (M, x, Z, ω, F) 是一个带有b^m 可积系统 F 的 b^m流形。考虑 Z 某个邻域上的作用-角坐标。那么我们可以假设其表达式为：

$$\omega = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}\right) dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{i=2}^{n} dI_i \wedge d\phi_i, \text{ and}$$

$$F = (q_0' \log I_1 + \sum_{i=1}^{m-1} q_i' \frac{1}{I_1^i} + h(I), f_2, \ldots, f_n)$$

其中 $h, f_2, \ldots, f_n$ 均为解析函数。

设我们系统的哈密顿函数为动量映射 $\hat{} \; h' = q_0' \log I_1 + \sum_{i=1}^{m-1} q_i' \frac{1}{I_1^i} + h = \zeta' + h$ 的第一个分量，其中 $\zeta' := q_0' \log I_1 + \sum_{i=1}^{m-1} q_i' \frac{1}{I_1^i}$。注意， $d\zeta' = \sum_{i=1}^{m} \hat{} q_i' \frac{1}{I_1^i}$，其中 $\hat{} q_i' = -(i-1) q_{i-1}'$。注意，根据上一章的结果，$c_j / \hat{} q_j' = \mathrm{K}$（模周期）。特别地，$c_m / \hat{} q_m' = \mathrm{K}$。

由下式给出的哈密顿系统 $\hat{h'}$ 可以通过 $\phi = \phi_0 + u't, I = I_0$轻松求解，其中 u' 将在后续章节中定义。现在考虑该系统的一个扰动：$\hat{} H' = \hat{} h'(I) = \hat{} R(I, \phi)$，其中 $\hat{} R$ 是一个 b^m-函数 $\hat{} R(I, \phi) = R_\zeta(I_1) + R(I, \phi)$，其中 $R_\zeta(I_1) = (r_0 \log I_1 + \sum_{i=1}^{m-1} r_i \frac{1}{I_1^i})$ 是奇异部分。接着，我们可以分别考虑扰动 $R_\zeta(I_1)$ 和 $R(I, \phi)$。这样，我们可以将 $\hat{} R_\zeta(I)$ 视为 $h'(I)$ 的一部分。于是得到一个新的哈密顿量

$$\hat{h}(I) = (q_0' + r_0) \log I_1 + \sum_{i=1}^{m-1} (q_i' + r_i) \frac{1}{I_1^i} + h = q_0 \log I_1 + \sum_{i=1}^{m-1} q_i \frac{1}{I_1^i} + h.$$

现在，我们不再有恒等式 $\mathrm{K} \hat{} q_j' = c_j$，而是有 $\mathrm{K}(\hat{} q_j - \hat{} r_j) = c_j$，这意味着 $\mathrm{K}\left(1 - \frac{\hat{r}_j \hat{} q_j'}{\hat{r}_j}\right) = \frac{c_j}{q_j \hat{}}$。特别是

$$\mathcal{K}\left(1 - \frac{\hat{r}_m}{\hat{q}_m' + \hat{r}_m}\right) = \frac{c_m}{\hat{q}_m}$$

定义 $\mathrm{K}' = \mathrm{K}\left(1 - \frac{\hat{r}_m}{\hat{} q_m' + \hat{r}_m}\right)$。因此，从现在起我们假设 $\hat{} \; h = q_0 \log I_1 + \sum_{i=1}^{m-1} q_i \frac{1}{I_1^i} + h$，扰动 $R(\phi, I)$ 是解析的，并且满足条件 $\frac{c_m}{\hat{q}_m} = \mathrm{K}'$。注意，仅含奇异扰动的这个系统仍然很容易求解，方法与加入该扰动之前的系统相同。

6.1.2. 寻找一个 b^m-辛同胚。 假设我们有一个哈密顿函数 $H = \hat{} h(I) + R(\phi, I)$，它以作用-角坐标表示。其中，$\hat{} h(I)$ 是 b^m-可积系统的奇异分量，即

$$\hat{h}(I) = h(I) + q_0 \log(I_1) + \sum_{i=1}^{m-1} q_i \frac{1}{I_1^i}, \tag{6.1}$$

其中 $h(I)$ 是解析的[1]。还假设这些坐标中的 b^m-辛形式 ω^2 表示为：

$$\omega = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}\right) dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{i=2}^{n} dI_i \wedge d\phi_i. \tag{6.2}$$

最后，频率向量的表达式为：

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial I} = \frac{\partial (h(I) + q_0 \log(I_1) + \sum_{i=1}^{m-1} q_i \frac{1}{I_1^i})}{\partial I}$$

$$= \left(u_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{q}_i}{I_1^i}, u_2, \ldots, u_n\right),$$

其中，若 $i \neq 0$，则有 $\hat{q}_1 = q_0$ 和 $\hat{q}_{i-1} = -iq_i$。

目标是遵循通常的 KAM构造步骤（这些步骤深受 [**DG96**] 的启发），以 $\hat{\omega}$ 替代标准辛形式，并将 b^m-函数 h 作为哈密顿量。

注记 6.1. 构造的目标是找到一个微分同胚[2]（实际上是一个 b^m-辛同胚） ψ，使得 $H \circ \psi = h(I)$。这是通过归纳进行的：取 $H \circ \psi = H \circ \phi_1 \circ \ldots \circ \phi_q \circ \ldots$，同时尝试在每一步减小 $R(\phi, I)$。

让我们聚焦于单独的一步
回顾经典公式：

引理6.2。见 [**DG96**]。

$$f \circ \phi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} L_W^j f, \quad L_W^j f = \{L_W^{j-1} f, W\}$$

其中 W 是生成流 ϕ_t的哈密顿量，而 $\{\cdot,\cdot\}$ 是相应的泊松括号。

We will denote $r_k(H, W, t) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{t^j}{j!} L_W^j H$.

[1]如果选择动量映射的另一个分量作为系统的哈密顿量，结论仍然成立：假设$\hat{h}(I) = h(I)$，即可重复这些计算。[2]在经典KAM理论中，ω 用于表示频率向量 $\frac{\partial h}{\partial I}$。我们需要用 ω 表示b^m-辛形式，因此将用 u 表示频率向量。

$$
\begin{aligned}
H\circ\phi = H\circ\phi|_{t=1} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\,L_W^j\underbrace{H}_{\hat{h}+R}\Big|_{t=1}\\
&= \hat{h}+R\{\hat{h}+R,W\}+r_2(H,W,1)\\
&= \hat{h}+R+\{\hat{h},W\}+\{R,W\}+r_2(\hat{h},W,1)\\
&\quad +r_2(R,W,1)\\
&= \hat{h}+\underbrace{R+\{\hat{h},W\}}_{\substack{\text{We want to cancel}\\ \text{this term as}\\ \text{fast as we can}}}+r_2(\hat{h},W,1)+r_2(R,W,1)
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

我们希望得到 $\{\hat{h},W\}+R_{\le k}=0$，等价地，$\{W,\hat{h}\}=R_{\le k}$，其中 $R_{\le k}$ 表示 R 截至 K阶的傅里叶表达式:

$$R_{\le k}=\sum_{\substack{k\in\mathbb{R}^n\\ |k|_1\le K}}R_k(I)e^{ik\cdot\phi}$$

让我们施加条件 $\{W,\hat{h}\}=R_{\le K}$。写出与 b^m-辛形式相关的泊松括号表达式。

$$
\begin{aligned}
\{W,\hat{h}\} &= \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^m\frac{c_j}{I_1^j}}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_1}\frac{\partial\hat{h}}{\partial I_1}-\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial\hat{h}}{\partial\phi_1}\right)\\
&\quad+\sum_{i=2}^n\left(\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\frac{\partial\hat{h}}{\partial I_i}-\frac{\partial W}{\partial I_i}\frac{\partial\hat{h}}{\partial\phi_i}\right)
\end{aligned}
$$

由于 $\hat{h}$ 只依赖于 I，$\frac{\partial h}{\partial\phi_i}=0$，对所有 i 都成立。此外，b^m-函数的奇异部分只依赖于 I_1，因此它关于其他变量的导数也为 0。利用 $\frac{\partial h}{\partial I}=u+\sum_{i=1}^m\hat{}\frac{q_i}{I_1^i}$，前面的表达式可以简化为:

$$\{W,\hat{h}\} = \left(\frac{u_1+\sum_{i=1}^m\frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{j=1}^m\frac{c_j}{I_1^j}}\right)\frac{\partial W}{\partial\phi_1}+\sum_{i=2}^n\frac{\partial W}{\partial\phi_i}u_i$$

为了进一步展开该表达式，我们将 W 按其傅里叶表达式展开：$W=\sum_{k\in\mathbb{R}^n}W_k(I)e^{ik\phi}$。傅里叶展开保留到 K 阶，因为只需使这些表达式在 K 阶以内相等即可。用这种记号，条件变为:

$$\{W,\hat{h}\}_{\le K} = \left(\frac{u_1+\sum_{i=1}^m\frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{j=1}^m\frac{c_j}{I_1^j}}\right)\frac{\partial}{\partial\phi_1}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{R}^n\\ |k|_1\le K}}W_k(I)e^{ik\phi}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{j=2}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{R}^n \\ |k|_1 \le K}} W_k(I) e^{ik\phi} \right) \\
&= \left(\frac{u_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}} \right) \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{R}^n \\ |k|_1 \le K}} W_k(I) e^{ik\phi} ik_1 \right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n} u_j \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{R}^n \\ |k|_1 \le K}} W_k(I) e^{ik\phi} ik_j \right) \\
&= \sum_{\substack{k \in \mathbb{R}^n \\ |k|_1 \le K}} W_k(I) e^{ik\phi} \cdot \left(ik_1 \left(\frac{u_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}} \right) + \sum_{j=2}^{n} ik_j u_j \right) \\
&= R_{\le K}
\end{aligned}
$$

然后，可以逐项施加条件，使方程两边相等:

$$
\begin{aligned}
W_k(I) &= R_k(I) \frac{1}{i \left(k_1 \left(\frac{u_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}} \right) + \sum_{j=2}^{n} k_j u_j \right)} \\
&= R_k(I) \frac{1}{i \left(k_1 \left(\frac{u_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}} \right) + \bar{k}\bar{u} \right)},
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

其中我们采用了记号 $\sum_{j=2}^{n} k_j u_j = \bar{k}\bar{u}$。

注记 6.3。注意，当 $k = \vec{0}$ 时，表达式 6.4 没有意义，因此 $\{W,\ h\}_0 = R_0$[3] 无法求解。令 $W_0(I) = 0$，则 $\{h,\ W\}_{\le K} = R_{\le K} - R_0$。

将上述结果代入方程 6.3，可得:

$$H \circ \phi = \hat{h} + R_0 + R_{\ge K} + r_2(\hat{h}, W, 1) + r_1(R, W, 1)$$

通过这一构造，可以得到微分同胚 ϕ 。但这只是许多步骤中的第一步。若 q 表示该过程的迭代次数，一般而言，我们得到:

[3]傅里叶级数的零阶项可以看作函数的角平均

$$H^{(q)} = H^{(q-1)} \circ \phi^{(q)} \quad = \quad \hat{h}^{(q-1)} + R_0^{(q-1)} + R_{\geq K}^{(q-1)} + r_2(h^{(q-1)}, W^{(q)}, 1) + r_1(R^{(q-1)}, W^{(q)}, 1), \tag{6.5}$$

并且在每一步：

$$\begin{cases} \hat{h}^{(q)} = \hat{h}^{(q-1)} + R_0^{(q-1)} \\ R^{(q)} = R_{>K}^{(q-1)} + r_2(\hat{h}^{(q-1)}, W^{(q)}, 1) + r_1(R^{(q-1)}, W^{(q)}, 1) \end{cases} \tag{6.6}$$

6.1.3. 关于定义函数在

b^m-**辛同胚**。注意，由于我们考虑的是 b^m-流形，因此只需考虑到 m 阶的 I_1，见 [**Sco16**]。谈到定义函数时，我们关注的是 $[I_1]$，以及其截至 m 阶的喷流。根据定义，b^m-映射将 I_1 保持到 m 阶，而 b^m-向量场 X 满足：对于 $g \in \mathsf{C}^\infty(M)$，$\mathrm{L}_X(I_1) = g \cdot I_1^m$。

引理 6.4。设 ϕ_t 是 X 的一个 b^m-向量场的积分流，则 ϕ_t 是一个 b^m-映射。

证明。我们希望

$$I_1 \circ \phi_t = I_1 + I_1^m \cdot g$$

对于某个 $g \in \mathsf{C}^\infty(M)$ 成立。我们将使用 6.2。

$$I_1 \circ \phi_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} L_X^j I_1 = I_1 + \mathcal{L}_X(I_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{t^j}{j!} L_X^j I_1$$

$$= I_1 + I_1^m + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{t^j}{j!} L_X^j I_1.$$

另一方面，让我们用归纳法证明 $L_X^k I_1 = g^{(k)} I_1^m$。第一种情形显然，假设情形 k 成立，并证明情形 $k+1$。

$$\begin{aligned} L_X^{k+1} I_1 &= \{L_X^k I_1, X\} \\ &= \{g^{(k)} I_1^m, X\} \\ &= (L_X g^{(q)}) I_1^m + g^{(k)} \cdot m I_1^{m-1} L_X I_1 \\ &= (L_X g^{(k)} + g^{(k)} \cdot m \cdot I_1^{m-1} \cdot g) I_1^m \\ &= g^{(k+1)} I_1^m \end{aligned}$$

其中 $g^{(k+1)} = L_X g^{(k)} + g^{(k)} \cdot m \cdot I_1^{m-1} \cdot g$。

□

引理 6.5。某个光滑哈密顿函数h的哈密顿向量流是一个 b^m-向量场。

证明。在 Z 的每一点，以下恒等式成立 $\mathrm{L}_{X_h} I_1 = I_1^m \frac{\partial f}{\partial \phi_1}$。该结论可推广到 Z 的一个邻域。□

注意到，结合前两个结果可知，函数的哈密顿流保持 I_1，直到 m 阶。

6.2. 技术结果

对于函数的非奇异部分，我们将考虑 $\mathbb{T} \times G$, $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的解析函数。处理这些函数最简单的方法，是将它们视为某个复邻域上的全纯函数。下面正式定义这个邻域。

$$\mathcal{W}_{\rho_1}(\mathbb{T}^n) := \{\phi : \Re\phi \in \mathbb{T}^n, |\Im\phi|_\infty \le \rho_1\},$$
$$\mathcal{V}_{\rho_2}(G) := \{I \in \mathbb{C}^n : |I - I'| \le \rho_2 \text{ for some } I' \in G\},$$
$$\mathcal{D}_\rho(G) := \mathcal{W}_{\rho_1}(\mathbb{T}^n) \times \mathcal{V}_{\rho_2}(G),$$

其中 $|\cdot|_\infty$ 表示最大范数，$|\cdot|_2$ 表示欧几里得范数 m.
现在有必要明确这些集合上将要使用的范数。

定义 6.6. 设 f 是一个作用函数（仅依赖于 I-坐标），F 是一个作用向量场。

$$|f|_{G,\eta} := \sup_{I\in\mathcal{V}_\eta(G)} |f(I)|, \quad |f|_G := |f|_{G,0}$$
$$|F|_{G,\eta,p} := \sup_{I\in\mathcal{V}_\eta(G)} |F(I)|_p, \quad |F|_{G,\eta} := |F|_{G,\eta,2}$$

现在，假设 $f(I,\ \phi)$ 是一个作用-角变量函数，其傅里叶展开为 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k(I)e^{ik\cdot\phi}$，并且 F 是一个作用-角变量向量场。

$$|f|_{G,\rho} := \sup_{(\phi,I)\in\mathcal{D}_\rho(G)} |f(I)|, \quad \|f\|_{G,\rho} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f_k|_{G,\rho_2} e^{|k|_1\rho_1}$$
$$|F|_{G,\rho,p} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |F_k|_{G,\rho_2,p} e^{|k|_1\rho_1}, \qquad \|F\|_{G,\rho} = \|F\|_{G,\rho,2}$$

引理 6.7（柯西不等式）。

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2),1} \le \frac{1}{e\delta_1}\|f\|_{G,\rho}$$
$$\left\|\frac{\partial f}{\partial I}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2-\delta_2),\infty} \le \frac{1}{\delta_2}\|f\|_{G,\rho}$$

定义 6.8。如果 $Df = (\frac{\partial f}{\partial \phi},\ \frac{\partial f}{\partial I})$,

$$\|Df\|_{G,\rho,c} := \max\left(\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\|_{G,\rho,1}, c\|\frac{\partial f}{\partial I}\|_{G,\rho,\infty}\right)$$

定义 6.9。为简化记号，我们定义：

$$\mathcal{A}(I_1) = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{\hat{q}_j}{I_1^j}}{\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}(I_1) = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}}.$$

注记 6.10。采用这一记号，方程 6.4 可写为：

$$W_k(I) = \frac{R_k(I)}{i(k_1\mathcal{B}(I_1)u_1 + \bar{k}\bar{u} + k_1\mathcal{A}(I_1))}$$

注意，当分母不为零时，$\mathsf{A}(I_1)$ 和 $\mathsf{B}(I_1)$ 是解析的（在复扩展定义域上全纯）。我们可以通过沿 I_1 方向缩小定义域 G，假设这种情况不会发生。特别要注意，当 $I_1 \to 0$ 时，$\mathsf{A}(I_1) \to \hat{}q_m/c_m = 1/\mathrm{K}'$ 模周期的倒数，而 $\mathsf{B}(I_1) \to 0$。这样，$\mathsf{A}(I_1)$ 和 $\mathsf{B}(I_1)$ 的范数有界且定义良好。我们分别将这些范数记为 $K_\mathcal{A}$ 和 $K_\mathcal{B}$。此外，由于

A(I_1) 和 B(I_1) 是解析的，因此它们的导数也有界，我们将这些导数的范数记为 $K_{\mathcal{A}'}$ 和 $K_{\mathcal{B}'}$。

为进一步简化下述计算中的记号，我们引入如下定义：

定义 6.11。

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \bar{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

注记 6.12。使用这一记号，方程 6.4 可写为：

$$W_k(I) = \frac{R_k(I)}{i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1))} \tag{6.7}$$

定义 6.13。固定 ω，取一个 b^m-辛形式（如方程 6.2 中所示），以及一个 $\hat{}h$ b^m-函数（如方程 6.1 中所示）作为哈密顿量。给定一个整数 K 和$\alpha > 0$， $F \subset \mathbb{R}^n$ （或 $\mathbb{C}^n$），若频率空间关于 $(c_1, \ldots, c_m)$ 和 $(\hat{}q_1, \ldots, \hat{}q_m)$ 是 α， K-非共振的，则

$$|k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)| \geq \alpha, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |k|_1 \leq K, \forall u \in F.$$

我们将使用记号 α， K， c， $\hat{}q$-非共振。

注记 6.14. 非共振条件是在 $u = \partial h/\partial I$ 上建立的，而不是在 $\hat{}u = \partial\hat{}h/\partial I$ 上，因为我们的非共振条件已经考虑了奇异性。这样，我们就可以利用 u 的解析性。

注记 6.15. 如果 $\left|\frac{\partial u}{\partial I}\right|_{G,\ \rho_2}$ 有界于 M'，那么 $\left|\frac{\partial}{\partial I}\left(\bar{}\mathrm{B}u + \bar{}\mathrm{A}\right)\right|_{G,\ \rho_2}$ 也有界：

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{\partial}{\partial I}\left(\bar{\mathcal{B}}u + \bar{\mathcal{A}}\right)\right|_{G,\rho_2} &\leq \left|\tfrac{\partial \bar{\mathcal{B}}}{\partial I}u + \bar{\mathcal{B}}\tfrac{\partial u}{\partial I} + \tfrac{\partial \bar{\mathcal{A}}}{\partial I}\right|_{G,\rho_2} \\ &\leq K_{\mathcal{B}'}|u|_{G,\rho_2} + K_{\mathcal{B}}M' + K_{\mathcal{A}} =: M. \end{aligned} \tag{6.8}$$

注记 6.16. 考虑标准 KAM 定理时，频率向量 u 是相关的，因为未扰动问题的哈密顿方程的解具有如下形式：

$$I = I_0, \quad \phi = \phi_0 + ut.$$

让我们看看在我们的 b^m-KAM 定理中，什么起着 u 的作用。让我们求出 $\iota_{X_{\hat{h}}}\omega = dh$ 的解的 $\hat{}$ 坐标表达式，其中 ω 是作用-角坐标下的 b^m-辛形式。

$$X_{\hat{h}} = \dot{I}_1\frac{\partial}{\partial I_1} + \ldots + \dot{I}_n\frac{\partial}{\partial I_n},$$

其中， I_1，……， I_n 是我们希望求出的函数。

$$d\hat{h} = \left(\sum_{j=1}^{m} \hat{q}_i \frac{1}{I_1^j}\right) dI_1 + dh,$$

因此，

$$X_{\hat{h}} = \Pi(d\hat{h}, \cdot) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}} \frac{\partial}{\partial \phi_i} + X_h.$$

因此 $\phi = \phi_0 + (\mathrm{B}u + \mathrm{A}\overbrace{\quad\quad})t$。所以，我们要$u'$关注的频率向量将是 u'，而不是 $\hat{u} = \frac{\partial}{\partial I}\hat{h}$。

引理 6.17. 如果 u 是从 $\mathcal{G}$ 到其像的单射，那么在 Z的某个邻域内，$u' = \mathcal{B}u + \mathcal{A}$ 也是从 $\mathcal{G}'$ 到其像的单射；而在 Z 处，它是$\hat{}$的投影，其中第一坐标被映射到 $\frac{q_m}{c_m} = 1/\mathcal{K}'$ 模周期的倒数，且 $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$。

证明。因为

$$u' = \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1^j}} u_1 + \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{\hat{q}_j}{I_1^j}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{I_1}}, u_2, \ldots, u_n \right),$$

并且 B 在 $I_1 = 0$之外可逆，必要时沿第一维缩小 G 后，该映射是单射。但在临界集 $\{I_1 = 0\}$处， u' 是 u 的投影，其中第一个分量被映射到常数值 $\frac{q_m}{c_m} = \frac{1}{\mathcal{K}}$。□

引理 6.18. 如果 $u(G)$ 是 $\alpha, K, c, \hat{q}$-非共振，那么 $u(\mathcal{V}_{\rho_2}(G))$ 是 $\frac{\alpha}{2}, K, c, \hat{q}$-非共振，假设 且 $\left|\frac{\partial u}{\partial I}\right|_{G,\rho_2} \leq M,$

证明。固定 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，我们希望将 $|k\mathrm{B}(I_1)v + k\mathrm{A}(I_1)|$ 界定为关于 v 上的函数 $v \in u(\mathrm{V}_{\rho_2}(G))$。给定 $v \in u(\mathrm{V}_{\rho_2}(G))$，我们想知道到某个 $v' \in u(G)$ 的距离是否存在界。

$v \in u(\mathrm{V}_{\rho_2}(G)) \Rightarrow v = u(x)\ x \in \mathrm{V}_{\rho_2}(G) \Rightarrow \exists y \in G$ 使得 $|x - y| \leq \rho_2$.取 $v' = u(y)$。

$$|v - v'| \leq |x - y| \left|\frac{\partial u}{\partial I}\right|_{G,\rho_2} \leq \rho_2 M' \leq \rho_2 M/K_{\mathcal{B}} \leq \frac{\alpha}{2MK} M/K_{\mathcal{B}} = \frac{\alpha}{2KK_{\mathcal{B}}}.$$

第三个不等式中用到了方程 6.8。

$$\begin{aligned} |k_1\mathcal{B}(I_1)v_1 + \bar{k}\bar{v} + k_1\mathcal{A}(I_1)| &\geq \underbrace{|k_1\mathcal{B}(I_1)v_1' + \bar{k}\bar{v}' + k_1\mathcal{A}(I_1)|}_{\geq \alpha} \\ &\quad - |k_1\mathcal{B}(I_1)(v_1 - v_1') + \bar{k}(\bar{v} - \bar{v}')| \\ &\geq \alpha - K_{\mathcal{B}} \underbrace{|k \cdot (v - v')|}_{\leq K\alpha/(2KK_{\mathcal{B}})} \\ &\geq \alpha - \alpha/2 = \alpha/2 \end{aligned}$$

□

命题6.19. 设 $\hat{h}(I)$ 是方程 6.1 中的一个 b^m-函数。假设 $h(I)$ 和 $R(\phi, I)$ 在 $\mathrm{D}\rho(G)$ 上实解析，且 $u(G) = \frac{\partial h}{\partial I}(G)$ 是 α， K， c，$\hat{q}$- 非共振。另假设$|\frac{\partial}{\partial I}u|_{G,\ \rho_2} \leq M'$ 和 $\rho_2 \leq \frac{\alpha}{2MK}$。给定 $c > 0$。则 $R_0(\phi, I)$,

由前述构造给出的 $W_{\leq K}(\phi,\ I)$ 在 $\mathrm{D}\rho(G)$ 上均为实解析函数，并且满足以下界

(1) $||DR_0||_{G,\ \rho,\ c} \leq ||DR||_{G,\ \rho,\ c}$(2) $||D(R-R_0)||_{G,\ \rho,\ c} \leq ||DR_0||_{G,\ \rho,\ c}$(3) $||DW||_{G,\ \rho,\ c} \leq \frac{2A}{\alpha}||DR_0||_{G,\ \rho,\ c}$其中 $A = 1 + \frac{2Mc}{\alpha}$

证明。不等式 1 和 2 由傅里叶表达式显然成立。下面证明不等式 3。将 $R(\phi,\ I)$ 和 $W(\phi,\ I)$ 展开为傅里叶表达式：

$$R = \sum_{k\in\mathbb{R}^n} R_k(I)e^{ik\cdot\phi}, \quad W = \sum_{k\in\mathbb{R}^n} W_k(I)e^{ik\cdot\phi}.$$

我们将逐项估计来界定这个表达式。

$$\frac{\partial R}{\partial \phi} = \sum_{k\in\mathbb{R}^n} R_k(I)e^{ik\cdot\phi}ik.$$

因此，若记 $[\frac{\partial R}{\partial \phi}]_k$ 为 $\frac{\partial R}{\partial \phi}$ 的傅里叶展开的第 k 项，则有：

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \phi}\right]_k = R_k ik.$$

计算 W_k 关于 I 个变量的导数：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_k}{\partial I} &= \frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{R_k}{i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1))}\right) \\
&= \frac{\partial R_k/\partial I}{i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))} - \frac{R_k i\frac{\partial}{\partial I}(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))}{[i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))]^2} \\
&= \frac{\partial R_k/\partial I}{i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))} + \frac{R_k ik\frac{\partial}{\partial I}(\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + \bar{\mathcal{A}}(I_1)))}{[(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))]^2} \\
&= \frac{\partial R_k/\partial I}{i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))} + \frac{[\frac{\partial R_k}{\partial \phi}]_k\frac{\partial}{\partial I}(\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + \bar{\mathcal{A}}(I_1)))}{[(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))]^2}.
\end{aligned}$$

然后，我们对方程两边分别取范数（$|\cdot|_{G,\rho_2,\infty}$）。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial W_k}{\partial I}\right|_{G,\rho_2,\infty} &\leq \frac{2}{\alpha}\left|\frac{\partial R_k}{\partial I}\right|_{G,\rho_2,\infty} + \frac{4M}{\alpha^2}\left|\left[\frac{\partial R_k}{\partial \phi}\right]_k\right|_{G,\rho_2,\infty} \\
&\leq \frac{2}{\alpha}\left|\frac{\partial R_k}{\partial I}\right|_{G,\rho_2,\infty} + \frac{4M}{\alpha^2}\left|\left[\frac{\partial R_k}{\partial \phi}\right]_k\right|_{G,\rho_2,1}.
\end{aligned}$$

在整个定义域上取上确界：

$$\left\|\frac{\partial W_k}{\partial I}\right\|_{G,\rho_2,\infty} \leq \frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial R_k}{\partial I}\right\|_{G,\rho_2,\infty} + \frac{4M}{\alpha^2}\left\|\left[\frac{\partial R_k}{\partial \phi}\right]_k\right\|_{G,\rho_2,1}.$$

此外，

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(I)}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sum_{k\in\mathbb{R}^n} W_k(I)e^{ik\cdot\phi}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sum_{k\in\mathbb{R}^n} ikW_k(I)e^{ik\cdot\phi}\right).\end{aligned}$$

因此，$\frac{\partial W}{\partial \phi}$ 的傅里叶级数的第 k项为

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial W}{\partial \phi}\right]_k = W_k ik &= \frac{R_k}{i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))}ik\\ &= \frac{1}{i(k\bar{\mathcal{B}}(I_1)u + k\bar{\mathcal{A}}(I_1)))}\left[\frac{\partial R}{\partial \phi}\right]_k.\end{aligned}$$

两边取范数 $\cdot_{G(\|\rho,\|1}$ 在每一侧：

$$\left\|\frac{\partial W}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1} \le \frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial W}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1}.$$

于是，

$$\begin{aligned}\|DW\|_{G,\rho,c} &= \max\left(\left\|\frac{\partial W}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1}, c\left\|\frac{\partial W}{\partial I}\right\|_{G,\rho,\infty}\right)\\ &\le \max\left(\frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1}, c\frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial R}{\partial I}\right\|_{G,\rho_2,\infty} + c\frac{4M}{\alpha^2}\left\|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho_2,1}\right)\\ &\le \max\left(\frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1}, \frac{2}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho_2,c} + c\frac{4M}{\alpha^2}\|DR\|_{G,\rho_2,c}\right)\\ &= \max\left(\frac{2}{\alpha}\left\|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho,1}, \frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{2M}{\alpha}c\right)\|DR\|_{G,\rho_2,c}\right)\\ &\le \frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{2M}{\alpha}c\right)\|DR\|_{G,\rho_2,c}\\ &\le \frac{2}{\alpha}A\|DR\|_{G,\rho_2,c},\end{aligned}$$

其中 A 正如所需。

□

回顾柯西不等式，参见 [**P¨os93**]:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2),1} &\le \frac{1}{e\delta_1}\|f\|_{G,\rho}\\ \left\|\frac{\partial f}{\partial I}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2-\delta_2),\infty} &\le \frac{1}{\delta_2}\|f\|_{G,\rho}\end{aligned} \tag{6.9}$$

引理 6.20。 设 f, g 是 $\mathcal{D}^{\rho}(G)$ 上的解析函数，其中 $0 < \delta = (\delta_1, \delta_2) < \rho = (\rho_1, \rho_2)$ 且 $c > 0$。定义 $\hat{\delta}_c := \min(c\delta_1, \delta_2)$。以下不等式成立：

(1) $\|Df\|_{G,\rho-\delta,c} \leq \frac{e}{\hat{\delta}_c}\|f\|_{G,\rho}$ (2) $\|\{f, g\}\|_{G,\rho} \leq \frac{2}{c}\|f\|_{G,\rho}\|Dg\|_{G,\rho,c}$ (3) $\|D(f_{>K})\|_{G,(\rho-\delta_1,\rho_2)} \leq e^{-K\delta_1}\|Df\|_{G,\rho,c}$

证明。下面分别证明各点 ly.

(1) 利用柯西不等式可得：

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho-\delta,1} &= \left\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2-\delta_2),1} \\
&\leq \left\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2),1} \leq \frac{1}{e\delta_1}\|f\|_{G,\rho}, \\
\left\|\frac{\partial f}{\partial I}\right\|_{G,\rho-\delta,\infty} &= \left\|\frac{\partial f}{\partial I}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2-\delta_2),\infty} \\
&\leq \left\|\frac{\partial f}{\partial I}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2-\delta_2),\infty} \leq \frac{1}{\delta_1}\|f\|_{G,\rho}.
\end{aligned}$$

将这两个不等式代入范数的定义：

$$\begin{aligned}
\|Df\|_{G,\rho-\delta,c} &= \max\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right\|_{G,\rho-\delta,1}, c\left\|\frac{\partial f}{\partial I}\right\|_{G,\rho-\delta,\infty}\right\} \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{e\delta_1}\|f\|_{G,\rho}, \frac{c}{\delta_2}\|f\|_{G,\rho}\right\} \\
&\leq \max\left\{\frac{1}{e\delta_1}\frac{c}{c}, \frac{c}{\delta_2}\right\}\|f\|_{G,\rho} \\
&\leq \max\left\{\frac{c}{e\hat{\delta}_c}, \frac{c}{\hat{\delta}_c}\right\}\|f\|_{G,\rho},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\hat{\delta}_c = \min(c\delta_1, \delta_2)$。

（2）求 b^m-辛结构下 $\{f, g\}$ 的表达式。$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$，其中 X_f 和 X_g 满足 $\iota_{X_f}\omega = df$ 和 $\iota_{X_g}\omega = dg$。我们只将计算限制在 f 上。

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \phi_1}d\phi_1, \quad X_f = \sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial \phi_i} + \sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

其中 a_i 和 b_i 是待定系数，由以下条件确定：

$$\iota_{X_f}\omega = \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j}{I_1^j}\right)(a_1 dI_1 - b_1 d\phi_1) + \sum_{i=2}^{n}(a_i dI_i - b_i d\phi_i) = df.$$

然后，解出系数可得以下表达式：

$$a_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)} \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \quad \text{and} \quad a_i = \frac{\partial f}{\partial \phi_i} \text{ for } i \neq 1,$$

$$b_1 = -\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)} \frac{\partial f}{\partial \phi_1} \quad \text{and} \quad b_i = -\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \text{ for } i \neq 1.$$

因此，哈密顿向量场的表达式为:

$$X_f = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1}\frac{\partial}{\partial \phi_1} - \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial}{\partial I_1}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i}\frac{\partial}{\partial \phi_i} - \frac{\partial f}{\partial I_i}\frac{\partial}{\partial I_i}\right),$$

$$X_g = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)} \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_1}\frac{\partial}{\partial \phi_1} - \frac{\partial g}{\partial I_1}\frac{\partial}{\partial I_1}\right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_i}\frac{\partial}{\partial \phi_i} - \frac{\partial g}{\partial I_i}\frac{\partial}{\partial I_i}\right).$$

于是，对这两个函数应用泊松括号:

$$\begin{aligned} \{f,g\} = \omega(X_f, X_g) &= \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)} \left(\frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial g}{\partial \phi_1} - \frac{\partial f}{\partial \phi_1}\frac{\partial g}{\partial I_1}\right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial f}{\partial I_i}\frac{\partial g}{\partial \phi_i} - \frac{\partial f}{\partial \phi_i}\frac{\partial g}{\partial I_i}\right). \end{aligned}$$

因此，泊松括号的范数为:

$$\begin{aligned} \|\{f,g\}\|_{G,\rho} &= \left\| \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)} \left(\frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial g}{\partial \phi_1} - \frac{\partial f}{\partial \phi_1}\frac{\partial g}{\partial I_1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\partial f}{\partial I_i}\frac{\partial g}{\partial \phi_i} - \frac{\partial f}{\partial \phi_i}\frac{\partial g}{\partial I_i}\right) \right\|_{G,\rho} \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial I_i}\frac{\partial g}{\partial \phi_i} - \frac{\partial f}{\partial \phi_i}\frac{\partial g}{\partial I_i}\right) \right\|_{G,\rho} \end{aligned}$$

这里我们假设 $\left|\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right| \geq 1$。这个假设是合理的，因为我们关注的是临界集 Z 附近的行为。只要足够接近临界集，这个表达式就成立。于是，

$$\begin{aligned} \|\{f,g\}\|_{G,\rho} &\leq \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial I_i}\right\|_{G,\rho} \left\|\frac{\partial g}{\partial \phi_i}\right\|_{G,\rho} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial \phi_i}\right\|_{G,\rho} \left\|\frac{\partial g}{\partial I_i}\right\|_{G,\rho} \\ &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial I}\right|_{G,\rho,\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial I}\right|_{G,\rho,1} + \left|\frac{\partial f}{\partial I}\right|_{G,\rho,1} \left|\frac{\partial g}{\partial I}\right|_{G,\rho,\infty} \\ &\leq \frac{1}{c}|Df\|_{G,\rho,c}\|Dg\|_{G,\rho,c} + \frac{1}{c}|Df\|_{G,\rho,c}\|Dg\|_{G,\rho,c} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{c}\|Df\|_{G,\rho,c}\|Dg\|_{G,\rho,c}.$$

(3) 最后,

$$\|D(f_{>K})\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2),1}$$
$$= \max\left\{\left\|\frac{\partial f_{>K}}{\partial \phi}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_1),1}, c\left\|\frac{\partial f_{>K}}{\partial I}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_1),\infty}\right\}.$$

我们将继续分别定义每个术语。一方面:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial f}{\partial \phi}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2),1} &= \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} ikf_k(I)e^{ik\phi}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2),1} \\
&\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} k\,\|f_k(I)\|_{G,\rho_2,1}\, e^{|k|_1\rho_1} \\
&\geq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ |k|_1>K}} k\,\|f_k(I)\|_{G,\rho_2,1}\, e^{|k|_1(\rho_1+\delta_1-\delta_1)} \\
&\geq e^{K\delta_1}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ |k|_1>K}} k\,\|f_k(I)\|_{G,\rho_2,1}\, e^{|k|_1(\rho_1-\delta_1)} \\
&= e^{K\delta_1}\left\|\frac{\partial f_{>K}}{\partial \phi}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2),1}.
\end{aligned}$$

另一方面:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial f}{\partial I}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2),\infty} &= \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{\partial f_k(I)}{\partial I}e^{ik\phi}\right\|_{G,(\rho_1,\rho_2),\infty} \\
&\geq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\|\frac{\partial f_k(I)}{\partial I}\right\|_{G,\rho_2,\infty} e^{|k|_1\rho_1} \\
&\geq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ |k|_1>K}} \left\|\frac{\partial f_k(I)}{\partial I}\right\|_{G,\rho_2,\infty} e^{|k|_1(\rho_1+\delta_1-\delta_1)} \\
&\geq e^{K\delta_1}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ |k|_1>K}} \left\|\frac{\partial f_k(I)}{\partial I}\right\|_{G,\rho_2,\infty} e^{|k|_1(\rho_1-\delta_1)} \\
&\geq e^{K\delta_1}\left\|\frac{\partial f_{>K}}{\partial I}\right\|_{G,(\rho_1-\delta_1,\rho_2),\infty}.
\end{aligned}$$

因此 $\|D(f_{>K})\|_{G,\,(\rho_1-\delta_1,\rho_2)\,c} \leq e^{-K\delta_1}\|Df\|_{G,\,\rho,\,c}$。

□

现在我们定义一个范数，用来表示映射 Φ 与恒等式有多接近。

定义 6.21. 设 $x = (\phi,\ I) \in \mathbb{C}^{2n}$，则

$$|x|_c := \max(|\phi|_1, c|I|_\infty)$$

定义 6.22. 对于一个映射 Υ：$D\rho(G) \to \mathbb{C}^{2n}$，其范数及其导数的范数定义为：

$$|\Upsilon|_{G,\rho,c} := \sup_{x\in\mathcal{D}_\rho(G)} |\Upsilon(x)|_c,$$

$$|D\Upsilon|_{G,\rho,c} := \sup_{x\in\mathcal{D}_\rho(G)} |D\Upsilon(x)|_c,$$

where $|D\Upsilon(x)|_c = \sup\limits_{\substack{y\in\mathbb{R}^{2n}\\ |y|_c=1}} |D\Upsilon(x)\cdot y|_c$

引理 6.23。 若 Υ 在$\mathcal{D}\rho$（G）上是解析的，则$|D\Upsilon|_{G,\ \rho-\delta,\ C} \leq \frac{|\Upsilon|_{G,\ \rho-\delta,\ C}}{\delta}$

证明。注意，若我们在 $\mathbb{C}^n$ 上考虑任意范数 k.k，以及一个大小为 $n\times n$ 的矩阵 A，并且 kAk 定义矩阵的诱导范数，即

$$\|A\| = \sup_{\substack{y\in\mathbb{C}^{2n}\\ \|y\|=1}} \|A\cdot y\|$$

则有 k(ka_1k′，……，ka_nk′)k $\leq$ kAk，其中 a_j 表示 A 的第 j 行。另外注意，k · k′ 可以是任意范数；考虑无穷范数。以下述方式即可轻松证明：

$$\|A\cdot y\| = \left\|\begin{pmatrix} a_1\cdot y\\ \vdots\\ a_n\cdot y\end{pmatrix}\right\| \leq \left\|\begin{pmatrix} \|a_1\|'\|y\|'\\ \vdots\\ \|a_n\|'\|y\|'\end{pmatrix}\right\|$$

其中 $\forall y\in\mathbb{C}^n$ 使得 kyk $=1$。令 a_j 为 $D\Upsilon(x)$ 的行，

$$a_j = \left(\frac{\partial\Upsilon_j}{\partial\phi}, \frac{\partial\Upsilon j}{\partial I}\right),$$

并令其范数为 ka_jk′ 。牢记这一性质，我们按如下方式继续：

$$\begin{aligned}
|D\Upsilon|_{G,\rho-\delta,c} &= \sup_{x\in\mathcal{D}_{\rho-\delta}(G)} |D\Upsilon(x)|_c\\
&\leq \sup_{x\in\mathcal{D}_{\rho-\delta}(G)} |(|a_1|_\infty,\ldots,|a_n|_\infty)|_c\\
&\leq \left|\left(\sup_{x\in\mathcal{D}_{\rho-\delta}}\|D\Upsilon_1\|_\infty,\ldots,\sup_{x\in\mathcal{D}_{\rho-\delta}}\|D\Upsilon_{2n}\|_\infty\right)\right|_c\\
&= \left|\left(\|D\Upsilon_1\|_{G,\rho-\delta,\infty},\ldots,\|D\Upsilon_{2n}\|_{G,\rho-\delta,\infty}\right)\right|_c\\
&\leq \left|\left(\tfrac{1}{\delta_1}\|\Upsilon_1\|_{G,\rho},\ldots,\tfrac{1}{\delta_1}\|\Upsilon_{2n}\|_{G,\rho}\right)\right|_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\hat{\delta}_c}\left\|\|\Upsilon_1\|_{G,\rho},\ldots,\|\Upsilon_{2n}\|_{G,\rho}\right\|_c \\ &= \frac{1}{\hat{\delta}_c}\sup_{x\in\mathcal{D}_\rho(G)}|\Upsilon_1,\ldots,\Upsilon_{2n}|_c = \frac{1}{\hat{\delta}_c}\sup_{x\in\mathcal{D}_\rho(G)}|\Upsilon|_c \\ &= \frac{1}{\hat{\delta}_c}|\Upsilon|_{G,\rho,c} \end{aligned}$$

□

引理 *6.24.* 设 W 是 $D\rho(G)$ 上的解析函数，$\rho>0$ 且 Φ_t 是其在时间 t $(t>0)$ 的哈密顿流。给定 $\delta=(\delta_1,\delta_2)>0$ 和 $c>0$。假设 $\|DW\|_{G,\rho,c}\leq\hat{}\delta_c$。那么，$\Phi_t$ 将 $D\rho-t\delta(G)$ 映射到 $D\rho(G)$，并且有：

(1) $|\Phi_t-Id|_{G,\ \rho-t\delta,\ c}\leq t\|DW\|_{G,\ \rho,\ c}$；*(2)* $\Phi(D\rho(G))\supset D\rho-t\delta(G)$，对于 $\rho'\leq\rho-t\delta$；*(3)* 假设 $\|DW\|_{G,\ \rho,\ c}<\hat{}\delta_c/2e$，对于 $D\rho(G)$ 上解析的任意给定函数 f，以及任意整数 $m\geq 0$，有以下界：

$$\begin{aligned} &\|r_m(f,W,t)\|_{G,\rho-t\delta} \\ &\leq\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\binom{l+m}{m}}\cdot\left(\frac{2e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)^l\right]\frac{t^m}{m!}\|L_W^m f\|_{G,\rho} \\ &=\gamma_m\left(\frac{2e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\cdot t^m\|L_W^m f\|_{G,\rho}, \end{aligned}$$

其中，对于 $0\leq x\leq 1$，我们定义

$$\gamma_m(x):=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l!}{(l+m)!}x^l$$

证明。在证明过程中，我们将用 $(\phi(s)\ I(s))$ 表示 $\Phi_s(\phi_0,I_0)$。

让我们求出一个 b^m-辛形式的表达式 6.2 所对应的哈密顿流的坐标表达式。回顾哈密顿流的方程为$\frac{d}{ds}\phi_i(s)=\{\phi_i,W\}$，以及 $\frac{d}{ds}I_i(s)=\{I_i,W\}$。

$$\begin{aligned} \{\phi_i,W\}=&\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m\frac{c_j}{I_1^j}\right)}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial I_1}\cdot\frac{\partial W}{\partial\phi_1}-\frac{\partial\phi_i}{\partial\phi_1}\cdot\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)\\ &+\sum_{j=2}^n\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial I_j}\cdot\frac{\partial W}{\partial\phi_j}-\frac{\partial\phi_i}{\partial\phi_j}\cdot\frac{\partial W}{\partial I_j}\right). \end{aligned}$$

因此，

$$\frac{d}{ds}\phi_i(s)=-\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m\frac{c_j}{I_1^j}\right)}\frac{\partial W}{\partial I_1}\text{ if }i=1\text{ and }\frac{d}{ds}\phi_i(s)=-\frac{\partial W}{\partial I_i}\text{ if }i\neq 1.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \{I_i,W\}=&\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m\frac{c_j}{I_1^j}\right)}\left(\frac{\partial I_i}{\partial I_1}\cdot\frac{\partial W}{\partial\phi_1}-\frac{\partial I_i}{\partial\phi_1}\cdot\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)\\ &+\sum_{j=2}^n\left(\frac{\partial I_i}{\partial I_j}\cdot\frac{\partial W}{\partial\phi_j}-\frac{\partial I_i}{\partial\phi_j}\cdot\frac{\partial W}{\partial I_j}\right). \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{d}{ds}I_i(s)=\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)}\frac{\partial W}{\partial \phi_1} \text{ if } i=1 \text{ and } \frac{d}{ds}I_i(s)=\frac{\partial W}{\partial \phi_i} \text{ if } i\neq 1.$$

(1) 现在假设 $0<s_0\leq t$。那么,

$$\begin{aligned}|\phi(s_0)-\phi_0|_\infty &\leq s_0 \sup_{0<s\leq s_0}|\phi'(s)|_\infty \\ &= s_0 \sup_{0<s\leq s_0}(\max(|\phi_1'(s)|,\ldots,|\phi_n'(s)|)) \\ &= s_0 \sup_{0<s\leq s_0}\left(\max\left(\left|\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right|,\left|\frac{\partial W}{\partial I_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial W}{\partial I_n}\right|\right)\right) \\ &\leq s_0 \sup_{0<s\leq s_0}\left|\tfrac{\partial W}{\partial I}\right|_\infty \leq s_0\left\|\tfrac{\partial W}{\partial I}\right\|_{G,\rho,\infty}\end{aligned}$$

这里我们再次用到了在定义域 $\mathrm{D}\rho(G)$ 上不等式$\left|\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right|\geq 1$成立这一事实。类似地, $|I(s_0)-I_0|\leq s_0\|\frac{\partial W}{\partial \phi}\|_{G,\rho,1}$, 因此$|\Phi_t-\mathrm{Id}|_{G,\rho-t\delta,c}\leq t\|DW\|_{G,\rho,c}$。因为

$$\begin{aligned}&|\phi(s)-\phi_0|_\infty\leq t\|\tfrac{\partial W}{\partial I}\|_{G,\rho,\infty}\leq t\tfrac{\hat\delta_c}{c}\leq t\delta_1\tfrac{c}{c}=t\delta_1 \quad \forall 0<s\leq s_0\\ &|I(s)-I_0|_1\leq t\|\tfrac{\partial W}{\partial \phi}\|_{G,\rho,1}\leq t\hat\delta_c\leq t\delta_2 \quad \forall 0<s\leq s_0\end{aligned} \tag{6.10}$$

因此, 对于所有 $0<s\leq s_0$, $(\phi(s)\ I(s))\in \mathrm{D}\rho-t\delta+t\delta(G)=\mathrm{D}\rho(G)$。

(2) 对 $\phi(-s)$ 重复 6.10 中的相同论证。如果 $(\phi_0,\ I_0)\in \mathrm{D}\rho'-t\delta$, 那么 $(\phi(-s)\ I(-s))\in \mathrm{D}\rho'-t\delta+t\delta(G)=\mathrm{D}\rho'$。因此,

$$\mathcal{D}_{\rho'}(G)\supset \Phi^{-1}(\mathcal{D}_{\rho'-t\delta}(G)),$$

于是 $\Phi(\mathrm{D}\rho'(G))\supset \mathrm{D}\rho'-t\delta(G)$。

(3) 考虑 f 一个解析函数。根据前面的构造, $f\circ\Phi_t$在 $\mathrm{D}\rho-t\delta(G)$ 中有定义。由于 W 是解析的, 我们也有 $f\circ\Phi_t$是解析的, 因此可以展开其李级数。令 $m\in\mathbb{Z}$, $l\geq m+1$, $j=m+1$, ..., l于是

$$\begin{aligned}\|L_W^j f\|_{G,\rho-(j-m)t\eta} &\leq \tfrac{2}{c}\|D(L_W^{j-1}f)\|_{G,\rho-(j-m)t\eta,c}\|DW\|_{G,\rho,c}\\ &\leq \tfrac{2}{t\hat\eta_c}\|L_W^{j-1}f\|_{G,\rho-(j-1-m)t\eta}\|DW\|_{G,\rho,c},\end{aligned}$$

这里我们用到了引理 6.20, 并定义了 $\eta=\frac{\delta}{(l-m)}$ 以及 $\hat\eta_c=\min(c\eta_1,\ \eta_2)$。于是,

$$\begin{aligned}\|L_W^l f\|_{G,\rho-t\delta} &\leq \left(\tfrac{2\|DW\|_{G,\rho,c}}{t\hat\eta_c}\right)^{l-m}\\ &\leq e^{l-m}\cdot(l-m)!\left(\tfrac{2\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat\delta_c}\right)^{l-m}\|L_W^m f\|_{G,\rho},\end{aligned}$$

其中我们用了 $\hat\eta_c=\frac{\delta_c}{l-m}$ and $(l-m)^{(l-m)}\leq e^{l-m}\cdot(l-m)!$ 因此, $\|r_m(f,\ W,\ t)\|_{G,\ \rho-t\delta}$ 的上界为

$$\sum_{l=m}^\infty \frac{t^l}{l!}\|L_W^l f\|_{G,\rho-t\delta}\leq\left[\sum_{l=m}^\infty\frac{(l-m)!}{l!}\left(\frac{2e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat\delta_c}\right)^{l-m}\right]\cdot t^m\|L_W^m f\|_{G,\rho}$$

并且当 $\|DW\|_{G,\rho,c} \le \frac{\delta_c}{2e}$ 时，此级数收敛。

□

定理 6.25. *[迭代引理] $H(\phi, I) = h(I) + R(\phi, I)$，其中 $h(I)$ 如方程 6.1 中所述，定义在 $D\rho(G)$ 上。令 $u = \frac{\partial h}{\partial I}$ 和 $u = \frac{\partial h}{\partial I}$，并假设 u 是 α, K, c，q-非共振。假设 $\left|\frac{\partial}{\partial I} u\right|_{G,\rho_2} \le M'$。令 $\delta < \rho$ 和 $c > 0$, $A = 1 + \frac{2Mc}{\alpha}$。假设 $\rho_2 \le \frac{\alpha}{2MK}$, $\|DR\|_{G,\rho,c} \le \frac{\alpha\delta_c}{74A}$。那么，存在一个实解析映射 $\Phi : D^{\rho-\frac{\delta}{2}}(G) \to D\rho(G)$，使得 $H \circ \Phi = h + R$，其中：*

(1) $\|D\tilde{R}\|_{G,\rho-\delta,c} \le e^{-K\delta_1}\|DR\|_{G,\rho,c} + \frac{14A}{\alpha\delta_c}\|DR\|^2_{G,\rho,c}$, (2) $|\Phi - Id|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} \le \frac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}$, (3) $\Phi(D^{\rho'}(G)) \supset D^{\rho'-\frac{\delta}{2}}(G)$ 对于 $\rho' \le \rho - \frac{\delta}{2}$

证明。回想一下，$\left|\frac{\partial}{\partial I} u\right|_{G,\rho_2} \le M'$ 意味着 $\left|\frac{\partial}{\partial I}(\bar{B}u + \bar{A})\right|_{G,\rho_2} \le M$ 根据方程 6.8。根据方程 6.6

$$R^{(q)} = R^{(q-1)}_{>K} + r_2(\hat{h}^{(q-1)}, W^{(q)}, 1) + r_1(R^{(q-1)}, W^{(q)}, 1).$$

为简化记号，我们将省略迭代的下标：

$$\tilde{R} = R_{>K} + r_2(\hat{h}, W, 1) + r_1(R, W, 1). \tag{6.11}$$

其中， W 由其傅里叶表达式通过方程6.7定义：

$$W_k(I) = \frac{R_k(I)}{i(k\bar{B}(I_1)u + k\bar{A}(I_1))}$$

根据命题6.19：$\|DW\|_{G,\rho,c} \le \frac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c} \le \frac{2A}{\alpha}\frac{\alpha\delta_c}{74A} = \frac{\delta_c}{37}$。并且，$\Phi$ 按引理 6.20中的定义给出： $\Phi : D^{\rho-\frac{\delta}{2}}(G) \to D\rho(G)$。

(1) 对方程6.11求导，我们得到：

$$D\tilde{R} = DR_{>K} + Dr_2(\hat{h}, W, 1) + Dr_1(R, W, 1).$$

对表达式两边分别取范数：

$$\begin{aligned}
\|D\tilde{R}\|_{G,\rho-\delta,c} &= \|DR_{>K} + Dr_2(\hat{h}, W, 1) + Dr_1(R, W, 1)\|_{G,\rho-\delta,c} \\
&\le \|DR_{>K}\|_{G,\rho-\delta,c} + \|Dr_2(\hat{h}, W, 1)\|_{G,\rho-\delta,c} \\
&\quad + \|Dr_1(R, W, 1)\|_{G,\rho-\delta,c} \\
&\le e^{-K\delta_1}\|DR\|_{G,\rho,c} \\
&\quad + \frac{2c}{\delta_c}\left(\|r_2(\hat{h}, W, 1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} + \|r_1(R, W, 1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}\right)
\end{aligned}$$

我们进一步展开前一个表达式的最后两项，使用引理 6.24：

$$\begin{aligned}
\|r_2(\hat{h}, W, 1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} &\le \gamma_2\left(\frac{2e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\delta_c/2}\right)\|L^2_W h\|_{G,\rho} \\
&\le \gamma_2\left(\frac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\delta_c}\right)\|\{\{h, W\}, W\}\|_{G,\rho},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|r_1(\hat{h}, W, 1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} &\le \gamma_1\left(\frac{2e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\delta_c/2}\right)\|L^1_W R\|_{G,\rho} \\
&\le \gamma_1\left(\frac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\delta_c}\right)\|\{R, W\}\|_{G,\rho}.
\end{aligned}$$

接着，利用引理 6.20 的第二个结论以及 $\{W,h\}=R_{\leq K}$:

$$\begin{aligned}\|\{R,W\}\|_{G,\rho}&\leq\frac{2}{c}\|DR\|_{G,\rho,c}\|DW\|_{G,\rho,c},\text{ and}\\ |\{\{h,W\},W\}\|_{G,\rho}&=\|\{R_{\leq K},W\}\|_{G,\rho}\\ &\leq\frac{2}{c}\|DR_{\leq K}\|_{G,\rho,c}\|DW\|_{G,\rho,c}\\ &\leq\frac{2}{c}\|DR\|_{G,\rho,c}\|DW\|_{G,\rho,c}.\end{aligned}$$

此外，容易看出 $\gamma_1(x)=\frac{-\log(1-x)\ x}{x^2}$ 且 $\gamma_2(x)=\frac{x+(1-x)\log(1-x)}{x^2}$。注意，这些函数关于 x 单调递增。回想一下，$\|DW\|_{G,\rho,c}\leq\frac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}$。于是，

$$\begin{aligned}&\|r_1(\hat{h},W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}\\ &+\|r_2(\hat{h},W,1)\|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c}\\ &\leq\gamma_1\left(\tfrac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\|\{R,W\}\|_{G,\rho}\\ &\quad+\gamma_2\left(\tfrac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\|\{\{h,W\},W\}\|_{G,\rho}\\ &\leq\gamma_1\left(\tfrac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\tfrac{2}{c}\|DR\|_{G,\rho,c}\|DW\|_{G,\rho,c}\\ &\quad+\gamma_2\left(\tfrac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\tfrac{2}{c}\|DR\|_{G,\rho,c}\|DW\|_{G,\rho,c}\\ &\leq\gamma_1\left(\tfrac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\tfrac{2}{c}\tfrac{2A}{\alpha}\|DR\|^2_{G,\rho,c}\\ &\quad+\gamma_2\left(\tfrac{4e\|DW\|_{G,\rho,c}}{\hat{\delta}_c}\right)\tfrac{2}{c}\tfrac{2A}{\alpha}\|DR\|^2_{G,\rho,c}\\ &\leq\tfrac{2}{c}[\gamma_1(\tfrac{4e}{37})+\gamma_2(\tfrac{4e}{37})]\tfrac{2A}{\alpha}\|DR\|^2_{G,\rho,c}\\ &=\tfrac{4A}{\alpha c}[\gamma_1(\tfrac{4e}{37})+\gamma_2(\tfrac{4e}{37})]\|DR\|^2_{G,\rho,c}.\end{aligned}$$

此外 $\gamma_1(\frac{4e}{37})+\gamma_2(\frac{4e}{37})\approx1.741\ldots<\frac{7}{4}$。

于是，

$$\begin{aligned}\|D\tilde{R}\|_{G,\rho-\delta,c}&\leq e^{-K\delta_1}\|DR\|_{G,\rho,c}+\tfrac{2c}{\hat{\delta}_c}\tfrac{4A}{\alpha c}\tfrac{7}{4}\|\|^2_{G,\rho,c}\\ &\leq e^{-K\delta_1}\|DR\|_{G,\rho,c}+\tfrac{14A}{\hat{\delta}_c\alpha}\|DR\|^2_{G,\rho,c},\end{aligned}$$

正如我们所要证明的。

(2) 直接由引理 6.24 得出:

$$|\Phi-\mathrm{Id}|_{G,\rho.\frac{\delta}{2},c}\leq\|DW\|_{G,\rho,c}\leq\frac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c}$$

(3) 也可直接由引理 6.24 得出:

$$\Phi(\mathcal{D}_\rho(G))\supset\mathcal{D}_{\rho'-\frac{\delta}{2}}(G),\text{ for }\rho'\leq\rho-\delta/2$$

□

定义 6.26. $\Delta_{c,\hat{q}}(k,\alpha)=\{J\in\mathbb{R}^n$ 使得 $|k\mathrm{B}(I_1)J+k\mathrm{A}(I_1)|<\alpha\}$

引理 6.27. 根据前面的定义，我们有以下界。在 Z 之外:

$$meas\,(F\cap\Delta_{c,\hat{q}}(k,\alpha))\leq(\mathrm{diam}F)^{n-1}\frac{2\alpha}{|k|_{2,\omega}}.$$

在 Z 处：

$$meas\,(F \cap \Delta_{c,\hat{q}}(k,\alpha)) \begin{cases} = 0 & if\ \alpha \leq \frac{|k_1|}{\mathcal{K}'} \\ \leq (diam F)^n & if\ \alpha > \frac{|k_1|}{\mathcal{K}'} \end{cases}$$

证明。理解集合 $\Delta_{c,\hat{q}}(k,\alpha)$ 的几何很重要。回想起，$k\mathrm{B}(I_1)J = k_1\mathrm{B}(I_1)J_1 + kJ$，因此表达式的这一部分可以解释为向量 J 与向量 $(k_1\mathrm{B}(I_1)\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ 的标量积。那么，集合 $\{J \in \mathbb{R}^n$ 使得 $|k\mathrm{B}(I_1)J| < \alpha\}$ 是两个与 $(k_1\mathrm{B}(I_1)\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ 正交的超平面之间的空间。添加项 $k\mathrm{A}(I_1)$ 只会使前一个集合发生平移。我们来求这两个超平面之间的距离。假设 J 平行于 $(k_1\mathrm{B}(I_1)\ k_2, \ldots,\ k_n)$，且长度为 a：

$$J = a\frac{(k_1\mathcal{B}(I_1), k_2, \ldots, k_n)}{|k|_{2,\omega}},$$

其中 $|k|_{2,\omega} = \sqrt{B(I_1)^2k_1^2 + k_2^2 + \ldots k_n^2}$。于是，

$$\begin{aligned} J \cdot (B(I_1), k_1, \ldots, k_n) &= c(B(I_1)k_1^2 + k_2^2 + \ldots k_n^2)\frac{1}{|k|_{2,\omega}} \\ &= a|k|_{2,\omega} \leq \alpha \Leftrightarrow a \leq \frac{\alpha}{|k|_{2,\omega}}. \end{aligned}$$

最后，

$$\mathrm{meas}\,(F \cap \Delta_{c,\hat{q}}(k,\alpha)) \leq (\mathrm{diam} F)^{n-1}\frac{2\alpha}{|k|_{2,\omega}}.$$

当我们处于 Z 和 $k = (k_1, 0, \ldots, 0)$ 时，前一个公式不适用。

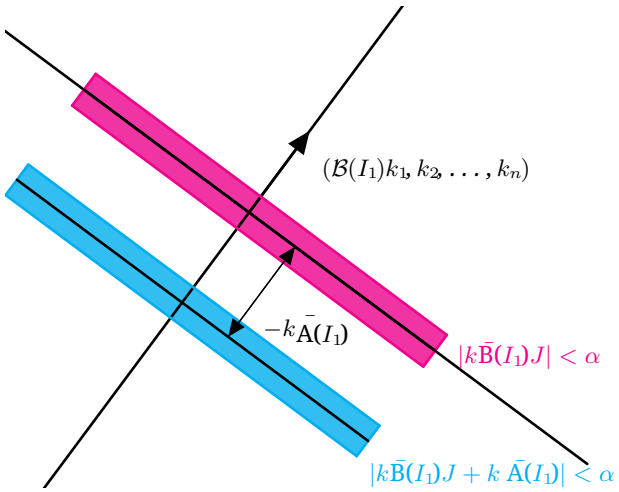

图1. $\Delta_{c,\hat{q}}(\alpha)$的图示

在 Z，

$$\Delta_{c,\hat{q}}(K,\alpha) = \{J \in \mathbb{R}^n \text{ such that } |\bar{K}\bar{J} + k_1\frac{\hat{q}_m}{c_m}| < \alpha\}.$$

并且如果 $k = (k_1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$，那么

$$\Delta_{c,\hat{q}}(K,\alpha) = \{J \in \mathbb{R}^n \text{ such that } |k_1\frac{\hat{q}_m}{c_m}| < \alpha\}.$$

Then

$$\Delta_{c,\hat{q}}(k,\alpha)=\begin{cases}\mathbb{R}^n & \text{if } |k_1|<\alpha\frac{c_m}{\hat{q}_m}=\alpha\mathcal{K}',\\ \{\emptyset\} & \text{if } |k_1|\geq\alpha\frac{c_m}{\hat{q}_m}=\alpha\mathcal{K}'.\end{cases}$$

利用这个恒等式，我们想要证明的结论便显而易见了。

□

定义 6.28. $G-b:=\{I\in G$ 使得 $\mathrm{U}_b(I)\subset G\}$，其中 $\mathrm{U}_b(I)$ 是半径为 b 、中心位于 I 的球。

定义 6.29. F 是一个 D-集，若 $\mathrm{meas}[(F-b_1)\setminus(F-b_2)]\leq D(b_2-b_1)$。

引理 6.30. 设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 D-集，其中 $d\geq 0$、$\tau>0$、$\beta\geq 0$，且 $k\geq 0$ 为整数。考虑集合

$$F(d,\beta,K):=(F-d)\setminus\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\|k|_1\leq K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right).$$

那么，在 Z之外:

(1) If $d'\geq d$, $\beta'\geq\beta$, $k'\geq k$, then

$$\mathrm{meas}[F(d,\beta,k)\setminus F(d',\beta',k')]\leq$$

$$D(d'-d)+2(\mathrm{diam}F)^{n-1}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\|k|_1\leq K}}\frac{\beta'-\beta}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\0<|k|_1\leq K}}\frac{\beta'}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\right)$$

(2) 对每个 $b\geq 0$

$$\mathrm{meas}[F(d,\beta,K)\setminus(F(d,\beta,K)-b)]\leq(D+2^{n+1}(\dim F)^{n-1}K^n)b$$

并且在 Z 内，如果我们假设 $\beta\leq\frac{1}{7}\mathcal{K}$，方程 *1* 只需加入项 $k\neq 0$ 即可成立，而方程 *2* 则无需任何改动。

证明。回想一下，

$$\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)=\left\{J\in\mathbb{R}^n\text{ such that }\left|k\bar{\mathcal{B}}(I_1)J+k\bar{\mathcal{A}}(I_1)\right|<\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right\}.$$

首先我们将证明 Z 之外的结果，然后

(1) 展开 $\mathrm{meas}[F(d,\beta,k)\setminus F(d',\beta',k')]$ 的表达式:

$$\left[(F-d)\setminus\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\|k|_1\leq K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right]\setminus\left[(F-d)\setminus\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\|k|_1\leq K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right].$$

现在我们对上一个表达式使用以下性质:

$$\begin{aligned}(A\setminus B)\setminus(C\setminus D) &= [(A\setminus B)\setminus C]\cup[(A\setminus B)\cap D]\\ &\subset (A\setminus C)\cup[(A\setminus B)\cap D]\\ &= (A\setminus C)\cup(A\cap(D\setminus B)),\end{aligned}$$

其中最后一个等式成立是因为 $D\supset B$。利用这一性质，我们有 $\mathrm{meas}[F(d,\beta,k)\setminus F(d',\beta',k')]$ 包含于

$$[(F-d)\setminus(F-d')] \quad \cup \quad \left[(F-d)\cap\left[\left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K'}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta'}{|k|_1}\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\setminus\left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1}\right)\right)\right]\right].$$

而这个表达式等价于:

$$[(F-d)\setminus(F-d')] \quad \cup \quad \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\left((F-d)\cap\left(\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta'}{|k|_1^\tau}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\setminus\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right)\right)$$
$$\cup \quad \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ K<|k|_1\le K'}}\left((F-d)\cap\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta'}{|k|_1^\tau}\right)\right).$$

现在，利用引理 6.27，我们得到:

$$\mathrm{meas}(F(d,\beta,K)\setminus F(d',\beta',K'))\le$$
$$\le D(d'-d)+(\mathrm{diam}F)^{n-1}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\frac{2(\beta'-\beta)}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ K<|k|_1\le K'}}\frac{2\beta'}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\right)$$

（2）注意:

$$F(d,\beta,K)-b \quad = \quad \left[(F-d)\setminus\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right]-b$$
$$\supset \quad (F-(d+b))\setminus\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}+b|k|_{2,\omega}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned}&\mathrm{meas}[(F(d,\beta,K))\setminus(F(d,\beta,K)-b)]\\ \le\ &\mathrm{meas}\left[\left((F-d)\setminus\textstyle\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right)\setminus\right.\\ &\left.\left((F-(d+b))\setminus\textstyle\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right)\right]\\ \le\ &\mathrm{meas}\,[(F-d)\setminus(F-(d+b))\cup\end{aligned}$$

$$\left.\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\left((F-d)\cap\left(\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}+b|k|_{2,\omega}\right)\right)\right)\setminus\left(\Delta_{c,\hat{q}}\left(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right)\right)\right]$$

$$\le \quad Db+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}(\mathrm{diam}F)^{n-1}\frac{2b|k|_{2,\omega}}{|k|_{2,\omega}}$$

$$\le \quad Db+2^nK^n(\mathrm{diam}F)^{n-1}\cdot 2=Db+2^{n+1}K^n(\mathrm{diam}F)^{n-1},$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了满足 $|k|_1\le K$ 的向量 k 的数量小于或等于 2^nK^n。

前面的恒等式在 Z之外成立。让我们来理解当我们位于 Z 时的集合 $F(d,\beta,K)$。

$$\begin{aligned}F(d,\beta,K) &:= (F-d)\setminus\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}}\Delta_{c\hat{q}}(k,\tfrac{\beta}{|k|_1^\tau})\\ &= (F-d)\setminus\left[\left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K\\ \bar{k}\neq 0}}\Delta_{c\hat{q}}(k,\tfrac{\beta}{|k|_1^\tau})\right)\right.\\ &\qquad\left.\cup\left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K\\ \bar{k}=0}}\Delta_{c\hat{q}}(k,\tfrac{\beta}{|k|_1^\tau})\right)\right]\\ &= (F-d)\setminus\left[\left(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K\\ \bar{k}\neq 0}}\Delta_{c\hat{q}}(k,\tfrac{\beta}{|k|_1^\tau})\right)\right.\\ &\qquad\left.\cup\left(\bigcup_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ |k|_1\le\frac{\beta}{|k_1|^\tau}\mathcal{K}'}}\mathbb{R}^n\right)\right].\end{aligned}$$

注意，如果对于某个 $k_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，$|k|_1\ge\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\mathcal{K}'$，我们去掉所有可能的频率，那么自然会想到对所有 $k_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，$|k|_1\ge\frac{\beta}{|k|_1^\tau}\mathcal{K}'$；这当且仅当对所有 $k_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，$|k_1|^{1+\tau}\ge\beta K'$ 成立，或者简单地说，$\beta\le\frac{1}{\mathcal{K}'}$，而这正是我们所假设的。于是

$$F(d,\beta,K):=(F-d)\setminus\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K\\ \bar{k}\neq 0}}\Delta_{c\hat{q}}(k,\frac{\beta}{|k|_1^\tau}).$$

因此，我们可以复现 1 的证明，只需使用项 $k\neq 0$。利用满足 $|k|_1\le K$ 且 $|k|\neq 0$ 的向量 $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$的数量有界于 2^nK^n-K这一点，可以略微改进 2 的界；但由于改进不大，为求简便，我们在 Z处采用界 2。

□

引理 6.31。设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集。u、$\tilde{u}:\ G\to\mathcal{R}^n$ 为 $\mathcal{C}^2$.$|\tilde{u}-u|\le\varepsilon$ 类映射。假设 u 在 G 上是单射，令 $F=u(G)$。考虑以下界：

$$\left|\frac{\partial u}{\partial I}\right|_G\le M,\left|\frac{\partial u}{\partial I}(I)\cdot v\right|\ge\mu|v|\quad\forall v\in\mathbb{R}^n,\forall I\in G,$$

$$\left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial I}\right|_G \leq \tilde{M}, \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial I^2}\right|_G \leq \tilde{M}_2, \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial I}(I)v\right| \geq \tilde{\mu}|v| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall I \in G,$$

$\tilde{\mu} < \mu$ 和 $\tilde{M} < M$。假设 $\varepsilon \leq \tilde{m}u^2/(4\tilde{M}_2)$。那么，给定子集 $\tilde{F} \subset F - \frac{4M\varepsilon}{\tilde{\mu}}$ 并记 $\tilde{G} = (\tilde{u})^{-1}(\tilde{F})$，映射 $\tilde{u}$ 从 $\tilde{G}$ 到 $\tilde{F}$ 是单射，并且

$$\tilde{G} \subset G - \frac{2\epsilon}{\tilde{\mu}}, \quad u(\tilde{G}) \supset \tilde{F} - \varepsilon.$$

此外，

$$|(\tilde{u})^{-1} - u^{-1}|_{\tilde{F}} \leq \frac{\varepsilon}{\mu}$$

证明。该陈述与经典情形并无不同，因此这里不再证明。证明可见于 [**DG96**]。□

引理 6.32（归纳引理）。设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为紧的。

$$H(\phi, I) = \hat{h}(I) + R(\phi, I)$$

其中，$\hat{h}$ 按*6.1*中的定义，定义在定义域$\mathcal{D}\rho(G)$上；并且 $R(\phi, I)$ 在同一定义域上解析。设$\hat{u} = \frac{\partial h}{\partial I}$且 $u = \frac{\partial h}{\partial I}$。假设$|\frac{\partial}{\partial I}u|_{G,\rho_2} \leq M'$和 $|u|_G \leq L$。另外，假设 u 是非退化的：

$$\left|\frac{\partial u}{\partial I}v\right| \geq \mu|v| \quad \forall I \in \mathcal{G}.$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$设 $M > M$、 $L > L$ 和 $\tilde{\mu} < \mu$。假设 u 在 G 上是单射，并记为 $F = u(G)$。给定 $\tau > 0$、 $0 < \beta \leq 1$ 和 K。还假设

$$F \cap \Delta_{c,\hat{q}}\left(K, \frac{\beta}{|k|_1^\tau}\right) = \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, |k|_1 \leq K, k \neq 0.$$

记 $\epsilon := \|DR\|_{G,\ \rho,\ c}$, $\eta := |R_0|_{G,\ \rho_2}$ 以及 $\xi := |\frac{\partial R_0}{\partial I}|_{G,\ \rho_2}$。

(1) $\rho_2 \leq \frac{\beta}{2MK^{\tau+1}}$

(2) $\epsilon \leq \min\left(\frac{\beta\hat{\delta}_c}{74AK^\tau}, \frac{\tilde{\mu}^2(\rho_2 - \delta_2)}{4\tilde{M}}\right)$

(3) $\xi \leq \min\left((\tilde{M} - M)\delta_2/\mathcal{R}, (\mu - \tilde{\mu})\rho_2\right)$

那么，存在一个实正则变换

$$\Phi : \mathcal{D}_{\rho - \frac{\delta}{2}}(G) \to \mathcal{D}_\rho(G)$$

$\tilde{}$以及分解 $H \circ \Phi = \hat{h}(I) + \tilde{R}(\phi, I)$。记 $\tilde{u} = \frac{\partial}{\partial I}\tilde{h}$，有。

(1) $|\tilde{u} - u|_{G,\rho_2} = \xi, \quad |\tilde{h} - h|_{G,\rho_2} = \eta,$

(2) $\tilde{\epsilon} := \|D\tilde{R}\|_{G,\rho-\delta,c} \leq e^{-K\delta_1}\epsilon + \frac{14AK^\tau}{\beta\hat{\delta}_c}\epsilon^2,$

(3) $\tilde{\eta} := |\tilde{R}_0|_{G,\rho_2 - \frac{\delta_2}{2}} \leq \frac{7AK^\tau}{c\beta}\epsilon^2,$

(4) $|\Phi - Id|_{G,\rho-\frac{\delta}{2},c} \leq \frac{2AK^\tau}{\beta}\epsilon,$

(5) $\left|\frac{\partial}{\partial I}\tilde{u}\right|_{G,\rho_2} \leq \tilde{M}'$, $|\tilde{u}|_G \leq \tilde{L},$

(6) $|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial I}v| \geq \tilde{\mu}|v| \quad \forall I \in \mathcal{G},$

(7) Given a subset $\tilde{F} \subset F - \frac{4M\epsilon}{\tilde{\mu}}$, $\tilde{G}(\tilde{u})^{-1}(\tilde{F})$ *the map* $\tilde{u}$ *is one-to-one from* $\tilde{G}$ *to* $\tilde{F}$, $\tilde{G} \subset G - \frac{2\epsilon}{\tilde{\mu}}$, $u(\tilde{G}) \supset \tilde{F} - \epsilon$. *Moreover* $|\tilde{u}^{-1} - u^{-1}|_{\tilde{F}} \leq \epsilon/\mu$.

证明。集合 $u(I)$ 关于 ω 是 $\beta/K^\tau, K$-非共振的。这意味着

$$|k_1\mathcal{B}(I_1)u_1 + \bar{k}\bar{u} + \mathcal{A}(I_1)u_1| \geq \beta/K^\tau. \geq \frac{\beta}{|k|_1^\tau} \geq \frac{\beta}{K^\tau}. \tag{6.12}$$

那么 $\rho_2 \leq \frac{\beta/K^\tau}{2MK} = \frac{\beta}{2MK^{\tau+1}}$，$\|DR\|_{G,\rho,c} \leq \frac{\beta/K^\tau}{74A} \delta_c = \frac{\beta}{74AK^\tau}\delta_c$。我们应用迭代引理（定理 6.25）得到 $\Phi: D^{\rho-\frac{\delta}{2}}(G) \to D^\rho(G)$，使得 $H \circ \Phi = h + R$，其中 $h = h + R_0$。

我们剔除了相对于 ω 不满足 β/K^τ，K-非共振条件的点。由于条件 1 和 2，我们可以应用迭代引理。现在让我们证明陈述中的每一点。

（1）根据定义，我们知道 $\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial I} = \frac{\partial (h+R_0)}{\partial I} = \frac{\partial h}{\partial I} + \frac{R_0}{\partial I}$，因此：

$$|\tilde{u} - u|_{G,\rho_2} = |\frac{\partial h}{\partial I} + \frac{\partial R_0}{\partial I} - \frac{\partial h}{\partial I}|_{G,\rho_2} = |\frac{\partial R_0}{\partial I}|_{G,\rho_2} = \xi$$

$$\tilde{h} = h + R_0 \Rightarrow |\tilde{h} - h|_{G,\rho_2} = |h + R_0 - h|_{G,\rho_2} = |R_0|_{G,\rho_2} = \eta$$

（2）根据迭代引理：

$$\begin{aligned} \|D\tilde{R}\|_{G,\rho-\delta,c} &\leq e^{-K\delta_1}\|DR\|_{G,\rho,c} + \frac{14A}{\alpha\delta_c}\|DR\|_{G,\rho,c} \\ &\leq e^{-K\delta_1}\varepsilon + \frac{14A}{\alpha\delta_c}\varepsilon^2 \\ &= e^{-K\delta_1}\varepsilon + \frac{14AK^\tau}{\beta\delta_c}\varepsilon^2, \end{aligned}$$

其中我们使用了 $\alpha = \frac{\beta}{K^\tau}$。

（3）此处我们使用了迭代引理（定理 6.25）证明中所用的一个不等式。

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_0|_{G,\rho_2-\delta_2/2} &\leq |r_2(h,W,1) + r_1(R,W,1)|_{G,\rho_2-\delta_2/2} \\ &\leq \frac{7A}{\alpha c}\|DR\|^2_{G,\rho,c} = \frac{7AK^\tau}{\beta}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

（4）同样利用迭代引理：

$$|\Phi - \mathrm{id}|_{G,\rho-\delta/2,c} \leq \frac{2A}{\alpha}\|DR\|_{G,\rho,c} = \frac{2AK^\tau}{\beta}\|DR\|_{G,\rho,c}.$$

（5）回顾 $|\frac{\partial}{\partial I}A^\omega\tilde{u}|_{G,\rho_2-\delta_2} \leq \tilde{M}$, $|\tilde{u}|_G \leq \tilde{L}$, $\tilde{h} = h + R_0$, $|\frac{\partial}{\partial I}A^\omega u|_{G,\rho_2} \leq M$, $|u|_G \leq L$。注意，$A(I_1) \leq m \cdot \max_j(q_j)/\min_j(c_j)$，且 $B(I_1) \leq 1/\min_j(c_j)$。因此，$A(I_1) + B(I_1) \leq \max_j(q_j)/\min_j(c_j) + 1/\min_j(c_j) := R$，并且有 $|A^\omega| \leq R$。

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial I}A^\omega\tilde{u}|_{G,\rho_2-\delta_2} &= |\frac{\partial}{\partial I}A^\omega\tilde{u} + \frac{\partial}{\partial I}A^\omega u - \frac{\partial}{\partial I}A^\omega u|_{G,\rho_2-\delta_2} \\ &\leq |\frac{\partial}{\partial I}A^\omega(\tilde{u} - u)|_{G,\rho_2-\delta_2} + |\frac{\partial}{\partial I}A^\omega u|_{G,\rho_2-\delta_2} \\ &\leq |\frac{\partial}{\partial I}A^\omega R_0|_{G,\rho_2-\delta_2} + M \\ &\leq \frac{|A^\omega|_{G,\rho_2}|R_0|_{G,\rho}}{\delta_2} + M \\ &\leq \frac{|A^\omega|_{G,\rho_2}\cdot\xi}{\delta_2} + M \\ &\leq \frac{\mathcal{R}\xi}{\delta_2} + M \\ &\leq \frac{(\frac{(\tilde{M}-M)\delta_2}{\mathcal{R}})\mathcal{R}}{\delta_2} + M \leq \tilde{M} - M + M = \tilde{M}, \end{aligned}$$

其中 $\xi \leq (M - M)\delta_2/R$。

(6) 我们知道，对于所有 $I\in\mathsf{G}$，都有 $|\frac{\partial u}{\partial I}(I)v|\geq\mu|v|$，于是 $|\frac{\partial u}{\partial I}(I)v|_G\geq\mu|v|$。如果 $\mu'<\mu$，我们想求出 $|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial I}(I)v|_G\geq\mu'|v|$。

$$\begin{aligned}|\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial I}v|_G &= |(\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial I}+\tfrac{\partial u}{\partial I}-\tfrac{\partial u}{\partial I})v|_G\\ &= |(\tfrac{\partial^2R_0}{\partial I^2}+\tfrac{\partial u}{\partial I})v|_G\\ &\geq -|\tfrac{\partial^2R_0}{\partial I^2}v|_G+|\tfrac{\partial u}{\partial I}v|_G\\ &\geq \mu|v|-|\tfrac{\partial^2R_0}{\partial I^2}|_G|v|\\ &\geq \mu|v|-|\tfrac{\partial R_0}{\partial I}|_G\tfrac{1}{\delta_2}|v|\\ &\geq \mu|v|-\tfrac{\xi}{\rho_2}|v|=(\mu-\xi/\rho_2)|v|\geq\mu'|v|,\end{aligned}$$

这里我们用到了 $|\frac{\partial^2R_0}{\partial I^2}|_G\leq|\frac{\partial R_0}{\partial I}|\frac{1}{\rho_2}$，并且还用到了 $\mu'<\mu-\xi/\rho_2$，因此 $\xi\leq(\mu-\mu')\rho_2$。

(7) 要应用引理 6.31，我们只需验证 $\varepsilon\leq\frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{M}_2}$。 $\tilde{M}_2$ 可以选取得使得 $|\frac{\partial^2u}{\partial I^2}|_G\leq\tilde{M}_2$。注意 $|\frac{\partial^2u}{\partial I^2}|_G\leq|\frac{\partial^2u}{\partial I^2}|_{G,\rho_2-\delta_2}$。

$$\begin{aligned}|\tfrac{\partial u}{\partial I}|_{G,\rho_2-\delta_2}\leq\tilde{M} &\Rightarrow |\tfrac{\partial^2u}{\partial I^2}|_{G,\rho_2-\delta_2}(\rho_2-\delta_2)\leq|\tfrac{\partial u}{\partial I}|_{G,\rho_2-\delta_2}\leq\tilde{M}\\ &\Rightarrow |\tfrac{\partial^2u}{\partial I^2}|_{G,\rho_2-\delta_2}\leq\tfrac{\tilde{M}}{\rho_2-\delta_2}=\tilde{M}_2\\ &\Rightarrow |\tfrac{\partial^2u}{\partial I^2}|_G\leq\tilde{M}_2\end{aligned}$$

那么，当且仅当 $\varepsilon\leq\frac{\tilde{M}}{4\tilde{M}_2}$ 当且仅当 $\varepsilon\leq\mu^2/(4\tilde{M}(\rho_2-\delta_2))$，当且仅当 $\varepsilon\leq\frac{\mu^2}{(\rho_2-\delta_2)4\tilde{M}}$，而这正是陈述中的假设。

□

6.3. 关于 b^m-辛流形的 KAM 定理

定理 B（一个 b^m-KAM 定理）。设 $\mathsf{G}\subset\mathbb{R}^n, n\geq2$ 为一个紧集。设 $H(\phi,I)=\hat{h}(I)+f(\phi,I)$，其中 $\hat{h}$ 是定义在 $\mathsf{D}\rho(G)$ 上的一个 b^m-函数 $\hat{h}(I)=h(I)+q_0\log(I_1)+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{q_i}{I_1^i}$，且 $h(I)$ 和 $f(\phi,I)$ 为解析函数。设 $\hat{u}=\frac{\partial h}{\partial I}$ 和 $u=\frac{\partial h}{\partial I}$。假设 $|\frac{\partial u}{\partial I}|_{G,\rho_2}\leq M, |u|_{\mathcal{G}}\leq L$。假设 u 是 μ 非退化的（$|\frac{\partial u}{\partial I}v|\geq\mu|v|$ 对于某个 $\mu\in\mathbb{R}^+$ 和 G。取 $a=16M$。假设 u 在 G 上为单射，且其值域 $F=u(\mathsf{G})$ 是一个 D-集。设 $\tau>n-1,\gamma>0$ 和 $0<\nu<1$。设

(1)

$$\varepsilon:=\|f\|_{\mathcal{G},\rho}\leq\frac{\nu^2\mu^2\hat{\rho}^{2\tau+2}}{2^{4\tau+32}L^6M^3}\gamma^2, \tag{6.13}$$

(2)

$$\gamma\leq\min(\frac{8LM\rho_2}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}},\frac{L}{\mathcal{K}'}) \tag{6.14}$$

(3)

$$\mu\leq\min(2^{\tau+5}L^2M,2^7\rho_1L^4K^{\tau+1},\beta\nu^{\tau+1}2^{2\tau+1}\rho_1^\tau), \tag{6.15}$$

其中 $\hat{\rho}:=\min\left(\frac{\rho_1}{12},\frac{1}{\nu\rho_1(\tau+2)}\right)$。定义集合 $\hat{G}=\hat{G}_\gamma:=\{I\in\mathsf{G}-\frac{2}{\mu}|u(I)$ 是 τ，γ，c，$\hat{q}$–$Dioph.\}$。那么，存在一个实连续映射 $\mathsf{T}:\mathsf{W}^{\rho_1}_4(\mathbb{T}^n)\times\hat{G}\to\mathsf{D}\rho(\mathsf{G})$，它关于角变量是解析的，使得

(1) 对于所有 $I\in\hat{G}$，集合 $\mathsf{T}(\mathbb{T}^n\times\{I\})$ 是 H 的不变环面，其频率向量等于 $u(I)$。

(2) 将 T $(\phi,\ I)\ =(\phi+\mathrm{T}_{\phi}(\phi,\ I)\ I+\mathrm{T}_{I}(\phi,\ I))$ 写成带估计的形式

$$|\mathcal{T}_{\phi}(\phi,I)|\leq\frac{2^{2\tau+15}ML^{2}}{\nu^{2}\hat{\rho}^{2\tau+1}}\frac{\varepsilon}{\gamma^{2}}$$

$$|\mathcal{T}_{I}(\phi,I))|\leq\frac{2^{10+\tau}L(1+M)}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}}\frac{\varepsilon}{\gamma}$$

(3) 测度$[(\mathbb{T}^{n}\times\mathrm{G})\backslash\mathrm{T}\ (\mathbb{T}^{n}\times\hat{G})]\leq C\gamma$，其中 C 是一个非常复杂的常数，取决于 n、μ、 D、$\mathrm{diam}F$、 M、 τ、 ρ_{1}、 ρ_{2}、 K 和 L。

证明。这一证明与 $[\mathbf{DG96}]$ 中的证明一样，将分为六个部分。首先，我们定义构造微分同胚的每次迭代中使用的参数。之后，我们证明可以应用归纳引理 6.32，并给出利用归纳引理结果得到的某个界。接下来，我们发现所构造的频率向量序列和微分同胚序列实际上是收敛的。然后，我们估计所构造的正则变换的各个分量。接着，我们找到识别不变环面的方法，最后给出不变环面集合的测度界。

（1）参数的选择

我们将反复使用命题6.32。因此，需要为每次迭代妥善定义命题陈述中的所有参数。令:

$$\left\{\begin{array}{rcl}M_{q}&=&(2-\frac{1}{2^{q}})M,\\L_{q}&=&(2-\frac{1}{2^{q}})L,\\\mu_{q}&=&(1+\frac{1}{2^{q}})\frac{\mu}{2}.\end{array}\right.$$

注意，当 $q\to\infty$ 时， M_{q},L_{q} 从 M 到 $2M$ 以及从 L 到 $2L$ 单调递增。另一方面， μ_{q} 从 μ 到 $\mu/2$ 单调递减。此外，令:

$$\left\{\begin{array}{rcl}K_{0}&=&0,\\K_{q}&=&K\cdot q^{q-1},q\geq1,\end{array}\right.$$

其中， K 是大于或等于 $1/\hat{}\rho$ 且大于或等于 $(\frac{\nu\beta}{\mu^{2^{2\tau+12}}})^{1/\tau}$ 的最小自然数。此外， $\beta:=\gamma/L\leq1$，并且

$$\left\{\begin{array}{rcl}\rho^{(q)}&=&(\rho_{1}^{(q)},\rho_{2}^{(q)}),\\\rho_{1}^{(q)}&=&(1+\frac{1}{2^{\nu q}})\frac{\rho_{1}}{4},\\\rho_{2}^{(q)}&=&\frac{\nu\beta}{32MK_{q+1}^{\tau+1}}.\end{array}\right.$$

注意， $\rho_{1}^{(q)}$ 从 $\rho_{1}/2$ 单调递减至 $\rho_{1}/4$。此外， $\rho_{2}^{(q)}$ 递减至 0。我们还记:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\delta_{1}^{(q)}&=&\rho_{1}^{(q-1)}-\rho_{1}^{(q)},\\\delta_{2}^{(q)}&=&\rho_{2}^{(q-1)}-\rho_{2}^{(q)},\\c_{q}&=&\frac{\delta_{2}^{(q)}}{\delta_{1}^{(q)}}.\end{array}\right.$$

注意

$$\begin{aligned}\delta_1^{(q)} &= \left(1+\frac{1}{2^{\nu(q-1}}\right)\frac{\rho_1}{4}-\left(1+\frac{1}{2^{\nu q}}\right)\frac{\rho_1}{4}\\ &= \left(\frac{1}{2^{\nu(q-1)}}-\frac{1}{2^{\nu q}}\right)\frac{\rho_1}{4}\\ &= \frac{1-1/2^{\nu}}{2^{\nu(q-1)}}\frac{\rho_1}{4}.\end{aligned}$$

此外，由于 $0<\nu<1$，于是 $\nu/2\leq 1-1/2^{\nu}\leq\nu$。将其代入前一个方程，我们得到:

$$\frac{\nu\rho_1}{2^{\nu(q-1)}8}\leq\delta_1^{(q)}\leq\frac{\nu\rho_1}{2^{\nu(q-1)}4}. \tag{6.16}$$

此外,

$$\begin{aligned}\delta_2^{(q)} &= \frac{\nu\beta}{32MK_q^{\tau+1}}-\frac{\nu\beta}{32MK_{q+1}^{\tau+1}}\\ &= \frac{\nu\beta}{32M(K2^{q-1})^{\tau+1}}-\frac{\nu\beta}{32M(K2^{q})^{\tau+1}}\\ &= \frac{\nu\beta}{32M(K2^{q-1})^{\tau+1}}\left(1-\frac{1}{2^{\tau+1}}\right).\end{aligned}$$

此外，由于 $\tau>0$，于是 $1/2\leq(1-1/2^{\tau+1})\leq 1$。将其代入前一个方程:

$$\frac{\nu\beta}{64MK_q^{\tau+1}}\leq\delta_2^{(q)}\leq\frac{\nu\beta}{32MK_q^{\tau+1}}. \tag{6.17}$$

利用方程 6.16 和 6.17，我们可以得到 c_q 的界

$$\begin{cases} c_q &\leq \dfrac{\left(\frac{\nu\beta}{32MK_q^{\tau+1}}\right)}{\left(\frac{\nu\rho_1}{2^{\nu(q-1)}}\right)}=\dfrac{\beta 2^{\nu(q-1)}}{4MK_q^{\tau+1}\rho_1},\\ c_q &\geq \dfrac{\left(\frac{\nu\beta}{64MK_q^{\tau+1}}\right)}{\left(\frac{\nu\rho_1}{2^{\nu(q-1)}4}\right)}=\dfrac{\beta 2^{\nu(q-1)}}{16MK_q^{\tau+1}\rho_1}.\end{cases}$$

然后，我们还定义

$$\begin{cases}\beta_q &= (1-\frac{1}{2^{\nu q}})\beta,\\ \beta_q' &= \frac{\beta_q+\beta_{q+1}}{2}.\end{cases}$$

注意到，β_q 和 β_q' 都趋于 β。还要注意，$\beta_q'\geq\frac{\nu}{4}\beta$，因为:

$$\begin{aligned}\beta_q' &= \frac{\beta_q+\beta_{q+1}}{2}\\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{2^{\nu q}}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{\nu(q+1)}}\right)}{2}\beta\\ &= \left(1-\left(\frac{1+\frac{1}{2^{\nu}}}{2^{\nu q}}\right)\frac{1}{2}\right)\beta\\ &\geq \left(1-(1-1/2^{\nu})\frac{1}{2}\right)\beta\geq\frac{\nu}{4}\beta.\end{aligned}$$

由于 K 是满足 $K\geq 1/\hat{}\rho$ 的最小自然数，因此 $K\leq 2/\hat{}\rho$。所以 $\hat{}\rho\leq\frac{2}{K}$。此外

$$\frac{1}{\hat{\rho}^{\tau+1}}\geq\left(\frac{K}{2}\right)^{\tau+1}.$$

回顾一下，$\hat{}\rho=\min(\frac{\nu\rho_1}{12^{(\tau+2)}},1)$，尤其是 $\hat{}\rho\leq\nu\rho_1$ 和 $\hat{}\rho\leq 1$。

根据定义 $\gamma \le \frac{8LM\rho_2}{\nu}\hat{\rho}^{\tau+1}$。又因为 $\beta=\gamma/L$:

$$\beta L \le \frac{8LM\rho_2}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}} \le \frac{8LM\rho_2 K^{\tau+1}}{\nu}.$$

由于我们假设了 $\varepsilon \le \frac{\nu^2\mu^2\hat{\rho}^{2\tau+2}}{2^{4\tau+32}L^6M^3}\gamma^2$，于是利用 $\gamma=L\beta$ 和 $\hat{\rho}\le 2/K$:

$$\varepsilon \le \frac{\nu^2\mu^2\left(\frac{2}{K}\right)^{2\tau+2}}{2^{4\tau+32}L^6M^3} \le \frac{\nu^2\mu^2\beta^2}{2^{4\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+2}}. \tag{6.18}$$

同样再次利用假设 $\varepsilon \le \frac{\nu^2\mu^2\hat{\rho}^{2\tau+2}}{2^{4\tau+32}L^6M^3}\gamma^2$，我们要证明

$$\varepsilon \le \frac{\nu^3\rho_1\beta^2}{2^{2\tau+22}MK^{2\tau+1}}. \tag{6.19}$$

只需验证:

$$\frac{\nu^2\mu^2\hat{\rho}^{2\tau+2}L^2\beta^2}{2^{4\tau+32}L^6M^3} \le \frac{\nu^3\rho_1\beta^2}{2^{2\tau+22}MK^{2\tau+1}}$$

其中我们用到了 $\gamma=L\beta$。现在注意到 $\hat{\rho}\le\nu\rho_1$，只需证明

$$\frac{\nu^2\mu^2\nu^{2\tau+2}\rho_1^{2\tau+2}L^2\beta^2}{2^{4\tau+32}L^6M^3} \le \frac{\nu^3\rho_1\beta^2}{2^{2\tau+22}MK^{2\tau+1}},$$

这可化简为

$$\frac{\mu^2\rho_1^{2\tau+2}}{2^{4\tau+10}L^4M^2} \le \frac{1}{K^{2\tau+1}}.$$

利用 $K\ge 1/(\nu\rho_1)$，只需验证

$$\frac{\mu^2\rho_1^{2\tau+1}\nu^{2\tau+2}}{2^{2\tau+12}L^4M^2} \le (\nu\rho_1)^{2\tau+1},$$

这成立当且仅当 $\mu\le 2^{\tau+5}L^2M$，正如我们所假设的。

（2）归纳法

取 $G_0=\mathsf{G}$。现在的目标是构造一个递减的紧集序列 $G_q\subset\mathsf{G}$，以及一个实解析正则变换序列

$$\Phi^{(q)}:\mathcal{D}_{\rho^{(q)}}(G_q)\to\mathcal{D}_{\rho^{(q-1)}}(G_{q-1}),\quad q\ge 1.$$

记 $\Psi^{(q)}=\Phi^1\circ\cdots\circ\Phi^{(q)}$，变换后的哈密顿函数记为 $H^{(q)}=H\circ\Psi^{(q)}=\hat{h}^{(q)}(I)+R^{(q)}(\phi,I)$。此外，$u^{(q)}=\frac{\partial h^{(q)}}{\partial I}$ 和 $\hat{u}^{(q)}=\frac{\partial\hat{h}^{(q)}}{\partial I}$。

我们将证明以下界对所有 $q\ge 0$ 都成立:

(a) $\varepsilon_q:=\|DR^{(q)}\|_{G_q,\rho^{(q)},c_{q+1}}\le\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)q}}$,

(b) $\eta_q:=|R_0^{(q)}|_{G_q,\rho_2^{(q)}}\le\frac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)q}}$ and $\xi_q:=|\frac{\partial R_0^{(q)}}{\partial I}|_{G_q,\rho_2^{(q)}}\le\frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)q}}$,

(c) $|\frac{\partial^2 h^{(q)}}{\partial I^2}|_{G_q,\rho_2^{(q)}}\le M_q,\quad |u^{(q)}|\le L_q\quad\forall I\in G_q$,

(d) $u^{(q)}$ is μ_q-non-degenerate on G_q,

(e) $u^{(q)}$ 在 G_q 上是单射，且 $u^{(q)}(G_q) = F_q$，其中我们定义：

$$F_q := (F - \beta_q) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}} \Delta_{c_q,\hat{q}}(K, \frac{\beta_q}{|k|_1^\tau})$$

为证明这一点，我们采用归纳法。对于 $q = 0$:

$$\begin{cases} G_0 = \mathcal{G}, \\ h^{(0)} = h, \hat{h}^{(0)} = \hat{h}, \\ R^{(0)} = f. \end{cases}$$

使用上一点中的定义：

$$\begin{cases} \rho_1^{(0)} &= (1+1)\frac{\rho_1}{4} = \rho_1/2, \\ \rho_2^{(0)} &= \frac{\nu\beta}{32MK^{\tau+1}} \le \frac{\rho_2}{2}, \end{cases}$$

在最后一个不等式中，我们用到了 $\beta \le \frac{8M\rho_2 K^{\tau+1}}{\nu}$，因此 $\rho_2 \ge \frac{\beta\nu}{8MK^{\tau+1}}$。于是，

$$\varepsilon_0 = \|Df\|_{G,\rho(0),c_1} = \|Df\|_{G,\rho(1)+\delta(1)}.$$

现在，利用 $|D\Upsilon|_{G,\ \rho-\delta,\ c} \le \frac{2|\Upsilon|_{G}}{\ \rho,\ c\hat{\delta}_c}$，同时注意到 $\hat{}\delta_{c_1}^{(1)} = \min(c_1\delta_1^{(1)},\ \delta_2^{(1)})$。于是，

$$\|Df\|_{G,\rho(1),c_1} \le \frac{c_1|f|_{G,\rho(0)}}{\hat{\delta}_{c_1}} \le \frac{|f|_{G,\rho(0)}}{\delta_1^{(1)}} \le \frac{|f|_{G,\rho(0)}8}{\nu\rho_1} = \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1},$$

这里我们用到了 $\delta_1^{(1)} \ge \frac{\nu\rho_1}{\ 8\ .2\nu(1-1)} = \frac{\nu\rho_1}{8}$。这就证明了 2a) 中归纳法的第一步。

现在来证明 2b) 的基例。一方面 $\eta_0 = |R_0^{(0)}|_{G_0,\rho_2(0)} \le \frac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)0}} = \varepsilon$，这是因为 $|R_0^{(0)}|_{G_0,\rho_2^{(0)}} \le |R^{(0)}|_{\mathcal{G},\rho^{(0)}} = |f|_{\mathcal{G},\rho(0)} = \epsilon$。另一方面 $\xi_0 = |\frac{\partial R_0^{(0)}}{\partial I}|_{G_0,\ \rho_2^{(0)}} \le |\frac{\partial R_0^{(0)}}{\partial I}|_{G_0,\rho_2-\rho_2/2} \le \frac{1}{\rho_2/2}\mathbf{k}R_0\mathbf{k}_{G,\rho} \le \frac{2\varepsilon}{\rho_2} \le \frac{\varepsilon}{\rho_2^{(0)}}$，其中我们用到了 $\rho_2(0) \le \rho_2/2 = \rho_2 - \rho_2/2$。

2c) 的基例显然成立，因为 $|\frac{\partial^2 h^{(0)}}{\partial I^2}|_{G_0,\ \rho_2^{(0)}} \le |\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}|_{\mathcal{G},\ \rho_2} = M = M_0$ 并且 $|u^{(0)}|_{G_0} = |u|_{\mathcal{G}} \le L = L_0$。

2d 的基例成立，因为 $u^{(0)} = u$ 在 $\mathsf{G} = G_0$ 中是 μ 非退化的。

2e 的基例成立，因为根据假设，$u^{(0)} = u$ 在 $G_0 = \mathsf{G}$ 中是单射的。$u^{(0)}(G_0) = F_0$ 其中 $F_0 = (F - \beta_0) \setminus \{\emptyset\} = F$，因为$K_0 = 0$ 并且 $\beta_0 = 0$。

对于 $q \ge 1$，我们假设这些陈述对 $q-1$ 成立，并证明它们对 q成立。我们将命题6.32（归纳引理）应用于 $H^{(q-1)} = h^{q-1} + R^{q-1}$，其中用 K_q 代替 K。

我们必须注意条件 $F \cap \Delta_{c,\ \hat{q}}(k,\ \frac{\beta}{|k|_1^\tau}) = \emptyset\ \forall k \in \mathbb{Z}^n,\ \ |k|_1 \le K_q$, $k \neq 0$ 以及定义

$$F_{q-1} := (F - \beta_{q-1}) \setminus \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \\ |k|_1 \le K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \frac{\beta_{q-1}}{|k|_1^\tau}),$$

因为必须将共振消除到 K_q 阶，而不是 K_{q-1} 阶。令我们定义

$$F'_{q-1} := (F - \beta_{q-1}) \setminus \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \\ |k|_1 \le K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \frac{\beta'_{q-1}}{|k|_1^\tau})$$

这里我们只是用 β'_{q-1} 替换了 β_{q-1}，因为当 $q = 1, \beta_{q-1} = 0$ 时，$\Delta_{c,\hat{q}}(k, \frac{\beta_{q-1}}{|k|_1^\tau})$ 没有意义。

相应地，令我们定义 $G'_{q-1} := (u^{(q-1)})^{-1}(F'_{q-1})$。将 $F, \beta, K, M, L, \mu, \rho, \delta, c, \tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{\mu}$ 分别替换为 $F'_{q-1}, \beta'_{q-1}, K_q, M_{q-1}, L_{q-1}, \mu_{q-1}, \rho^{(q-1)}, \delta^{(q)}, c_q, M_q, L_q, \mu_q$ 后，命题6.32中的条件将得到满足。此外还有 $a = 16M \ge 8M_q$。

现在我们将验证条件 1、2 和 3 均成立，以便应用命题 6.32。

– 1 我们要验证 $\rho_2^{(q-1)} \le \frac{\beta'_{q-1}}{2M_q K_q^{\tau+1}}$。根据定义 $\rho_2^{q-1} = \frac{\nu\beta}{32MK_q^{\tau+1}} \le \frac{4\beta'_{q-1}}{32MK_q^{\tau+1}} \le \frac{\beta'_{q-1}}{8M_q K_q^{\tau+1}} \le \frac{\beta_{q-1}}{2M_q K_q^{\tau+1}}$，这里用到了 $M_q \ge M$。– 2 我们要验证 $\varepsilon_{q-1} \le \min\left(\beta_{q-1}\frac{\rho_c^{(q)}}{74A_q K_{q-1}^\tau},\ \frac{\mu_q^\tau(\rho_2^{(q-1)} - \delta_c^{(q-1)})}{4M}\right)$，where $A_q := 1 + \frac{2M_{q-1}c_q K_q^\tau}{\beta'_{q-1}}$.

N请注意：

$$\begin{aligned} A_q &:= 1 + \frac{2M_{q-1}c_q K_q^\tau}{\beta'_{q-1}} \\ &\le 1 + \frac{8M_{q-1}c_q K_q^\tau}{\nu\beta} \\ &\le 1 + \frac{8M_{q-1}\beta 2^{\nu(q-1)} K_q^\tau}{4MK_q^{\tau+1}\rho_1\nu\beta} \\ &= 1 + \frac{2M_{q-1}2^{\nu(q-1)}}{MK_q\rho_1\nu} \\ &= 1 + \frac{2M_{q-1}2^{\nu(q-1)}}{MK2^{q-1}\rho_1\nu} \\ &\le 1 + \frac{4M2^{q-1}}{MK2^{q-1}\rho_1\nu} \\ &= 1 + \frac{4}{K\rho_1\nu} \le 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

首先，我们验证 $\varepsilon_{q-1} \le \beta_{q-1}\frac{\rho_c^{(q)}}{74A_q K_{q-1}^\tau}$。

根据归纳假设，我们知道 $\varepsilon_{q-1} \le \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}$。因此，只需证明

$$\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}} \le \frac{\beta'_{q-1}\delta_2^{(q)}}{75 \cdot 5K_q^\tau}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{\beta'_{q-1}\delta_2^{(q)}}{379K_q^\tau} &\geq \frac{\nu\beta}{4}\frac{\nu\beta}{64MK_q^{\tau+1}}\frac{1}{37K_q^\tau}\\ &= \frac{\nu^2\beta^2}{4\cdot 64\cdot 370}\frac{1}{MK_q^{2\tau+1}}\\ &= \frac{\nu^2\beta^2}{4\cdot 64\cdot 370\cdot M2^{(q-1)(2\tau+1)}K^{2\tau+1}}.\end{aligned}$$

如果以下条件成立，那么该结论也成立:

$$\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1}\leq\frac{\nu^2\beta^2}{4\cdot 64\cdot 379\cdot K^{2\tau+1}M}\Leftrightarrow\varepsilon\leq\frac{\nu^3\beta^2\rho_1}{2^{12}135MK^{2\tau+1}}.$$

这是因为在上一节中我们已经看到，$\varepsilon\leq\frac{\nu^3\rho_1\beta^2}{2^{2\tau+30}MK^{2\tau+1}}$

现在让我们证明 $\varepsilon\leq\frac{\mu_q^2}{(\rho_2^{(q-1)}-\delta_2^{(q-1)})2M_q}$。首先注意到 $(\rho_2^{(q-1)}-\delta_2^{(q)})=\rho_2^{(q)}$。因此，我们想要证明的内容等价于证明 $\varepsilon_{q-1}\leq\frac{\mu_q^2\rho_2^{(q)}}{2M_q}$。

另一方面，我们知道 $\varepsilon_{q-1}\leq\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}$。同时还要注意，$\frac{\mu_q^2\rho_2^{(q)}}{2M_q}\geq(\mu/2)^2\frac{\nu\beta}{32MK^{\tau+1}}=\frac{\mu^2\nu\beta}{2^8M^2K^{\tau+1}}$。

如果能够验证 $\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}\leq\frac{\mu\nu\beta}{2^8M^2K^{\tau+1}}$，我们就可以放心了。前一个方程成立，当且仅当以下条件成立:

$$\varepsilon\leq\frac{\mu\nu^2\beta\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}{2^{11}M^2K^{\tau+1}}.$$

如果我们事先知道 $\varepsilon\leq\frac{\mu\nu^2\beta\rho_1 2^{-(2\tau+2)}}{2^{11}M^2K^{\tau+1}}=\frac{\mu\nu^2\beta\rho_1}{2^{2\tau+13}M^2K^{\tau+1}}$，那么就完成了。

但我们还知道

$$\epsilon\leq\frac{\nu^2\mu^2\beta^2}{2^{2\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+2}}.$$

因此，只需验证

$$\frac{\nu^2\mu^2\beta^2}{2^{2\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+2}}\leq\frac{\mu\nu^2\beta\rho_1}{2^{2\tau+13}M^2K^{\tau+1}}.$$

这成立是因为 $\mu\leq 2^7\rho_1L^4K^{\tau+1}$

– 3 最后，我们想要说明

$$\xi_{q-1}\leq\min((M_q-M_{q-1})\frac{\delta_2^{(q)}}{\mathcal{R}},(\mu_{q-1}-\mu_q)\rho_2^{(q-1)}).$$

注意，R 不依赖于 q，因为在每次迭代中，$\hat{h}^{(q)}$奇异部分都没有改变。$\hat{h}^{(q)}=\hat{h}^{(q)}+R_0^{(q)}$ 且 R_0 是仅依赖于作用坐标的解析函数。根据归纳假设，我们知道

$$\xi_{q-1}=|\frac{\partial R_0^{(q)}}{\partial I}|_{G_q,\rho_2^{(q)}}\leq\frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)q}}.$$

我们将分别检查这两个不同的不等式

(a) $\xi_{q-1} \leq (M_q - M_{q-1})\frac{\delta_2^{(q)}}{}\mathcal{R}$。注意，$M_q = (2 - \frac{1}{2^q})M$，则 $M_q - M_{q-1} = \frac{M}{2^q}$。

$$\begin{aligned}\delta_2^{(q)} &\geq \frac{\nu\beta}{64M(K2^{q-1})^{\tau+1}} \geq \frac{\nu\beta}{64M(K2^q)^{\tau+1}} \\ &= \frac{\nu\beta}{64MK^{\tau+1}}\frac{1}{2^{q\tau+q}}.\end{aligned}$$

We deduce

$$(M_q - M_{q-1})\delta_2^{(q)} \geq \frac{\nu\beta}{64K^{\tau+1}}\frac{1}{2^{\tau q+2q}}.$$

因此，我们只需验证

$$\frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)q}} \leq \frac{\nu\beta}{64K^{\tau+1}}\frac{1}{2^{\tau q+2q}}.$$

前一个条件成立，当且仅当

$$\frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta} \leq \frac{\nu\beta}{2^6K^{\tau+1}} \Leftrightarrow \varepsilon \leq \frac{\nu^2\beta^2}{2K^{2\tau+2}M}.$$

另一方面，我们再次利用 $\varepsilon \leq \frac{\nu^2\mu^2\beta^2}{2^{2\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+2}}$。若将条件 $\mu \leq 2^{\tau+6}L^2M$ 应用于最后一个表达式，则得到:

$$\varepsilon \leq \frac{\nu^2\beta^2 2^{2\tau+12}L^4M^2}{2^{2\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+2}} = \frac{\nu^2\beta^2}{2^8K^{2\tau+2}M}.$$

(b) $\xi_{q-1} \leq (\mu_{q-1} - \mu_q)\rho_2^{(q-1)}$.
Observe that

$$\begin{aligned}\mu_q &= (1 + \frac{1}{2^q})\frac{\mu}{2}, \\ (\mu_{q-1} - \mu_q) &= ((1 + \frac{1}{2^{q-1}}) - (1 + \frac{1}{2^q}))\frac{\mu}{2} = (\frac{1}{2^{q-1}} - \frac{1}{2^q})\frac{\mu}{2} \\ &= \left(\frac{2-1}{2^q}\right)\frac{\mu}{2} = \frac{1}{2^q}\frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2^{q+1}}\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}\rho_2^{(q-1)} &= \frac{\nu\beta}{32MK_q^{\tau+1}} = \frac{\nu\beta}{32M(K2^{q-1})^{\tau+1}} \\ &\geq \frac{\nu\beta}{32MK^{\tau+1}2^{q(\tau+1)}}.\end{aligned}$$

于是,

$$(\mu_{q-1} - \mu_q)\rho_2^{(q-1)} \geq \frac{\mu}{2^{q+1}}\frac{\nu\beta}{32MK^{\tau+1}2^{q(\tau+1)}}.$$

那么我们只需验证

$$\begin{aligned}\frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{\tau q+2q-2}} &\leq \frac{\mu}{2^{q+1}}\frac{\nu\beta}{32MK^{\tau+1}2^{q(\tau+1)}} \\ &= \frac{\mu}{2^{\tau q+2q+1}}\frac{\nu\beta}{32MK^{\tau+1}}.\end{aligned}$$

当且仅当

$$\frac{MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{-2}} \le \frac{\mu}{2}\frac{\nu\beta}{32MK^{\tau+1}}.$$

那么，

$$\varepsilon \le \frac{\mu 2^{-2}}{2}\frac{\nu^2\beta^2}{32M^2K^{2\tau+2}} = \frac{\mu\nu^2\beta^2}{2^8M^2K^{2\tau+2}}.$$

但我们知道

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le \frac{\nu^2\mu^2\beta^2}{2^{\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+2}}\\ &\le \frac{\nu^2\mu 2^{\tau+5}L^4M\beta^2}{2^{\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+2}}\\ &= \frac{\nu^2\mu\beta^2}{2^25M^2K^{2\tau+2}}\\ &\le \frac{\mu\nu^2\beta^2}{2^8M^2K^{2\tau+2}}\end{aligned}$$

正如我们所希望的那样。在第二个不等式中，我们用到了 $\mu \le 2^{\tau+5}L^4M$。

因此，最后，我们可以使用本节前面提到的参数应用归纳引理6.32。由此得到一个正则变换 $\Phi^{(q)}$ 以及变换后的哈密顿量 $H^{(q)} = h^{(q)} + R^{(q)}$。新的定义域 $G_q \subset G'_{q-1}$ 将在下文中给出。现在我们将证明 2a、2b、2c、2d、2e。

– 2a. We want to see $\varepsilon_q := \|DR^{(q)}\|_{G_q,\rho^{(q)},c_{q+1}} \le \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)q}}$.
根据命题6.32的第二个结果，我们有：

$$\varepsilon_q \le e^{-K_q\delta_1^{(q)}}\varepsilon_{q-1} + \frac{14A_qK_q^\tau}{\beta'_{q-1}\delta_2^{(q)}}\varepsilon_{q-1}^2. \tag{6.20}$$

现在我们将逐项估计该表达式右侧各项的界。

回忆一下，$\delta_1^{(q)} \ge \frac{\nu\rho_1}{82^{\nu(q-1)}}$。

$$\begin{aligned}K_q\delta_1^{(q)} &\ge K2^{q-1}\tfrac{\nu\rho_1}{8}2^{-\nu(q-1)}\\ &= \tfrac{\nu\rho_1}{8}K2^{(1-\nu)(q-1)}\\ &\ge \tfrac{12^{(\tau+2)}}{8}2^{(1-\nu)(q-1)}\\ &= (3/2\tau+3)2(1-\nu)(q-1)\\ &\ge (2\tau+3)\tfrac{3}{4} \ge (2\tau+3)\ln 2,\end{aligned}$$

这里用到了 $K\hat{}\rho \ge 1$，因此 $K \ge {}^{12}{}_{(\tau+2)}\ {}_{\nu\rho_1}$。由此可得 $e^{-K_q\delta_1^{(q)}} \le \frac{1}{2^{2\tau+3}}$，从而得到了式 6.20 中第一项的界。接下来估计第二项。

一方面，我们有

$$\frac{14A_qK_q^\tau}{\beta'_{q-1}} \le \frac{14\cdot 5K_q^\tau}{\frac{\nu\beta}{4}} \le \frac{2^9K_q^2}{\nu\beta}$$

其中我们用到了 $\beta'_q \ge \frac{\nu\beta}{4}$ 和 $A_q \le 5$。

现在我们将应用 $\varepsilon_{q-1} \leq \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}$, $\delta_2^{(q)} \geq \frac{\nu\beta}{64MK_q^{\tau+1}}$ 以及 $\epsilon \leq \frac{\nu^3\rho_1\beta^2}{2^{2\tau+22}MK^{2\tau+1}}$ 来得到

$$\begin{aligned}
\frac{14A_qK_q^\tau}{\beta'_{q-1}\delta_2^{(q)}}\varepsilon_{q-1} &= \frac{14A_qK_q^\tau}{\beta'_{q-1}}\frac{1}{\delta_2^{(q)}}\varepsilon_{q-1} \\
&\leq \frac{2^9K_q^\tau}{\nu\beta}\frac{64MK_q^{\tau+1}}{\nu\beta}\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}} \\
&\leq \frac{2^{18}MK_q^{2\tau+1}}{\nu^3\beta^2\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}\frac{\nu^3\rho_1\beta^2}{2^{2\tau+22}MK^{2\tau+1}} \\
&\leq 2^{18}2^{(q-1)(2\tau+1)-(2\tau+2)(q-1)-(2\tau+22)} \\
&= 2^{(1-q)}2^{-2\tau-4} = \frac{1}{2^{2\tau+3}2^{q-1}}.
\end{aligned}$$

由此得到 6.20 中第二项的界。现在我们将两个界合并:

$$\varepsilon_q \leq \frac{1}{2^{2\tau+3}}\varepsilon_{q-1} + \frac{1}{2^{2\tau+3}}\frac{1}{2^{q-1}}\varepsilon_{q-1} \leq \frac{1}{2^{2\tau+2}}\varepsilon_{q-1}.$$

That implies $\varepsilon_q \leq \frac{\epsilon}{2^{(2\tau+2)(q-1)}}$ as we wanted. Because we can assume $\nu\rho_1 \leq 1$.

– 2b
Let us write $\sigma_2^{(q)} = \rho_2^{(q-1)} - \delta_2^{(q)}/2 = \rho_2^{(q)} + \delta_2^{(q)}/2 \geq \rho_2^{(q)}$, then $\eta_q = |R_0^{(q)}|_{G_q,\rho_2^{(q)}} \leq |R_0^{(q)}|_{G_q,\sigma_2^{(q)}}$.
By the inductive lemma 6.32:

$$\begin{aligned}
\eta_q &\leq \frac{7A_qK_q^\tau}{c_q\beta'_{q-1}}\varepsilon_{q-1}^2 \\
&\leq \frac{7A_qK_q^\tau}{\beta'_{q-1}}\varepsilon_{q-1}^2\frac{\delta_1^{(q)}}{\delta_2^{(q)}} \\
&= \frac{14A_qK_q^\tau}{\beta'_{q-1}\delta_2^{(q)}}\varepsilon_{q-1}^2\frac{\delta_1^{(q)}}{2} \\
&\leq \frac{1}{2^{2\tau+3}2^{q-1}}\varepsilon_{q-1}\frac{\delta_1^{q)}}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{\delta_1^{(q)}}{2^{2\tau+3}2^{q-1}}\frac{\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}} \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{\nu\rho_1}{4\cdot 2^{\nu(q-1)}}\frac{1}{2^{2\tau+3}2^{q-1}}\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)q}}.
\end{aligned}$$

对于第二部分，我们只需应用柯西不等式:

$$\xi_q \leq \frac{2}{\delta_2^{(q)}}|R_0^q|_{G_q,\rho_2^{(q)}} \leq \frac{2}{\delta_2^{(q)}}\frac{\varepsilon}{2^{(2\tau+3)q}}.$$

– 2c 和 2d 直接由引理6.32得出。
– 2e 我们需要再次考虑引理6.32中的结果
其中 E_q 作为 $F_\circ$ 我们必须检查条件 $F_q \subset F'_{q-1} - \frac{4M_{q-1}\varepsilon_{q-1}}{\mu_q}$. 我们定义 $d_q := \frac{\beta_q-\beta_{q-1}}{2K_q^{\tau+1}}$。利用 $F'_{q-1} := (F-\beta_{q-1}) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\leq K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \beta'_{q-\frac{1}{|k|_1^\tau}})$ 我们有

$$F'_{q-1} - d_q \supset (F - (\beta_{q-1} + d_q)) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\leq K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \frac{\beta'_{q-1}}{|k|_1^\tau} + |k|d_q)。$$

此外,

$$\begin{cases} \beta_{q-1}+d_q &\leq \beta_q, \text{ and} \\ \frac{\beta'_{q-1}}{|k|_1^\tau}+|k|d_q &= \frac{\beta'_{q-1}+|k|_1^\tau|k|\frac{\beta_q-\beta_{q-1}}{2K_q^{\tau+1}}}{|k|_1^\tau} \\ &\leq \frac{\beta'_{q-1}+K_q^{\tau+1}\frac{\beta_q-\beta_{q-1}}{2K_q^{\tau+1}}}{|k|_1^\tau}=\frac{\beta'_{q-1}+\frac{\beta_q}{2}-\frac{\beta_{q-1}}{2}}{|k|_1^\tau}=\frac{\beta_q}{|k|_1^\tau}. \end{cases}$$

现在，如果我们看到 $\frac{4M_{q-1}\varepsilon_{q-1}}{\mu_q}\leq d_q$，就能得到所需的包含关系。注意，$\frac{4M_{q-1}}{\mu_q}\leq \frac{4\cdot 2M}{\mu/2}=\frac{16M}{\mu}$。因此，只需验证 $\frac{16M}{\mu}\varepsilon_{q-1}\leq d_q$。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{q-1} &\leq \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)q}} \\ &\leq \frac{8\nu^3\rho_1\beta^2}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)q}2^{(2\tau+22)}MK^{2\tau+1}} \\ &\leq \frac{8\nu^2\beta^2}{2^{(2\tau+2)q+2\tau+20}MK^{2\tau+1}} \\ &\leq \frac{8\nu^2\beta\frac{2(\beta_q-\beta_{q-1})}{\nu}}{2^{(\tau+1)q+(\tau+1)q+2\tau+20}MK^{2\tau+1}} \\ &= \frac{8\nu\beta 2(\beta_q-\beta_{q-1})}{2^{(\tau+1)+(\tau+1)q+2\tau+20}MK_q^{\tau+1}K^\tau} \\ &= \frac{8\nu\beta 2}{2^{(\tau+1)+(\tau+1)q+2\tau+19}MK^\tau}\frac{(\beta_q-\beta_{q-1})}{2K_q^{\tau+1}} \\ &= \frac{\nu\beta}{2^{(\tau+1)+(\tau+1)q+2\tau+15}MK^\tau}d_q \\ &\leq \frac{\nu\beta}{2^{3\tau+16}MK^\tau}dq. \end{aligned}$$

因此，只需证明以下结论:

$$\frac{16M}{\mu}\frac{\nu\beta}{2^{3\tau+16}MK^\tau}d_q\leq d_q.$$

当且仅当

$$\frac{16M}{\mu}\frac{\nu\beta}{2^{\tau+16}MK^\tau}\leq 1\Leftrightarrow K^\tau\geq\frac{\nu\beta}{\mu 2^{\tau+12}},$$

这是我们在选择 K时所作的假设。

(3) 微分同胚的收敛

现在我们将证明连续映射$u^{(q)}:G_q\to F_q$的收敛性

也就是说，我们想要证明存在适当集合 G^*,F^* 以及解析映射 u^*，使得 $u^{(q)}:G_q\to F_q$ 收敛到 $u^*:G^*\to F^*$。

我们像之前一样使用引理6.32。

对于 $q\geq 1$，我们得到

$$|u^{(q)}-u^{(q-1)}|_{G_q}\leq\xi_q \quad \text{and} \quad |(u^{(q)})^{-1}-(u^{(q-1)})^{-1}|_{F_q}\leq\frac{\varepsilon_q}{\mu_q}.$$

现在，由于以下两个不等式成立

$$\begin{cases} \xi_q &\leq \frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)q}} \\ \frac{\varepsilon_q}{\mu_q} &\leq \frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{2\tau+2}q}\frac{1}{(1+\frac{1}{2^q})^{\frac{\mu}{2}}}=\frac{8\varepsilon 2^{q-1}}{\nu\beta 2^{(2\tau+2)q}(2^q+1)\mu} \end{cases}$$

序列 u^q 和 $(u^{(q)})^{-1}$ 分别收敛到映射 u^* 和 Υ。这些映射定义在以下集合上:

$$\begin{aligned} G^* &:= \bigcap_{q\geq 0} G_q, \\ F^* &:= \bigcap_{q\geq 0} F_q = (F-\beta) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\} \\ |k|_1\leq K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \tfrac{\beta}{|k|_1^\tau}). \end{aligned}$$

第二个等式成立，因为 F^* 是紧集的交，因此是紧集。现在我们可以推导出

$$\begin{aligned} |u^* - u^{(q)}|_{G^*} &\leq \sum_{s\geq q} |u^{(q)} - u^{(q-1)}|_{G^*} \\ &\leq \sum_{s\geq q} |u^{(q)} - u^{(q-1)}|_{G} \\ &\leq \sum_{s\geq q} \xi_q. \end{aligned}$$

用同样的论证，我们可以看到 $|\Upsilon - (u^{(q)})^{-1}|_{F^*} \leq \ldots \leq \sum_{s\geq q} \frac{\varepsilon_q}{\mu_q}$。

接下来要证明 $G_q \subset G_{q-1} - \frac{2\varepsilon_{q-1}}{\mu_{q-1}}$ 和 $F_q \subset F_{q-1} - \frac{4M_{q-1}\varepsilon_{q-1}}{\mu_{q-1}}$。如果我们验证这一点并取极限，就会得到:

$$G^* \subset G_q - \sum_{s\geq q} \frac{2\varepsilon_q}{\mu_q} \quad \text{and} \quad F^* \subset F_q - \sum_{s\geq q} \frac{4M_q\varepsilon_q}{\mu_q}.$$

我们先来验证 $F_q \subset F_{q-1} - \frac{4M_{q-1}\varepsilon_{q-1}}{\mu_{q-1}}$。定义 $x := \frac{4M_{q-1}}{\mu_{q-1}}$。

$$\begin{aligned} F_{q-1} - x &\supset (F - (\beta_{q-1} + x)) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\} \\ |k|_1\leq K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \tfrac{\beta_{q-1}}{|k|_q^\tau} + |k|x) \\ &\supset (F - (\beta_{q-1} + x)) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\} \\ |k|_1\leq K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \tfrac{\beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}x}{|k|_q^\tau}). \end{aligned}$$

为了得到所需的包含关系，我们必须验证:

(a) $\beta_{q-1} + x \leq \beta_q$.

(b) $\frac{\beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}x}{|k|_1^\tau} \leq \frac{\beta_q}{|k|_1^\tau} \Leftrightarrow \beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}x$.

Since 既然第二个..... we 我们 will 将 check 检验第二个。

$$\begin{aligned} \beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}x &= \beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}\tfrac{4M_{q-1}\varepsilon_{q-1}}{\mu_{q-1}} \\ &\leq \beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}\tfrac{16M\varepsilon_{q-1}}{\mu} \\ &\leq \beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}d_q \\ &= \beta_{q-1} + K_q^{\tau+1}\tfrac{\beta_q - \beta_{q-1}}{2K_q^{\tau+1}} \\ &= \beta_{q-1} - \beta_{q-1}/2 + \beta_q/2 \\ &= \tfrac{\beta_{q-1}+\beta_q}{2} \\ &= \beta_q \end{aligned}$$

这里我们用到了 $16M\varepsilon_q/\mu \leq d_q$，并且 β_q 随着 q 单调递增。

包含关系 $G_q \subset G_{q-1} - \frac{2\varepsilon_{q-1}}{\mu_{q-1}}$ 是引理6.32的推论。

这样我们就证明了所需结论。接下来我们将证明， u^* 在 G^* 上是单射，并且 $u^*(G^*) = F^*$。

取 $I \in G^*$，我们有，对于每个 q，$u^{(q)}(I) \in F_q$。因此 $u^*(I) \in F^*$，由此可得 $u^*(G^*) \subset F^*$。用同样的论证，我们可知$\Upsilon(F^*) \subset G^*$。下面证明 $\Upsilon(u^*(I)) = I$。

$$\begin{aligned}
|\Upsilon(u^*(I)) - I| &\leq |\Upsilon(u^*(I)) - (u^{(q)})^{-1}(u^*(I)) \\
&\quad + (u^{(q)})^{-1}(u^*(I)) - (u^{(q)})^{-1}(u^{(q)}(I))| \\
&\leq |\Upsilon(u^*(I)) - (u^{(q)})^{-1}(u^*(I))| \\
&\quad + |(u^{(q)})^{-1}(u^*(I)) - (u^{(q)})^{-1}(u^{(q)}(I))| \\
&\leq |\Upsilon - (u^{(q)})^{-1}|_{F^*} + \tfrac{1}{\mu_q}|u^* - u^{(q)}|_{G^*}.
\end{aligned}$$

为了估计第二项，我们使用了中值定理，即 $|u^{(q)}(x) - u^{(q)}(y)|_{G_q} \leq |\frac{\partial}{\partial I}u^{(q)}|_{G_q}|x-y|$，以及这样一个事实：由于 μ_q-非退化性，$|\frac{\partial u^{(q)}}{\partial I}| \geq \mu_q|v|$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ 和 $\forall I' \in G_q$。注意，我们可以使用中值定理，因为 $u^*(I) - u^{(q)}(I)$ 属于 F_q，这是因为 $\frac{4M_q\varepsilon_q}{\mu_q} \geq \xi_q$。下面证明这个不等式。若要说明$\frac{4M_q\varepsilon_q}{\mu_q} \geq \xi_q$，只需说明 $\frac{4M\varepsilon_q}{\mu} \geq \xi_q$。

$$\begin{aligned}
\xi_q &\leq \tfrac{2}{\delta_2^{(q)}}|R_0^{(q)}|_{G_q,\sigma_2^{(q)}} \\
&\leq \tfrac{2}{\delta_2^{(q)}}\tfrac{\delta_1^{(q)}\varepsilon_{q-1}}{2}\tfrac{1}{2^{2\tau+3}2^{q-1}} \\
&= \tfrac{1}{c_q}\tfrac{1}{2^{2\tau+2}2^{q-1}}\varepsilon_{q-1} \leq \tfrac{4M}{\mu}\varepsilon_{q-1}
\end{aligned}$$

最后一个不等式成立当且仅当

$$\begin{aligned}
\mu &\leq \tfrac{\beta 2^{\nu(q-1)}2^{2\tau+3}2^{q-1}}{K_q^{\tau+1}\rho_1 4} \\
&= \tfrac{\beta 2^{\nu(q-1)}2^{2\tau+3}2^{q-1}}{K^{\tau+1}2^{(\tau+1)(q-1)}\rho_1 4} \\
&\leq \tfrac{\beta 2^{2\tau+3}}{K^{\tau+1}\rho_1 4} \\
&= \tfrac{\beta 2^{2\tau+1}}{K^{\tau+1}\rho_1} \\
&\leq \tfrac{\beta 2^{2\tau+1}}{(\frac{1}{\nu\rho_1})^{\tau+1}\rho_1} = \beta\nu^{\tau+1}2^{2\tau+1}\rho_1^t au
\end{aligned}$$

正如我们在定理陈述中所假设的那样。由于所得界趋于 0，我们有 $\Upsilon(u^*(I)) = I$，因此 u^* 是单射。类似地，我们得到 $u^*(\Upsilon(J)) = J \quad \forall J \in F^*$。最后，$u^*$ 是单射，且 $u^*(G^*) = F^*$。还要注意，根据归纳引理，我们得到$|h^{(q)} - h^{(q-1)}|_{G_q,\ \rho_2^{(q-1)}} \leq \eta_{q-1}$。另外，请注意下面这个估计，我们将在接下来的章节中用到。

$$|u^* - u^{(q)}|_{G^*} \leq \sum_{s\geq q}\frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)s}}.$$

（4）正则变换的收敛性

令 $\sigma^{(q)} = \rho^{(q-1)} - \delta_2^{(q)}/2$。注意，这一定义意味着 $\sigma^{(q)} - \rho^{(q)} = \delta_2^{(q)}$ 和 $\sigma^{(q)} - \delta_2^{(q)} = \rho^{(q)}$。注意，应用归纳引理6.32：

$$|\Phi^{(q)} - \mathrm{id}|_{G_q,\sigma^{(q)},c_q} \leq \tfrac{2A_{q-1}K_q^\tau}{\beta'_{q-1}}\varepsilon_{q-1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2\cdot 5\cdot 4}{\nu\beta}\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}\\
&\leq \frac{2^9 K^\tau \varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(\tau+2)(q-1)}}\\
&\leq \frac{2^9 K^\tau \nu^3\rho_1\beta^2}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(\tau+2)(q-1)}2^{2\tau+22}MK^{2\tau+1}}\\
&\leq \frac{2^9\nu\beta}{2^{(\tau+2)(q-1)}2^{2\tau+20}MK^{\tau+1}}\\
&= \frac{\nu\beta}{2^6 M(K2^{q-1})^{\tau+1}}\frac{2^9}{2^{(q-1)}2^{2\tau+14}}\\
&\leq \delta_2^{(q)}\frac{1}{2^{(q-1)}2^{2\tau+5}}\\
&\leq \frac{\delta_2^{(q)}}{2^{(q-1)}32},
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\delta_2^{(q)} \geq \frac{\nu\beta}{84MK_qP\tau+1}$, $\varepsilon \leq \frac{\nu^3\rho_1\beta^2}{2^{2\tau+20}MK^{2\tau+1}}$, $\beta \leq \frac{8MK^{\tau+1}\rho_2}{\nu}$和 $\beta'_{q-1} \geq \frac{\nu\beta}{4}$。

现在，回想一下 $\hat{}\ \delta_c = \min(c\delta_1, \delta_2)$，则 $\hat{}\ \delta_{c_q} = \min(c_q\delta_1^{(q)}, \delta_2^{(q)}) = \min(\delta_2^{(q)}, \delta_2^{(q)}) = \delta_2^{(q)}$。

现在利用 $|D\Upsilon|_{G,\rho-\delta,c} \leq \frac{|\Upsilon|_{G}}{{}_{,\rho,c}\ \hat{}\delta_c}$，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
|D\Phi^{(q)} - \mathrm{Id}|_{G_q,\rho^{(q)},c_q} &= |D(\Phi^{(q)}) - \mathrm{id}|_{G_q,\rho^{(q)},c_q}\\
&\leq |D(\Phi^{(q)}) - \mathrm{id}|_{G_q,\sigma^{(q)}-\delta_2^{(q)},c_q}\\
&\leq \frac{|\Phi^{(q)}-\mathrm{id}|_{G_q,\sigma^{(q)},c_q}}{\hat{\delta}_{c_q}}\\
&\leq \frac{|\Phi^{(q)}-\mathrm{id}|_{G_q,\sigma^{(q)},c_q}}{\delta_2^{(q)}}\\
&\leq \frac{2|\Phi^{(q)}-\mathrm{id}|_{G_q,\sigma^{(q)},c_q}}{\delta_2^{(q)}}\\
&\leq \frac{2}{\delta_2^{(q)}}\frac{\delta_2^{(q)}}{2^{(q-1)}\cdot 32} \leq \frac{1}{2^{q-1}16} \leq \frac{1}{2^{(q-1)}4}
\end{aligned}$$

设 x, y 满足连接它们的线段包含于 $\mathsf{D}^{\rho^{(q)}}(G_q)$ 中。利用中值定理，可以推出以下界：

$$|\Phi^q(x) - \Phi^q(y)|_{c_q} \leq |D\Phi^{(q)}|_{G_q,\rho^{(q)},c_q} \cdot |x-y|_{c_q}.$$

根据 22，特别地，$|\Phi^{(q)}(x)-x|_{c_q} \leq \delta_2^q$ 且 $|\Phi^{(q)}(y)-y|_{c_q} \leq \delta_2^q$。于是，连接 $\Phi^{(q)}(x)$ 和 $\Phi^{(q)}(y)$ 的线段包含于 $\mathsf{D}^{\rho^{(q-1)}}(G_{q-1}) = \mathsf{D}^{\rho^{(q)}+\delta^{(q)}}$ 中，因为 $G_q \subset G_{q-1} - \frac{2\varepsilon_{q-1}}{\mu_{q-1}}$，又因为 $\rho^{(q)} - \rho^{(q-1)} \leq \delta_2^{(q)}$，还因为 $\rho^{(q)} - \rho^{(q-1)} = \delta_2^{(q)}$。

因此，我们可以再次应用中值定理：

$$\begin{aligned}
&|\Phi^{(q-1)}(\Phi^{(q)}(x)) - \Phi^{(q-1)}(\Phi^{(q)}(y))|_{c_{q-1}}\\
&\leq |D\Phi^{(q-1)}|_{G_{q-1},\rho^{q-1},c_{q-1}}|\Phi^{(q)}(x) - \Phi^{(q)}(y)|_{c_{q-1}}\\
&\leq 2^{\tau+1-\nu}|D\Phi^{(q-1)}|_{G_{q-1},\rho^{q-1},c_{q-1}}|\Phi^{(q)}(x) - \Phi^{(q)}(y)|_{c_q},
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $c_{q-1}/c_q = \frac{\delta_2^{(q-1)}/\delta_1^{(q-1)}}{\delta_2^{(q)}/\delta_1^{(q)}} = \frac{\delta_2^{(q-1)}}{\delta_2^{(q)}}\frac{\delta_1^{(q)}}{\delta_1^{(q-1)}} = 2^{\tau+1}\frac{1}{2^\nu} = 2^{\tau+1-\nu}$。

利用前面的界并按 q 迭代，我们得到如下结果：

$|\Psi^{(q)}(x) - \Psi^{(q)}(y)|_{c_1}$

$$\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)}|D\Phi^{(1)}|_{G_1,\rho^{(1)},c_1}\cdot\ldots\cdot|D\Phi^{(q)}|_{G_q,\rho^{(q)},c_q}|x-y|_{c_q}$$
$$\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)}(1+\tfrac{1}{4})(1+\tfrac{1}{4\cdot 2})\cdot\ldots\cdot(1+\tfrac{1}{4\cdot 2^{q-1}})|x-y|_{c_q}$$
$$\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)}e^{1/2}|x-y|_{c_q}\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)}\cdot 2|x-y|_{c_q}.$$

这对 $q\geq 1$ 以及每个满足以下条件的 x,y 都成立：连接它们的线段包含在 $\mathsf{D}^{\rho^{(q)}}(G_q)$ 中。现在，给定 $q\geq 2$ 和 $x\in\mathsf{D}^{\rho^{(q)}}(G_q)$，令 $y=\Phi^{(q)}(x)$：

$$\begin{aligned}
|\Psi^{(q)}(x)-\Psi^{(q-1)}(x)|_{c_1} &= |\Psi^{(q-1)}(\Phi^{(q)}(x))-\Psi^{(q-1)}(x)|_{c_1}\\
&\leq 2^{(\tau+1+\nu)(q-2)}2|\Phi^{(q)}(x)-x|_{c_{q-1}}\\
&\leq 2^{(\tau+1+\nu)(q-1)}2|\Phi^{(q)}(x)-x|_{c_q}\\
&\leq 2^{(\tau+1+\nu)(q-1)}2\delta_2^{(q)}\\
&\leq 2^{(\tau+1+\nu)(q-1)}2\frac{2^8K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(\tau+2)(q-1)}}\\
&= \frac{2^9K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(1+\nu)(q-1)}}.
\end{aligned}$$

即使对于 $q=1$，只需令 $\Psi^{(0)}=\mathrm{id}$ 为 22，这也成立。因此，25 意味着 $\Psi^{(q)}$ 收敛到一个映射

$$\Psi^*: D_{(\rho_1/4,0)}(G^*)=\mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}}(\mathbb{T}^n)\times G^*\to\mathcal{D}_\rho(G).$$

并且我们推得，对每个 $q\geq 0$，都有

$$|\Psi^*-\Psi^{(q)}|_{G^*,(\frac{\rho_1}{4},0),c_1}\leq\frac{2^10K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(1+\nu)q}}.$$

此外，将极限代入方程

$$H\circ\Psi^{(q)}=h^{(q)}+R^{(q)}$$

我们看到，在 $\mathsf{D}(\frac{\rho_1}{4},0)(G^*)$ 上，$H\circ\Psi^*=h^*(I)$。

(5) 稳定性估计

接下来我们看到，对于 $q\to\infty$，与变换后的哈密顿量 $\hat{}H^{(q)}=\hat{}h^{(q)}+R^{(q)}$ 相关的运动和 $\hat{}h^{(q)}$ 的拟周期运动会越来越接近。

记作

$$\begin{cases} x^{(q)}(t)=(\phi^{(q)}(t),I^{(q)}(t)) & \text{the trajectory of } H^{(q)},\\ \hat{x}^{(q)}(t)=(\hat{\phi}^{(q)}(t),\hat{I}^{(q)}(t)) & \text{the trajectory of } \hat{H}^{(q)}\end{cases}$$

对应于给定的初始条件 $x^{(q)}(0)=x_0^*=(\phi_0^*,I_0^*)\in\mathbb{T}^n\times G_q$。令

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(q)}(t) &:= (\tilde{\phi}^{(q)}(t),I_0^*)=(\phi_0^*+u^{(q)}(I_0^*))t,I_0^*,\\ \hat{\tilde{x}}^{(q)}(t) &:= (\hat{\tilde{\phi}}^{(q)}(t),I_0^*)=(\phi_0^*+u'^{(q)}(I_0^*))t,I_0^*\end{cases}$$

$h^{(q)}$ 和 $\tilde{h}^{(q)}$ 的可积部分分别对应的轨道。回想一下，$\hat{}h^{(q)}(I)=h^{(q)}(I)+\zeta^{(q)}(I_1)=h^{(q)}(I)+q_0\log(I_1)+\sum_{i=1}^{m-1}q_i\frac{1}{I_1^i}$，且 $u'^{(q)}=\bar{}\mathrm{B}u^{(q)}+\bar{}\mathrm{A}(I_1)$。显然，$\tilde{x}^{(q)}(t)$ 和 $\hat{}\tilde{x}^{(q)}(t)$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 均有定义。

记作：

$$T_q = \inf\{t>0 : |I^{(q)}(t)-I_0^*| > \delta_2^{(q+1)} \text{ or } |\phi^{(q)}(t)-\tilde{\phi}^{(q)}(t)|_\infty > \delta_1^{(q+1)}\}.$$
$$\hat{T}_q = \inf\{t>0 : |\hat{I}^{(q)}(t)-I_0^*| > \delta_2^{(q+1)} \text{ or } |\hat{\phi}^{(q)}(t)-\hat{\tilde{\phi}}^{(q)}(t)|_\infty > \delta_1^{(q+1)}\}.$$

注意，$x^{(q)}(t)$ 和 $\hat{x}^{(q)}(t)$ 均有定义，并分别属于 $0 \le t \le T_q$ 和 $0 \le t \le \hat{T}_q$ 对应的 $\mathrm{D}_{\rho^{(q)}}$ G_q，因为 $\delta^{(q)} \le \rho^{(q)}$。此外，回顾一下哈密顿方程。首先给出哈密顿函数 $\hat{H}^{(q)}$ 的运动方程:

$$\iota_{X_{\hat{H}^{(q)}}}\omega = d\hat{H}^{(q)}, \quad \text{or} \quad X_{\hat{H}^{(q)}} = \Pi(d\hat{H}^{(q)},\cdot).$$

设

$$X_{\hat{H}^{(q)}} = \dot{\hat{I}}_1^{(q)}\frac{\partial}{\partial I_1} + \ldots \dot{\hat{I}}_n^{(q)}\frac{\partial}{\partial I_n} + \dot{\hat{\phi}}_1^{(q)}\frac{\partial}{\partial \phi_1} + \ldots + \dot{\hat{\phi}}_n^{(q)}\frac{\partial}{\partial \phi_n}.$$

此外

$$\begin{aligned} d\hat{H}^{(q)} &= d\hat{h}^{(q)} + dR^{(q)} \\ &= d\zeta^{(q)} + dh^{(q)} + dR^{(q)} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta^{(q)}}{\partial I_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \zeta^{(q)}}{\partial \phi_i}}_{=0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h^{(q)}}{\partial I_i} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial h^{(q)}}{\partial \phi_i}}_{=0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial R^{(q)}}{\partial I_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi_i}. \end{aligned}$$

回想

$$\omega = \left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right) dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{i=2}^n dI_i \wedge d\phi_i,$$

$$\Pi = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{I_1^j}\right)} \frac{\partial}{\partial I_1} \wedge \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial}{\partial I_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

于是:

$$\begin{cases} \dot{\hat{I}}_j^{(q)} &= -\frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi_j}(\hat{x}^{(q)}(t)), \quad \text{if } j \ne 1 \text{ and} \\ \dot{\hat{I}}_1^{(q)} &= -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{I_1^i}\right)} \frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi_j}(\hat{x}^{(q)}(t)) = -\mathcal{B}(I_1)\frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi_1}(\hat{x}^{(q)}(t)). \end{cases}$$

注意到

$$|\dot{\hat{I}}_1^{(q)}(t)| \le \left|\frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi_1}(\hat{x}^{(q)}(t))\right|. \tag{6.21}$$

此外,

$$\begin{cases} \dot{\hat\phi}_j^{(q)} &= \hat u_j^{(q)}(\hat I^{(q)}(t)) + \frac{\partial R^{(q)}}{\partial I_j}(\hat x^{(q)}(t)) \\ &= u_j^{(q)}(\hat I^{(q)}) + \frac{\partial R^{(q)}}{\partial I_j}(\hat x^{(q)}(t)) \quad \text{if } j\neq 1 \\ \dot{\hat\phi}_1^{(q)} &= \underbrace{(\mathcal{B}(I_1)u_1^{(q)} + \mathcal{A}(I_1))}_{u_1^{(q)}}(\hat I^{(q)}(t)) + \mathcal{B}(I_1)\frac{\partial R^{(q)}}{\partial I_1}(\hat x^{(q)}(t)), \end{cases}$$

其中我们使用了当 $j\neq 1$ 时 $\hat{}u_j^{(q)} = u_j'^{(q)}$。利用 6.21 式可得

$$|\dot{\hat I}^{(q)}(t)| \le \left\| \frac{\partial R^{(q)}}{\partial \phi} \right\|_{G_q,\rho^{(q)}} \le \varepsilon_q.$$

因此,

$$\begin{aligned} |\dot{\hat\phi}^{(q)} - u'^{(q)}(I_0^*)|_\infty &= |u'^{(q)}(\hat I^{(q)}(t)) + \bar{\mathcal{B}}\tfrac{\partial R^{(q)}}{\partial I_1}(\hat x^{(q)}(t)) - u'^{(q)}(I_0^*)|_\infty \\ &\le |u'^{(q)}(\hat I^{(q)})(\hat I^{(q)}(t)) - u'^{(q)}(I_0^*)|_\infty + |\tfrac{\partial R^{(q)}}{\partial I}(\hat x^{(q)}(t))|_\infty \\ &\le M_q'|\hat I^{(q)}(t) - I_0^*| + \|\tfrac{\partial R^{(q)}}{\partial I}\|_{F_q,\rho^{(q)},\infty} \\ &\le M_q|\hat I^{(q)}(t) - I_0^*| + \tfrac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} \\ &\le 2M\delta_2^{(q+1)} + \tfrac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} \le 3M\delta_2^{(q+1)}. \end{aligned}$$

其中，在最后一个估计中，我们用到了

$$\frac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} \le M\delta_2^{(q+1)}, \tag{6.22}$$

这成立是因为:

$$\begin{aligned} \tfrac{\varepsilon_q}{c_{q+1}} &\le \tfrac{16MK_{q+1}^{\tau+1}\rho_1}{\beta 2^{\nu q}}\tfrac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)q}} \\ &\le \tfrac{16MK_{q+1}^{\tau+1}\rho_1}{\beta e^{\nu q}}\tfrac{8}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)q}}\tfrac{\nu^2\mu^2\beta^2}{2^{\tau+30}L^4M^2K^{2\tau+2}} \\ &\le \tfrac{2^7K_{q+1}^{\tau+1}\nu\mu^2\beta}{2^{(2\tau+2)q+\nu q+\tau+30}L^4M^2K^{2\tau+2}} \\ &\le \tfrac{\nu\beta\mu^2}{K_{q+1}^{\tau+1}2^{\nu q+\tau+23}L^4M^2} \\ &= \tfrac{\mu^2}{2^{\nu q+\tau+17}L^4M}\tfrac{\nu\beta}{2^6MK_{q+1}^{\tau+1}} \\ &\le \tfrac{\mu^2}{2^{\tau+17+\nu q}L^4M}\delta_2^{(q+1)} \\ &\le \tfrac{2^{2\tau+12}L^4M^2}{2^{\tau+17+\nu q}L^4M}\delta_2^{(q+1)} \\ &\le 2^{\tau-5-\nu q}\delta_2^{(q+1)} \\ &\le \tfrac{2^\tau}{2^{5+\nu q}}M\delta_2^{(q+1)} \\ &\le M\delta_2^{(q+1)} \quad \text{if } q \text{ is large enough.} \end{aligned}$$

$\hat{}$ 因此，由于定义 T_q 的不等式中必有一个在 $t=T_q$ 处取等号，我们得到,

$$\begin{aligned} \delta_2^{(q+1)} &= |\hat I^{(q)}(T_q) - I_0^*| \le T_q\varepsilon_q, \quad \text{or} \\ \delta_1^{(q+1)} &= |\hat\phi^{(q)}(T_q) - \hat{\hat\phi}^{(q)}(T_1)|_\infty \le T_q 3M\delta_2^{(q+1)}. \end{aligned}$$

因此，$\hat{}\ T_q \ge \min(\frac{\delta_2^{(q+1)}}{\varepsilon_q}, \frac{\delta_1^{(q+1)}}{3M\delta_2^{(q+1)}}) \ge \frac{1}{3Mc_{q+1}}$，这里我们再次使用了 6.22。

记 $T'_q := \frac{1}{3Mc_{q+1}}$，则 $\hat{} T_q \geq T'_q$。这意味着

$$|\hat{x}^{(q)}(t) - \hat{\tilde{x}}^{(q)}(t)|_{c_{q+1}} \leq \delta_2^{(q+1)} \quad \text{for } |t| \leq T'_q.$$

由于 $\hat{H}^{(q)} = \hat{H} \circ \Psi^{(q)}$ 和 $\Psi^{(q)}$ 是正则的，可知 $\Psi^{(q)}(\hat{} x^{(q)}(t))$ 是 $\hat{} H$ 的一条轨道，其定义于 $t \leq T'_q$。值得注意的是，当 q 足够大时，这条轨道始终靠近环面 $\Psi^{(q)}(\mathbb{T}^n \times \{I_0^*\})$。此外，当 $q \to \infty$ 时，T'_q 趋于无穷。

(6) 不变环面

现在假设 $x_0^* \in \mathbb{T}^n \times G^*$，并记

$$\begin{cases} x^*(t) &= (\phi_0^* + u^*(I_0^*)t, I_0^*) \\ \hat{x}^*(t) &= (\phi_0^* + u'^*(I_0^*)t, I_0^*) \end{cases} \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

注意

$$\begin{aligned} |\hat{\tilde{x}}^{(q)}(t) - \hat{x}^*(t)|_{c_{q+1}} &\leq c_{q+1}|u'^{(q)}(I_0^*) - u'^*(I_0^*)|_\infty |t| \\ &\leq c_{q+1}|u'^{(q)} - u'^*|_{G^*,\infty}|t|. \end{aligned}$$

并注意，若 $|t| \leq \frac{\delta_1^{(q+1)}}{|u'^{(q)} - u'^*|_{G^*,\infty}} =: T''_q$，则

$$\begin{aligned} |\hat{\tilde{x}}^{(q)}(t) - \hat{x}^*(t)|_{c_{q+1}} &\leq c_{q+1}|u'^{(q)} - u'^*|_{G^*,\infty} \frac{\delta_1^{(q+1)}}{|u'^{(q)} - u'^*|_{G^*,\infty}} \\ &\leq \frac{\delta_2^{q+1}}{\delta_1^{q+1}} \delta_1^{q+1} = \delta_2^{q+1}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} |u'^* - u'^{(q)}|_{G^*} &= |\bar{\mathcal{B}}u^* + \bar{\mathcal{A}} - \bar{\mathcal{B}}u^{(q)} - \bar{\mathcal{A}}|_{G^*} \\ &= |\mathcal{B}(u^* - u^{(q)})|_{G^*} \leq |u^* - u^{(q)}|_{G^*}, \end{aligned}$$

与 Z 足够接近。

因此，对 $|u^* - u^{(q)}|_{G^*}$ 得到的界对 $|u'^* - u'^{(q)}|_{G^*}$ 也成立。

$$|u'^* - u'^{(q)}|_{G^*} \leq \sum_{s \geq q} \frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)s}} \leq \frac{8MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)q}}.$$

利用这个界，我们可以看到 T''_q 趋于无穷大，因为

$$T''_q \geq \left(\frac{\nu\rho_1}{8 \cdot 2^{\nu q}}\right)\left(\frac{\nu\beta 2^{(\tau+2)q}}{8MK^{\tau+1}\varepsilon}\right) = \frac{\nu^2\beta\rho_1}{64MK^{\tau+1}\varepsilon} 2^{(\tau+2-\nu)q}.$$

Then

$|\hat{} x^{(q)}(t) - \hat{} x^*(t)|_{c_{q+1}} \leq |\hat{} x^{(q)}(t) - \hat{} \tilde{x}^{(q)}(t)|_{c_{q+1}} + |\hat{} \tilde{x}^{(q)}(t) - \hat{} x^*(t)|_{c_{q+1}} \leq 2\delta_2^{(q+1)}$.
当 $t \leq T'''_q := \min(T'_q, T''_q)$。接下来，我们看到，当 q 取较大值时，轨道 $\Psi^{(q)}(x^{(q)}(t))$ 与 $\Psi^*(x^*(t))$ 非常接近。这是因为当 $|t| \leq T'''_q$。

$$\begin{aligned} &|\Psi^{(q)}(\hat{x}^{(q)} - \Psi^*(\hat{x}^*(t)))|_{c_1} \\ &\leq |\Psi^{(q)}(\hat{x}^{(q)}(t)) - \Psi^{(q)}(\hat{x}^*(t))|_{c_1} + |\Psi^{(q)}(\hat{x}^*(t)) - \Psi^*(\hat{x}^*(t))|_{c_1} \\ &\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \cdot 2|\hat{x}^{(q)}(t) - \hat{x}^*(t)|_{c_q} + |\Psi^{(q)} - \Psi^*|_{G^*,(\rho_1/4,0),c_1} \end{aligned}$$

$$\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \cdot 4\delta_2^{(q+1)} + |\Psi^{(q)} - \Psi^*|_{G^*,(\rho_1/4,0),c_1}$$
$$\leq 2^{(\tau+1-\nu)(q-1)} \cdot 4\delta_2^{(q+1)} + \frac{2^{10}K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(1+\nu)q}}$$
$$\leq \frac{c_1}{c_{q+1}}\frac{4\delta_2^{(q+1)}}{2^{(\tau+1-\nu)}} + \frac{2^{10}K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(1+\nu)q}}$$
$$\leq \frac{c_1 4}{2^{(\tau+1-\nu)}}\frac{\delta_1^{(q+1)}}{\delta_2^{(q+1)}}\delta_2^{(q+1)} + \frac{2^{10}K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(1+\nu)q}}$$
$$\leq \frac{c_1 4}{2^{(\tau+1-\nu)}}\delta_1^{(q+1)} + \frac{2^{10}K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(1+\nu)q}}$$

这里我们利用了 $c_{q-1}/c_q = 2^{\tau+1-\nu}$，于是 $c_1/c_{q+1} = 2^{(\tau+1-\nu)q}$。

界 28 趋于零。因此我们推得，对于每个固定的 t，$\Psi^{(q)}(\hat{}x^{(q)}(t))$ 都会退出，或者 q 足够大，且其极限为 $\Phi^*(\hat{}x^*(t))$。这一事实以及 $\hat{}H$ 的流的连续性表明，$\Psi^*(\hat{}x^*(t))$ 也是 $\hat{}H$ 的一条轨道，它对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均有定义。

这对每个初始条件 $x_0^* = (\phi_0^*,\ I_0^*)$ 都成立。$\in \mathbb{T}^n \times G^*$ 因此，$\Psi^*(\mathbb{T}^n \times \{I_0^*\})$ 是 $\hat{}H$ 的一个不变环面，其频率向量为$u'^*(I_0^*)$。注意，环面上的能量为 $\hat{}H(\Psi^*(\phi_0^*,\ I_0^*)) = h^*(I_0^*)$。

保留下来的不变环面由变换后的作用量 $I_0^* \in G^*$ 完全确定。现在我们将用原作用量坐标来刻画保留下来的环面。

首先，我们来看 $u(\hat{}G) \subset F^*$。回顾:

$$\Delta_{c,\hat{q}}(k,\alpha) = \{J \in \mathbb{R} \text{ such that } |k\bar{\mathcal{B}}u(I) + k\bar{\mathcal{A}}| < \alpha\},$$
$$\hat{G} = \{I \in \mathcal{G} - \frac{2\gamma}{\mu} \text{ such that } |k\bar{\mathcal{B}}u(I) + k\bar{\mathcal{A}}| < \frac{\beta}{|k|_1^\tau}\}.$$

根据这个定义，显然，若 $I \in \hat{}G$，则 $u(I)$ 是 $\frac{\beta}{|k|_1^\tau}, K, c, \hat{}q$-非共振。因此，对所有 $k \neq 0$，$u(I) \notin \Delta_{c,\hat{q}}(k, \frac{\beta}{|k|_1^\tau})$。于是 $u(\hat{}G) \subset F^*$。

$\hat{}$ 我们希望在 h 的不变环面与受扰系统 $H = h + R$ 的不变环面之间建立对应关系，或者说，在新的 $\hat{}$坐标 h^* 中建立对应关系。

回顾

$$u' = \bar{\mathcal{B}}u + \bar{\mathcal{A}},$$
$$u'^* = \bar{\mathcal{B}}u^* + \bar{\mathcal{A}} = (\frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{I_1^i}}u_1^* + \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\hat{q}_i}{I_1^i}}{\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{I_1^i}}, u_2^*, \ldots, u_n^*).$$

注意，$u'^*(0, I_2, \ldots, I_n) = \frac{q_m}{c_m} = \frac{1}{\mathcal{K}'}$ 是模周期的逆，因此 u'^* 和 u' 在 Z 处不是单射，因为它们将 u^* 和 u 的第一分量投影到 $^1\mathcal{K}'$。

定义 $I_0^* = (u^*)^{-1}(u(I_0))$，回想一下，$u$ 和 u^* 确实是单射，即使 u' 和 u'^* 不是，因此 I_0^* 定义得当。

根据此定义，$u^*(I_0^*) = u(I_0)$，由此可得 $u'^*(I_0^*) = u'(I_0)$。现在，定义 $\mathsf{T}(\phi_0, I_0) = \Psi^*(\phi_0, I_0^*)$。

我们得到 6.13，因为集合 $\mathsf{T}(\mathbb{T}^n \times \{I_0\})$ 是哈密顿流 $\hat{}H$ 的一个不变环面，其频率向量为 $u'^*(I_0^*)$；这是因为 $\mathbb{T}^n \times \{I_0^*\}$ 是哈密顿流 $\hat{}h^*$ 的一个不变环面。我们还已知 $u'^*(I_0^*) = u'(I_0)$。简而言之，未受扰系统的原始频率 $u(I_0)$ 对于 $I_0 \in \hat{}G$ 而言属于 F^*，因此可以视为

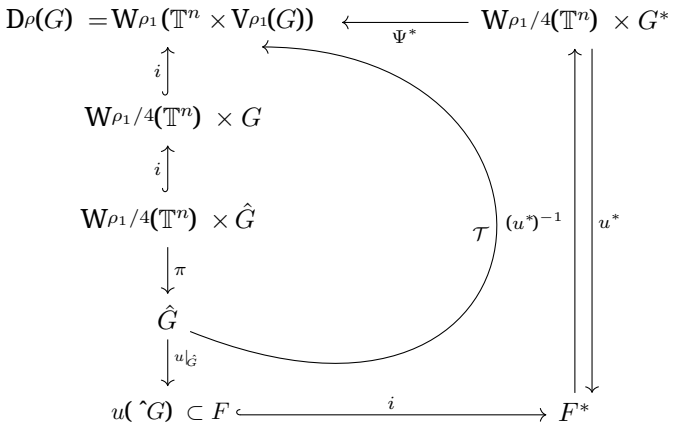

图 2. 证明中使用的不同映射和集合的示意图。

新坐标 $u^*(I_0^*)$ 下未受扰系统的频率。因此，我们可以得出结论：对于这个 $I_0 \in \hat{G}$，其新的（受扰）解在环面 $(\phi_0 + u'^* t,\ I_0^*) \in \Psi^*(\mathbb{T}^n \times \{I_0^*\}) = \mathsf{T}(\mathbb{T}^n \times \{I_0\})$ 上也是线性的。新的频率向量 u'^* 满足 $u'^* = u'$。

现在来证明 6.14。对于 $(\phi_0, I_0^*) \in \mathsf{W}\frac{\rho_1}{4}(\mathbb{T}^n) \times G^*$，记为。

$$\Psi^*(\phi_0, I_0^*) = (\phi_0 + \Psi_\phi^*(\phi_0, I_0^*), I_0^* + \Psi_I^*(\phi_0, I_0^*)).$$

And for $(\phi_0, I_0) \in \mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}(\mathbb{T}^n)\times\hat{G}}$.

$$\mathcal{T}(\phi_0, I_0) = (\phi_0 + \mathcal{T}_\phi(\phi_0, I_0), I_0 + \mathcal{T}_I(\phi_0, I_0)).$$

Then, for $(\phi_0, I_0) \in \mathcal{W}_{\frac{\rho_1}{4}(\mathbb{T}^n)\times\hat{G}}$:

$$\mathcal{T}_\phi(\phi_0, I_0) = \Psi_\phi^*(\phi_0, I_0^*), \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_I(\phi_0, I_0) = \Psi_I^*(\phi_0, I_0^*) + I_0 - I_0^*.$$

我们来估计这些项的范数：

$$\begin{aligned} |\Psi_\phi^*(\phi_0, I_0^*)|_\infty &\leq \tfrac{1}{c_1}|\Psi^* - \mathrm{id}|_{G^*,(\frac{\rho_1}{4},0),c_1} \\ &\leq \tfrac{16MK^{\tau+1}\rho_1}{\beta}\tfrac{2^{10}K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta} \\ &\leq \tfrac{2^{14}MK^{2\tau+1}\varepsilon}{\nu^2\beta^2}, \end{aligned}$$

其中我们用到了 $c_1 \geq \frac{\beta}{16MK^{\tau+1}\rho_1}$。于是，

$$\begin{aligned} \Psi_I^*(\phi_0, I_o^*) &\leq |\Phi^* - \mathrm{id}|_{G^*,(\frac{\rho_1}{4},0,c_1)} \\ &\leq \tfrac{2^{10}k^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta}. \end{aligned}$$

现在只剩下项 $I_0^* - I_0$：

$$|I_0^* - I_0| \leq |(u^*)^{(-1)} - (u)^{(-1)}|_{F^*} \leq \sum_{s\geq 0}\xi_s$$

$$\leq \sum_{s\geq 0} \frac{4MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)s}} \leq \frac{8MK^{\tau+1}\varepsilon}{\nu\beta 2^{(\tau+2)}}.$$

现在让我们把所有内容放在一起，并使用 $\hat{}\rho \leq \nu\rho_1$, $K \leq 2/\hat{}\rho$ 和 $\beta = \gamma/L$。

$$\begin{aligned} |\Psi^*_\phi(\phi_0, I^*_0)|_\infty &\leq \frac{2^{14}M(\frac{2}{\rho})^{2\tau+1}\varepsilon}{\nu^2(\frac{\gamma}{L})^2} \\ &\leq \frac{2^{2\tau+15}ML^2}{\nu^2\hat{\rho}^{2\tau+1}}\frac{\varepsilon}{\gamma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Psi^*(\phi_0, I^*_0)| + |I^*_0 - I_0| &\leq \frac{2^{10}(\frac{2}{\rho})^\tau\varepsilon}{\nu\hat{\rho}(\frac{\gamma}{L})} + \frac{8M(\frac{2}{\rho})^{\tau+1}\varepsilon}{\nu(\frac{\gamma}{L})2^{(\tau+2)}} \\ &= \frac{2^{10+\tau}L\varepsilon}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}\gamma} + \frac{8M2^{\tau+1}L\varepsilon}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}\gamma 2^{(\tau+2)}} \\ &\leq \frac{2^{20+\tau}L\varepsilon + M2^{\tau+4}L\varepsilon}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}\gamma} \leq \frac{2^{10+\tau}L(1+M)}{\nu\hat{\rho}^{\tau+1}}\frac{\varepsilon}{\gamma} \end{aligned}$$

(7) 测度估计

最后，我们来估计第 3 部分。记

$$\hat{G}^* = (u^*)^{-1}(u(\hat{G})).$$

不变环面充满集合

$$\mathcal{T}(\mathbb{T}^n \times \hat{G}) = \Psi^*(\mathbb{T}^n \times \hat{G}^*)$$

也就是说，$\mathsf{T}(\mathbb{T}^n \times \hat{}G)$ 内的所有环面都是不变的，尽管还有更多环面。由于 $\Psi^{(q)}$ 是哈密顿变换，特别地，它们保持体积不变:

$$\mathrm{meas}[\Psi^{(q)}(\mathbb{T}^n \times \hat{G}^*)] = \mathrm{meas}(\mathbb{T}^n \times \hat{G}^*) = (2\pi)^n \mathrm{meas}(\hat{G}^*).$$

现在，我们来考虑极限的测度:

$$\mathrm{meas}[\Psi^*(\mathbb{T}^n \times \hat{G}^*)].$$

为此，我们使用集合的上极限:

$$\bigcap_{n=q}^{\infty}\bigcup_{j=q}^{\infty}(\Psi^{(j)}(\mathbb{T}^n \times \hat{G}^*)).$$

由于 $\Psi^{(j)}(\mathbb{T}^n \times \hat{}G^*)$ 是紧的，并且我们有界

$$|\Psi^* - \Psi^{(q)}|_{G^*,(\frac{\rho_1}{4},0),c_1} \leq \frac{2^{10}K^\tau\varepsilon}{\nu^2\rho_1\beta 2^{(1+\nu)q}},$$

$\bigcup_{j=q}^{\infty}(\Psi^{(j)}(\mathbb{T}^n \times \hat{}G^*))$ 也是紧的。所有测度都有良好定义，因此我们可以说

$$\mathrm{meas}[\Psi^*(\mathbb{T}^n \times \hat{G}^*)] \geq (2\pi)^n \mathrm{meas}(\hat{G}^*).$$

因此，为了估计不变集补集的测度，只需估计 $\mathsf{G} \setminus \hat{}G^*$ 的测度。

但首先，我们将定义一些辅助集合。令 $\tilde{\beta} = \frac{2\gamma M}{\mu}$,$\tilde{\beta}_q = (1 - \frac{1}{2^{\nu q}})\,\tilde{\beta}$。注意，当且仅当 $\tilde{\beta} \geq \beta$ 时 $\mu \leq 2ML$，并且我们假设了 $\mu \leq 2^{\tau+6}L^2M$。

然后，对于 $q \geq 0$ ，我们定义

$$\tilde{F}_q = (F - \tilde{\beta}_q) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \frac{\tilde{\beta}_q}{|k|_1^\tau}), \quad \tilde{G}_q = (u^{(q)})^{-1}(\tilde{F}_q)$$

and

$$\tilde{F}^* = \bigcap_{q\ge 0} \tilde{F}_q = (F - \tilde{\beta}) \setminus \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\ |k|_1\le K}} \Delta_{c,\hat{q}}(k, \frac{\tilde{\beta}}{|k|_1^\tau}), \quad \tilde{G}^* = \bigcap_{q\ge 0} \tilde{G}_q.$$

为了证明这些界，我们需要先证明包含关系 $G^* \subset G^*$ 和 $G_0 \subset \mathsf{G}$。

(a) $\mathsf{G} \supset \tilde{G}_0 = (u^{(0)})^{-1}(\tilde{F}_0) = (u)^{-1}(F - \tilde{\beta})$，但我们知道 $u(\mathsf{G}) = F$。
(b) $\tilde{G}^* \subset \hat{G}^*$。取 $I \in \tilde{G}^*$，则 $I \in \tilde{G}_q \forall q \ge 0$。因此，存在 $\exists J \in \tilde{F}_q \forall q$ 使得 $u^{(q)}(I)$。接着，存在 $\exists J \in \tilde{F}^*$ 使得 $u^*(J) = I$。如果我们验证 $J \in u(\tilde{G})$，便可得到 $(u^*)^{-1}(J) = I \in \hat{G}^*$，问题就解决了。我们想要 $\tilde{F}^* \subset u(\hat{G})$。由于我们正在去除 $\tilde{F}^*$ 中的所有共振，只需证明 $(F - \tilde{\beta}) \subset u(\mathsf{G} - \frac{2\gamma}{\mu})$。我们只需利用 $|\frac{\partial u}{\partial I}|_{\mathcal{G},\rho_2} \le M$。于是 $F - \tilde{\beta} \subset u(\mathsf{G} - \frac{2\gamma}{\mu})$。当且仅当 $\frac{\beta}{M} \le \frac{2\gamma}{\mu}$ 时，成立；这是真的，因为 $\hat{\beta} \le \frac{2\gamma M}{\mu}$。

接下来，我们按如下步骤进行

$$\begin{aligned} \mathrm{meas}(\mathcal{G} \setminus \hat{G}^*) &\le \mathrm{meas}(\mathcal{G} \setminus \tilde{G}^*) \\ &\le \mathrm{meas}(\tilde{G}_0 \setminus \tilde{G}^*) \\ &\le \textstyle\sum_{q=1}^{\infty} \mathrm{meas}(\tilde{G}_{q-1} \setminus \tilde{G}_q). \end{aligned}$$

对于 $q \ge 1$，我们得到以下估计：

$$\mathrm{meas}(\tilde{G}_{q-1} \setminus \tilde{G}_q) \le \frac{1}{|\det(\frac{\partial u^{(q-1)}}{\partial I}(I))|} \mathrm{meas}(\overbrace{\tilde{F}_{q-1}}^{u^{(q-1)}(\tilde{G}_{q-1})} \setminus \overbrace{(\tilde{F}_q - \varepsilon_{q-1})}^{u^{(q-1)}(\tilde{G}_q)}).$$

这里用到了引理6.32。此外，由于 μ_{q-1}-非退化条件，$\det(\frac{\partial u^{(q-1)}}{\partial I}(I)) \ge \mu_{q-1}^n$，所有特征值都必须大于 μ_{q-1}。

$$\begin{aligned} \mathrm{meas}(\tilde{G}_{q-1} \setminus \tilde{G}_q) &\le \tfrac{1}{\mu_{q-1}^n} \mathrm{meas}(\tilde{F}_{q-1} \setminus (\tilde{F}_q - \varepsilon_{q-1})) \\ &\le \tfrac{2^n}{\mu^n} \mathrm{meas}(\tilde{F}_{q-1} \setminus (\tilde{F}_q - \varepsilon_{q-1})). \end{aligned}$$

现在，我们将应用引理 6.30，其中

$$\tilde{F}_{q-1} = F(\tilde{\beta}_{q-1}, \tilde{\beta}_{q-1}, K_q - 1)$$

和 $\tilde{F}_q = F(\tilde{\beta}_q, \tilde{\beta}_q, K_q)$。

应用引理：

$$\begin{aligned}&\mathrm{meas}(\tilde{F}_{q-1}\setminus\tilde{F}_q)\le D(\tilde{\beta}_q-\tilde{\beta}_{q-1})\\&+2(\mathrm{diam}F)^{n-1}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\|k|_1\le K_{q-1}}}\frac{\tilde{\beta}_q-\tilde{\beta}_{q-1}}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\K_{q-1}\le|k|_1\le K_q}}\frac{\tilde{\beta}_q}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\right)\end{aligned}$$

and

$$\mathrm{meas}(\tilde{F}_q\setminus(\tilde{F}_q-\varepsilon_q))\le(D+2^{n+1}(\mathrm{diam}F)^{n-1}K^n)\varepsilon_q.$$

Putting everything together (and using that $\tilde{\beta}_0=0$), we get

$$\begin{aligned}\mathrm{meas}(\mathcal{G}\setminus\hat{G}^*)\quad\le\quad&\frac{2^n}{\mu^n}\left(D\tilde{\beta}+2(\mathrm{diam}F)^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{\tilde{\beta}}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\right.\\&\left.+D\sum_{q=1}^{\infty}\varepsilon_{q-1}+2^{n+1}(\mathrm{diam}F)^{n-1}\sum_{q=1}^{\infty}K_q^n\varepsilon_{q-1}\right).\end{aligned}\tag{6.23}$$

现在我们只需检查前一个表达式中的级数是否收敛。先检查它们在 Z 处收敛，然后再检查它们在$_Z$之外是否收敛。回想一下，在 Z 处我们取向量 $k\neq 0$。

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\\bar{k}\neq 0}}\frac{1}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\quad&\le\quad\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\\bar{k}\neq 0}}\frac{1}{|k|_1^\tau|\bar{k}|}\\&\le\quad\sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}\setminus\{0\}\\\bar{k}\neq 0}}\sum_{k_n\in\mathbb{Z}}\frac{\sqrt{n}}{(|\bar{k}|_1+|k_n|)^\tau|\bar{k}|_1}\\&\le\quad\sqrt{n}2^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k_n\in\mathbb{Z}}\frac{j^{n-3}}{j+|k_n|)^\tau}\end{aligned}$$

这里我们利用了满足 $|\bar{k}|_1=j\ge 1$ 的向量 $\bar{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}$ 的数量可以由 $2^{n-1}j^{n-2}$ 控制。通过将该级数与一个积分进行比较，可以得到其上界:

$$\begin{aligned}\sum_{k_n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(j+|k_n|)^\tau}&\le\frac{1}{j^\tau}+2\int_0^\infty\frac{dx}{(j+x)^\tau}\\&=\frac{1}{j^\tau}+\frac{2}{(\tau+1)j^{\tau-1}}\le\frac{\tau+1}{\tau-1}\frac{1}{j^{\tau+1}}.\end{aligned}$$

这里我们利用了 $\tau>1$，因为 $n\ge 2$。于是

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\\bar{k}\neq 0}}\frac{1}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\le\frac{\sqrt{n}2^{n-1}(\tau+1)}{\tau-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\tau-n+2}}$$

该级数由条件 $\tau>n-1$ 保证收敛。

现在我们来检验它在 Z 之外是否收敛。

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\quad&=\quad\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\\bar{k}\neq 0}}\frac{1}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\\bar{k}=0}}\frac{1}{|k|_1^\tau|k|_{2,\omega}}\\&=\quad\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}\\\bar{k}\neq 0}}\frac{1}{|k|_1^\tau|\bar{k}|}+\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|k|_1^\tau|k_1^2\mathcal{B}(I_1)^2|}\end{aligned}$$

我们之前已经看到，第一项是收敛的。第二项：

$$\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|k_1|^\tau|k_1^\tau\mathcal{B}(I_1)^2|}=\frac{1}{\mathcal{B}(I_1)^2}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{k_1^{\tau+2}},$$

它在 $\forall I_1\neq 0$ 收敛，即在 Z 之外收敛 .

现在回到表达式 6.23。该表达式的其他项在 Z 内外都可以同时估计。现在我们只需验证第三个级数收敛，因为第三个级数收敛时，第二个级数也收敛。我们只需验证 $\sum_{q=1}^{\infty}K_q^n\varepsilon_{q-1}$ 收敛。我们将利用 $\varepsilon\leq\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}$。

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{\infty}K_q^n\varepsilon_{q-1} &= K^n\sum_{q=1}^{\infty}2^{n(q-1)}\varepsilon_{q-1}\\ &= K^n\sum_{q=1}^{\infty}\frac{8\varepsilon 2^{n(q-1)}}{\nu\rho_1 2^{(2\tau+2)(q-1)}}\\ &= K^n\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(2\tau+2-n)(q-1)}}.\end{aligned}$$

当且仅当 $2\tau+2-n\geq 1$ 时，它收敛。至此便完成了，因为根据假设，$2\tau\geq n-1$，且 $\tau\geq n-1$。

综合以上各项：

$$\begin{aligned}&\mathrm{meas}(\mathcal{G}\setminus\hat{G}^*)\\ &\leq\frac{2^n}{\mu^n}\Bigg(D^2\frac{2\gamma M}{\mu}+2(\mathrm{diam}F)^{n-1}\frac{2\gamma M}{\mu}\frac{\sqrt{n}2^{n-1}(\tau+1)}{\tau-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\tau-n+2}}\\ &D\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2(2\tau+2)(q-1)}\\ &+2^{n+1}(\mathrm{diam}F)^{n-1}K^n\frac{8\varepsilon}{\nu\rho_1}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(2\tau+2-n)(q-1)}}\Bigg)\end{aligned}$$

现在利用

$$\varepsilon\leq\frac{\nu^2\mu^2\beta^2}{2^{\tau+30}L^4M^3K^{2\tau+1}}\leq\frac{2^{\tau-18}\cdot 8MK^{\tau+1}\rho_2}{LMK^{2\tau+2}}\gamma\leq\frac{2^{\tau-15}\rho_2}{LK^{\tau+1}}\gamma$$

我们可以将 $\mathrm{meas}(\mathcal{G}\setminus\hat{G}^*)\leq C'\gamma$ 写成，其中 C' 仅取决于 n、μ、D、$\mathrm{diam}F$、M、τ、ρ_1、ρ_2、L、K，并且如果我们定义 $C=(2\pi)^nC'$。因此，

$$\mathrm{meas}[(\mathbb{T}^n\times\mathcal{G})\setminus\mathcal{T}(\mathbb{T}^n\hat{G})]\leq C\gamma.$$

□

第7章

b^m-可积系统的去奇异化

在本章中，我们遵循 [**GMW17**], 关于 b^m-辛形式去奇异化的定义。

定义 7.1. 定 f_ϵ-**去奇异化** ω_ϵ 形式 $\omega = \frac{dx}{x^m} \wedge \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i \alpha_{m-i} \right) + \beta$ 如下:

$$\omega_\epsilon = df_\epsilon \wedge \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i \alpha_{m-i} \right) + \beta.$$

其中在偶数情形下， $f_\epsilon(x)$ 定义为 $\epsilon^{-(2k-1)} f(x/\epsilon)$。而 $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R})$ 是一个满足 $f'(x) > 0$ 对所有 $x \in [-1, 1]$ 成立，并且在外部满足条件的奇光滑函数 that

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2k-1)x^{2k-1}} - 2 & \text{for} \quad x < -1, \\ \frac{-1}{(2k-1)x^{2k-1}} + 2 & \text{for} \quad x > 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

而在奇数情形下， $f_\epsilon(x) = \epsilon^{-(2k)} f(x/\epsilon)$。而 $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R})$ 是一个满足以下条件的偶光滑正函数: $f'(x) < 0$，若 $x < 0$，则 $f(x) = -x^2 + 2$ 对 $x \in [-1, 1]$ 成立，并且

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2k+2)x^{2k+2}} - 2 & \text{if } k > 0, x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2] \\ \log(|x|) & \text{if } k = 0, x \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \end{cases} \tag{7.2}$$

注记 7.2。根据前面的定义，我们得到光滑辛形式（偶数情形）或光滑折叠辛形式（奇数情形），它们在某个 ϵ 邻域之外与原来的 b^m 形式一致。此外，关于 m 还有一个收敛结果。详情见 [**GMPS17**] 。

为简化记号，我们引入 $F_\epsilon^{m-i}(x) = (\frac{d}{dx} f_\epsilon(x)) x^i$，因此 $F_\epsilon^i(x) = (\frac{d}{dx} f_\epsilon(x)) x^{m-i}$。采用此记号，去奇异化 ω_ϵ 写作:

$$\omega_\epsilon = \sum_{i=0}^{m-1} F_\epsilon^{m-i}(x) dx \wedge \alpha_{m-i} + \beta.$$

定义 7.3。(M, ω, μ) 的去奇异化是三元组 $(M, \omega_\varepsilon, \mu_\epsilon)$，其中 ω_ε 如上定义，而 μ_ε 为:

$$\mu \mapsto \mu_\epsilon = \left(f_{1\epsilon} = \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i G_\epsilon^i(x), f_2(\tilde{I}, \tilde{\phi}), \ldots, f_n(\tilde{I}, \tilde{\phi}) \right),$$

其中

$$\mu = \left(f_1 = c_0 \log(x) + \sum_{i=1}^{m-1} c_i \frac{1}{x^i}, f_2(I, \phi) \ldots, f_n(I, \phi) \right)$$

$$G_\epsilon^i(x) = \int_0^x F_\epsilon^i(\tau)d\tau,$$

并且当 $i \neq 0$时，$\hat{c}_1 = c_0$ 和$\hat{c}_{i-1} = -ic_i$。此外

$$\begin{cases} \tilde{I} = (\tilde{I}_1, I_2, \ldots, I_n), & \tilde{I}_1 = \int_0^{I_1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \mathcal{K}\hat{c}_i F_\varepsilon^i(\tau)}{\sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{K}\hat{c}_j}{\tau^j}} \right) d\tau \\ \tilde{\phi}_1 = (\tilde{\phi}_1, \phi_2, \ldots, \phi_n), & \tilde{\phi}_1 = \left(\frac{\sum_{i=1}^m \mathcal{K}\hat{c}_i F_\varepsilon^i(I_1)}{\sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{K}\hat{c}_j}{I_1^j}} \right) \phi_1 \end{cases}$$

注记 7.4. 注意，根据最后一个定义，当 ϵ 趋于 0 时， μ_ϵ 趋于 μ。

定理 C. 去奇异化将一个 b^m-可积系统变换为 m 的可积系统，即使在辛流形上也是如此。对于 m 为奇数的情况，去奇异化将其变换为折叠可积系统。这些可积系统满足：

$$X_{f_j}^\omega = X_{f_{j\epsilon}}^{\omega_\epsilon}.$$

证明. 首先检查奇异部分，即检查 $X_{f_1}^\omega = X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}$。我们来计算定义每个向量场的两个方程。我们必须施加 $-df_1 = \iota_{X_{f_1}^\omega}\omega$和 $-df_{1\epsilon} = \iota_{X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}}\omega_\epsilon$。但首先注意，我们可以将 $\omega = \sum_{i=1}^m \frac{1}{x^i} dx \wedge \alpha_i + \beta$和 $\omega_\epsilon = \sum_{i=1}^m F_\epsilon^i dx \wedge \alpha_i + \beta$重写。条件转化为：

$$-\sum_{i=1}^m \hat{c}_i \frac{1}{x^i} dx = \iota_{X_{f_1}^\omega} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{x^i} dx \wedge \alpha_i + \beta \right),$$
$$-\sum_{i=0}^{m-1} \hat{c}_i F_\epsilon^i(x) dx = \iota_{X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}} \left(\sum_{i=0}^{m-1} F_\epsilon^i(x) dx \wedge \alpha_i + \beta \right).$$

由于环面作用使形式 ω 保持不变，特别地，奇异集是不变的，因此 $X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}$ 和 $X_{f_1}^\omega$ 属于 dx的核。此外，由于 β在叶状结构的每个叶上都是辛形式，而 $X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}$ 和 $X_{f_1}^\omega$ 与该叶状结构横截，因此它们也属于 β的核。

$$-\sum_{i=0}^{m-1} \hat{c}_i \frac{1}{x^i} dx = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{x^i} dx \wedge \alpha_i(X_{f_1}^\omega),$$
$$-\sum_{i=0}^{m-1} \hat{c}_i F_\epsilon^i(x) dx = \sum_{i=0}^{m-1} F_\epsilon^i(x) dx \wedge \alpha_i(X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}).$$

那么，关于$X_{f_1}^\omega$ 和 $X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}$ 的条件分别为：

$$-\hat{c}_i = \alpha_i(X_{f_1}^\omega),$$
$$-\hat{c}_i = \alpha_i(X_{f_{1\epsilon}}^{\omega_\epsilon}).$$

那么，这两个向量场必须相同。

现在来看 $X_{f_j}^\omega = X_{f_{j\epsilon}}^{\omega_\epsilon}$ 关于 $j > 1$的情形。假设现在我们在作用-角坐标 $\omega = \sum_{i=1}^m \kappa \hat{} \frac{c_i}{I_1^i} dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{i=1}^n dI_i \wedge d\phi_i$中有 b^m-辛形式。

这些函数的微分为

$$\begin{aligned} df_i^\varepsilon &= \frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial \phi_1} d\phi_1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial I_j} dI_j + \frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial \phi_j} d\phi_j \right) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial I_1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \mathcal{K}\hat{c}_i F_\varepsilon^i(\tau)}{\sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{K}\hat{c}_j}{\tau^j}} \right) dI_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \phi_1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \mathcal{K}\hat{c}_i F_\varepsilon^i(\tau)}{\sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{K}\hat{c}_j}{\tau^j}} \right) d\phi_1 \\ &\quad + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial I_j} dI_j + \frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial \phi_j} d\phi_j \right). \end{aligned}$$

另一方面，去奇异化后的形式为：

$$\omega^\varepsilon = \sum_{j=1}^m \mathcal{K}\hat{c}_i F_\varepsilon^j(I_1) dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{j=2}^m dI_j \wedge d\phi_j.$$

因此，可以看出，$X_{f_j}^\omega$ 和$X_{f_{j\epsilon}}^{\omega_\epsilon}$ 的表达式为

$$X_{f_j}^\omega = X_{f_{j\epsilon}}^{\omega_\epsilon} = \frac{\frac{\partial f_i}{\partial I_1}}{\sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{K}\hat{c}_i}{I_1^i}} \frac{\partial}{\partial \phi_1} - \frac{\frac{\partial f_i}{\partial \phi_1}}{\sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{K}\hat{c}_i}{I_1^i}} \frac{\partial}{\partial I_1} + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial I_j} dI_j + \frac{\partial f_i^\varepsilon}{\partial \phi_j} d\phi_j \right)$$

□

注7.5. 前面的引理告诉我们，在 b^m-辛流形中，去奇异化系统的动力学与原始 b^m-可积系统的动力学相同。

因此，在$m = 2k + 1$ 的情况下，去奇异化的 b^m-形式变为折叠辛形式；而在 $m = 2k$的情况下，则变为辛形式。在 $m = 2k + 1$ 的情况下， b^m-可积系统变为折叠可积系统（见 [**CM22**]）；而在 $n = 2k$的情况下，则变为标准可积系统。

第 8 章

在b^m-辛流形上的 KAM 定理去奇异化

本节的思路是通过“将 b^m-KAM 定理去奇异化”，恢复某种版本的经典KAM定理，同时给出一个适用于折叠辛形式的新版本 KAM 定理。值得注意的是，目前尚无适用于折叠辛形式的 KAM 定理。已知的最佳结果是一个关于预辛结构的 KAM 定理，见 [**AdlL12**]。对 KAM 定理进行去奇异化，意味着在 b^m-流形上应用 b^m-KAM，然后将结果转换到去奇异化后的情形中。

为了得到恰当的去奇异化定理，我们需要确定哪些可积系统能够作为 b^m-可积系统的去奇异化得到。为简化计算，我们将采用 b^m-可积系统的一个特例，其中 $f_1 = \frac{1}{I_1^{m-1}}$。我们称这些系统为简单的。值得注意的是，采用 b^m-可积系统的一个特例，无法涵盖所有能够通过将 b^m-可积系统去奇异化而得到的系统，但可以涵盖其中一部分。

(1) **Even case** $m = 2k$.
$F = (f_1 = \frac{1}{I_1^{2k-1}}, f_2, \dots, f_n)$, $\omega = \frac{1}{I_1^m} dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{j=1}^n dI_j \wedge d\phi_j$. Observe that close to Z in the even case we can assume $f(I_1) = cI_1$ for some $c > (2 - \frac{1}{2^{2k-1}})$. Then $f_\varepsilon(I_1) = \frac{1}{\varepsilon^{(2k-1)}} \frac{cI_1}{\varepsilon} = c'I$, hence $\omega_\varepsilon = c' dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{j=1}^n dI_j \wedge d\phi_j$. Also $F_\varepsilon^m(I_1) = c'$, $G_\varepsilon^m(I_1) = c'I_1$. Then,

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 &= \int_0^{I_1} \frac{c'}{1/\tau^m} d\tau = \int_0^{I_1} c'\tau^m d\tau = c' \frac{I_1^{m+1}}{m+1}, \\ \tilde{\phi}_1 &= \frac{c'}{1/I_1^m} \phi_1 = c' I_1^m \phi_1 \end{cases}$$

$$F^\varepsilon = ((m-1)c_{m-1}c'I_1, f_2(\tilde{I}, \tilde{\phi}), \dots f_n(\tilde{I}, \tilde{\phi})). \tag{8.1}$$

因此，这种形式的系统可以看作一个 b^m-可积系统的去奇异化。

定理 D（辛流形上的去奇异化 KAM）。考虑辛流形 (M, ω_ε) 上可积系统 F_ε （如 8.1 节所述）的一个刘维尔环面邻域，该流形半局部地带有坐标 (I, ϕ)，其中 ϕ 是环面的角坐标，且有 $\omega_\varepsilon = c' dI_1 \wedge d\phi_i + \sum_{j=1}^n dI_j \wedge d\phi_j$。设 $H = (m-1)c_{m-1}c'I_1 + h(\tilde{I}) + R(\tilde{I}, \tilde{\phi})$ 是一个近可积系统，其中

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 &= c' \frac{I_1^{m+1}}{m+1}, \\ \tilde{\phi}_1 &= c' I_1^m \phi_1, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \tilde{I} &= (\tilde{I}_1, I_2, \dots, I_n), \\ \tilde{\phi} &= (\tilde{\phi}_1, \phi_2, \dots, \phi_n). \end{cases}$$

那么，将 b^m-KAM定理 6.3 的结果应用于 $H_{\text{sing}} = \frac{1}{I_1^{2k-1}} + h(I) + R(I,\phi)$, 对这个去奇异化系统同样成立。

注释 8.1。这个定理不如标准 KAM 定理一般，但我们也对动力学有额外的了解。例如， Z 内部环面上的轨道扰动仍将是位于 Z内部的轨道。从这个意义上说，该定理是新的，因为它保持流形的一个超曲面不变。

(2) **奇数情形** $m = 2k+1$。

$F = (f_1 = \frac{1}{I_1^{2k}}, f_2, \dots, f_n)$ and $\omega = \frac{1}{I_1^{2k+1}} dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{j=1}^n dI_j \wedge d\phi_j$. 在继续之前，我们需要以下在22中定义的概念。d fi d [CM]

定义 8.2。折叠辛流形（M,ω）上的函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 若满足对所有 $v \in V = \ker\omega|_Z$ 都有 $df|_Z(v) = 0$，则称其为折叠的。

定义 8.3。带有临界曲面 Z 的折叠辛流形（M,ω）上的可积系统，是一组函数 $F = (f_1, \dots, f_n)$，它们定义的哈密顿向量场在 Z and M 的稠密子集上彼此独立（$df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$ 在折叠余切丛中），并且关于 ω 对易。

注意，我们需要证明在这种情形下，这些去奇异化函数是折叠的。

注意，在奇数情形下，靠近 Z 时，我们可以假设 $f(I_1) = -I_1^2 + 2$。那么 $f_\varepsilon(I_1) = \varepsilon^{-(2k)} f(\frac{I_1}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon^{2k}}(-(\frac{I_1}{\varepsilon})^2 + 2) = cI_1^2 + \frac{2}{\varepsilon^{2k}}$。然后

$$\omega_\varepsilon = 2cI_1 dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{j=1}^n dI_j \wedge d\phi_j.$$

此外， $F_\varepsilon^m(I_1) = 2cI_1$, $G_\varepsilon^m(I_1) = cI_1^2$。那么，

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 &= \int_0^{I_1} \frac{2c\tau}{1/\tau^m} d\tau = 2c\frac{I_1^{(m+2)}}{(m+2)}, \\ \tilde{\phi}_1 &= 2cI_1^{m+1}\phi_1 \end{cases}$$

于是，去奇异化的动量映射变为

$$F^\varepsilon = ((m-1)c_{m-1}cI_1^2, f_2(\tilde{I},\tilde{\phi}), \dots f_n(\tilde{I},\tilde{\phi})). \tag{8.2}$$

通过简单计算可验证，这些函数实际上是折叠的，因此它们构成一个折叠可积系统。注意，形式为 8.2 的系统可以视为一个 b^m-可积系统的去奇异化。然后，按照我们在偶数情形中的处理:

定理 E（折叠辛流形的去奇异化 KAM）。考虑折叠辛流形（M， ω_ε）上可积系统 F_ε 的一个刘维尔环面邻域，该系统如 8.2 所述。此流形半局部地带有坐标（I， ϕ），其中 ϕ 是环面的角坐标，且

$\omega_\varepsilon = 2cI_1 dI_1 \wedge d\phi_1 + \sum_{j=2}^m dI_j \wedge d\phi_j$。设 $H = (m-1)c_{m-1}cI_1^2 + h(\tilde{I}) + \tilde{R}(I, \phi)$ 是一个近可积系统，满足

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 &= 2c\frac{I_1^{m+2}}{m+2}, \\ \tilde{\phi}_1 &= 2cI_1^{m+1}\phi_1, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \tilde{I} &= (\tilde{I}_1, I_2, \ldots, I_n), \\ \tilde{\phi} &= (\tilde{\phi}_1, \phi_2, \ldots, \phi_n). \end{cases}$$

因此，应用于 $H_{\text{sing}} = \frac{1}{I_1^{2k}} + h(I) + R(I, \phi)$ 的 b^m-KAM定理 6.3 的结果对于该去奇异化系统仍然成立。

注 8.4。若我们考虑不一定是 简单 的b^m-可积系统，最后两个定理还可以得到改进。

第9章

天体力学中的应用

本专著提出了一种形式化方法，用于研究真实物理系统中出现的奇异情形下的微扰理论。我们提供了大量天体力学中的实例来支持这一理论，并在最后概述了 KAM 理论在检测周期轨道方面的潜在应用。

本章展示了天体力学中的各种实例，其中涉及奇异辛形式的出现。 [**BDM+19**]中详细阐述了其中一些实例。这些奇异性大多是采用“正则化”方法所导致的。我们建议读者参阅 [**Kna18**] ，以了解正则化研究的入门介绍。

这一系列实例对本手册尤为重要，因为我们所获得的理论成果，例如作用-角坐标或 KAM，都可以直接应用于下文所述的各类问题。

几乎处处为辛结构的结构，可能源自不保持典范辛结构的坐标变换。

例如：对于构形空间为 $\mathbb{R}^2$ 、相空间为 $T^*\mathbb{R}^2$ 的开普勒问题，传统的（正则）Levi-Civita 变换如下：令 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$，使得 $T^*\mathbb{R}^2 \cong T^*\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$，并将 $(q,\ p)$ 视为复变量 $(q_1 + iq_2 := u,\ p_1 + ip_2 := v)$。作如下坐标变换 $(q,\ p) = (u^2/2,\ v/\bar{u})$，其中 $\bar{u}$ 表示 u 的复共轭。容易看出，所得坐标变换保持典范辛形式。尽管如此，这种正则变换可能会增加哈密顿方程的复杂性，使系统的动力学方面更难分析。因此，探索不保持辛形式的替代坐标变换颇具吸引力。其中一些变换会诱导出新的奇异形式，从而可以应用我们的几何和动力学方法。

其他例子见 [**DKM17**]。

9.1. 开普勒问题

在 $T^*\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)$ 的适当坐标下，开普勒问题的哈密顿量为

$$H(q,p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|}. \tag{9.1}$$

通过正则的 Levi-Civita 变换 $(q,p) = (u^2/2, v/\bar{u})$，该表达式变为

$$H(u,v) = \frac{\|v\|^2}{2\|\bar{u}\|^2} - \frac{1}{\|u\|^2}. \tag{9.2}$$

为避免保持典范辛形式所带来的复杂性，我们提出一种替代方法。保持动量不变，我们可以考虑形式为 $(q,p) = (u^2/2, p)$ 的变换，这或许能得到更简单的哈密顿量。然而，该变换并非辛同胚，因此， $T^*\mathbb{R}^2$ 上的辛形式在该变换下的拉回是一个二形式：它几乎处处为辛形式，但在$T^*\mathbb{R}^2$的一个超曲面上退化

也就是说，刘维尔一形式 $p_1dq_1 + p_2dq_2 = \mathrm{R}(p d\bar{q})$ 拉回后为

$$\begin{aligned}\theta = \Re\left(pd\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right)\right) &= \Re\left(p\bar{u}d\bar{u}\right)\\ &= p_1(u_1du_1 - u_2du_2) + p_2(u_2du_1 + u_1du_2)\end{aligned}$$

而相应的 2-形式 $-d\theta$ 得到一个几乎处处为辛的形式

$$\omega = u_1du_1 \wedge dp_1 - u_2du_1 \wedge dp_2 + u_2du_2 \wedge dp_1 + u_1du_2 \wedge dp_2.$$

为考察该形式的性质，我们将其与自身作楔积，得到:

$$\omega \wedge \omega = (u_1^2 - u_2^2)du_1 \wedge dp_1 \wedge du_2 \wedge dp_2$$

它在由 $u_1 = \pm u_2$ 给出的超曲面上退化。

现在考虑该形式在临界集上的限制。它不具有最大秩，因此不是折叠辛结构。该形式是退化折叠的，且折叠超曲面不正则，由方程 $u_1 = \pm u_2$ 描述。

9.2. 两个固定中心问题

现在我们将两个固定中心问题正规化。

两个固定中心问题与卫星在由两个固定的大质量天体产生的引力势中运动有关。此外，我们假设卫星的运动被限制在一个平面内，该平面位于 $\mathbb{R}^3$ 并包含这两个大质量天体。

在适当的坐标下，哈密顿函数写为:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\mu}{r_1} - \frac{1-\mu}{r_2} \tag{9.3}$$

其中 μ 是两个天体的质量比（即 $\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$）。

欧拉最早使用椭圆-双曲线坐标证明了这一问题的可积性，在这种坐标中，坐标线是共焦椭圆和双曲线。

具体来说，考虑一个坐标系，其中两个中心分别位于（± 1，0），在这个坐标系中，（笛卡尔）坐标表示为（q_1，q_2）。那么，该系统的椭圆坐标为

$$q_1 = \sinh\lambda\cos\nu \tag{9.4}$$

$$q_2 = \cosh\lambda\sin\nu \tag{9.5}$$

对于（λ，ν）$\in \mathbb{R} \times S^1$。因此， $\lambda = c$ 和 $\nu = c$ 的轨迹线分别由平面上的共焦双曲线和椭圆给出。与 Levi-Civita 变换类似，这会产生一个双分支覆盖，其分支点位于吸引中心。

拉回正则辛结构 $\omega = dq \wedge dp$，我们得到

$$\omega = \text{双曲余弦}\,\lambda\,\text{余弦}\;\nu(d\lambda \wedge dp_1 + d\nu \wedge dp_2) - \text{双曲正弦}\;\lambda\,\text{正弦}\;\nu(d\nu \wedge dp_1 + d\lambda \wedge dp_2) \tag{9.6}$$

它在满足 $\cosh\lambda\cos\nu = \sinh\lambda\sin\lambda$ 的超曲面 (λ, ν) 上退化 .

9.3. 双重碰撞与 McGehee 坐标

本节将介绍物理动力系统中另一种相当自然出现的 b-辛结构。从这个例子看来，自然会想到接下来还会有一系列不同的 b^m-辛模型，甚至b^m-折叠模型。但在研究这些例子时，会发现一个主要问题。通过考察为何无法将这个例子扩展为适用于任意 m的b^m-辛模型或 b^m-折叠模型，我们可以找出一种普遍模式。

首先，让我们介绍用于处理双重碰撞问题的 McGehee 坐标变换。

McGehee 在 [**McG81**] 中研究了受广义势 $U(x) = -|x|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ 作用而运动的两个粒子系统，其中 $|x|$ 是两个粒子之间的距离。我们将质心固定在原点，因此可以将问题简化为单个粒子在中心力场中的运动。

运动方程可以写成：

$$\ddot{x} = -\nabla U(x) = -\alpha|x|^{-\alpha-2}x \tag{9.7}$$

其中，点表示相对于时间的导数。在哈密顿形式下，该方程变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha|x|^{-\alpha-2}x. \end{aligned} \tag{9.8}$$

为了研究该系统的行为，[**McG81**] 中提出了如下坐标变换：

$$\begin{aligned} x &= r^{\gamma}e^{i\theta}, \\ y &= r^{-\beta\gamma}(v + iw)e^{i\theta} \end{aligned} \tag{9.9}$$

其中，参数 β 和 γ 与 α 的关系如下：

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha/2, \\ \gamma &= 1/(1+\beta). \end{aligned} \tag{9.10}$$

将平面 $\mathbb{R}^2$ 与复平面 $\mathbb{C}$ 认同后，我们可以将该问题的辛形式写为 $\omega = \mathrm{R}(dx \wedge d\overline{y})$。

备注 9.1. 要验证形式 ω 确实是一个 b^m-辛形式，仅检查与 $\omega \wedge \omega$对偶的多向量场是 $\bigwedge^{2n}({}^{b^m}TM)$ 的一个横截于零截面的截面是不够的。还必须额外验证与 ω 对偶的泊松结构本身是 $\bigwedge^{2}({}^{b^m}TM)$ 的一个适当截面。

命题 9.2. 在坐标变换 (9.9) 下，辛形式 ω被变为关于 $\alpha = 2$的 b-辛结构。

证明。这个命题的证明是直接计算。注意到该变换并非光滑变换，因此我们处理的不是标准的德拉姆形式。不过，在计算结束时，将会清楚地看到，

该形式是一个 b-辛形式，因此这些计算是合理的。如果进行变量替换，我们得到：

$$\begin{array}{rcl} \bar{y} & = & r^{\beta\gamma}(v-iw)e^{-i\theta}. \\ dx & = & \gamma r^{\gamma-1}e^{i\theta}dr + r^{\gamma}e^{i\theta}id\theta. \\ d\bar{y} & = & r^{-\beta\gamma-1}(-\beta\gamma)(v-iw)e^{-i\theta}dr + r^{-\beta\gamma}e^{-i\theta}dv \\ & & +r^{\beta\gamma}(v-iw)e^{-i\theta}(-i)d\theta. \end{array} \tag{9.11}$$

将前两个微分形式作楔积，可得：

$$\begin{array}{rcl} dx\wedge d\bar{y} & = & dr\wedge dv(\gamma r^{\gamma-1-\beta\gamma}) \\ & + & dr\wedge dw(\gamma r^{\gamma-1-\beta\gamma}) \\ & + & dr\wedge d\theta(\gamma r^{\gamma-1-\beta\gamma}(-iv-w)) \\ & + & d\theta\wedge dr(ir^{\gamma-1-\beta\gamma}(-\beta\gamma)(v-iw)) \\ & + & d\theta\wedge dv(ir^{\gamma-\beta\gamma}) \\ & + & d\theta\wedge dw(ir^{\gamma-\beta\gamma}(-i)). \end{array} \tag{9.12}$$

现在，我们可以取此形式的实部，并利用 $\gamma-1-\beta\gamma=-\alpha\gamma$。在新坐标中，该形式写作。

$$\begin{array}{rcl} \omega=\Re(dx\wedge d\bar{y}) & = & \gamma r^{-\beta\gamma+\gamma-1}dr\wedge dv-\gamma(1-\beta)r^{-\beta\gamma+\gamma-1}wdr\wedge d\theta \\ & - & r^{-\beta\gamma+\gamma}dw\wedge d\theta. \end{array} \tag{9.13}$$

此外，我们可以利用 $\gamma(1+\beta)=1$，进一步简化前面的表达式，得到：

$$\omega=(dr\wedge dv+dr\wedge dw)\gamma r^{-\alpha\gamma}+dr\wedge d\theta(wr^{-\alpha\gamma})+d\theta\wedge dw(r^{-\alpha\gamma+1}). \tag{9.14}$$

为了对这种结构进行分类，我们将其与自身作楔积，并考察奇异集上的形式结构。将此形式作楔积，可得

$$\begin{array}{rcl} \omega\wedge\omega & = & -\gamma r^{-2\beta\gamma+2\gamma-1}dr\wedge dv\wedge d\theta\wedge dw \\ & = & -\gamma r^{\frac{2-3\alpha}{2+\alpha}}dr\wedge dv\wedge d\theta\wedge dw. \end{array} \tag{9.15}$$

这里我们用到了 (9.10)。令 $f(\alpha)=\frac{2-3\alpha}{2+\alpha}$。该函数的取值不会低于 -3，也不会高于 1。当 $\alpha=2$ 时，这给出一个 b-辛结构：

$$\omega\wedge\omega=-\gamma rdr\wedge dv\wedge d\theta\wedge dw.$$

$\bigwedge^4({}^bTM)$的截面由 $\omega\wedge\omega$的对偶结构给出，显然与零截面横截。

另一方面，若 $\alpha=2$，则 $\beta=1$，因此：

$$\omega=\gamma r^{-1}dr\wedge\omega\wedge dv,$$

其对偶泊松结构显然也是$\bigwedge^2({}^bTM)$的一个真截面。

□

注9.3. 人们可能会问，对于 α 的其他取值，是否能针对不同的 m 得到其他 b^m-辛结构。例如，对于 $\alpha=6$，由于 $\omega\wedge\omega=-\gamma r^{-2}dr\wedge dv\wedge d\theta\wedge dw$，似乎很可能得到一个 b^2-辛形式。但从 ω 的表达式可以清楚看出，它并不是 $\bigwedge^2({}^{b^2}T^*M)$ 的一个恰当截面

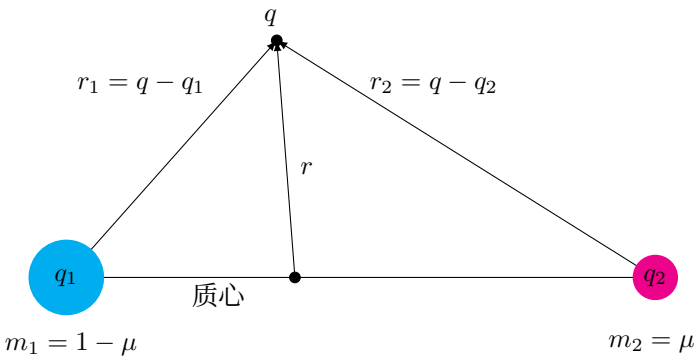

图1. 三体问题示意图。

9.4. 限制性三体问题

在这部专著的最后一节，我们将继续讨论圆形平面限制性三体问题。

限制性椭圆三体问题是三体问题的一种简化版本。它描述一个质量可忽略不计的天体在两个称为主天体的大质量天体的引力场中运动的轨道，这两个主天体沿椭圆开普勒运动运行。平面限制性版本假设所有运动均发生在一个平面内。

该粒子对应的哈密顿量可写为：

$$H(q,p) = \frac{\|p\|^2}{2} + \frac{1-\mu}{\|q-q_1\|} + \frac{\mu}{\|q-q_2\|} = T + U \tag{9.16}$$

其中 μ 是系统的约化质量。

正如 [**KMS16b**], 中所观察到的，可以将一个奇异结构与此问题联系起来。考虑 $\mathbf{T}^*\mathbb{R}^2$ 上的辛形式（用极坐标表示）。将坐标变换为极坐标 $(q_1, q_2) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ 后，再进行相应的正则动量变换，我们得到哈密顿函数

$$H(r,\alpha,P_r,P_\alpha) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_\alpha^2}{2r^2} + U(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \tag{9.17}$$

其中 P_r, P_α 是相应的正则动量，且势能为：$U(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$

McGehee 坐标变换用于研究轨道在无穷远附近的行为，另见 [**DKdlRS19**]:

$$r = \frac{2}{x^2}. \tag{9.18}$$

正则动量的相应变换显然为

$$P_r = -\frac{x^3}{4}P_x. \tag{9.19}$$

哈密顿量变换为

$$H(r,\alpha,P_r,P_\alpha)=\frac{x^6P_x^2}{32}+\frac{x^4P_\alpha^2}{8}+U(x,\alpha). \tag{9.20}$$

通过变换位置坐标 (9.18)，而不修改与 r 相关的动量，我们得到一个更简单的哈密顿量；然而，辛形式的拉回不再是辛的，而是呈现三阶奇点，称为 b^3-辛：

$$\omega=\frac{4}{x^3}dx\wedge dP_r+d\alpha\wedge dP_\alpha. \tag{9.21}$$

加入无穷远直线，可以描述临界集 $Z=\{x=0\}$ 内的动力学。根据所实施的坐标变换，我们可能会认为 Z 内的动力学没有物理意义，但它与 Z 附近动力学的相互作用，能提供有关逃逸轨道行为的信息；这些逃逸轨道有时被称为 奇异周期轨道（参见 [**MO21**] 和 [**MOPS22**]）。

给定一个维数为 $2n$ 的辛流形上的自治哈密顿系统，哈密顿函数的水平集通常带有接触结构（接触结构由一个满足 $\alpha\wedge(d\alpha)^{n-1}\neq 0$ 型条件的单形式 α 给出）。

在 [**MO18, MO21**] 中讨论了 b-装置的应用。尤其是，通过将上述条件应用于 b^m-形式，引入了 b^m-接触结构的概念。在这一框架下，也可以引入接触领域中的经典概念，例如 Reeb向量场。

通过像在接触背景中那样考虑 McGehee变换， [**MO21**]证明了以下定理：

定理 9.4。 经过 *McGehee*变换后，*Liouville*向量场 $Y=p\frac{\partial}{\partial p}$ 是一个 b^3-向量场，它处处横截于哈密顿量 Σ_c在 $c>0$ 时的水平集，而当 $c>0$ 时，水平集$(\Sigma_c,\ \iota_Y\omega)$ 是 b^3-接触流形。从拓扑上看，该接触流形的临界集是一个圆柱面（可将其解释为无穷远直线的一个子集），且 *Reeb*向量场在临界集上有无穷多个非平凡周期轨道。

本专著中的 KAM定理可通过对上述周期轨道施加扰动，找到靠近无穷远处的限制性三体问题的新周期轨道（另见 [**MO21**]）。这种扰动技术是微扰理论中的一种古老方法，可能起源于庞加莱本人（称为庞加莱延拓法，如 [**MO17**] 所述）。这为今后将在别处开展的进一步研究铺平了道路。

9.5. 天体力学和流体力学中的逃逸轨道

Reeb向量场及其动力学与Beltrami向量场密切相关，后者提供了Euler方程的定常解。事实上，Etnyre和Ghrist [**EG00**] 揭示了一个“镜像”的存在，它将Reeb向量场映射为Beltrami向量场。因此，可以将KAM理论用于寻找周期轨道的方法推广到对定常流体流的周期轨道进行研究。此外，这一对应关系还带来了将天体力学中的概念转换到流体力学中的可能性。其中一个概念就是逃逸轨道。Reeb-Beltrami对应在 b框架下由 [**CMPS19**]进行了推广。

在 [**MO21**] 中，我们引入了 b-Reeb向量场 R_α的奇异周期轨道概念:

定义 9.5. 设 (M, α) 是带有临界超曲面 Z的 b-接触流形流形。记 R_α 为其 b-Reeb 向量场。奇异周期轨道 γ 是满足 $\lim_{t\to\pm\infty}\gamma(t) = p_\pm \in Z$ 的轨道，其中 $R_\alpha(p_\pm) = 0$。

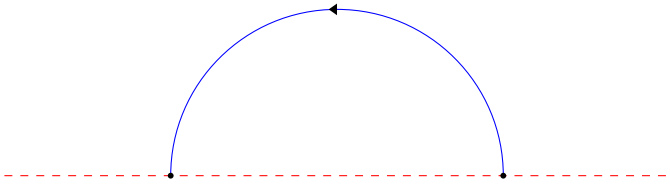

图 2. 奇异周期轨道

奇异魏因斯坦猜想最初在 [**MO21**] 中提出。在 [**MOPS22**] 中，研究了奇异结构中的奇异周期轨道及振荡运动等推广形式的存在性。奇异周期轨道是逃逸轨道的一种特殊情形。

对于 b-Beltrami 或 b-Reeb 向量场，逃逸轨道是指其 α-或 ω-极限集位于与 b-结构相关联的临界集上的轨道。 b-Reeb Beltrami 对应关系，结合 Uhlenbeck [**Uhl76**] 关于拉普拉斯算子特征函数的结果，表明对于大多数渐近精确的 b-度量， b-Beltrami 向量场都存在逃逸轨道。

以下由 [**FMOPS23**] 证明的定理，给出了 b-Beltrami 或 b-Reeb 向量场一般类的逃逸轨道数量下界。该下界取决于临界集的连通分支数目，其中 Z 但该数目往往可能是无穷大。

定理 9.6. [**FMOPS23**] 设 (M, Z) 为一个三维 b-流形。那么，对于一般的渐近精确 b-度量，任意 b-*Beltrami* 向量场都至少有 $2N$ 条逃逸轨道，或者有无穷多条逃逸轨道，其中 N 是 Z的连通分支数目。

鉴于 b-Reeb-Beltrami对应，这意味着特殊类别的 b-接触形式中的一般 b-Reeb向量场也至少有 $2N$ 条或无穷多条逃逸轨道。

因此，Poincar´e延拓方法和我们的KAM结果可用于定位这些新情境中的奇异对应物或周期轨道，无论是逃逸轨道还是奇异周期轨道，详见 [**Mir20**], [**MO21**],[**MOPS22**],和 [**FMOPS23**]。

参考文献

[AdlL12] Hassan Najafi Alishah 和 Rafael de la Llave，《预辛动力系统中的 KAM 环面追踪》，《动力微分方程杂志》24（2012），第4期，685–711。MR 3000600[Arn81] V. I. Arnol'd，《奇点理论》，《伦敦数学学会讲义丛书》第53卷，剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1981年，精选论文，俄文译本，C. T. C. Wall 作序。MR 631683[Arn89] ———，《平面上的泊松结构与体积形式的其他幂次》，《苏联数学杂志》47（1989），第3期，2509–2516。[BDM+19] Roisin Braddell、Amadeu Delshams、Eva Miranda、C´edric Oms 和 Arnau Planas，《奇异辛几何导论》，《国际几何方法与现代物理学杂志》16（2019），增刊1，1940008，16页。MR 3904653[BKM23] Roisin Braddell、Anna Kiesenhofer 和 Eva Miranda，一种 b-辛切片定理，《伦敦数学学会会报》55（2023），第1期，90–112。MR 4561237[BMO22] Joaquim Brugu´es、Eva Miranda 和 C´edric Oms，《奇异辛流形上的阿诺德猜想》，arXiv:2212.01344（2022）。[CM22] Robert Cardona 和 Eva Miranda，《奇异辛流形上的可积系统：从局部到整体》，《国际数学研究通报》（2022），第24期，19565–19616。MR 4523256[CMPS19] Robert Cardona、Eva Miranda 和 Daniel Peralta-Salas，《欧拉流与奇异几何结构》，《皇家学会哲学汇刊 A 辑》377（2019），第2158期，20190034，15页。MR 4036383[DG96] Amadeu Delshams 和 Pere Guti´errez，《有效稳定性与 KAM 理论》，《微分方程杂志》**128** 1996 2, 415 490 1398328 （），第 – 期。MR [19]

DKdlRS Amadeu Delshams、Vadim Kaloshin、Abraham de la Rosa 和 Tere M. Seara，《受限平面椭圆三体问题中的全局不稳定性》，《数学物理通讯》366（2019），第3期，1173–1228。[DKM17] Amadeu Delshams、Anna Kiesenhofer 和 Eva Miranda，《奇异辛流形上的可积与非可积系统示例》，《几何与物理学杂志》115（2017），89–97。MR 3623614[EG00] John Etnyre 和 Robert Ghrist，《接触拓扑与流体力学。I. 贝尔特拉米场与塞弗特猜想》，《非线性》13（2000），第2期，441–458。MR 1735969[FMOPS23] Josep Fontana、Eva Miranda、C´edric Oms 和 Daniel Peralta-Salas，《2n 个或无穷多个逃逸轨道》，arXiv:2303.17690（2023）。[GLPR17] Marco Gualtieri、Songhao Li、´Alvaro Pelayo 和 Tudor Ratiu，《热带动量映射：环面对数辛流形的分类》，《数学年刊》367（2017）。[GMP10] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Ana Pires，《余维一辛叶状结构与正则泊松结构》，《巴西数学学会通报》新系列42（2010）。[GMP14] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Ana Rita Pires，《b-流形上的辛几何与泊松几何》，《数学进展》264（2014），864–896。[GMPS15a] Victor Guillemin、Eva Miranda、Ana Rita Pires 和 Geoffrey Scott，《 b-辛流形上的环面作用》，《国际数学研究通报》（2015），第14期，5818–5848。MR 3384459[GMPS15b] ———，《 b-辛流形上的环面作用》，《国际数学研究通报》（2015），第14期，5818–5848。MR 3384459

[GMPS17] ———, 《哈密顿环面作用的凸性与 b-辛流形》, 《数学研究快报》24（2017）, 第2期, 363–377。MR 3685275[GMW17] Victor Guillemin、Eva Miranda 和 Jonathan Weitsman, 《 b^m-辛结构的消奇异化》, 《国际数学研究通知》2019（2017）, 第10期, 2981–2998。[GMW18a] Victor W. Guillemin、Eva Miranda 和 Jonathan Weitsman, 《环面作用于 b^m-辛流形时动量映射像的凸性》, 《皇家学会哲学汇刊 A 辑》 **376** 2018 2131, 20170420, 6 3868423 （）, 第 期。MR GMW b [18] ———, 《-辛流形的几何量子化》, 《数学进展》331（ b 2018 941 951 3804693 ）, – 。[21] ———, MR GMW 《 b^m-辛流形的几何量子化》, 《数学杂志》298（2021）, 第1–2期, 281–288。MR 4257086[GS90] V. Guillemin 和 S. Sternberg, 《物理学中的辛技术》, 剑桥大学出版社, 1990年。[KM17] Anna Kiesenhofer 和 Eva Miranda, 《可积系统的余切模型》, 《数学物理通讯》350（2017）, 第3期, 1123–1145。MR 3607471[KMS16a] Anna Kiesenhofer、Eva Miranda 和 Geoffrey Scott, 《 b 9 **105** 2016 1, -泊松流形上 66 85 3427939 的作用-角变量与 KAM定理》, 《纯粹与应用数学杂志》（） （）, 第 – 期。MR [KMS16b] ———, 《 b-泊松流形上的作用-角变量与 KAM定理》, 《纯粹与应用数学杂志》（ 9 **105** 2016 1, 66 85 3427939 ）（）, 第 – 期。[18] MR Kna Andreas Knauf, 《数学物理：经典力学》, Unitext, 第109卷, 施普林格出版社, 柏林, 2018年, 由 Jochen Denzler 从2017年德文第二版译出, 《数学丛书》。MR 3752660[LGMV08] Camille Laurent-Gengoux、Eva Miranda 和 Pol Vanhaecke, 《泊松流形上可积系统的作用-角坐标》, 《国际数学研究通知》2011（2008）。[Mar19] Charles-Michel Marle, 《投影立体测绘与矩》, 工作论文或预印本, 2019年6月。[McG81] Richard P McGehee, 《具有非引力相互作用的经典粒子系统中的双重碰撞》, 《瑞士数学评论》56（1981）, 第1期, 524–557（美式英语）。[Mel93] Richard B. Melrose, 《Atiyah-Patodi-Singer指标定理》, 《数学研究札记》第4卷, A K Peters, Ltd., 马萨诸塞州韦尔斯利, 1993年。MR 1348401[Mir20] Eva Miranda, 《寻找周期轨道》, 《西班牙皇家数学学会公报》23 3, 631 2020 654 4176121（）, 第 – 期。MR[MM22] Anastasia Matveeva 和 Eva Miranda, 《奇异辛流形的约化理论与模空间上的奇异形式》, arXiv:2205.12919（2022）。[MO17] Kenneth R. Meyer 和 Daniel C. Offin, 《哈密顿动力系统与N体问题导论》, 第三版, 《应用数学科学》第90卷, 施普林格, 查姆, 2017年。MR 3642697[MO18] Eva Miranda 和 C´edric Oms, 《带奇点的接触结构：从局部到整体》, arXiv:1806.05638（2018）。[MO21] Eva Miranda 和 C´edric Oms, 《奇异魏因斯坦猜想》, 《数学进展》389（2021）, 107925。[MOPS22] Eva Miranda、C´edric Oms 和 Daniel Peralta-Salas, 《关于奇异魏因斯坦猜想及 b-贝尔特拉米场逃逸轨道的存在性》, 《当代数学通讯》24（2022）, 第7期, 论文编号2150076, 25页。MR 4476313[MOT14] Ioan Marcut 和 Boris Osorno Torres, 《对数辛结构的变形》, 《伦敦数学学会杂志》90（2014）, 第1期, 197–212。[MS21] Eva Miranda 和 Geoffrey Scott, 《 E-流形的几何》, 《伊比利亚美洲数学评论》37（2021）, 第3期, 1207–1224。MR 4236806[NT96] Ryszard Nest 和 Boris Tsygan, 《带边界辛流形的形式变形》, 《纯粹与应用数学杂志》481（1996）, 27–54。MR 1421945[NT01] ———, 《辛李代数丛的变形、全纯辛结构的变形与指标定理》, 《亚洲数学杂志》5（2001）, 第4期, 599–635。MR 1913813

[P¨os93] J¨urgen P¨oschel，拟凸哈密顿系统的*Nekhoroshev*估计，《数学杂志》**213**（1993），第1期，187–216。[Rad02] Olga Radko，紧致定向曲面上拓扑稳定泊松结构的分类，《辛几何杂志》 **1** 2002 3, 523 542 1959058 **( )**，第– [16] b^k **14** 2016 期。MR Sco Geoffrey Scott，流形的几何，《辛几何杂志》（），第1期，71 95 3523250 –。MR [Swa62] Richard G. Swan，向量丛与投射模，《美国数学会汇刊》**105**（1962），264–277。[Uhl76] K. Uhlenbeck，特征函数的一般性质，《美国数学杂志》**984**，1059 1976 1078 464332（），第–期。MR