arXiv:2301.00274v1 [math.OA] 31 Dec 2022

谱邻近度下谱三元组归纳序列的收敛性

CARLA FARSI、FRÉDÉRIC LATRÉMOLIÈRE 和 JUDITH PA CKER

摘要。在度量几何的背景下，我们为量子紧致度量空间的归纳序列在 Gromov-Hausdorff 推进距离下的收敛引入一个新的充要条件。Gromov-Hausdorff 推进距离是紧度量空间上 Gromov-Hausdorff 距离的非交换类比。该条件在许多例子中都易于验证，例如与 AF代数相关的量子紧致度量空间，或离散归纳极限群的某些扭曲卷积 C*-代数。我们的条件还蕴含谱三元组归纳序列在谱邻近度意义下收敛；谱邻近度是 Gromov-Hausdorff 推进距离在量子紧致度量空间上的推广，适用于度量谱三元组空间。特别地，我们证明了底层 C*代数的态空间作为量子紧致度量空间收敛，也证明了谱三元组中由狄拉克算子诱导的量子动力学收敛。我们将这些结果应用于非交换螺线体和 Bunce-Deddens C*-代数上偶谱三元组归纳极限的新类别。我们的构造涉及具有有界倍增性质的长度函数，增加了度量信息，并突显了这些扭曲C*-代数作为归纳极限的结构。

目录

1. 引言 22. 归纳序列近似距离中收敛的刻画 62.1. 预备知识：Gromov-Hausdorff 推进距离 72.2. 主要结果 103. 度量谱三元组归纳序列关于谱邻近度的收敛 213.1. 预备知识：谱邻近度 213.2. 预备知识：谱三元组的归纳极限 253.3. 主要结果 264. 扭曲群复数域上的偶谱三元组 C^*-代数 314.1. 离散群、适当长度函数、2-余循环与经典谱三元组 314.2. 谱三元组 324.3. 主要结果 39参考文献 52

日期：2023年1月3日。2000年数学主题分类。主要分类：46L89、46L30、58B34。关键词和短语。谱三元组、非交换度量几何、量子格罗莫夫-豪斯多夫距离、Monge-Kantorovich 距离、量子度量空间、量子环面、非交换螺线体、Bunce-Deddens代数。

1. 引言

谱三元组由 Connes 于 1985年提出，是作用在流形上丛上的狄拉克算子的非交换推广形式 [11, 12], , 已成为在非交换算子代数上编码几何信息的有力工具。部分受到数学物理思想的启发，也受各种 C*代数极限概念反复发挥作用的推动，第二作者在此引入了 [47] 度量谱三元组上的一种距离（模去显然的酉等价），从而能够以几何意义讨论某些谱三元组对其他谱三元组的逼近。这种距离称为谱邻近度，它建立在非交换几何中 Gromov-Hausdorff 距离的非交换类比物之上，该类比物称为 Gromov-Hausdorff 推进距离 [35, 38, 39, 40]。因此，谱三元组的收敛被定义在一个更广泛的量子紧致度量空间收敛框架之内；量子紧致度量空间是紧致度量空间上 Lipschitz函数代数的非交换类比物。在这一框架中，近似距离被扩展到量子紧致度量空间上的某些模 [48], 以及偶 C*对应 [46], 并附加受度量联络启发的度量数据。第二作者还将近似距离扩展到了各种动力系统 [41, 44]。第二作者利用这些扩展，在度量谱三元组上定义了谱邻近度。

谱邻近度 $\Lambda_{\text{谱}}$ 已应用于分形上的谱三元组近似 [29] 以及量子环面上的谱三元组近似 [45], ; 后一个例子植根于物理学中的矩阵模型及其收敛问题。事实上，谱邻近度赋予所有度量谱三元组构成的空间以自身的几何结构，并使我们能够在充分理解的拓扑框架内捕捉某些几何直觉。例如，尽管量子环面并非有限维 C*代数的归纳极限，如今借助谱邻近度，量子环面上的谱三元组可以任意精度地由全矩阵代数上的谱三元组近似——这是数学物理中常见的启发式方法，如今已得到形式化。谱邻近度意义下的收敛意味着底层代数的态空间在某种形式的格罗莫夫-豪斯多夫距离下收敛，意味着通过对狄拉克算子取指数而得到的量子动力学收敛，并意味着狄拉克算子的谱以及有界连续函数演算收敛；这也关系到谱作用量等物理重要量的收敛 [31]。

本文探讨了*度量谱三元组的归纳序列* [20] 何时会在谱邻近度的意义下收敛到其归纳极限。为展示这一结果的强大之处，除了 AF 代数这一类之外，我们还在非交换螺线体 [49] 和某些 Bunce-Deddens代数 [8, 14] 上构造了偶度量谱三元组，并证明它们分别是量子环面上的度量谱三元组以及圆上的全矩阵代数丛的极限，这里的极限是指谱邻近度意义下的极限 $\Lambda_{\text{谱}}$。由此，我们给出了溶子群可视为环面的度量极限，以及 Bunce-Deddens 代数可视为圆上矩阵值函数代数的度量极限这一事实的非交换几何版本。

谱三元组（$\mathfrak{A}$, $\mathscr{H}$, $/D$）由一个含幺 C*代数 $\mathfrak{A}$ 在希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上作用，以及一个（通常无界的）自伴算子 $/D$ 定义在 $\mathscr{H}$ 上构成；该算子与一个稠密 $*$子代数中的元素的对易子有界 $\mathfrak{A}$，且具有紧预解式（见定义（3.1））。谱三元组包含大量几何信息，包括度量数据。事实上，Connes 在 [12] 中指出，谱三元组在其底层 C*代数的态空间上定义了一个规范扩展伪距离；特别是，

当采用通常的谱三元组时，该距离可恢复测地距离。这个通常的谱三元组由狄拉克算子在无边界紧连通黎曼自旋流形的旋量丛平方可积截面上作用给出。

Rieffel 在 [55, 56] 随后从一个观察出发，为非交换几何的度量这一面向赋予了新的视角：谱三元组所诱导的 Connes距离是 Monge-Kantorovich度量 [27, 28]的一种非交换类比；因此，将量子紧致度量空间定义为一个有序对 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$，其中包含一个含幺 C*代数 $\mathfrak{A}$ 和一个 Lipschitz 半范数的非交换类比L ，便显得顺理成章。特别地，若对任意两个态 φ、ψ 属于 $\mathfrak{A}$，我们定义

$$\mathsf{mk}_{\mathsf{L}}(\varphi,\psi) := \sup\left\{|\varphi(a)-\psi(a)| : \mathsf{L}(a)\leqslant 1\right\}$$

那么$\mathsf{mk}\mathsf{L}$ 是一个诱导弱-* 拓扑的距离，该拓扑定义在 $\mathfrak{A}$的态空间上。随着非交换度量几何研究的逐渐成熟，对半范数L 的具体要求也不断演变。本文将采用量子紧致度量空间在 [38, 39] 中给出的定义（见定义（2.3））。事实上，如果谱三元组的 Connes度量诱导其底层 C*代数的态空间上的弱-* 拓扑，那么它便自动给出一个量子紧致度量空间；这样的谱三元组称为度量谱三元组。

因此，可以在非交换度量几何的背景下研究度量谱三元组。为此，第二作者在度量谱三元组空间上引入了一种距离。定义这种称为谱邻近度的距离，首先要构造量子紧致度量空间之间的一种非交换几何类比——*Gromov-Hausdorff* 距离 [17, 22, 23] ，我们将在小节（2.1）中回顾这一内容。Rieffel 最初引入了这种类比 [57],，其动机是将数学物理文献中出现的某些收敛结果形式化。尽管已有若干此类类比被提出，本文将采用第二作者在 Λ^* 中引入的 [35, 38, 39, 40] Gromov-Hausdorff 推进距离，它的设计旨在使其特别适用于 C*代数理论以及谱三元组所给出的半范数。一般而言，这种推进距离旨在使我们能够计算定义在互不相关的 C*代数上的量子紧致度量空间之间的距离，例如矩阵代数与量子环面之间的距离。然而，在本文中，我们将探究在处理 C*代数的归纳极限时，能够从这种推进距离推导出哪些额外性质。

我们首先建立量子紧致度量空间的归纳极限收敛到其归纳极限的一种刻画，该刻画以桥构造器来表述。桥构造器是一类 $*$-自同构，与量子度量具有自然联系。

定义 (定义（2.20）)。 对于每个$n \in$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$，设 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$ 是一个量子紧致度量空间，满足 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}}\mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$ 下递增的 $\mathfrak{A}_\infty$ 的 C*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。

当对所有 $\varepsilon>0$，都存在自然数集 $\in$ 自然数集，使得若$n \geqslant$ 自然数集，则称 $\pi:\mathfrak{A}_\infty\to\mathfrak{A}_\infty$ 这一 $*$-自同构是 $((\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}},(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty))$ 的一个桥构造器：

$$\forall a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)\quad \exists b\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n):\quad \mathsf{L}_n(b)\leqslant\mathsf{L}_\infty(a)\text{ and }\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\varepsilon\mathsf{L}_\infty(a)$$

and

$$\forall b\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)\quad \exists a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty):\quad \mathsf{L}_\infty(a)\leqslant\mathsf{L}_n(b)\text{ and }\|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}<\varepsilon\mathsf{L}_n(b),$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}_\infty}$ 是 $\mathfrak{A}_\infty$上的 C*范数。

桥构造器是证明近似距离的度量收敛的有力工具，而且尤为重要，因为通常很难找到近似距离意义下度量收敛的必要条件（除了直径收敛这一平凡情形）。因此，这个定理独立于我们对谱三元组的研究，探讨了归纳极限与度量意义下的极限之间的关系，如 [47, 35]所示。因此，我们的第一个主要结果是以下关于某些归纳序列在近似距离下收敛的定理 Λ^* 。

定理 (定理 (2.22))。 对于每个 $n \in$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$，设 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$ 是量子紧致度量空间，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个递增的（关于 $\subseteq$）C^*-子代数序列，且满足 $\mathfrak{A}_\infty$使得 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}} \mathfrak{A}_n)$，其中 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。我们假设存在$\exists M > 0$，使得对所有 $n \in$自然数集：

$$\frac{1}{M}\mathsf{L}_n \leqslant \mathsf{L}_\infty \leqslant M \cdot \mathsf{L}_n \ on \ \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n).$$

Then

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)) = 0,$$

当且仅当，对于 $(\mathfrak{A}_{g(n)}, \mathsf{L}_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 的任意子序列 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，存在一个严格递增函数 f: 自然数集 $\to$ 自然数集 以及一个 桥构造器 π，用于构造 $((\mathfrak{A}_{g\circ f(n)}, \mathsf{L}_{g\circ f(n)})_{n\in\mathbb{N}}, (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty))$。

构造谱邻近度的第二步 $\Lambda\mathrm{spec}$ 是将 Gromov-Hausdorff 推进距离扩展为一种距离，该距离定义在量子紧致度量空间上的 C* 对应类上；这些对应配备了某种形式的量子度量，并带有某个幺半群的相容作用。与度量谱三元组（$\mathfrak{A}, \mathscr{H}, /D$）相关联的 C* 对应，是希尔伯特空间$\mathscr{H}$，视为一个 $\mathfrak{A}$-$\mathbb{C}$-C* 对应，其量子度量由 $/D$的图范数给出，而 $[0,\infty)$ 在 $\mathscr{H}$ 上的作用定义为 $t \in [0,\infty) \mapsto \exp(it/D)$。按照设计，谱邻近度意义下的收敛蕴含底层量子紧致度量空间的收敛，但反之通常不成立。我们将在小节（3.1）中详细回顾这些内容。

接下来，我们转向度量谱三元组归纳序列这一更具体的情形。谱三元组的归纳序列首次于 [20], 中引入，是谱三元组的一个自然来源；我们关注的是这类序列在谱邻近度意义下的收敛，即在真正的度量意义下的收敛。在本文中，作为第二个主要结果，我们证明：只要底层量子紧致度量空间的归纳序列存在一个全量子等距桥构造器，度量谱三元组的归纳序列就在谱邻近度意义下收敛。同样令人惊讶的是，对 Gromov-Hausdorff 推进距离收敛作温和的强化，竟能推出强得多的谱邻近度收敛。这一结论对任意度量谱三元组序列并不成立，但得益于归纳极限的结构，它在此处成立。第二个主要定理如下。

定理(定理 (3.17))。 设 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, /D_\infty)$ 是一个度量谱三元组，它是度量谱三元组序列 $(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, /D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限，含义如定义（*3.15*）所述。对每个 $n \in$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$，令

$$\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) := \left\{a \in \mathfrak{A}_n : a = a^*, a\,\mathrm{dom}(\mathbb{D}_n) \subseteq \mathrm{dom}(\mathbb{D}_n) \ and \ [\mathbb{D}_n, a] \ is \ bounded\right\},$$

并且，对于所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，令 $\mathsf{L}_n(a)$ 表示 $[/D_n, a]$ 的算子范数。

如果存在一个桥构造器 $\pi:(\mathfrak{A}_\infty,L_\infty)\to(\mathfrak{A}_\infty,L_\infty)$，对于 $((\mathfrak{A}_n,L_n)_{n\in\mathbb{N}},(\mathfrak{A}_\infty,L_\infty))$，它是 $(\mathfrak{A}_\infty,L_\infty)$ 的完全量子等距，即满足 $\pi(dom(L_\infty))\subseteq dom(L_\infty)$，且 $L_\infty\circ\pi=L_\infty$ 在 $dom(L_\infty)$ 上，那么

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A}_n,\mathscr{H}_n,\not{D}_n),(\mathfrak{A}_\infty,\mathscr{H}_\infty,\not{D}_\infty))=0.$$

本文最后构造了某些扭曲群 C*-代数 $C^*(G,\sigma)$ 上的新偶谱三元组，其中离散群 $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n$ 是由 G 的一个严格递增子群序列 G_n 的并集。这些例子包括非交换螺线体 [49] 以及某些 Bunce-Deddens 代数 [8]。我们的构造旨在将 $C^*(G,\sigma)$ 上的新谱三元组视为某个归纳序列 $(C^*(G_n,\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ 上构造的度量谱三元组归纳序列在谱邻近度意义下的极限。这一度量性质使我们的谱三元组有别于非交换螺线体 [1, 2] 或 Bunce-Deddens 代数 [24] 上的其他谱三元组，并且原则上适用于许多其他例子。此外，研究表明，非交换螺线体在 [48] 中是量子环面在近似距离意义下的极限；这里采用的是另一族并非源自谱三元组的量子度量。

一般而言，很难证明给定的谱三元组是度量的。在某些流形、量子环面 [12, 15, 16, 34,45], 上可以找到度量谱三元组的例子；更一般地说，还可以在赋有紧李群遍历作用的含幺 C*代数 [21, 55], 、某些 C*交叉积 [24], 、量子群 [13],、Podle´s 球面 [3], 、AF代数 [7], 、某些分形 [10, 30], 等结构上找到这类例子。我们注意到，已有一些谱三元组并非度量的例子 [26]。

因此，获得新的度量谱三元组例子是相当有趣的；此外，证明它们是关于谱邻近度的谱三元组的有趣极限也同样重要。由此，我们建立了本文的第三个主要结果，其证明建立在前两个结果之上。

定理 （定理（4.16）的简化形式）。 设 $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n$ 是一个阿贝尔离散群，且 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G 的一个严格递增子群序列。设 σ 是 G 的一个 2-余循环，其取值于 $\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$。

设 $\mathbb{L}_H$ 是 G 上的一个长度函数，其在 G_n 上的限制对所有 $n\in$ 自然数集均为适当函数，并且序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在由 $\mathbb{L}_H$ 在 G 的闭子集上诱导的豪斯多夫距离下收敛到 G。令

$$\mathbb{F}:g\in G\longmapsto \mathrm{scale}(\min\{n\in\mathbb{N}:g\in G_n\}),$$

其中尺度函数 : 自然数集 $\to[0,\infty)$ 是一个严格递增函数。

若适当长度函数 $\mathbb{L}:=\max\{\mathbb{L}_H,\mathbb{F}\}$ 满足：对于某个 $\theta>1$，存在 $c>0$，使得对所有 $r\geqslant 1$:

$$\left|\{g\in G:\mathbb{L}(g)\leqslant\theta\cdot r\}\right|\leqslant c\left|\{g\in G:\mathbb{L}(g)\leqslant r\}\right|,$$

then

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathsf{spec}}((C^*(G,\sigma),\ell^2(G)\otimes\mathbb{C}^2,\not{D}),(C^*(G_n,\sigma),\ell^2(G_n)\otimes\mathbb{C}^2,\not{D}_n))=0,$$

其中对所有 $n\in$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$ 以及所有 (ξ_1,ξ_2)，均有

$$\left\{\xi\in\ell^2(G_n)\otimes\mathbb{C}^2:\sum_{g\in G_n}(\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2)\left\|\xi(g)\right\|_{\mathbb{C}^2}^2<\infty\right\},$$

我们设

$$\not{D}\xi:g\in G\longmapsto\begin{pmatrix}\mathbb{F}(g)\xi_2(g)+\mathbb{L}_H(g)\xi_1(g)\\ \mathbb{F}(g)\xi_2(g)-\mathbb{L}_H(g)\xi_1(g)\end{pmatrix}.$$

在上述谱三元组中，$C^*(G,\ \sigma)$ 和 $C^*(G_n,\ \sigma)$ 通过其左正则 σ-射影表示作用。

随后，我们应用此定理在非交换螺线体上构造度量谱三元组，即扭曲群 C*代数 复数域 $*\left(\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)^2,\sigma\right)$ 其中

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]_2 := \left\{\frac{k}{p^n} : k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\},$$

p 为素数自然数，且 σ 是 $\left(\mathrm{Z}\left[\frac{1}{\mathrm{p}}\right]\right)$ 的一个 2-余循环。在这种情况下，使用上述定理中的记号，我们将 L_H 取为任意实数集^2, 上的范数在 $\left(\mathrm{Z}\left[\frac{1}{\mathrm{p}}\right]\right)^2$ 上的限制，而 F 可通过对所有 $\mathrm{g}=(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2)\in\left(\mathrm{Z}\left[\frac{1}{\mathrm{p}}\right]\right)^2$，令 $\mathrm{F}(\mathrm{g}) := \mathrm{p}^{\min\left\{\mathrm{n}\in\mathrm{N}:\mathrm{g}\in\left(\frac{1}{\mathrm{p}^{\mathrm{n}}}\mathrm{Z}\right)^2\right\}}$ 来选取。或者，遵循 [19], 的思路（这也启发了本文的研究），我们可以对所有 $\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2\in\mathrm{Z}\left[\frac{1}{\mathrm{p}}\right]$，令 $\mathrm{F}(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2) := \max\{|\mathrm{g}_1|_p,|\mathrm{g}_2|_p\}$，其中 $|\cdot|_p$ 是 p 进绝对值。

类似地，我们可以应用 [52] 得到 Bunce-Deddens 代数可表示为扭曲群 C*-代数 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Z}(\alpha)\times\mathrm{Z},\sigma)$，其中适当选取 2-余循环 σ 和非零自然数序列 $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $\mathrm{n}\in\mathrm{N}$，$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ 均为素数；群 $\mathrm{Z}(\alpha)$ 是圆群 T 的子群，由阶为 α_n（n 遍历 N）的所有单位根构成。我们赋予 $\mathrm{Z}(\alpha)$ 离散拓扑。因此，这样得到的 Bunce-Deddens 代数的 $*$-同构类由超自然数 $\left(\mathrm{p}^{|\{n\in\mathbb{N}:\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\mathrm{p}\}|}\right)_{\mathrm{p}\text{ prime}}$ 描述。为此，我们将使用满足 $\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)_{\mathrm{n}\in\mathrm{N}}$ 有界的序列 α。在这种情况下，我们取 L_H 为 T 上长度函数在 $\mathrm{Z}(\alpha)$ 上的限制与 Z 上绝对值之和或最大值（也可以采用许多其他选择）。注意到

$$\mathbb{Z}(\alpha) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\mathbb{Z}/\alpha_n},$$

其中 $\widehat{\mathbb{Z}/m}$ 是所有 m 次单位根构成的群，我们接着定义 $\mathbb{F}(\zeta,z) := \min\{\alpha_n : \zeta\in\widehat{\mathbb{Z}/\alpha_n}\}$，对所有 $(\zeta,z)\in\mathbb{Z}(\alpha)\times\mathbb{Z}$ 均成立。从几何角度来看，这为我们提供了一种新的视角：将 Bunce-Deddens 代数视为圆上矩阵代数丛连续截面代数的极限，这也呼应了它们是 AT𝔽 代数这一拓扑事实。因此，这项工作提供了一种为 Bunce-Deddens 代数赋予不同量子度量的方法，其优势在于我们的量子度量由谱三元组诱导——这解决了 [29], 中的主要难题，至少适用于本研究所涉及的这些 Bunce-Deddens 代数。

致谢。 本研究部分由西蒙斯基金会资助（西蒙斯基金会合作项目资助，编号 #523991 [C. Farsi] 和编号 # 31698 [J. Packer]。）

2. 归纳序列在近似距离下收敛的刻画

本节介绍与量子紧致度量空间归纳序列相关的桥构造器概念，它可用于刻画

这类序列在 Gromov-Hausdorff 近似距离意义下收敛至其归纳极限的情形。我们先回顾量子紧致度量空间和近似距离的概念，然后证明作为本文其余工作的基础的主要定理。

2.1. **预备知识：Gromov-Hausdorff 推进距离**。 我们的研究关注量子紧致度量空间，它们是紧度量空间上 Lipschitz函数代数的非交换类比物。我们的定义是从 Rieffel 在 [55] 中引入的紧量子度量空间概念自然演变而来的；该概念旨在为构造近似距离提供自然的背景。本小节还将介绍本文中通篇使用的一些基本记号。

记号2.1. 默认情况下，我们用 $\|\cdot\|_E$ 表示赋范向量空间 E的范数，并且对我们而言，自然数集 $\mathbb{N}$ 总是包含零。

记号 2.2. 若 $\mathfrak{A}$ 是含幺 C*代数，则将 $\mathfrak{A}$ 的单位元简记为 1。C*代数 $\mathfrak{A}$ 的态空间记为 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$。对于任意 $a \in \mathfrak{A}$，我们记 $\mathrm{Re}\, a = \frac{a+a^*}{2}$，并记 $\mathrm{Im}\, a = \frac{a-a^*}{2i}$。空间 $\{a \in \mathfrak{A} : a = a^*\}$ 记为 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$，它在 Jordan乘积 $a,b \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) \mapsto R(ab)$ 和 Lie乘积 $a,b \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) \mapsto I(ab)$ 下封闭，因此 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 是一个 Jordan-Lie代数。

定义 2.3 ([11, 38, 39, 55, 57, 58])。 固定 $\Omega \geq 1$ 和 $\Omega' \geq 0$。一个 (Ω,Ω')-量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 由一个含幺 C* 代数 $\mathfrak{A}$ 及定义在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 的稠密 Jordan-Lie 子代数 $\mathrm{dom}(\mathsf{L})$ 上的半范数 L 构成，并满足：

(1) $\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a) = 0\} = \mathbb{R}1$，(2) Monge-Kantorovich度量 $\mathrm{mk}\mathsf{L}$ 定义在 $\mathfrak{A}$的态空间 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上，对于所有 $\varphi,\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})$，定义为：$\mathrm{mk}\mathsf{L}(\varphi,\psi) := \sup\{|\varphi(a) - \psi(a)| : a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}), \mathsf{L}(a) \leq 1\}$，它是一个度量，并在 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$上诱导弱-* 拓扑；(3) 对所有 $a,b \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$，$\max\{\mathsf{L}(R(ab)),\mathsf{L}(I(ab))\} \leq \Omega(\|a\|_{\mathfrak{A}}\mathsf{L}(b) + \mathsf{L}(a)\|b\|_{\mathfrak{A}}) + \Omega'\mathsf{L}(a)\mathsf{L}(b)$；此不等式称为 (Ω,Ω')-莱布尼茨不等式；(4) 集合 $\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}) : \mathsf{L}(a) \leq 1\}$ 在 $\mathfrak{A}$中是闭的。任何这样的半范数 L 都称为 $\mathfrak{A}$上的 Lipschitz 半范数。

约定 2.4。按照约定，若L 是某个含幺 C*代数$\mathfrak{A}$上的 Lipschitz 半范数，则当$a \notin \mathrm{dom}(\mathsf{L})$时，我们记$\mathsf{L}(a) = \infty$，并约定 $0\infty = 0$ and$\infty + x = x + \infty = \infty$ 对所有$x \in [0,\infty]$都成立。根据这一约定，L 作为一个 $[0,\infty]$值函数，在$\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$上是下半连续的（不仅在 $\mathrm{dom}(\mathsf{L})$ 上，而且在整个空间$\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$上）。

约定 2.5。本文始终固定 $\Omega \geq 1$ 和 $\Omega' \geq 0$。这些参数在我们的记号中默认省略；处理谱三元组时，总可以假定$\Omega = 1$ 和 $\Omega' = 0$。

注记 2.6。 若 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 是量子紧致度量空间，则我们记录以下将反复用到的事实：若 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L})$，则对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\mathsf{L}(a + t1) = \mathsf{L}(a)$，因为

$$\mathsf{L}(a) = \mathsf{L}(a + t1 - t1) \leq \mathsf{L}(a + t1) + \mathsf{L}(t1) = \mathsf{L}(a + t1) + t\underbrace{\mathsf{L}(1)}_{=0} = \mathsf{L}(a + t1) \leq \mathsf{L}(a) + t\mathsf{L}(1) = \mathsf{L}(a).$$

量子紧致度量空间的态空间在 Monge-Kantorovich度量下是一个紧度量空间，因此其直径有界。此外，其直径可用于给某些自伴元素的范数提供一个自然上界。这是一个简单但非常有用的结果，我们现在回顾一下。

记号 2.7。 度量空间 (E,d) 的直径记作 $\mathrm{diam}(E,d)$。若 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 是量子紧致度量空间，则我们用 $\mathrm{qdiam}(A,\mathsf{L})$ 表示 $\mathrm{diam}\left(\mathscr{S}(A),\mathsf{mk}_{\mathsf{L}}\right)$。若$E$实际上是赋范向量空间，则对于$E$的任意子集$A$，我们简记 $\mathrm{diam}(A,E)$，表示相对于E的范数 $\|\cdot\|_E$的直径。

我们回顾以下事实，之后将反复用到。

定理 2.8 ([55, 命题 1。6])。 若$(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 是量子紧致度量空间，且若$\mu\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$，则 $\left\|a-\mu(a)1\right\|_{\mathfrak{A}}\leqslant \mathsf{L}(a)\ \mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},\mathsf{L})$。

证明。 对于所有 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$，注意到 $|\varphi(a-\mu(a)1)|=|\varphi(a)-\mu(a)|\leqslant \mathsf{L}(a)\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},\mathsf{L})$。由于 $a-\mu(a)1$ 是自伴的，我们得出 $\left\|a-\mu(a)1\right\|_{\mathfrak{A}}\leqslant \mathsf{L}(a)\mathrm{qdiam}(\mathfrak{A},\mathsf{L})$。□

处理量子紧度量空间时，难以确立的性质当然是 Monge-Kantorovich度量诱导弱-* 拓扑。Rieffel 给出了多种刻画；本文将发现以下刻画很有帮助：

定理 *2.9*（[51]）。设 L 是定义在某个含幺 C^*代数 $\mathfrak{A}$ 的稠密子空间 $dom(L)$ 上的半范数，其中 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$，且 $\{a\in dom(L):L(a)=0\}=\mathbb{R}1$。若对所有 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$，令 $mkL(\varphi,\psi)=\sup\left\{|\varphi(a)-\psi(a)|:a\in dom(L),L(a)\leqslant 1\right\}$，则以下断言等价：

- mk_{L} 是态空间 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上的一个度量，它诱导弱-* 拓扑，
- 存在一个态 $\mu\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$，使得$\{a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}):\mathsf{L}(a)\leqslant 1,\mu(a)=0\}$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$中全有界，
- 对于所有状态 $\mu\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$，集合$\{a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}):\mathsf{L}(a)\leqslant 1,\mu(a)=0\}$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$中全有界。

我们记录以下有用的结果，后文也会经常用到。

推论 2.10([55])**.** 若$(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 是一个量子紧致度量空间，$\mu\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})$，且 $K>0$，则集合

$$\left\{a\in\mathrm{dom}\,(\mathsf{L}):\mathsf{L}(a)\leqslant 1,|\mu(a)|\leqslant K\right\}$$

在 $\mathfrak{A}$ 中是紧的。

证明。 我们首先注意到集合 $\{a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}):\mathsf{L}(a)\leqslant 1,|\mu(a)|\leqslant K\}$ 是闭集，因为 L 是下半连续的，而 μ是连续的。

设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义域 $\mathrm{dom}(\mathsf{L})$ 中的一个序列，使得 $\mathsf{L}(a_n)\leqslant 1$ 且 $|\mu(a_n)|\leqslant K$对所有 $n\in$自然数集均成立。由于 $(|\mu(a_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 实数集中有界，因此它有一个收敛子序列 $(|\mu(a_f(n))|)_{n\in\mathbb{N}}$。

另一方面，$(a_f(n)-\mu(a_f(n))1)_{n\in\mathbb{N}}$由定理（2.9）有一个收敛子序列 $(a_f(g(n))-\mu(a_f(g(n))))_{n\in\mathbb{N}}$。由此可得 $(a_f(g(n)))_{n\in\mathbb{N}}$是一个收敛序列。□

量子紧致度量空间是一个（伪）度量空间中的点，该空间的度量是 Gromov-Hausdorff 推进距离，即非交换几何中 Gromov-Hausdorff 距离的类比。因此，推进距离的构造依赖于对量子等距的恰当定义。

定义 2.11. 设 $(\mathfrak{A}_1,\mathsf{L}_1)$ 和 $(\mathfrak{A}_2,\mathsf{L}_2)$ 是两个量子紧致度量空间。从 $(\mathfrak{A}_1,\mathsf{L}_1)$ 到 $(\mathfrak{A}_2,\mathsf{L}_2)$ 的一个*Lips- chitz* 态射 $\pi:(\mathfrak{A}_1,\mathsf{L}_1)\to(\mathfrak{A}_2,\mathsf{L}_2)$ 是一个满射 $*$-态射π，从 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$，且满足 π(定义域(L_1)) $\subseteq$ 定义域(L_2)。此外，若对于所有 $b\in$定义域(L_2)：

$$\mathsf{L}_2(b)=\inf\{\mathsf{L}_1(a):\pi(a)=b\},$$

则称 π 为<程度 id='2'>量子等距</程度>。如果 π 是量子等距，且为双射，其逆映射也是量子等距，则称 π 为<程度 id='6'>完全量子等距</程度>；在这种情况下，π 是一个 $*$-同构，并且对于所有 <程度 id='10'>a </程度>$\in\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_1)$：

$$\mathsf{L}_2\circ\pi(a)=\mathsf{L}_1(a).$$

近似距离是一种度量，其计算方式是将两个量子紧致度量空间等距地“嵌入”到任意第三个空间中。在非交换几何的逆变图景下，这引出了以下关于<程度 id='1'>隧道</程度>的定义。关键的是，可以利用豪斯多夫距离为隧道关联一个非负数。

<程度 id='1'>记号 2.12。 </程度>度量空间（<程度 id='3'>X</程度>，<程度 id='5'>d</程度>）的距离函数在 <程度 id='7'>X </程度>的闭子集超空间上所诱导的豪斯多夫距离记为 <程度 id='9'>Haus</程度>[<程度 id='12'>d</程度>]。如果 <程度 id='15'>N </程度>是向量空间上的一个范数，我们将范数 <程度 id='23'>N</程度>所给出的度量诱导的豪斯多夫距离记为 <程度 id='17'>Haus</程度>[<程度 id='20'>N</程度>]。默认情况下，如果 <程度 id='25'>E </程度>是赋范向量空间，我们简化记号，仅将由 <程度 id='37'>E</程度>的范数 $\|$<程度 id='34'>·</程度>$\|_E$所定义的距离诱导的豪斯多夫距离记为 <程度 id='27'>Haus</程度>[<程度 id='30'>E</程度>]。

记号 2.13. 若 $\pi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是一个幺正 $*$-态射，则我们定义

$$\pi^*:\varphi\in\mathscr{S}(\mathfrak{B})\longmapsto\varphi\circ\pi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A}).$$

定义2.14（[35, 定义 3.1],[40, 定义 2.11，定义 3.6]）。设 $(\mathfrak{A}_1,\mathsf{L}_1)$ 和 $(\mathfrak{A}_2,\mathsf{L}_2)$ 是两个量子紧致度量空间。隧道 $\tau=(\mathfrak{D},\mathsf{L}_\mathfrak{D},\pi_1,\pi_2)$ 由一个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{D},\mathsf{L}_\mathfrak{D})$ 以及两个量子等距 $\pi_1:(\mathfrak{D},\mathsf{L}_\mathfrak{D})\to(\mathfrak{A}_1,\mathsf{L}_1)$ 和 $\pi_2:(\mathfrak{D},\mathsf{L}_\mathfrak{D})\to(\mathfrak{A}_2,\mathsf{L}_2)$ 给出。τ 的定义域 $\mathrm{dom}(\tau)$ 为 $(\mathfrak{A}_1,\mathsf{L}_1)$，而 τ 的陪域 $\mathrm{codom}(\tau)$ 为 $(\mathfrak{A}_2,\mathsf{L}_2)$。

广度 $\chi(\tau)$ of τ 为非负数：

$$\chi(\tau):=\max_{j\in\{1,2\}}\mathrm{Haus}\big[\mathsf{mk}_{\mathsf{L}_\mathfrak{D}}\big]\left(\pi_j^*(\mathscr{S}(\mathfrak{A}_j)),\mathscr{S}(\mathfrak{D})\right).$$

备注 2.15。 我们强调，本文隧道中涉及的所有量子紧致度量空间都必须满足相同的 (Ω,Ω')-莱布尼茨不等式，其中 Ω,Ω' 是我们固定的 。

任意两个量子紧致度量空间之间总是存在一条隧道，而且隧道的广度总是有限的。因此，我们定义：

定义 2.16. 任意两个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A},\mathsf{L}_\mathfrak{A})$ 与 $(\mathfrak{B},\mathsf{L}_\mathfrak{B})$ 之间的（对偶） *Gromov-Hausdorff* 推进距离 $\Lambda^*((\mathfrak{A},\mathsf{L}_\mathfrak{A}),(\mathfrak{B},\mathsf{L}_\mathfrak{B}))$ 定义如下：

$$\Lambda^*((\mathfrak{A},\mathsf{L}_\mathfrak{A}),(\mathfrak{B},\mathsf{L}_\mathfrak{B})):=\inf\left\{\chi(\tau):\tau\text{ tunnel from }(\mathfrak{A},\mathsf{L}_\mathfrak{A})\text{ to }(\mathfrak{B},\mathsf{L}_\mathfrak{B})\right\}.$$

（对偶）近似距离具有良好的性质，概述如下定理：

定理2.17 ([38, 35])。 对偶推进距离在完全量子等距意义下是完备度量。此外，若$(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是紧度量空间序列，那么$(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$收敛到紧度量空间$(X,d)$ （相对于 *Gromov-Hausdorff* 距离）当且仅当$\lim_{n\to\infty}\Lambda^*((C(X_n),\mathsf{L}_{d_n}),(C(X),\mathsf{L}_d))=0$，其中$\mathsf{L}_d$表示由任意度量 d 诱导的 *Lipschitz* 半范数。

近似距离收敛已有若干有趣的例子，包括用模糊环面逼近量子环面 [33], 用矩阵代数逼近球面 [9], 量子环面关于其余循环参数的连续性 [33], 超均匀型代数关于贝尔空间（其自然参数空间）的连续性，以及 Effros-Shen代数关于其无理参数的连续性 [5], 等等。

2.2. **主要结果**。我们先给出一个简单的充分条件，以确保在含幺 C*-代数的归纳极限上定义的半范数确实是 Lipschitz 半范数，其中归纳序列中的每个 C*-子代数都已配备 Lipschitz 半范数。这个条件相当自然，例如，它推广了文献 [5] 中构造 AF代数上的 Lipschitz 半范数时所依据的思路。

命题 2.18。设 $\mathfrak{A}_\infty$ 是一个含幺 *C**代数。对每个 $n \in$自然数集，设 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$ 是一个量子紧度量空间，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的递增 *C**-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。此外，假设 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}} \mathfrak{A}_n)$。设 L_∞ 是定义在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 的稠密 *Jordan-Lie* 子代数定义域(L_∞) 上的半范数，使得：

(1) $\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \mathsf{L}_\infty(a) = 0\} = \mathbb{R}1$, *(2)* L_∞ 的单位球在 $\mathfrak{A}_\infty$中是闭集，*(3)* L_∞ 是(Ω, Ω')-莱布尼茨。

若存在含幺等距正线性映射 $\pi : \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty$，使得对所有$\varepsilon > 0$，都存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足以下性质：

$$\forall a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) \quad \exists b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_N) : \quad \mathsf{L}_N(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a) \text{ and } \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_\infty(a),$$

那么$(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$ 是一个量子紧致度量空间。

证明。 设 $\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$。根据假设，对所有$n \in \mathbb{N}$， $\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)$——这里我们用同一个符号 μ 表示 μ 在 $\mathfrak{A}_n$上的限制。令

$$B_\infty := \left\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \mu \circ \pi(a) = 0, \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant 1\right\}.$$

现在，令 $\varepsilon > 0$，并令$n \in \mathbb{N}$。我们定义

$$B_n := \left\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : |\mu(a)| < \frac{\varepsilon}{4}, \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\right\}.$$

令 $a \in B_n$，并令 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)$。根据定理 (2.8)，我们有以下包含关系：

$$B_n \subseteq \left\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1, \|a\|_{\mathfrak{A}_n} \leqslant \mathrm{qdiam}(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n) + \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

并且，由于L_n是 Lipschitz 半范数，根据推论（2.10），后一个集合是紧的。因此B_n是全有界的。事实上，由于L_n是下半连续的，且 μ是连续的，集合B_n 在完备空间 $\mathfrak{A}_\infty$中也是闭的，因此B_n 是紧的。

根据对 π的假设，存在$N \in \mathbb{N}$，使得

$$\forall a \in B_\infty \quad \exists b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_N) : \quad \mathsf{L}_N(b) \leqslant 1 \text{ and } \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

特别地，如果$a \in B_\infty$且$b \in$属于 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_N)$，其中$\mathsf{L}_N(b) \leqslant 1$且 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{4}$,– 那么 $|\mu(b)| \leqslant \|b - \pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} + |\mu(\pi(a))| < \frac{\varepsilon}{4}$, 因此$b \in B_N$。

由于 B_N在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_N)$ 中是紧集（由推论（2.10可知），因此存在一个 $\frac{\varepsilon}{4}$稠密子集$F \subseteq B_N$，它属于 B_N。因此

$$\mathrm{Haus}_{[\mathfrak{A}_\infty]}(\pi(B_\infty), F) \leqslant \mathrm{Haus}_{[\mathfrak{A}_\infty]}(\pi(B_\infty), B_N) + \mathrm{Haus}_{[\mathfrak{A}_\infty]}(B_N, F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

定义域 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 中稠密，因此它非空，进而 $\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant 1\}$ 也非空，因为 L 是一个半范数。因此，由注记（2.6），集合 B_∞ 也非空。由此可得：

$$\emptyset \neq B_\infty = \bigcup_{b \in F} \left\{ a \in B_\infty : \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

因此，如果我们定义

$$G := \left\{ b \in F : \left\{ a \in B_\infty : \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \neq \emptyset \right\},$$

那么 $G \neq \emptyset$ 和 $B_\infty = \bigcup_{b \in G} \{a \in B_\infty : \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}\}$。对于每个 $b \in G$，我们选取 $t(b) \in B_\infty$，使得 $\|\pi(t(b)) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}$。现在设 $a \in B_\infty$。存在 $b \in G$，使得 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$。于是

$$\begin{aligned} \|a - t(b)\|_{\mathfrak{A}_\infty} &= \|\pi(a - t(b))\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\ &\leqslant \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \|b - \pi(t(b))\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此，$t(G)$ 是 B_∞ 中的 a ε-稠密子集。因此，注意到 $\mu \circ \pi$ 是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的一个态，由定理（2.9）可知，$\mathrm{mk}\mathsf{L}_\infty$ 在 $\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$ 上诱导弱-*拓扑。由于假设了所有其他所需性质，L_∞ 确实是一个 Lipschitz 半范数。□

接下来一个自然的问题是，寻找一个充分条件来加强命题（2.18），并使序列 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 在近似距离的意义下收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$。为此，我们引入桥构造器这一概念——一种映射，除其他性质外，还满足命题（2.18）中的条件。事实上，我们基本上对命题（2.18）中的条件进行“对称化”，并要求使用 $*$-态射（这将使我们能够构造具有莱布尼茨性质的半范数），而不仅仅是正线性映射。

记号 2.19。 我们将 $\mathbb{N} := \mathbb{N} \cup \{\overline{\infty}\}$ 记作 $\mathbb{N}$ 的一点紧化。

定义 2.20。 对于每个 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，令 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$ 为一个量子紧致度量空间，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$ 意义下递增的 C*- 子代数序列，它们是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的 C*- 子代数，满足 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_n)$，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。

一个 $*$-自同构 $\pi : \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty$ 是 $((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty))$ 的桥构造器，当且仅当对于所有 $\varepsilon > 0$，存在自然数集 $\in$ 自然数集，使得若 $n \geqslant$ 自然数集，则

$\forall a \in$ 属于定义域(L_∞) $\exists b \in$ 属于定义域(L_n)：$\mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a)$，且 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_\infty(a)$，并且

$$\forall b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) \quad \exists a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \quad \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \mathsf{L}_n(b) \text{ and } \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_n(b).$$

命题 2.21. 对于每个 $n \in$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$，令 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$ 为一个量子紧致度量空间，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个递增（关于 $\subseteq$）的 C^*-子代数序列，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 满足 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n \in \text{自然数集}} \mathfrak{A}_n)$，并且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。

如果存在一个桥构造器，使得 $((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty))$，那么

$$\lim_{n \to \infty} \Lambda^*((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)) = 0.$$

证明。 设 $\pi : \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty$ 为给定的桥构造器。设 $\varepsilon > 0$。存在自然数集 $\in$ 自然数集，使得若 $n \geqslant$ 自然数集，则

- $\forall a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) \quad \exists b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \quad \mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a) \wedge \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_\infty(a)$,

- $\forall b \in$ 定义域(L_n) $\exists a \in$ 定义域(L_∞): $\mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \mathsf{L}_n(b) \wedge \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_n(b)$。

固定 $n \geqslant$ 自然数集。对于所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 和 $b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，定义：

$$\mathsf{T}_n(a,b) := \max\left\{\mathsf{L}_\infty(a), \mathsf{L}_n(b), \frac{1}{\varepsilon}\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty}\right\}.$$

这是一个标准论证，表明 $(\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n, \mathsf{T}_n)$ 是一个量子紧致度量空间：

(1) T_n 的定义域 $\mathrm{dom}(\mathsf{T}_n) = \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) \oplus \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$ 在 T_n 中稠密于 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n)$，因为 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 中稠密，且 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_n)$ 中稠密；(2) 若对于某个 $(a,b) \in \mathrm{dom}(\mathsf{T}_n)$，有 $\mathsf{T}_n(a,b) = 0$，则 $\mathsf{L}_\infty(a) = 0$，因此对于某个 $t \in$ 实数集，有 $a = t1$；并且 $\mathsf{L}_n(b) = 0$，因此对于某个 $s \in$ 实数集，有 $b = s1$（此处单位元在 $\mathfrak{A}_\infty$ 和 $\mathfrak{A}_n$ 中相同这一点很重要），且 $0 = \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} = |t - s|$，所以 $(a,b) = t(1,1)$；(3) T_n 是两个下半连续函数和一个连续函数的最大值，因此它在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n)$ 上下半连续；(4) 直接计算可知，T_n 是 (Ω, Ω')-莱布尼茨，因为 L_∞ 和 L_n 都满足该性质，且 π 是一个 $*$-态射；(5) 固定 μ 中的任意一个态 $\mathfrak{A}_\infty$，并令 $\varphi : (a,b) \in \mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n \mapsto \mu(a)$，则 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n)$，并且

$$\{(a,b) \in \text{定义域}(\mathsf{T}_n) : \mathsf{T}_n(a,b) \leqslant 1, \varphi(a,b) = 0\} \subseteq$$

$$\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \mathsf{L}_\infty(a), \mu(a) = 0\} \times \{b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(b) \leqslant 1, |\mu \circ \pi^{-1}(b)| \leqslant \varepsilon\}$$

并且，正如命题（2.18）的证明中所见，右侧的集合是两个紧集的乘积，因此是紧的；由此，左侧的集合是紧的（它是紧集中的闭集），因此，T_n 确实是一个 Lipschitz 半范数，依据定理（2.9）。

现在我们验证 $\tau_n := (\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n, \mathsf{T}_n, \psi_n, \theta_n)$，其中 ψ_n：$(a, b) \in \mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n \mapsto a \in \mathfrak{A}_\infty$ 且 θ_n：$(a, b) \in \mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n \mapsto b \in \mathfrak{A}_n$ 是一个隧道，符合定义（2.14）。

设 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$。根据假设，存在 $b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，使得 $\mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a)$ 且 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_\infty(a)$。因此，$\mathsf{T}_n(a,b) = \mathsf{L}_\infty(a)$。由于按构造，对于所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 和 $c \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，都有 $\mathsf{T}_n(a,c) \geqslant \mathsf{L}_\infty(a)$，故由定义（2.11）可知，$\psi_n$ 是一个量子等距。

现在设 $b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$。同样，根据关于 π 的假设，存在 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，使得 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_n(b)$ 且 $\mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \mathsf{L}_n(b)$。因此，$\mathsf{T}_n(a,b) = \mathsf{L}_n(b)$。再次按构造，对于所有 $c \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，都有 $\mathsf{T}_n(c,b) \geqslant \mathsf{L}_n(b)$，故 θ_n 确实是一个量子等距，因此 τ_n 是一条隧道。

现在，我们按照定义（2.14）的含义计算 τ_n 的广度。设 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n)$。利用 Hahn–Banach定理，我们将 φ 延拓为 $\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_\infty$ 上的一个态 φ'。令 $\mu : a \in \mathfrak{A}_\infty \mapsto \varphi'(a, \pi(a))$；由于 π 是一个保单位元的 $*$-态射，μ 是 $\mathfrak{A}_\infty$ 上的一个态。根据构造，若 $\mathsf{T}_n(a,b) \leqslant 1$，则 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leqslant \varepsilon$，因此

$$\begin{aligned} |\varphi(a,b) - \mu \circ \psi_n(a,b)| &= |\varphi'(a,b) - \varphi'(a,\pi(a))| \\ &\leqslant |\varphi'(0, b - \pi(a))| \\ &\leqslant \|b - \pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\mathrm{Haus}[\mathsf{mkT}_n](\psi_n^*(\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)), \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n)) \leqslant \varepsilon$。

现在令 $\mu' : b \in \mathfrak{A}_n \mapsto \varphi(\pi^{-1}(b), b)$。由于 π 是 $*$的自同构，且作用于 $\mathfrak{A}_\infty$，映射 μ' 是 $\mathfrak{A}_n$的一个态。此外：

$$\begin{aligned} |\varphi(a,b) - \mu' \circ \theta_n(a,b)| &= |\varphi(a,b) - \varphi(\pi^{-1}(b), b)| \\ &= |\varphi(a - \pi^{-1}(b), 0)| \\ &\leqslant \left\| a - \pi^{-1}(b) \right\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\ &= \|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

因此 $\mathsf{Haus}[\mathsf{mk}\mathsf{T}_n](\theta_n^*(\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)), \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)) \leqslant \varepsilon$。

因此，$\chi(\tau_n)$ 上的广度 τ_n 至多为 ε。根据定义（2.16），由此我们证明了对所有$n \geqslant$ 自然数集，

$$\Lambda^*((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)) \leqslant \varepsilon, \tag{2.1}$$

至此，证明得证。 □

本节的主要结果是下面的定理，它表明，在一个温和且自然的条件下，定义（2.20）和命题（2.21）中的自然充分条件实际上与必要条件非常接近。这一点值得注意，因为通常很难提出关于近似距离意义下收敛的非平凡必要条件（除了例如直径必须收敛这一事实）。它还表明，桥构造器的存在是以近似距离的意义建立归纳极限收敛的自然框架，从而在一个普遍满足的条件下，完整回答了量子紧致度量空间的归纳序列在范畴意义下的收敛与近似距离意义下的收敛之间的关系。

定理 2.22。 对每个 $n \in$ 自然数集 $\cup\{\infty\}$，令$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$ 为一个量子紧致度量空间，其中$(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\subseteq$意义下递增的 C^*-子代数序列，且满足 $\mathfrak{A}_\infty = \mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\text{自然数集}} \mathfrak{A}_n)$，并且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。假设存在 $M > 0$，使得对所有 $n \in$自然数集：

$$\frac{1}{M}\mathsf{L}_n \leqslant \mathsf{L}_\infty \leqslant M \cdot \mathsf{L}_n \ on\ \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n).$$

Then

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)) = 0,$$

当且仅当，对$(\mathfrak{A}_{g(n)}, \mathsf{L}_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ 的任意子序列$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，存在一个严格递增函数 f：自然数集 $\to$ 自然数集 以及一个桥构造器 π，用于$((\mathfrak{A}_{g\circ f(n)}, \mathsf{L}_{g\circ f(n)})_{n\in\mathbb{N}}, (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty))$。

证明。 首先，假设对任意子序列 $(\mathfrak{A}_{g(n)}, \mathsf{L}_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$，存在一个严格递增函数$f$：自然数集 $\to$自然数集 以及一个桥构造器 π，用于 $((\mathfrak{A}_{g\circ f(n)}, \mathsf{L}_{g\circ f(n)})_{n\in\mathbb{N}}, (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty))$。根据命题（2.21），我们得出结论：$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的每个子序列都含有一个收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$ 的子序列。因此，$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$，因为近似距离确实是一个度量（相对于完全量子等距而言）。

现在假设 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在近似距离下收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$。由于任意子序列也都会收敛，因此只需证明当 g 为恒等映射时命题成立，这样也能简化记号。

由于 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$，因此存在一个序列

$$(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\mathfrak{D}_n, \mathsf{T}_n, \psi_n, \theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

隧道，如定义（2.14）中所述，其中 $\lim_{n\to\infty} \chi(\tau_n) = 0$；而对于每个 $n \in$ 自然数集，我们有 $\mathrm{dom}(\tau_n) = (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$，且 $\mathrm{codom}(\tau_n) = (\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)$。为简化记号，目标集合

的 一个 $\in$ 定义域(L_∞)，其中 $l \geqslant \mathsf{L}_\infty(a)$ 定义为 τ_n 将记作 $\mathfrak{t}_n(a|l)$，而非$\mathfrak{t}_{\tau_n}(a|l)$；我们由 [35, 38] 回顾：

$$\mathfrak{t}_n(a|l) = \left\{\theta_n(d) : d \in \psi_n^{-1}(\{a\}), \mathsf{T}_n(d) \leqslant l\right\}.$$

这个证明在很大程度上依赖于目标集的性质，相关讨论见 [35, 38, 39, 40]。在[35], 中，我们将在本证明中引用的各种估计都用隧道 τ 的长度$\lambda(\tau)$来表示，而非广度 $\chi(\tau)$；不过，正如 [40, 命题 2.12],所示，对于任意隧道 τ，我们有 $\lambda(\tau) \leqslant \chi(\tau) \leqslant 2\lambda(\tau)$。在此不再特别说明，我们将使用这一不等式，以广度的形式表述这里的所有结果。

断言 2.23。对于所有 a $\in$定义域(L_∞)，都存在一个严格递增函数 f: 自然数集 $\to$ 自然数集以及一个元素 $\pi(a)$ $\in$属于定义域(L_∞)，使得对于所有 $l \geqslant \mathsf{L}_\infty(a)$，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l), \{\pi(a)\}\right) = 0,$$

和 $\|\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} = \|a\|_{\mathfrak{A}_\infty}$。

命题（*2.23*）的证明。首先，由于序列 $(\chi(\tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛（到 0），因此它是有界的；取 $K' > 0$ 使得 $\chi(\tau_n) \leqslant K'$ 对所有 $n \in$ 自然数集都成立。
设 a $\in$属于 dom(L_∞)。设 $l = \mathsf{L}_\infty(a)$。对于任意 $K > 0$，令

$$\mathfrak{A}_\infty[K] := \left\{b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \mathsf{L}_\infty(b) \leqslant K, \|b\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leqslant \|a\|_{\mathfrak{A}_\infty} + KK'\right\}.$$

集合 $\mathfrak{A}_\infty[K]$ 在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 中是紧的，由推论（2.10）可知。由 [35, 推论 4.5] 且由于$\mathsf{L}_\infty \leqslant M\mathsf{L}_n$ 在 dom(L_n) 上，序列 $(\mathfrak{t}_n(a|l))_{n\in\mathbb{N}}$ 是$\mathfrak{A}_\infty[Ml]$, 的紧子集序列，并且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\left(\mathfrak{t}_n(a|l), \mathfrak{A}_\infty\right) = 0.$$

由于 $\mathfrak{A}_\infty$[Ml] 在 $\mathfrak{A}_\infty$中是紧的，由 $\mathfrak{A}_\infty$ 的范数$\|\cdot\|_{\mathfrak{A}_\infty}$ 在 $\mathfrak{A}_\infty$[Ml] 的闭子集集上诱导的豪斯多夫距离 Haus[$\mathfrak{A}_\infty$] 也赋予其一个紧拓扑。因此，存在 $(\mathfrak{t}_n(a|l))_{n\in\mathbb{N}}$的一个子序列 $(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l))_{n\in\mathbb{N}}$，它在 Haus[$\mathfrak{A}_\infty$]意义下收敛到 $\mathfrak{A}_\infty$[Ml]的单点集 {π(a)}。特别地，$\mathsf{L}_\infty(\pi(a)) \leqslant Ml = M\mathsf{L}_\infty(a)$。

现在令$L \geqslant l$。根据定义，对于所有$n \in \mathbb{N}$，$\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l) \subseteq \mathfrak{t}_{f(n)}(a|L)$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|L), \mathfrak{A}_\infty\right) = 0,$$

因此我们也很容易得出

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|L), \{\pi(a)\}\right) = 0.$$

根据 [35, 命题 4.4],，我们还注意到，如果对每个$n \in \mathbb{N}$，$b_n \in \mathfrak{t}_{f(n)}(a|l)$，那么

$$\|\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} = \lim_{n\to\infty} \|b_n\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \left(\|a\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \chi\left(\tau_{f(n)}\right) l\right) = \|a\|_{\mathfrak{A}_\infty}.$$

同样，由于$a \in \mathfrak{t}_{\tau^{-1}f(n)}(b_n|l)$，我们也有

$$\|a\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \left(\|b_n\|_{\mathfrak{A}_\infty} + l\chi\left(\tau_{f(n)}\right)\right) = \|\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty}.$$

因此，确实有 $\|\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} = \|a\|_{\mathfrak{A}_\infty}$。这就证明了我们的论断。 Q.E.D.

断言 2.24。存在一个保幺 $*$-端同态 π，作用于 $\mathfrak{A}_\infty$，使得 $\pi(\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)) \subseteq \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，并存在一个严格递增函数 f: 自然数集 $\to$ 自然数集，使得对于所有 a $\in$dom(L_∞)，以及所有 $l \geqslant \mathsf{L}_\infty(a)$，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l), \{\pi(a)\}\right) = 0.$$

断言（2.24）的证明。由于 $\mathfrak{A}_\infty$ 是可分的，存在 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 的一个可数稠密子集S_∞，满足 $S_\infty \subseteq \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$。利用断言（2.23），通过对角线论证可知，存在一个严格递增序列 f: 自然数集 $\to$ 自然数集，使得对于所有 $a \in S_\infty$ 以及所有$l \geqslant \mathsf{L}_\infty(a)$，均有 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l), \{\pi(a)\}\right) = 0$。

现在取$a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，并令$l \geqslant \mathsf{L}_\infty(a)$。令 $\varepsilon > 0$。由于S_∞ 在 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 中稠密，因此存在$a_\varepsilon \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，使得 $\|a - a_\varepsilon\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{5}$。注意，$\mathsf{L}_\infty(a_\varepsilon) < \infty$，但一般而言，$\mathsf{L}_\infty(a_\varepsilon)$ 与$\mathsf{L}_\infty(a)$ 之间没有关系。

令$l = \max\{\mathsf{L}_\infty(a), \mathsf{L}_\infty(a_\varepsilon)\}$。由于该序列关于豪斯多夫距离$\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]$收敛，序列 $\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a_\varepsilon|l)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于$\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]$是柯西序列。

因此，存在$N \in \mathbb{N}$，使得对所有p、$q \geqslant N$，都有

$$\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(p)}(a_\varepsilon|l), \mathfrak{t}_{f(q)}(a_\varepsilon|l)\right) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} \chi\left(\tau_{f(n)}\right) = 0$，存在 $N' \in \mathbb{N}$，使得若 $n \geqslant N'$，则 $\chi\left(\tau_{f(n)}\right) < \frac{\varepsilon}{5(l+1)}$。因此，若 $n \geqslant N'$，则由 [35, 推论 4。5],

$$\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l), \mathfrak{t}_{f(n)}(a_\varepsilon|l)\right) \leqslant \|a - a_\varepsilon\|_{\mathfrak{A}_\infty} + l\chi\left(\tau_{f(n)}\right) < \frac{2\varepsilon}{5}.$$

现在令 p、$q \geqslant \max\{N, N'\}$。我们计算：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(p)}(a|l), \mathfrak{t}_{f(q)}(a|l)\right) &\leqslant \mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(p)}(a|l), \mathfrak{t}_{f(p)}(a_\varepsilon|l)\right) \\
&\quad + \mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(p)}(a_\varepsilon|l), \mathfrak{t}_{f(q)}(a_\varepsilon|l)\right) \\
&\quad + \mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\mathfrak{t}_{f(q)}(a_\varepsilon|l), \mathfrak{t}_{f(q)}(a|l)\right) \\
&< \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，$\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 $\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]$是柯西序列。由于 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 是完备的，因而在 Haus 多样本距离 $\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]$下，$\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 的所有闭子集构成的集合也是完备的。因此，$\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 中的某个紧子集。事实上，由于

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l), \mathfrak{A}_\infty\right) = 0$$

根据 [35, 推论 4。5], 序列 $\left(\mathfrak{t}_{f(n)}(a|l)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于某个单点集。如断言（2.23）中所观察到的，该极限与 l 无关；我们将其记为 $\{\pi(a)\}$。再次使用相同的论证，我们还注意到 $\|\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} = \|a\|_{\mathfrak{A}_\infty}$。

由于L_∞ 在 $\mathfrak{A}_\infty$上是下半连续的，并且根据构造，$\pi(a)$是 $\mathfrak{A}_\infty$ 中任意满足对所有$n \in$ $\in$自然数集都有$b_n \in \mathfrak{t}_f(n)(a|\mathsf{L}_\infty(a)$的序列$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限，因此我们还可以得出

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}_\infty(\pi(a)) &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{L}_\infty(b_n) && \text{由}\mathsf{L}_\infty\text{的下半连续性，} \\
&\leqslant \varliminf_{n\to\infty} M \cdot \mathsf{L}_n(b) && \text{因为 } \mathsf{L}_\infty \leqslant M\cdot\mathsf{L}_n \text{对所有 } n \in \text{自然数集，} \\
&\leqslant M \cdot \mathsf{L}_\infty(a) && \text{因为 } \mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a),\ \text{因为 } b \in \mathfrak{t}_f(n)(a|\mathsf{L}_\infty(a)。
\end{aligned}$$

设 $a, a' \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$。设 $t \in$实数集。由于 $\mathfrak{t}_f(n)(a|l) + t \cdot \mathfrak{t}_f(n)\left(a'|l\right) \subseteq \mathfrak{t}_f(n)\left(a + t\,a'|(1+|t|)l\right)$对所有 $n \in$自然数集，由 [35, 推论 4.5],，我们立即得出 $\{\pi(a)\} + t \cdot \{\pi(a')\} \subseteq \{\pi(a + t\,a')\}$，即 π 是线性的。类似的论证表明，π 是 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 上的 Jordan-Lie 态射，利用 [35,命题 4.8]。

作为线性映射 π，满足 $\|\pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} = \|a\|_{\mathfrak{A}_\infty}$ 对所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 均成立，我们可以将 π 唯一延拓为 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 上的一致连续映射 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$；显然，该映射仍是从 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 到 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$ 的 Jordan-Lie 态射，且为等距映射。

通过直接论证可知，我们可以将 π 唯一延拓为 $\mathfrak{A}_\infty$ 上的连续 Jordan-Lie 代数端同态，因此如此延拓的 π 是一个幺正的 $*$-端同态，在 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 上满足 $\mathsf{L}_\infty \circ \pi \leqslant \mathsf{L}_\infty$。

我们已经知道，π 是$\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$上的等距映射，并且是一个 $*$-态射，因此它在 $\mathfrak{A}_\infty$上是单射：若 $\pi(a) = 0$，则 π(实数集a) $= 0$，所以实数集$a = 0$；并且 $\pi(Ia) = 0$，所以$Ia = 0$，从而$a = 0$。特别地，由于 π 现在是一个单射 $*$-态射，因此它是 $\mathfrak{A}_\infty$ 上的等距映射（而不只是$\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$）。这就证明了我们的断言。证毕。

断言2.25。 对于所有 $\varepsilon > 0$，存在自然数集 $\in$ 自然数集，使得对于所有$n \geqslant$ 自然数集，以及所有a $\in$定义域(L_∞)，若$\mathsf{L}_\infty(a) \leqslant 1$，则有

$$\mathrm{Haus}[\mathfrak{A}_\infty]\left(\{\pi(a)\}, \mathfrak{t}_{f(n)}(a|1)\right) < \varepsilon.$$

断言的证明（*2.25*）。 设 $\varepsilon > 0$。取 $\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)$。集合

$$B := \left\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant 1, \mu(a) = 0\right\}$$

根据定理（2.9），$\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_\infty)$是紧的。因此，存在一个有限子集F $\subseteq$B，使得Haus[$\mathfrak{A}_\infty$](F,B) $< \frac{\varepsilon}{4}$。由于F是有限的，根据断言（2.24），存在N $\in$ 自然数集，使得对于所有a $\in$F以及所有n $\geqslant$自然数集，都有Haus[$\mathfrak{A}_\infty$] $\left(\{\pi(a)\}, \mathfrak{t}_f(n)(a|\mathsf{L}_\infty(a))\right) < \frac{\varepsilon}{4}$。此外，存在N′ $\in$ 自然数集，使得若n $\geqslant$N′，则$\chi(\tau_n) < \frac{\varepsilon}{4}$。

现在，令n $\geqslant \max\{N, N'\}$，a $\in$B且b $\in \mathfrak{t}_f(n)(a|1)$。存在a′ $\in$F，使得$\|a - a'\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{4}$。令b′ $\in \mathfrak{t}_f(n)\left(a'|1\right)$。根据 [35, 推论4.5]，，我们计算得到以下表达式：

$$\begin{aligned}
\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} &\leqslant \left\|\pi(a) - \pi(a')\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \left\|\pi(a') - b'\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \left\|b' - b\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} \\
&\leqslant \underbrace{\left\|\pi(a - a')\right\|_{\mathfrak{A}_\infty}}_{\pi \text{ is linear}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{\text{by choice of } N} + \underbrace{\left\|a - a'\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \chi(\tau_n)}_{\text{by [35]}} \\
&\leqslant 2\left\|a - a'\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，我们已经证明了在 B 上的一致收敛结论。现在设 a $\in$dom(L_∞)。那么显然，a $- \mu$(a)1 $\in$ B，因为 L_∞(a $- \mu$(a)1) $\leqslant \mathsf{L}_\infty$(a) $+ \mathsf{L}_\infty(\mu$(a)1) $= \mathsf{L}_\infty$(a) $\leqslant$ 1（事实上，L_∞(a) $= \mathsf{L}_\infty$(a $- \mu$(a)1)）。如果 b $\in \mathfrak{t}_f$(n) (a|1)，那么 b $- \mu$(a)1 $\in \mathfrak{t}_f$(n) $\left(a - \mu(a)1|1\right)$ 是由构造得到的，因此 $\|\pi$(a) $-$ b$\|_{\mathfrak{A}_\infty} = \|\pi$(a $- \mu$(a)1) $-$(b $- \mu$(a)1)$\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon$。

因此，正如所声称的，对于所有$n \geqslant \max\{$自然数集, 自然数集′$\}$以及所有a $\in B$, Haus[$\mathfrak{A}_\infty$] $\left(\{\pi(a)\}, \mathfrak{t}_{f(n)}(a|1)\right) < \varepsilon$。这就证明了我们的论断。证毕。

论断 2.26. 对于所有 $\varepsilon > 0$，存在自然数集 $\in$，使得若$n \geqslant$ 自然数集，则

- $\forall a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) \quad \exists b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \quad \mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a)$ and $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_\infty(a)$,
- $\forall b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) \quad \exists a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \quad \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \mathsf{L}_n(b)$ and $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_n(b)$.

论断的证明 *(2.26)*. 设 $\varepsilon > 0$。取自然数集 $\in$自然数集 如论断(2.25)中所述，使得对于所有$a \in$ 定义域(L_∞)且$\mathsf{L}_\infty(a) \leqslant 1$的$a \in$，以及所有$n \geqslant$ 自然数集，都有Haus[$\mathfrak{A}_\infty$]$(\{\pi(a)\}, \mathfrak{t}_f(n)(a|1)) < \varepsilon$。现在取 $n \geqslant$ 自然数集。

若 a $\in$定义域$(\mathsf{L}_\infty) \setminus$ 实数集$1_{\mathfrak{A}_\infty}$，且 b $\in \mathfrak{t}_f$(n) (a|L_∞(a))，则 L_∞(a) > 0，L_n(b) $\leqslant \mathsf{L}_\infty$(a)，并且 b$\mathsf{L}_\infty$(a) $\in \mathfrak{t}_f$(n) $\left(a\mathsf{L}_\infty(a)\middle|1\right)$，因此 $\left\|\pi\left(a\mathsf{L}_\infty(a)\right)^{-} b\mathsf{L}_\infty(a)\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon$。所以 $\|\pi$(a) $-$ b$\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon \mathsf{L}_\infty$(a)，如所需。

现在，令 b $\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) \setminus \mathrm{R}1_{\mathfrak{A}}$。令 b′ $= b\mathsf{L}_n$(b)，则 L^n(b′) $= 1$。令 a′ $\in \mathfrak{t}_{\tau^{-1}}$f (n) $\left(b'|1\right)$，特别地，L_∞(a′) $\leqslant 1$。由对称性，b′ $\in \mathfrak{t}_f$(n) $\left(a'|1\right)$。因此，$\left\|\pi(a') - b'\right\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon$。

因此，令 $a = \mathsf{L}_n(b)a'$，我们得出 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} \leqslant \mathsf{L}_n(b)\varepsilon$ 且 $\mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \mathsf{L}_n(b)$，证毕。

最后，显然，由于 $\pi(1) = 1$，我们的断言在 $\mathsf{L}_\infty(a) = 0$ 或 $\mathsf{L}_n(b) = 0$ 时成立，即对任意 a、b ∈实数集1 都成立。这证明了我们的断言。证毕。

断言 2.27。 在断言（中构造的映射 π 2.24）是一个 $*$-自同构。

断言（2.27）的证明。 映射是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的等距映射，因此根据断言（ $*$，它是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单态射，依据断言（2.24），

现在，令 $\mathsf{b} \in \bigcup \mathsf{n} \in$自然数集 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，于是 $\mathsf{b} \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_m)$，其中某个 $\mathsf{m} \in$ 自然数集。因此，根据假设，$\mathsf{b} \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$。令 $\mathsf{l} = \mathsf{L}_m(\mathsf{b})$。根据假设，$\mathsf{L}_\infty(\mathsf{b}) \leqslant \mathsf{ML}_m(\mathsf{b}) = \mathsf{Ml}$。令 $\varepsilon > 0$，并令 $\mathsf{N} \in$自然数集由断言（2.26）给出。由于对所有 $\mathsf{n} \geqslant \max\{\mathsf{N}, \mathsf{m}\}$，都有 $\mathsf{L}_n(\mathsf{b}) \leqslant \mathsf{ML}_\infty(\mathsf{b}) \leqslant \mathsf{M}^2\mathsf{l}$，且存在 $\mathsf{a}_n \in \mathfrak{A}_\infty$，使得 $\|\pi(\mathsf{a}_n) - \mathsf{b}\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon\mathsf{M}^2\mathsf{l}$（并且 $\mathsf{L}_\infty(\mathsf{a}) \leqslant \mathsf{L}_n(\mathsf{b})$，但本断言并不需要这一点）。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，元素 b 属于π值域的闭包。由于 $\mathfrak{A}_\infty$ 是完备的，且 π 是等距映射， π 的值域是闭集。由此我们证明了 π 的值域是一个包含$\mathfrak{A}_\infty$稠密子空间 $\bigcup \mathsf{n} \in$自然数集 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$ 的闭集；因此， π 也是满射。由此，如所述，π 是$\mathfrak{A}_\infty$的一个 $*$-自同构。

此外，根据构造，对于所有 a ∈属于定义域(L_∞) 的情形，正如断言 (2.23) 中所指出的，我们有$\mathsf{L}_\infty(\pi(a)) \leqslant M\mathsf{L}_\infty(a)$——特别地， $\pi(a)$ ∈属于定义域(L_∞)。因此， π(定义域(L_∞)) ⊆属于定义域(L_∞)，故 π 是一个利普希茨态射。这就证明了我们的断言。证毕。

至此，我们的定理得证。 □

注记 2.28。 在近似距离下，极限在完全量子等距意义下唯一。因此，定理 (2.22) 中出现某个映射 π 是意料之中的。然而，定理 (2.22) 中的映射 π 比完全量子等距一般得多——事实上，要使用命题 (2.21)，它甚至不必是利普希茨的——尽管定理 (2.22) 表明，它总可以选取得具有利普希茨性质。这里，映射 π 实际上是用来构造一种特殊桥的工具。一般而言，函数 π 不一定唯一：若L_n 只是L_∞ 在 $\mathfrak{A}_n$ 上对所有 n ∈自然数集 的限制，并且 θ 是 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$ 的一个完全量子等距，那么当然可以用 $\pi \circ \theta$ 替代 π。当L_n 变化时，情况会更加微妙，但只要存在一个映射 π，通常就会有许多个。

定理（2.22）刻画了在序列上的 Lipschitz 半范数一致等价这一条件下，归纳序列按照近似距离意义的收敛。Lipschitz 半范数一致等价这一条件，本质上就是定理（2.22）中 Lipschitz 半范数与归纳极限结构之间的相容条件：采用定理（2.22）的记号，正如 [37],中所见，在假设 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) = \mathfrak{A}_n \cap \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 的情况下，对每个 $\mathsf{n} \in \mathbb{N}$，$\mathsf{L}_n$ 和 L_∞ 这两个 Lipschitz 半范数等价；而定理（2.22）的假设要求这种等价是一致的。这引出了几个自然的问题：$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 的收敛是否意味着 Lipschitz 半范数 L_n （$\mathsf{n} \in \mathbb{N}$）具有某种一致等价性（也就是说，我们的假设是否多余）？ 桥构造器的存在是否意味着 Lipschitz 半范数一致等价？归纳极限在近似距离下收敛，是否意味着存在桥构造器，而无需假设 Lipschitz 半范数一致等价？ 此外，$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 在近似距离下收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$，是否意味着对于固定的 $\mathsf{n} \in \mathbb{N}$，$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_k)_{k \geqslant n}$ 在近似距离下收敛到 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_\infty)$?

我们现在将通过两个例子说明，上述所有问题的答案都是否定的，因此无法明显地推广定理（2.22）。首先，我们看到，量子紧

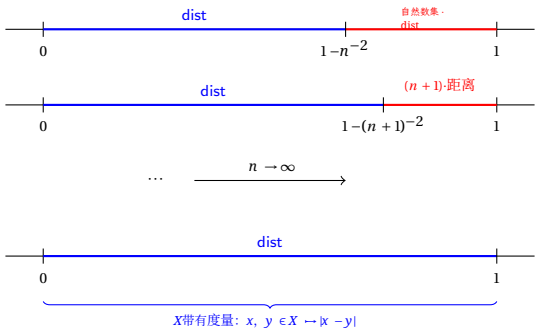


图1. 通过在末端的小区间上修改度量（红色），用 $[0,1]$ 逼近其自身

度量空间的归纳序列可以在以恒等映射作为桥构造器时，关于近似距离收敛，但其 Lipschitz 半范数却并非一致等价。

例2.29。设$X = [0,1]$ 取通常度量。若$Y \subseteq X$且至少包含两个点，则定义$\mathsf{L}_Y(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x \neq y, x, y \in Y \right\}$对所有$f \in$ ~~复数域~~(X)，允许 ∞。对每个$n \in$ 自然数集，以及所有$f \in$ 复数域(X)，定义：

$$\mathsf{L}_n(f) = \mathsf{L}_{\left[0,1-\frac{1}{n^2}\right]}(f) + \frac{1}{n}\mathsf{L}_{\left[1-\frac{1}{n^2},1\right]}(f),$$

再次允许 ∞。

Let

$$f_n : x \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x \leqslant 1 - \frac{1}{n^2}, \\ x - (1 - \frac{1}{n^2}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据构造，对所有$n \in$ 自然数集，$\mathsf{L}_{[0,1]}(f_n) = 1$。另一方面，$\mathsf{L}_n(f) = 0 + \frac{1}{n}\cdot 1 = \frac{1}{n}$。因此，不存在$M > 0$ 使得$\mathsf{L}_{[0,1]} \leqslant M\mathsf{L}_n$，并且它们的定义域相同（即通常度量下的 Lipschitz函数代数）。

现在我们证明，$(C(X), \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于近似距离收敛于 $(C(X), \mathsf{L}_{[0,1]})$——在这里，通过证明 X 关于 Gromov-Hausdorff 距离收敛于一列距离，同样可以轻松完成这一点：这些距离在$[0, 1 - \frac{1}{n_2}]$ 上与通常距离一致，并且在 $[1 - \frac{1}{n_2}, 1]$, 上是通常距离的 n 倍伸缩；不过，我们在此仍将采用泛函分析视角。

因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，以及所有 f、g，我们定义 $[0,1]$ 上关于其通常度量的 Lipschitz函数：

$$\mathsf{T}_n(f,g) := \max\left\{ \mathsf{L}_{[0,1]}(f), \mathsf{L}_n(g), (n+1)\left\| f - g \right\|_{C(X)} \right\}.$$

设 $f \in C(X)$，且 $\mathsf{L}_{[0,1]}(f) = 1$。则 $\mathsf{L}_n(f) \leqslant 1 + \frac{1}{n}$。由此可见，

$$\mathsf{T}_n\left(f, \frac{1}{1+\frac{1}{n}} f - \frac{1}{n+1} f(0) \right) \leqslant \max\left\{ 1, \frac{n+1}{n+1} \left\| f - f(0)1 \right\|_{C(X)} \right\} \leqslant 1.$$

现在设 $g \in C(X)$，且 $\mathsf{L}_n(g) = 1$。因此，$\mathsf{L}_{\left[0,1-\frac{1}{n^2}\right]}(g) \leqslant 1$，并且 $\mathsf{L}_{\left[1-\frac{1}{n^2},1\right]}(g) \leqslant n$。特别地，对于所有 $x \in [1 - \frac{1}{n_2}, 1],$，我们都有 $\left| g(x) - g\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right| < n|x - 1 + \frac{1}{n^2}| \leqslant \frac{1}{n}$。

令 $h \in$ 复数域(X) 定义为：当 $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n^2}\right]$ 时，$h(x) = g(x)$；否则，$h(x) = g\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$。由构造可知，$\mathsf{L}_{[0,1]}(h) \leqslant 1$ 且 $\left\| g - h \right\|_{C(X)} < \frac{1}{n}$。因此，$\mathsf{T}^n(h, g) = 1 = \mathsf{L}_n(g)$。

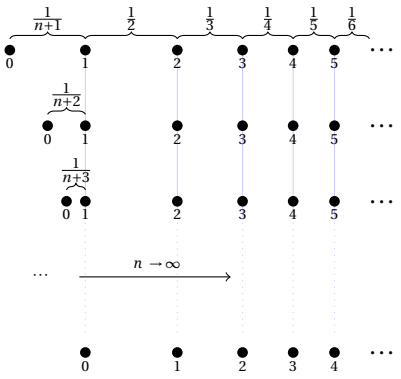


图 2. 通过在 ∞ 处合并前两不点，以自身逼近 自然数集

因此，$(\mathrm{C}(\mathrm{X})\oplus\mathrm{C}(\mathrm{X}),\mathrm{T}_n,\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$，其中 $\mathrm{p}_1:(\mathrm{f},\mathrm{g})\in\mathrm{C}(\mathrm{X})\oplus\mathrm{C}(\mathrm{X})\mapsto\mathrm{f}$ 且 $\mathrm{p}_2:(\mathrm{f},\mathrm{g})\in\mathrm{C}(\mathrm{X})\oplus\mathrm{C}(\mathrm{X})\mapsto\mathrm{g}$，显然是一个广度至多为 ${}^1\mathrm{n}$ 的隧道（其方法与命题-(2.21）类似）。

因此，对于近似距离，$(\text{复数域}(X),\mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(\text{复数域}(X),\mathsf{L}_{[0,1]})_{n\in\mathbb{N}}$。此外，恒等映射满足定理 (2.22) 的条件 (2)。然而，不存在$M>0$ 使得 $\forall n\in$自然数集 $\mathsf{L}_{[0,1]}\leqslant M\mathsf{L}_n$ 在这些半范数的公共定义域上一致支配。因此，即使是在固定的阿贝尔 C*代数上，近似距离中的收敛也不意味着 Lipschitz 半范数一致等价。

现在，我们还可以问：一个归纳序列在近似距离中的收敛是否意味着桥构造器的存在。正如我们将在下一个例子中看到的，事实并非如此：再一次，收敛发生时 Lipschitz 半范数并不一致等价（我们还将通过这两个例子证明，一致支配和一致压制都不成立）。此外，在这种情况下，对于任意 $n\in$自然数集，$(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_m)_{m\geqslant n}$ 不收敛到 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_\infty)$。

例 2.30。 设 $\mathfrak{A}_\infty$ 为取值于复数域的收敛序列所构成的 C*代数。对于每个$n\in$自然数集，令 $\mathfrak{A}_n=\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}:(x_k)_{k\geqslant n}\text{为常数}\}$，于是 $\mathfrak{A}_n$是 $\mathfrak{A}_\infty$的一个与 $\mathfrak{A}_\infty$的单位元$(1)_{n\in\mathbb{N}}$ 共享单位元的 C*-子代数。

对于所有$n\in$自然数集，以及所有$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{A}_n$，定义

$$\mathsf{L}_n((x_k)_{k\in\mathbb{N}}):=\sup\left\{\frac{|x_p-x_q|}{|\varphi_n(p)-\varphi_n(q)|}:p,q\in\mathbb{N},p\neq q\right\}$$

其中：

$$\varphi_n:m\in\mathbb{N}\mapsto\begin{cases}\frac{1}{m}\text{ if }m>0,\\ 1+\frac{1}{n}\text{ if }m=0.\end{cases}$$

当然，L_n 确实是 $\mathfrak{A}_\infty$的有限维C*子代数 $\mathfrak{A}_n$ 上的半范数。

我们还定义$\mathsf{L}_\infty((x_k)_{k\in\mathbb{N}})=\sup\left\{\begin{array}{l}|x_p-x_q|x_{pq+1}\\ \quad\ \ 1\ \ -1\\ \quad\ +1\end{array}:p、q\in\text{自然数集},\ p\neq q\right\}$对于所有$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{A}_\infty$，允许取值为 ∞。当然，$\bigcup_{n\in\text{自然数集}}\mathfrak{A}_n\subseteq$属于$\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$。

现在，设

$$x:n\in\mathbb{N}\mapsto\begin{cases}1\text{ if }n=0,\\ 0\text{ otherwise.}\end{cases}$$

根据构造，$\mathsf{L}_\infty(x) = 2$，但 $\mathsf{L}_n(x) = n$。因此，不存在这样的 $M > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，不等式 $M\mathsf{L}_n \leqslant \mathsf{L}_\infty$ 在 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$ 上成立。

另一方面，$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*((\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n),(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)) = 0$。事实上，令 $\pi : (\mathrm{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \ldots) \in \mathfrak{A}_\infty$, $\mathfrak{B} = \pi(\mathfrak{A}_\infty)$，并令 $\theta : (\mathrm{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{B} \mapsto (\mathrm{x}_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}_\infty$——当然，$\theta$ 是从 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{A}_\infty$ 的一个 $*$-同构，使得 $\pi = \theta^{-1}$。我们对所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 定义 $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(\pi(\mathrm{x})) = \mathsf{L}_\infty(\mathrm{x})$。如此一来，很容易验证 π 是从 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 到 $(\mathfrak{B},\mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 的完全量子等距。

设 $\varepsilon > 0$ 且 自然数集 $\in$ 自然数集 满足：若 $n \geqslant$ 自然数集，则 $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$。若 $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 且 $\mathsf{L}_\infty(x) \leqslant 1$，并且若 $l = \lim_{s\to\infty} x_s$，则根据构造，

$$\frac{|x_k - l|}{\frac{1}{k+1}} = \lim_{s\to\infty} \frac{|x_k - x_s|}{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{s+1}} \leqslant 1$$

因此 $|x_k - l| \leqslant \frac{1}{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ 对所有 $k \geqslant$ 自然数集 均成立。因此，若 $k \geqslant$ 自然数集，则 $|x_k - x_N| < \varepsilon$。

现在，设 $n \geqslant$ 自然数集。设 $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{A}_n \oplus \mathfrak{B}$，并对所有 $(a,b) \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A}_n) \oplus \mathrm{dom}(\mathfrak{B})$，定义：

$$\mathsf{T}_n(a,b) := \max\left\{\mathsf{L}_n(a), \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b), \frac{1}{\varepsilon}\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{B}}\right\}.$$

我们还定义 $p_n : (a,b) \in \mathfrak{D}_n \mapsto a \in \mathfrak{A}_n$，以及 $q_n : (a,b) \in \mathfrak{D}_n \mapsto \theta(b) \in \mathfrak{A}_\infty$。现在我们将证明，$\tau_n := (\mathfrak{D}_n, \mathsf{T}_n, p_n, q_n)$ 确实是一个从 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$ 到 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 的隧道。

令 $a := (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in$ 属于定义域(L_∞)，且 $\mathsf{L}_\infty(a) = 1$，并令

$$a' := (x_0, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N, x_N, x_N \ldots) \in \mathfrak{A}_n.$$

根据构造，$\mathsf{L}_n(\mathrm{a}') \leqslant 1$ 且 $\|\pi(\mathrm{a}) - \mathrm{a}'\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon$，这是由我们对 N 的选择得到的。同样根据构造，$\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(\pi(\mathrm{a})) = \mathsf{L}_\infty(\mathrm{a}) = 1$。因此 $\mathsf{T}_n(\mathrm{a}', \pi(\mathrm{a})) \leqslant \mathsf{L}_\infty(\mathrm{a}) = 1$。所以我们已经证明，对于任意属于定义域$(\mathsf{L}_\infty)$且满足 $\mathsf{L}_\infty(\mathrm{a}) = 1$ 的 a，都存在一个元素 $\mathrm{d} := (\mathrm{a}', \pi(\mathrm{a})) \in \mathfrak{D}_n$，使得 $\mathsf{TN}_n(\mathrm{d}) = 1 = \mathsf{L}_\infty(\mathrm{a})$，且 $\mathrm{q}_n(\mathrm{d}) = \theta(\pi(\mathrm{a})) = \mathrm{a}$。因此，映射 q_n 确实是从 $(\mathfrak{D}_n,\mathsf{T}_n)$ 到 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 的量子等距。

现在设 $a = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in$ 属于 L_n 的定义域，且 $\mathsf{L}_n(a) = 1$。根据定义，$|x_1 - x_0| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$。令

$$b = (x_1, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

根据构造，$\mathrm{b} \in$ 属于 $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}$ 的定义域，且 $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{b}) \leqslant \mathsf{L}_n(\mathrm{b})$，并且 $\|\mathrm{a} - \mathrm{b}\|_{\mathfrak{A}_\infty} = |\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0| < \varepsilon$。因此，再次有 $\mathsf{T}_n(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \mathsf{L}_n(\mathrm{b})$。所以 $\mathrm{p}_n : (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathfrak{D}_n \mapsto \mathrm{a} \in \mathfrak{A}_n$ 是一个量子等距映射。因此，$(\mathfrak{D}_n,\mathsf{T}_n, \mathrm{p}_n,\mathrm{q}_n)$ 确实是一个从 $(\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n)$ 到 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty)$ 的隧道。现在我们计算其广度的一个上界。

设 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{D}_n)$ 是 $\mathfrak{D}_n$ 的一个态。若我们令 $\mu : a \in \mathfrak{A}_n \mapsto \varphi(a, \pi(a))$，则 $\mu \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)$ 仍是 $\mathfrak{A}_n$ 的一个态。若 $(a,b) \in$ 属于 T_n 的定义域，且 $\mathsf{T}_n(a,b) \leqslant 1$，则

$$\begin{aligned}|\varphi(a,b) - \mu \circ p_n(a,b)| &= |\varphi(a,b) - \varphi(a,\pi(a))| \\ &= |\varphi(0, b - \pi(a))| \\ &\leqslant \|b - \pi(a)\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \varepsilon,\end{aligned}$$

因此确有 $\mathrm{Haus}\left[\mathsf{mk}\mathsf{T}_n\right](\mathscr{S}(\mathfrak{D}_n), p_n^*\mathscr{S}(\mathfrak{A}_n)) < \varepsilon$。

另一方面，设 $\nu : a \in \mathfrak{A}_\infty \mapsto \varphi'(a, \pi(a))$，其中 φ' 是由 Hahn–Banach定理将 φ 延拓为 $\mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{B}$ 上的一个态。再次可直接得出 $\mathsf{mk}\mathsf{T}_n(\varphi, \nu \circ q_n) < \varepsilon$。因此 $\mathrm{Haus}\left[\mathsf{mk}\mathsf{T}_n\right](\mathscr{S}(\mathfrak{D}), q_n^*\mathscr{S}(\mathfrak{A}_\infty)) < \varepsilon$。

因此，对所有 $n \geqslant$ 自然数集，$\chi(\tau_n)$ 的延拓幅度至多为 ε。我们得出：

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)) = 0.$$

然而，对于任意固定的 $p \in \mathbb{N}$，通过类似的方法很容易验证，

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*((\mathfrak{A}_p, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}_{p-1}, \mathsf{L}_\infty)) = 0,$$

并且由于 $\dim \mathfrak{A}_{p-1} < \dim \mathfrak{A}_p$，序列 $(\mathfrak{A}_p, \mathsf{L}_n)_{n \geqslant p}$ 不收敛于 $(\mathfrak{A}_p, \mathsf{L}_\infty)$。

我们在此使用的映射 π 不是满射。事实上，在这种情况下不存在桥构造器。确实，假设存在一个含单位元的 $*$-态射 $\pi: \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty$，使得对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 $N_\pi(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，满足：如果 $n \geqslant N_\pi(\varepsilon)$，并且如果 $a \in$属于 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，那么存在 $b \in$属于 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，使得 $\mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a)$，且 $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}\mathsf{L}_\infty(a)$。

固定一个 $\in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，使得 $\mathsf{L}_\infty(\mathrm{a}) = 1$。令 $\varepsilon > 0$，并令 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}_\pi(\varepsilon)$，使得 $^{1}\mathrm{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$。定义 $(\mathrm{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \coloneqq \pi(\mathrm{a})$。于是存在 $\mathrm{b} \coloneqq (\mathrm{b}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，使得 $\mathsf{L}_n(\mathrm{b}) \leqslant 1$ 且 $\|\pi(\mathrm{a}) - \mathrm{b}\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$。根据 L_n 的定义，我们因此可以得出 $|\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_0| \leqslant {}^{1}\mathrm{n} < \frac{\varepsilon}{2}$。于是，$|\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0| < \varepsilon$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出 $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_0$。因此，$\pi$ 永远不可能是满射——事实上，它的值域包含于 $\mathfrak{B}$。所以，对于这个例子，不存在桥构造器。

如例（2.30）所示，就近似距离而言，$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$ 并不意味着 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_\infty)$。我们的工作立即得出以下推论：

推论 *2.31.* 设 $\mathfrak{A}_\infty$ 是一个含幺可分 C^*代数，且 $\mathfrak{A}_\infty = cl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n)$，其中 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个递增（关于 $\subseteq$）的 C^*-子代数序列，它们是 $\mathfrak{A}_\infty$ 的 C^*-子代数，且 $\mathfrak{A}_\infty$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_0$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，设 L_n 是 $\mathfrak{A}_n$ 上的 *Lipschitz* 半范数。若存在一个桥构造器 $\pi: \mathfrak{A}_\infty \to \mathfrak{A}_\infty$，用于 $((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty))$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\pi(\mathfrak{A}_n) \subseteq \mathfrak{A}_n$，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ p\geqslant n}} \Lambda^*((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_p), (\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_\infty)) = 0,$$

且 $\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\text{谱}}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)) = 0$。

证明。注意到 π 在 $\mathfrak{A}_n$ 上的限制是 $((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_p)_{p\geqslant n}, \mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_\infty))$ 的桥构造器，即可得出此结论。由命题（2.21）可得我们的结果。□

3. 度量谱三元组归纳序列在谱邻近度下的收敛

现在我们研究某些度量谱三元组族在谱邻近度下的收敛 [47]，，其构造将在下文回顾。因此，本节首先介绍由 Connes 提出的谱三元组定义，以及非交换黎曼几何的基础概念。

定义 3.1([12, 11])。一个谱三元组 $(\mathfrak{A}, \mathscr{H}, /\!\!D)$由希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算子所构成的含幺 C*代数 $\mathfrak{A}$，以及定义在 $\mathscr{H}$的某个稠密子空间 $\mathrm{dom}(/\!\!D)$上的自伴算子 $/\!\!D$给出，且满足：

(1) $\{a \in \mathfrak{A} : a \cdot \mathrm{dom}(/\!\!D) \subseteq \mathrm{dom}(/\!\!D), [/\!\!D, a]$ 有界 $\}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个稠密 $*$-代数，
(2) $/\!\!D$ 具有紧预解式。
算子 $/\!\!D$ 称为该谱三元组的狄拉克算子。

3.1. **预备知识：谱邻近度**。谱邻近度是在度量谱三元组类上、模去酉等价后的一个距离。

记号 3.2. 若 $T: D \subseteq E \to F$ 是一个从赋范向量空间 E 的稠密子空间 D 到赋范向量空间 F 的线性算子，则记作：

$$|||T|||_E^F \coloneqq \sup\{\|T\xi\|_F : \xi \in D, \|\xi\|_E \leqslant 1\}$$

允许取值 ∞。若 $F = E$，则 $|||T|||^F{}_E$ 简记为 $|||T|||_E$。

定义 3.3。 谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 若满足以下条件，则称为度量 的：定义在 $\mathfrak{A}$ 的态空间 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上的 Connes 扩展伪距离为：

$$\mathsf{mk}_{/D}:\ \varphi、\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{A})\mapsto\sup\left\{|\varphi(a)-\psi(a)|:\ a\text{定义域}(/D)\subseteq\text{定义域}(/D),\ \text{且}\ \|[/D、a]\|_{\mathscr{H}}\leqslant 1\right\}$$

事实上，这是 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上的一个度量，它在 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上诱导弱-* 拓扑。

一旦谱三元组是度量的，它就会以自然的方式在其底层 C*代数上诱导出量子紧度量空间结构。

命题 3.4([47, 命题 1.10])。 设 $(\mathfrak{A},\ \mathscr{H},\ /D)$ 是一个谱三元组。定义：

$$\mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_{\not D}):=\{a\in\mathfrak{sa}\,(\mathfrak{A}):a\,\mathrm{dom}\,(\not D)\subseteq\mathrm{dom}\,(\not D)\ \textit{and}\ [\not D,a]\ \textit{is bounded}\}$$

并且对所有 $a\in$定义域$(\mathsf{L}_{/D})$：

$$\mathsf{L}_{\not D}(a):=\|\|[\not D,a]\|\|_{\mathscr{H}}.$$

谱三元组 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是度量的，当且仅当$(\mathfrak{A},\mathsf{L}_{/D})$ 是量子紧致度量空间。

谱邻近度的构造始于以下观察。回顾 [47]，如果 $(\mathfrak{A},\mathscr{H},/D)$ 是度量谱三元组，并且令

- 对所有 $\xi\in\mathrm{dom}(/D)$：

$$\mathsf{DN}_{\not D}(\xi):=\|\xi\|_{\mathscr{H}}+\|\not D\xi\|_{\mathscr{H}},\tag{3.1}$$

- $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_{/D}):=\{a\in\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}):a\,\mathrm{dom}(/D)\subseteq\mathrm{dom}(/D),\ [/D,a]\text{ 有界 }\}$
- 对所有 $a\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_{/D})$：

$$\mathsf{L}_{\not D}(a):=\|\|[\not D,a]\|\|_{\mathscr{H}},$$

then

$$\mathrm{metCor}\,(\mathfrak{A},\mathscr{H},\not D):=(\mathscr{H},\mathsf{DN}_{\not D},\mathfrak{A},\mathsf{L}_{\not D},\mathbb{C},0)$$

是一个度量 C*-对应的例子，含义如下：

定义 3.5. 对于两个 C*代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-复数域 *-对应$(\mathscr{M},\mathfrak{A},\mathfrak{B})$是一个以 $\mathfrak{B}$ 为底的右 Hilbert 模 $\mathscr{M}$ （其取值于 $\mathfrak{B}$ 的内积记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{M}}$），并配有一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathscr{M}$ 上可伴随 $\mathfrak{B}$-线性算子组成的 C*代数的含幺 $*$-态射。

定义 3.6([47, 定义 2.2])**.** $(\Omega,\Omega',\Omega_{\mathrm{mod}},\Omega_{\mathrm{inner}})$-度量 C*对应$(\mathscr{M},\mathsf{DN},\mathfrak{A},\mathsf{L},\mathfrak{B},\mathsf{S})$，其中 $\Omega,\Omega_{\mathrm{inner}}\geqslant 1$，$\Omega_{\mathrm{mod}}\geqslant 2$ 和 $\Omega'\geqslant 0$，由两个 (Ω,Ω')-量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 和 $(\mathfrak{B},\mathsf{S})$、一个 $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$ C* 对应 $(\mathscr{M},\mathfrak{A},\mathfrak{B})$，以及定义在 $\mathscr{M}$ 的稠密复数域-子空间 $\mathrm{dom}(\mathsf{TN})$ 上的范数 DN 构成，使得

(1) $\forall\omega\in$属于DN的定义域，$\mathsf{DN}(\omega)\geqslant\|\omega\|_{\mathscr{M}}:=\sqrt{\|\langle\omega,\omega\rangle_{\mathscr{M}}\|_{\mathfrak{B}}}$，(2) $\{\omega\in$ 属于DN的定义域：$\mathsf{DN}(\omega)\leqslant 1\}$在$(\mathscr{M},\|\cdot\|_{\mathscr{M}})$中是紧的，(3) 对所有属于L定义域的$a\in$以及属于TN定义域的$\omega\in$，

$$\mathsf{DN}(a\omega)\leqslant\Omega_{\mathrm{mod}}(\|a\|_{\mathfrak{A}}+\mathsf{L}(a))\mathsf{DN}(\omega),$$

(4) 对所有属于DN定义域的$\omega,\eta\in$，

$$\max\{\mathsf{S}(\Re\langle\omega,\eta\rangle_{\mathscr{M}}),\mathsf{S}(\Im\langle\omega,\eta\rangle_{\mathscr{M}})\}\leqslant\Omega_{\mathrm{inner}}\mathsf{DN}(\omega)\mathsf{DN}(\eta).$$

特别地，范数DN 称为D-范数。

约定 3.7。 在本文中，我们固定 $\Omega_{\mathrm{mod}}\geqslant 2$ 和 $\Omega_{\mathrm{inner}}\geqslant 1$，并在全文中沿用。所有 量子紧致度量空间均假定属于(Ω,Ω')-量子紧致度量空间类，所有度量 C*-对应均假定属于$(\Omega,\Omega',\Omega_{\mathrm{mod}},\Omega_{\mathrm{inner}})$-度量 C*-对应类，除非另有说明。

请注意，定义（3.6）中的紧致性条件借鉴并扩展了定理（2.9）。

定义（3.6）的重要性在于，可以如下将近似距离扩展到度量 C* 对应。首先，我们采用度量 C* 对应之间的一种自然态射概念。

定义 3.8 （[47, 定义 2.13]）。对于每个 $j \in \{1,2\}$，令

$$\mathbb{M}_j = \left(\mathscr{M}_j, \mathsf{DN}_j, \mathfrak{A}_j, \mathsf{L}_j, \mathfrak{B}_j, \mathsf{S}_j\right)$$

为一个度量 C* 对应。

从 $\mathbb{M}_1$ 到 $\mathbb{M}_2$ 的一个度量量子等距 (Π, π, θ) 定义如下：

（1）一个连续的满射复数域-线性映射 $\Pi\colon \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$；

（2）一个量子等距 $\pi : (\mathfrak{A}_1, \mathsf{L}_1) \to (\mathfrak{A}_2, \mathsf{L}_2)$；（3）一个量子等距 $\theta : (\mathfrak{B}_1, \mathsf{S}_1) \to (\mathfrak{B}_2, \mathsf{S}_2)$，

使得

(1) $\forall a \in \mathfrak{A}\ \ \forall \omega \in \mathscr{M}_1\ \ \Pi(a\omega) = \pi(a)\Pi(\omega)$, (2) $\forall b \in \mathfrak{B}\ \ \forall \omega \in \mathscr{M}_2\ \ \Pi(\omega \cdot b) = \Pi(\omega)\theta(b)$, (3) $\forall \omega, \eta \in \mathscr{M}_1\ \ \theta(\langle \omega, \eta \rangle_{\mathscr{M}_1}) = \langle \Pi(\omega), \Pi(\eta) \rangle_{\mathscr{M}_2}$, (4) $\Pi(\mathrm{dom}(\mathsf{DN}_1)) \subseteq \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_2)$ 且对于所有 $\omega \in \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_2)$，等式 $\mathsf{DN}_2(\omega) = \inf\{\mathsf{DN}_1(\eta) : \eta \in \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_1), \Pi(\eta) = \omega\}$。

度量 C*-对应之间的距离定义称为度量近亲距离，它依赖于一种称为隧道的等距嵌入概念，定义如下。

定义 3.9 ([47, 定义 2.19])。设 $\mathbb{M}_1$ 和 $\mathbb{M}_2$ 是两个度量 C*-对应。一个（度量）隧道 $\tau = (\mathbb{J}, \Pi_1, \Pi_2)$，从 $\mathbb{M}_1$ 到 $\mathbb{M}_2$，是由一个度量 C*-对应 $\mathbb{J}$，以及对每个 $j \in \{1,2\}$，一个度量量子等距 $\Pi_j : \mathbb{J} \mapsto \mathbb{M}j$ 构成的三元组。

注记 3.10。需要注意的是，我们的隧道仅涉及（Ω，Ω'，Ω_{mod}，Ω_{inner}）-C*-度量对应（参见约定（3.7））。为简化记号，我们将不再称这些隧道为（Ω，Ω'，Ω_{mod}，Ω_{inner}）-隧道，但应强调，固定（Ω，Ω'，Ω_{mod}，Ω_{inner}）并始终处于（Ω，Ω'，Ω_{mod}，Ω_{inner}）-C*-度量对应这一类中，对于从隧道得到度量至关重要。

现在我们通过定义度量隧道的广度来继续讨论；值得注意的是，这只涉及我们先前定义的量子紧致度量空间之间隧道的广度。

定义 3.11 ([47, 定义 2.21])**.** 设 $\mathbb{M}j = (\mathscr{M}_j, \mathsf{DN}j, \mathfrak{A}_j, \mathsf{L}j, \mathfrak{B}_j, \mathsf{S}j)$ 是一个度量 C* 对应，对每个 $j \in \{1,2\}$。设 $\tau = (\mathbb{P}, (\Pi_1, \pi_1, \theta_1), (\Pi_2, \pi_2, \theta_2))$ 是从 $\mathbb{M}_1$ 到 $\mathbb{M}_2$，的度量隧道，其中 $\mathbb{P} = (\mathscr{P}, \mathsf{TN}, \mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}}, \mathfrak{E}, \mathsf{L}_{\mathfrak{E}})$。

度量隧道 τ 的广度 $\chi(\tau)$ 为

$$\chi(\tau) := \max\left\{\chi(\mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}}, \pi_1, \pi_2), \chi(\mathfrak{E}, \mathsf{T}_{\mathfrak{E}}, \theta_1, \theta_2)\right\}.$$

因此，对于两个度量谱三元组，我们既可以取它们底层量子紧致度量空间之间的 Gromov-Hausdorff 距离，也可以取它们所定义的度量 C*-对应之间的度量近似距离 [42, 46]，其定义为所有可能的连接它们的度量隧道的广度的下确界。然而，谱邻近度也涉及我们关于量子动力学几何的研究 [43, 44, 47]。我们回顾谱邻近度的构造；新的

称为 ε-量的量 [47, 定义 3。31], , 但基于 [31], 对于谱三元组而言，其表达更为简单。

定义 3.12([31, 定理 3.6])。 设 $(\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,/D_1)$ 和 $(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,/D_2)$ 是两个度量谱三元组。令

$$\tau := \left(\underbrace{(\mathscr{P},\mathsf{TN},\mathfrak{D},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}},\mathfrak{E},\mathsf{S})}_{\text{metrical C*-correspondence}} , \quad \underbrace{(\Pi_1,\pi_1,\theta_1)}_{\text{metrical quantum isometry}} , \quad \underbrace{(\Pi_2,\pi_2,\theta_2)}_{\text{metrical quantum isometry}} \right)$$

为从 $\mathrm{metCor}(\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,/D_1)$ 到 $\mathrm{metCor}(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,/D_2)$ 的度量隧道，我们将 τ 的 ε-幅度 $\mu(\tau|\varepsilon)$ 定义为 τ 的广度 $\chi(\tau)$ 与 τ 的 ε- 到达度 中的最大值，其数值为：

(3.2)
$$\sup_{\substack{\xi\in\mathrm{dom}(\not{D}_j)\\ \mathsf{DN}_j(\xi)\leqslant 1}} \inf_{\substack{\eta\in\mathrm{dom}(\not{D}_k)\\ \mathsf{DN}_k(\eta)\leqslant 1}} \sup_{\substack{\omega\in\mathrm{dom}(\mathsf{TN})\\ \mathsf{TN}(\omega)\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}} \left| \langle \exp(i t \not{D}_j)\xi, \Pi_j(\omega)\rangle_{\mathscr{H}_j} - \langle \exp(i t \not{D}_k)\eta, \Pi_k(\omega)\rangle_{\mathscr{H}_k} \right|,$$

对于 $\{j,k\} = \{1,2\}$。

定义 3.13([47, 定义 4.2])。 两个度量谱三元组 $(\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,/D_1)$ 和 $(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,/D_2)$ 之间的谱邻近度 为

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,\not{D}_1),(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,\not{D}_2)) := \\ \inf\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \varepsilon>0 : \mu(\tau|\varepsilon)<\varepsilon \text{ for } \tau \text{ a tunnel} \right. \\ \left. \text{from } \mathrm{metCor}(\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,\not{D}_1) \text{ to } \mathrm{metCor}(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,\not{D}_2) \right\}.\end{aligned}$$

谱邻近度的关键性质是：对于任意两个度量谱三元组 $(\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,/D_1)$ 和 $(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,/D_2)$，我们有以下等价关系：

$$\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,\not{D}_1),(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,\not{D}_2)) = 0$$

当且仅当存在一个酉算子 $U:\ \mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ 使得

- U定义域$(/D1)$ = 定义域$(/D2)$,
- $U/D_1 = /D2U$ 在定义域$(/D1)$,
- $a\in\mathfrak{A}_1 \mapsto UaU^*$ 是一个从 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的 $*$-同构。

文献 [45] 给出了一个谱邻近度意义下收敛的非平凡例子：用某些矩阵代数的谱三元组来逼近量子环面上的谱三元组，这些矩阵代数称为模糊环面。这些例子涵盖了许多此前在数学物理中非正式提出的收敛例子，涉及矩阵模型及其在代数维数趋于无穷时的极限。这些例子是构造谱邻近度的主要动机之一。文献 [29]还介绍了一个关于分形的例子。此外，关于谱邻近度的收敛意味着狄拉克算子的谱收敛，并且在适当意义下，这些算子的有界函数演算也收敛，此外还有其他性质。当然，关于谱邻近度的收敛意味着底层量子紧致度量空间在近似距离意义下收敛。本文将构造新的收敛例子，研究定义在非交换螺线体和 Bunce-Deddens 代数上的新谱三元组，并将其视为谱三元组的极限。

3.2. **预备知识：谱三元组的归纳极限**。虽然谱邻近度允许讨论定义在截然不同的 C*代数上的谱三元组的收敛，但在某些限制更严格的情形下，一列谱三元组所对应的 C*代数之间可能存在某种关系，且这种关系与谱三元组相容。文献[20], 引入了一种简单的谱三元组归纳极限概念，其基础是通过谱三元组之间一种自然且严格的态射概念，对这种相容性进行如下编码。

定义 3.14([20])**.** 从 $(\mathfrak{A}_1,\mathscr{H}_1,/D_1)$ 到 $(\mathfrak{A}_2,\mathscr{H}_2,/D_2)$ 的等距态射 (π,S) 由一个保单位的 $*$-态射 $\pi:\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$ 和一个线性等距映射 $S:\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ 给出，使得：

(1) $\pi(\mathrm{dom}(/D_1))\subseteq\mathrm{dom}(/D_2)$，(2) $S\,\mathrm{dom}(/D_1)\subseteq\mathrm{dom}(/D_2)$，且 $S/D_1=/D_2S$ 在 $\mathrm{dom}(/D_1)$ 上成立，(3) $\forall a\in\mathfrak{A}_1\ Sa=\pi(a)S$。

由于 S 是线性等距映射，按照我们的定义，可将 $\mathscr{H}_1$ 无代价地通过 S 与 $\mathscr{H}_2$ 的闭子空间 $S\mathscr{H}_1$ 等同。在这种情况下，$/D_1$ 仅定义在 $\mathscr{H}_1\subseteq\mathscr{H}_2$ 上，我们只需要求 $/D_1$ 是 $/D_2$ 在 dom($/D_1$) 上的限制。

我们还注意到，若 $\pi(a)=0$ for some $a\in\mathfrak{A}_1$，则 $\pi(a)S=Sa=0$。由于 S 是等距映射，因此 $a=0$。所以 π 实际上自动是一个 $*$-单态射，因此我们也可以将 $\mathfrak{A}_1$ 与 $\mathfrak{A}_2$ 中的 C*-子代数 $\pi(\mathfrak{A}_1)$ 等同起来，因为定义 (3.14) 确保 $a\mathscr{H}_1\subseteq\mathscr{H}_1$ 和 $[/D_1,a]$ 与 $P[/D2,\pi(a)]P=P[/D2,\pi(a)]=[/D2,\pi(a)]P$ 等同，其中 P 是将 $\mathscr{H}_2$ 投影到 $\mathscr{H}_1$上的正交投影。此外，由于 π 是含单位元的，采用这种等同方式后，$\mathfrak{A}_2$ 的单位元属于 $\mathfrak{A}_1$。

如 [20], 中定义的、采用稍复杂记号的谱三元组归纳序列，就是形如 $((,,/D_n),(\pi_n,S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 的序列，其中 $(\mathfrak{A}_n,\mathscr{H}_n,/D_n)$ 是一个谱三元组，并且对于每个 $n\in$自然数集，(π_n,S_n) 都是从 $(\mathfrak{A}_n,\mathscr{H}_n,/D_n)$ 到 $(\mathfrak{A}_{n+1},\mathscr{H}_{n+1},/D_{n+1})$ 的等距态射。如上所述，我们可以将这样的序列等同于以下类型的序列，并将其作为谱三元组归纳极限的定义。

定义 3.15。设 $\mathfrak{A}_\infty=\mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{A}_n)$ 是一个 C*代数，它是递增的 C*子代数序列 $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}_\infty$ 的闭包，且 $\mathfrak{A}_\infty$ in $\mathfrak{A}_0$ 的单位元为 $\mathfrak{A}_\infty$ in $\mathfrak{A}_0$。当满足以下条件时，谱三元组 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathscr{H}_\infty,/D_\infty)$ 是谱三元组序列 $(\mathfrak{A}_n,\mathscr{H}_n,/D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限：

(1) $\mathscr{H}_\infty=\mathrm{cl}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}})\mathscr{H}_n$，其中每个 $\mathscr{H}_n$ 都是 $\mathscr{H}_\infty$ 的希尔伯特子空间；(2) 对每个 $n\in\mathbb{N}$，$/D_\infty$ 在 $\mathrm{dom}(/D_n)$ 上的限制为 $/D_n$；(3) 对每个 $n\in\mathbb{N}$，子空间 $\mathscr{H}_n$ 约化 $\mathfrak{A}_n$，这等价于 $\mathfrak{A}_n\mathscr{H}_n\subseteq\mathscr{H}_n$。

注意，采用定义（3.15）中的记号，对任意$\xi\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{dom}(/D_n)$，若$D_n\xi$ 满足 $\xi\in\mathrm{dom}(/D_n)$，则将其映为 $/D\in\mathbb{N}$的算子确实定义良好，并且已在 [20] 中证明它是本质自伴的，因此 $/D_\infty$ 是该算子的闭包。

对于我们的目的， [20] 中的以下结果将发挥重要作用。

定理 3.16 ([20, 定理 3.1，部分内容])。 若$(\mathfrak{A}_n,\mathscr{H}_n,/D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个收敛到谱三元组 $(\mathfrak{A}_\infty,\mathscr{H}_\infty,/D_\infty)$的谱三元组归纳序列，那么对于任意在无穷远处趋于零的复数域值连续函数 $f\in C_0$(实数集)，序列$(P_nf(/D_n)P_n)_{n\in\mathbb{N}}$在范数意义下收敛到 $f(/D_\infty)$。

本节关注这样一个问题：如果一个谱三元组是谱三元组的归纳极限，那么还需要附加哪些假设，才能获得更

具几何意义的收敛，具体而言，是谱邻近度意义下的收敛？为了使这个问题具有明确意义，我们将研究度量谱三元组；它们产生量子紧致度量空间，属于非交换度量几何的范畴。

3.3. **主要结果**。 谱三元组归纳极限的概念比谱邻近度更容易定义，但仅适用于相当狭窄的例子——它不适用于模糊环面与量子环面 [45] 或 [29]中的分形。人们自然会想知道，谱三元组所包含的度量信息有多少会在归纳极限过程中保持连续。本节给出一个充分条件：对于一列度量谱三元组，若它们在范畴意义下已收敛到一个度量谱三元组，则它们也会在谱邻近度意义下收敛。这个充分条件仅仅是存在一个合适的桥构造器，且该构造器同时也是完全量子等距。因此，在此背景下，要证明谱邻近度意义下的收敛，主要难点便归结为利用恰当的隧道证明近似距离意义下的度量收敛。

定理 3.17。 设 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, /D_\infty)$ 是一个度量谱三元组，并且按照定义（$(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, /D_n)$，它是度量谱三元组序列的归纳极限*3.15*）。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) := \{a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}_n) : a\,\mathrm{dom}(\not{D}_n) \subseteq \mathrm{dom}(\not{D}_n) \text{ and } [\not{D}_n, a] \text{ is bounded}\},$$

并且对于所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，定义

$$\mathsf{L}_n(a) := |||[\not{D}_n, a]|||_{\mathscr{H}_n}.$$

如果存在一个完全量子等距 $\pi : (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty) \to (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$，它同时还是$((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty))$的桥构造器，则

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, \not{D}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, \not{D}_\infty)) = 0.$$

证明。 固定 $\varepsilon > 0$。根据命题（2.21），序列 $(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在近似距离下收敛到 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathsf{L}_\infty)$。更具体地，为方便起见，置 $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$。给定 $N_\pi \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geqslant N_\pi$，我们有：

- $\forall a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) \quad \exists b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \quad \mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a)$ and $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \tilde{\varepsilon}\mathsf{L}_\infty(a)$,
- $\forall b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) \quad \exists a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) : \quad \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \mathsf{L}_n(b)$ and $\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty} < \tilde{\varepsilon}\mathsf{L}_n(b)$.

对于每个 $n \in$自然数集，我们在命题 (2.21) 中构造了一个隧道 $\tau_n = (\mathfrak{D}_n, \mathsf{T}_n, \psi_n, \theta_n)$，其中 $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{A}_\infty \oplus \mathfrak{A}_n$，并且对于所有 $(a,b) \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty) \oplus \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，

$$\mathsf{T}_n(a,b) := \max\left\{\mathsf{L}_\infty(a), \mathsf{L}_n(b), \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\|\pi(a) - b\|_{\mathfrak{A}_\infty}\right\},$$

而 $\psi_n : (a,b) \in \mathfrak{D}_n \mapsto a$，$\theta_n : (a,b) \in \mathfrak{D}_n \mapsto b$。我们证明了 $\chi(\tau_n) < \tilde{\varepsilon}$。显然，由于 π 是一个完全量子等距，$\tau'_n := (\mathfrak{D}_n, \mathsf{T}_n, \pi \circ \psi_n, \theta_n)$ 也是一个隧道，其广度与 τ_n 相同。

对于每个 $n \in$自然数集，以及所有 $\xi \in \mathrm{dom}(/D_n)$，我们定义

$$\mathsf{DN}_n(\xi) := \|\xi\|_{\mathscr{H}_n} + \|\not{D}_n\xi\|_{\mathscr{H}_n},$$

以下表达式（3.1）。

现在，由于 DN_∞ 是一个 D-范数，集合 $\mathrm{X}_\infty = \{\xi \in \mathrm{dom}(/\mathrm{D}_\infty) : \mathsf{DN}_\infty(\xi) \leqslant 1\}$ 在 $\mathscr{H}_\infty$ 中是紧的~。因此，存在 X_∞ 的一个有限子集 $\mathrm{F} \subseteq$，使得 $\mathrm{Haus}[\mathscr{H}_\infty](\mathrm{X}_\infty, \mathrm{F}) < \frac{\varepsilon}{3}$。由于 $/\mathrm{D}_\infty$ 是 $\bigcup \mathrm{n}\in$- N $\mathscr{H}_n$ 上某个算子的闭包 [20],，对于任意 $\xi \in \mathrm{F}$，都存在一个序列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\xi_n \in \bigcup \mathrm{j}\in$ N $\mathscr{H}_j$ 对所有 $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$ 都成立，使得 $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$，并且

$\lim_{n\to\infty} /\mathrm{D}_\infty \xi_n = /\mathrm{D}_\infty \xi$。由于 F 是有限的，存在 $\mathrm{N}_F \in \mathrm{N}$，使得当 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}_F$ 且 $\xi \in \mathrm{F}$ ~ – ~ 时，$\|\xi - \xi_n\|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$ 且 $\|/\mathrm{D}_\infty \xi - /\mathrm{D}_\infty \xi_n\|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\varepsilon}{3}$。再次根据定义（3.15），我们还有 $/\mathrm{D}_\infty \xi_n = /\mathrm{D}_n \xi_n$。

固定 $n \in$ 自然数集，$n \geqslant$ 自然数集 $:= \max\{$自然数集$_\pi$, 自然数集$_F\}$。令 $\mathscr{M}_n := \mathscr{H}_\infty \oplus \mathscr{H}_n$，将其视为一个 $\mathfrak{D}_n$-(复数域 $\oplus$ 复数域) C* 对应，其 C* 对应结构如下：

$$\forall (a,b) \in \mathfrak{D}_n \quad \forall (\xi,\eta) \in \mathscr{M}_n \quad (a,b) \triangleleft (\xi,\eta) := (\pi(a)\xi, b\eta),$$

and

$$\forall (\xi,\eta),(\xi',\eta') \in \mathscr{M}_n \quad \langle (\xi,\xi'),(\eta,\eta')\rangle_n := \left(\langle \xi,\xi'\rangle_{\mathscr{H}_\infty}, \langle \eta,\eta'\rangle_{\mathscr{H}_n}\right) \in \mathbb{C}\oplus\mathbb{C},$$

其中

$$\forall (t,s) \in \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \quad \forall (\xi,\eta) \in \mathscr{M}_n \quad (\xi,\eta)\cdot(t,s) := (t\xi, s\eta).$$

注意，此处 复数域^2 是定义在两点集上的复数域值函数所构成的 C*代数；特别地，$(z,w) \in$ 复数域^2 的范数为 $\max\{|z|,|w|\}$。

接着，对于所有 $(\xi,\eta) \in$定义域$(/D_\infty) \oplus$定义域$(/D_n)$，我们定义：

$$\mathsf{TN}_n(\xi,\eta) := \max\left\{\mathsf{DN}_\infty(\xi), \mathsf{DN}_n(\eta), \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\left\|\xi-\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}\right\},$$

同时，我们还设

$$\mathsf{Q} : (z,w) \in \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \mapsto \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}|z-w|.$$

显然，有理数域 是复数域 $\oplus$复数域上的 Lipschitz 半范数（事实上，它是两点之间距离恰为 $\tilde{\varepsilon}$ 的两点集上的度量所对应的 Lipschitz 半范数）。

现在，我们验证 TN_n 是一个 D-范数。当然，对于所有 $(\xi,\eta) \in \mathscr{M}_n$：

$$\mathsf{TN}_n(\xi,\eta) \geqslant \max\{\mathsf{DN}_\infty(\xi), \mathsf{DN}_n(\eta)\} \geqslant \max\left\{\|\xi\|_{\mathscr{H}_\infty}, \left\|\eta\right\|_{\mathscr{H}_n}\right\} = \left\|(\xi,\eta)\right\|_{\mathscr{M}_n}.$$

我们注意到

$$\{(\xi,\eta) \in \mathscr{M}_n : \mathsf{TN}_n(\xi,\eta) \leqslant 1\} \subseteq \{\xi \in \mathrm{dom}(\not{D}_\infty) : \mathsf{DN}_\infty(\xi) \leqslant 1\} \times \{\eta \in \mathrm{dom}(\not{D}_n) : \mathsf{DN}_n(\eta) \leqslant 1\},$$

后一个集合是紧的，因为它是两个紧集的乘积——这是由于 DN_n 和 DN_∞确实都是 D-范数。此外，TN_n 在 $\mathscr{M}_n$ 上是下半连续的，因为它是该空间上三个下半连续函数的最大值，因此 TN_n的单位球确实是闭的，进而在 $\mathscr{M}_n$ 中是紧的（其中 $\mathscr{M}_n$ 是完备的）。现在我们验证莱布尼茨不等式。如果 $(a,b) \in \mathrm{dom}(\mathsf{T}_n)$ 且 $(\xi,\eta) \in \mathrm{dom}(\mathsf{TN}_n)$，则我们计算：

$$\begin{aligned}
\left\|(a,b)\triangleleft(\xi,\eta)\right\|_{\mathscr{H}_\infty} &= \left\|\pi(a)\xi - b\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty} \\
&\leqslant \|\pi(a)-b\|_{\mathfrak{A}_\infty}\|\xi\|_{\mathscr{H}_\infty} + \|b\|_{\mathfrak{A}_\infty}\left\|\xi-\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty} \\
&\leqslant \tilde{\varepsilon}\mathsf{T}_n(a,b)\mathsf{DN}_n(\xi) + \|(a,b)\|_{\mathfrak{D}_n}\tilde{\varepsilon}\mathsf{TN}_n(\xi,\eta) \\
&\leqslant \tilde{\varepsilon}\left(\mathsf{T}_n(a,b) + \|(a,b)\|_{\mathfrak{D}_n}\right)\mathsf{TN}_n(\xi,\eta).
\end{aligned}$$

由此可知，对于所有的（a,b） $\in$定义域(T_n)，以及所有的（ξ,η） $\in$定义域(TN_n)，

$$\mathsf{TN}_n((a,b)\triangleleft(\xi,\eta)) \leqslant \left(\mathsf{T}_n(a,b) + \|(a,b)\|_{\mathfrak{D}_n}\right)\mathsf{TN}_n(\xi,\eta).$$

另一方面，若（ξ,η），（ξ',η'） ∈定义域(TN_n)，则有：

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}(\langle(\xi,\eta),(\xi',\eta')\rangle_{\mathscr{M}_n}) &= \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\left|\langle\xi,\xi'\rangle_{\mathscr{H}_\infty}-\langle\eta,\eta'\rangle_{\mathscr{H}_\infty}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\left(\left|\langle\xi-\eta,\xi'\rangle_{\mathscr{H}_\infty}\right|+\left|\langle\eta,\xi'-\eta'\rangle_{\mathscr{H}_\infty}\right|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\left(\left\|\xi-\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}\left\|\xi'\right\|_{\mathscr{H}_\infty}+\left\|\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}\left\|\xi'-\eta'\right\|_{\mathscr{H}_\infty}\right) \\ &\leqslant \mathsf{TN}_n(\xi,\eta)\left\|\xi'\right\|_{\mathscr{H}_\infty}+\left\|\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}\mathsf{TN}_n(\xi',\eta') \\ &\leqslant 2\mathsf{TN}_n(\xi,\eta)\mathsf{TN}_n(\xi',\eta').\end{aligned}$$

现在定义这些映射：

$$\Pi_n:(\xi,\eta)\in\mathscr{M}_n\mapsto\xi\in\mathscr{H}_\infty,\text{ and }\Theta_n:(\xi,\eta)\in\mathscr{M}_n\mapsto\eta\in\mathscr{H}_n.$$

我们的目标是证明

$$\Upsilon_n:=\left(\mathbb{M}_n,(\Pi_n,\pi\circ\psi_n),(\Theta_n,\theta_n)\right)\text{ where }\mathbb{M}_n:=(\mathscr{M}_n,\mathsf{TN}_n,\mathfrak{D}_n,\mathsf{T}_n,\mathbb{C}\oplus\mathbb{C},\mathsf{Q})$$

是一个度量隧道，使用定义（3.9）。

根据构造，对于所有 $(a,b)\in\mathfrak{D}_n$ 以及 $(\xi,\eta)\in\mathscr{M}_n$，$\Pi_n(a\cdot\xi,b\cdot\eta)=\pi(a)\xi=\pi\circ\psi_n(a,b)\Pi_n(\xi,\eta)$，且 $\Theta_n(a\cdot\xi,b\cdot\eta)=b\eta=\theta_n(a,b)\Theta_n(\xi,\eta)$。

现在，令 $\xi\in\mathscr{H}_\infty$ 满足 $\mathsf{DN}_\infty(\xi)=1$。根据 F 的构造，存在 $\xi'\in F$ 使得 $\left\|\xi-\xi'\right\|_{\mathscr{H}_\infty}<\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$。根据我们对 N 的选择，存在 $\eta(=\xi'_n)\in\mathscr{H}_n$ 使得 $\mathsf{DN}_n(\eta)\leqslant 1+\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$ 且 $\left\|\xi'-\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}<\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$。令 $\chi=\frac{1}{1+\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}}\eta\in\mathscr{H}_n$，于是 $\mathsf{DN}_n(\chi)\leqslant 1$。此外，

$$\begin{aligned}\left\|\xi-\chi\right\|_{\mathscr{H}_\infty} &\leqslant \left\|\xi-\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}+\frac{\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}}{1+\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}}\left\|\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty} \\ &\leqslant \left\|\xi-\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}+\frac{\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}}{1+\frac{\tilde{\varepsilon}}{3}}\mathsf{DN}_n(\eta) \\ &\leqslant \left\|\xi-\xi'\right\|_{\mathscr{H}_\infty}+\left\|\xi'-\eta\right\|_{\mathscr{H}_\infty}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \\ &< \tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

因此 $\mathsf{TN}_n(\xi,\chi)=1$，所以 $(\Pi_n,\pi\circ\psi_n)$ 确实是一个度量量子等距。

现在，令 $\eta\in\mathscr{H}_n$。根据构造，$/D_\infty\eta=/D_n\eta$，因此 $\mathsf{DN}_\infty(\eta)=\mathsf{DN}_n(\eta)$。因此，$\mathsf{TN}_n(\eta,\eta)=\mathsf{DN}_n(\eta)$。同样，我们得出结论：$(\Theta_n,\theta_n)$ 也是一个度量量子等距。

因此，Υ_n 是一个度量隧道。当然，显然，从复数域 ⊕复数域 到复数域 的典范满射是量子等距——复数域 上唯一的 Lipschitz 半范数是零函数。因此，Υ_n 是一个度量隧道。

现在我们来计算 Υ_n 的广度。根据定义（3.11），它是隧道 τ'_n 的广度与隧道 (复数域, 0) ← (复数域 ⊕复数域,有理数域) →(复数域,0) 的广度中的较大者；前者至多为 $\tilde{\varepsilon}$，而后者可直接计算得 $\tilde{\varepsilon}$。因此，Υ_n 的广度也是 $\tilde{\varepsilon}$。

因此，对所有 $n\geqslant$ 自然数集，我们有

$$\Lambda^{*\mathsf{met}}((\mathscr{H}_n,\mathsf{DN}_n,\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n,\mathbb{C},0),(\mathscr{H}_\infty,\mathsf{DN}_\infty,\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty,\mathbb{C},0))\leqslant\chi(\Upsilon_n)=\tilde{\varepsilon}<\varepsilon,$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{*\mathsf{met}}((\mathscr{H}_n,\mathsf{DN}_n,\mathfrak{A}_n,\mathsf{L}_n,\mathbb{C},0),(\mathscr{H}_\infty,\mathsf{DN}_\infty.\mathfrak{A}_\infty,\mathsf{L}_\infty,\mathbb{C},0))=0.$$

接下来要计算我们隧道的 ε-可达度上界 Υ_n（见定义 3.12）。我们将再次使用有限集 F，且 $\mathsf{Haus}[\mathscr{H}_\infty](F, X_\infty) < \frac{\varepsilon}{3}$，其中 X_∞ 是 DN_∞ 的闭单位球。

现在，令 $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数序列，在 ∞ 处消失，取值于 $[0,1]$，并在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛到 1。因此，$(v_k(\not{D}_\infty))_{k\in\mathbb{N}}$ 在强算子拓扑下收敛到 $\not{D}_\infty$。由于 F 是有限集，存在 $k\in\mathbb{N}$，使得对所有 $\xi\in F$

$$\|v_k(\not{D}_\infty)\xi - \xi\|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12}. \tag{3.3}$$

从现在起，我们将 $\not{D}_n$ 视为作用在 $\mathscr{H}_\infty$ 上的线性算子，其在 $\mathscr{H}_n$ 上的限制为 $\not{D}_n$，在 $\mathscr{H}_n^\perp$ 上的限制为 0；因此，$\mathrm{dom}(\not{D}_n)$ 被替换为 $\mathrm{dom}(\not{D}_n)\oplus\mathscr{H}_n^\perp$。我们用 P_n 表示从 $\mathscr{H}_\infty$ 到 $\mathscr{H}_n$ 的正交投影，因此 $P_n\not{D}_n = \not{D}_n P_n = \not{D}_n$ 在 $\mathrm{dom}(\not{D}_n)$ 上。

对每个 $t\in[0,\infty)$，令 $u^t\colon s\in\mathbb{R}\mapsto\exp(its)$；对于每个 $n\in\mathbb{N}$，我们将 $u^t(\not{D}_n)$ 记作 U_n^t。

固定 $t\in\mathbb{R}$。函数 $u^t v_k$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，并且在无穷远处趋于零。根据定理（3.16），由于 $(\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, \not{D}_\infty)$ 是一个谱三元组，且是谱三元组序列 $(\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, \not{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限，算子序列 $(P_n u^t v_k(\not{D}_n) P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在范数意义下收敛到 $u^t v_k(\not{D}_\infty)$。此外，根据构造，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，均有 $u^t v_k(\not{D}_n)P_n = P_n u^t v_k(\not{D}_n)P_n$。

设 F' 是紧集 $\left[0,\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 的一个有限子集，使得 $\mathsf{Haus}[\mathbb{R}](F', [0,\frac{1}{\varepsilon}]) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12}$。由于 F' 是有限集，存在 $N_v\in\mathbb{N}$，使得若 $n\geqslant N_v$，则对所有 $t\in F'$：

$$\left|\!\left|\!\left| U_n^t(v_k(\not{D}_n))P_n - U_\infty^t(v_k(\not{D}_\infty))\right|\!\right|\!\right|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12}. \tag{3.4}$$

令 $n\in$ 自然数集。现在注意到，如果 $\xi\in$ 定义域(DN_n)，且 $\mathsf{DN}_n(\xi)\leqslant 1$，那么对于所有 $s<t\in$ 实数集：

$$\begin{aligned}\left\|U_n^t\xi - U_n^s\xi\right\|_{\mathscr{H}_n} &\leqslant \int_s^t \left\|\frac{d}{dr}U_n^r\xi\right\|_{\mathscr{H}_n} dr\\ &\leqslant \int_s^t \left\|U_n^r \not{D}_n\xi\right\|_{\mathscr{H}_n} dr\\ &\leqslant |s-t|.\end{aligned}$$

因此，对于所有 s、$t\in$ 实数集，以及满足 $\mathsf{DN}_n(\xi)\leqslant 1$ 的 $\xi\in$ 定义域(DN_n)，我们有

$$\left\|U_n^t\xi - U_n^s\xi\right\|_{\mathscr{H}_n} \leqslant |s-t|.$$

现在，令 $n\geqslant N' := \max\{N_v, N_F\}$。由于 $\not{D}_n$ 和 P_n 可交换，若 $\xi\in X_\infty$，则 $\mathsf{DN}_n(\xi)\leqslant \mathsf{DN}_\infty(\xi)$，并且：

$$\begin{aligned}\mathsf{DN}_n(v_k(\not{D}_n)P_n\xi) &= \|v_k(\not{D}_n)P_n\xi\|_{\mathscr{H}_\infty} + \|\not{D}_n v_k(\not{D}_n)P_n\xi\|_{\mathscr{H}_\infty}\\ &\leqslant \|v_k\|_{C_0(\mathbb{R})}\,|||P_n|||_{\mathscr{H}_\infty}\,\mathsf{DN}_n(\xi)\leqslant 1.\end{aligned}$$

对于所有 $\xi \in X_\infty$ 和 $t \in [0, \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}]$，令 $s \in F'$ 和 $\xi' \in F$，使得 $|s-t| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12}$，$\left\|\xi - \xi'\right\|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}$，则：

$$\begin{aligned}
\left\|U_n^t \nu_k(\not{D}_n) P_n \xi - U_\infty^t \xi\right\|_{\mathscr{H}_\infty} \leqslant & \underbrace{\left\|U_n^t \nu_k(\not{D}_n) P_n \xi - U_n^s \nu_k(\not{D}_n) P_n \xi\right\|_{\mathscr{H}_\infty}}_{\leqslant |t-s| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \text{ since } \mathsf{DN}_n(\nu_k(\not{D}_n) P_n \xi) \leqslant 1} \\
& + \underbrace{\left\|U_n^s \nu_k(\not{D}_n) P_n \xi - U_\infty^s \nu_k(\not{D}_\infty) \xi\right\|_{\mathscr{H}_\infty}}_{\leqslant |||U_n^s \nu_k(\not{D}_n) P_n - U_\infty^s \nu_k(\not{D}_\infty)|||_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12} \text{ by Eq. (3.4)}} \\
& + \underbrace{\left\|U_\infty^s \nu_k(\not{D}_\infty)(\xi - \xi')\right\|_{\mathscr{H}_\infty}}_{\leqslant \|\xi - \xi'\|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \text{ by Eq. (3.3)}} \\
& + \underbrace{\left\|U_\infty^s \nu_k(\not{D}_\infty) \xi' - U_\infty^s \xi'\right\|_{\mathscr{H}_\infty}}_{\leqslant \|\nu_k(\not{D}_\infty)\xi' - \xi'\|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12}} \\
& + \underbrace{\left\|U_\infty^s \xi' - U_\infty^t \xi'\right\|_{\mathscr{H}_\infty}}_{\leqslant |s-t| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{12}} \\
& + \underbrace{\left\|U_\infty^t \xi' - U_\infty^t \xi\right\|_{\mathscr{H}_\infty}}_{\leqslant \|\xi - \xi'\|_{\mathscr{H}_\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}} \\
< & \tilde{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

设 $\xi \in \mathrm{dom}(\not{D}_\infty)$，其中 $\mathsf{DN}_\infty(\xi) \leqslant 1$。设 $n \geqslant N'$，并令 $\eta = \nu_k(\not{D}_\infty) P_n \xi$。对所有 $t \in [0, \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}]$，有 $\eta \in \mathrm{dom}(\not{D}_n)$ 且 $\mathsf{DN}_n(\eta) \leqslant 1$。因此，

$$\begin{aligned}
& \inf_{\substack{\eta \in \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_n) \\ \mathsf{DN}_n(\eta) \leqslant 1}} \sup_{\substack{\omega \in \mathrm{dom}(\mathsf{TN}_n) \\ \mathsf{TN}_n(\omega) \leqslant 1}} \left| \langle U_n^t \eta, \Theta_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_n} - \langle U_\infty^t \xi, \Pi_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_\infty} \right| \\
& \quad \leqslant \sup_{\substack{\omega \in \mathrm{dom}(\mathsf{TN}_n) \\ \mathsf{TN}_n(\omega) \leqslant 1}} \left| \langle U_n^t \nu_k(\not{D}_n) P_n \xi, \Theta_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_n} - \langle U_\infty^t \xi, \Pi_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_\infty} \right| \\
& \quad \leqslant \sup_{\substack{\omega \in \mathrm{dom}(\mathsf{TN}_n) \\ \mathsf{TN}_n(\omega) \leqslant 1}} \left(\left\| U_n^t \nu_k(\not{D}_n) \xi - U_\infty^t \xi \right\|_{\mathscr{H}_\infty} \|\omega\|_{\mathscr{M}_n} + \left\| U_\infty^t \xi \right\|_{\mathscr{H}_\infty} \underbrace{\|\Theta_n(\omega) - \Pi_n(\omega)\|_{\mathscr{H}_\infty}}_{< \tilde{\varepsilon} \text{ since } \mathsf{TN}_n(\omega) \leqslant 1} \right) \\
& \quad < \tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

现在，取 $\xi \in \mathscr{H}_n$，其中 $\mathsf{DN}_n(\xi) \leqslant 1$。根据构造，$\| \not{D}_\infty \xi \|_{\mathscr{H}_\infty} = \| \not{D}_n \xi \|_{\mathscr{H}_n}$，且 $U_{tn}^{\xi} = U_{t_\infty} \xi$。因此，对所有满足 $\mathsf{DN}_n(\xi) \leqslant 1$ 的 $\xi \in \mathrm{dom}(\mathsf{DN}_n)$，对所有 $t \in \mathbb{R}$，有：

$$\begin{aligned}
& \inf_{\substack{\eta \in \mathrm{dom}(\not{D}_\infty) \\ \mathsf{DN}_\infty(\eta) \leqslant 1}} \sup_{\substack{\omega \in \mathrm{dom}(\mathsf{TN}_n) \\ \mathsf{TN}_n(\omega) \leqslant 1}} \left| \langle U_\infty^t \eta, \Pi_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_\infty} - \langle U_n^t \xi, \Theta_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_n} \right| \\
& \qquad \leqslant \left| \langle U_\infty^t \xi, \Pi_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_\infty} - \langle U_n^t \xi, \Theta_n(\omega) \rangle_{\mathscr{H}_n} \right| = 0 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，对于所有 $n \geqslant \max\{\text{自然数集}, \text{自然数集}'\}$，$\varepsilon$-可达度不超过 Υ_n，因此 ε-幅度 $\mu(\Upsilon_n | \varepsilon)$ 不超过 Υ_n（根据定义（3.12））。因此，对于所有 $n \geqslant$ 自然数集：

$$\Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, \not{D}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, \not{D}_\infty)) \leqslant \mu(\Upsilon_n | \varepsilon) < \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n \to \infty} \Lambda^{\mathsf{spec}}((\mathfrak{A}_n, \mathscr{H}_n, \not{D}_n), (\mathfrak{A}_\infty, \mathscr{H}_\infty, \not{D}_\infty)) = 0,$$

正如所声称的。 □

注3.18。 定理（3.17）的一个推论是，我们根据 [31],中的工作，得到了狄拉克算子的有界连续函数演算的收敛；该工作推广了定理（3.16）。

4. 扭曲群C^*-代数上的偶谱三元组

现在，我们将运用前几节的结果，在赋有长度函数的离散群的扭曲 C*代数上，为谱邻近度构造谱三元组的归纳极限。特别地，我们将在本节证明第三个主要定理，即定理（4.11）。我们的方法在某些扭曲群 C*代数上引入了新的度量谱三元组，这些三元组推广了以往基于离散群上的长度函数、与之相关但又有所不同的构造，例如 [19]中的构造。我们的主要应用是为非交换螺线体和一些 Bunce-Deddens 代数构造新的谱三元组。特别地，我们将证明，非交换螺线体上的谱三元组是量子 2-环面上谱三元组关于谱邻近度的极限。接下来的两个小节将介绍一些背景材料，以用于陈述和证明主要结果。

4.1. 离散群、适当长度函数、2-余循环与经典谱三元组。 设G_∞ 为一个离散群，且 σ 是 G_∞上的一个 2-余循环。设 λ 为G_∞ 在 $\ell^2(G_\infty)$上的左正则 σ-射影表示，其定义如下：对所有$g \in G_\infty$ 以及所有 $\xi \in \ell^2(G_\infty)$:

$$\lambda(g)\xi : h \in G_\infty \longmapsto \sigma(g, g^{-1}h)\xi(g^{-1}h).$$

显然，对每个 g ∈G∞，算子 λ(g)都是酉算子。令 C * red(G∞,σ) 为由 σ扭曲的 G∞ 的约化 C*代数，即由 {λ(g) : g ∈G∞}生成的、作用于 ℓ^2(G∞)上的算子 C*代数。对于任意 f ∈ ℓ^1(G∞)，算子 λ(f)在 ℓ^2(G∞)上的定义为∑g∈G∞ f (g)λ(g)——容易验证 |||λ(f)|||$_{\ell^2(G_\infty)}$ ≤ ‖f‖$_{\ell^1}$(f)。约化群 C*代数 C * red(G) 特别地就是 C * red(G∞,1)。

在 [11], Connes 引入了谱三元组 (C * red(G∞), ℓ^2(G∞), ML)，其中使用 G∞ 上任意适当长度函数 L，ML 是由 L 给出的乘法算子，其定义在希尔伯特空间 ℓ^2(G∞) 中的自然定义域上。Connes 证明了 |||[ML, λ(g)]|||$_{\ell^2(G_\infty)}$ =L(g)——这直接由三角不等式以及 [ML, λ(g)]δ_e= L(g)σ(g ,1)δ_g 这一事实得出，其中对所有 g ∈G∞:

$$\delta_g : h \in G_\infty \mapsto \begin{cases} 1 \text{ if } g = h, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

于是，对于由有限支撑的 C 值函数构成的 $*$-代数 $C_c(G_\infty)$，我们得到如下不等式，其中对所有 $f \in C_c(G_\infty)$:

$$\left|\left|\left|[M_{\mathbb{L}}, \lambda(g)]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_\infty)} \leqslant \sum_{g \in G_\infty} |f(g)|\mathbb{L}(g), \tag{4.1}$$

因为对所有 $g \in G_\infty$， $\lambda(g)$ 都是酉算子。

注意，根据构造，要使乘以 $\mathbb{L}$ 的乘法算子具有紧预解式，该算子在任意紧区间上的谱投影必须具有有限秩。因此，特别地，对于所有 $r \geqslant 0$，集合 $\{\delta_h \in \ell^2(G_\infty) : \mathbb{L}(h) \leqslant r\}$ 必须是有限的。换言之，$\mathbb{L}$ 对应的G_∞ 中的所有闭球都必须是有限集，也就是说，$\mathbb{L}$ 确实必须是适当的。

然而，G_∞ 上的自然长度函数可能并不适当，甚至可能无法赋予离散拓扑。当 G_∞ 是加法群 $\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)^2$ 时，就能看到这种情况的一个例子。

其中:

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] := \left\{\frac{a}{p^n} : n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\right\},$$

且其中 p ∈自然数集为素数。将 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ 视为 Q 的子群是自然的，因此可以赋予它由 Q 上通常的绝对值诱导的长度函数（见图（3））。然而，该长度函数并不适当——并且诱导出非离散拓扑。我们还注意到，$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] = \bigcup_{n\in\text{自然数集}} \frac{1}{p^n}\mathbb{Z}$，而我们希望在度量意义下刻画这一归纳极限结构；尽管序列 $\left(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}\right)_{n\in\text{自然数集}}$ 关于由 $|\cdot|$ 诱导的豪斯多夫距离收敛到 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$，但我们无法将这一观察直接应用于相关的扭曲 C*代数，因为 $|\cdot|$ 无法使用 Connes 方法定义谱三元组。

让我们回到一般的离散群G_∞ 以及其上的某个 2-余循环 σ，来讨论这种情形。现在假设给定一个子群的严格递增序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它们都是G_∞ 的子群，并且$G_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$——用更专业的说法，$G_\infty$ 是群序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$的归纳极限；从现在起，我们将其视为G_∞ 的子群序列。对于所有$n \in\mathbb{N}$，我们也将 σ 视为其在G_n 上的限制。

现在我们遇到了一个难题。若在 G_∞ 上选取一个适当长度函数 L，那么由于 $G_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$，且 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 递增，G_∞ 的任意有限子集都包含在某个 G_N 中（因此也包含在所有满足 $n \geqslant N$ 的 G_n 中）。这意味着，关于适当度量空间的带基点 Gromov-Hausdorff 距离，$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 G_∞；我们始终取 1 为基点，而度量由 L 诱导（见 [22]）。另一方面，只要 G_∞ 是无限群——考虑 G_∞ 是可数多个群之并时，这也是唯一有意思的情形；否则，显然当 n 足够大时，G_∞ 就等于 G_n——那么 G_∞ 的直径不仅是无限的——它不可能是闭球，因为闭球都是有限的——而且对于 L 诱导的豪斯多夫距离，子群 G_n 通常也不会接近 G_∞。因此，由于 L 适当，我们可以像之前一样定义谱三元组 $(C^*\mathrm{red}(G^n,\sigma), \ell^2(G_n), ML)$，但一般来说，没有明显理由认为 $|||[ML, a]|||_{\ell^2(G_\infty)}$ 会特别接近 $|||[ML, a]|||_{\ell^2(G_n)}$，其中 $a \in C^*\mathrm{red}(G^n,\sigma)$。

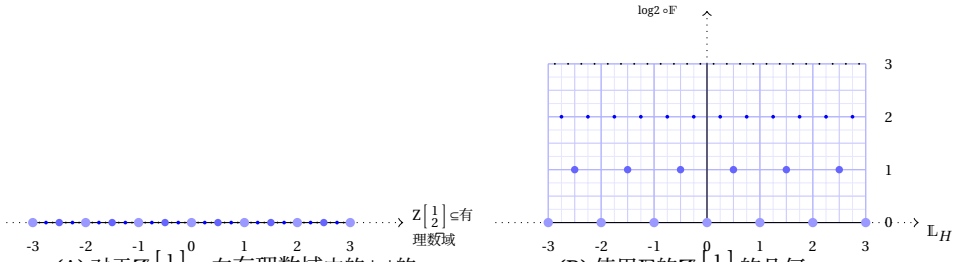
另一方面，对于G_∞ 上的某些长度函数，$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 可能会在这些长度函数下按豪斯多夫距离收敛，但只要G_∞ 是无限群，这些长度函数就不是适当长度函数。因此，我们需要构造一种新型谱三元组，将这两种看似相反的情形结合起来：一种情形是，我们不知道如何利用非适当长度函数构造谱三元组，尽管它在其他方面具备适合我们目的的良好度量性质；另一种情形则是长度函数适当，但度量性质不佳。下面的构造受到 [19], 的启发，但与之不同；在 [19], 中，适当长度函数是由一个非适当长度函数与一个p-范数相加构造而成的。

4.2. **谱三元组**。 现在，我们在一类特定的扭曲群 C*代数上定义新的谱三元组；这类代数是我们的第三个主要定理（定理4.11）及其推论所研究的对象。

从现在起，假设G_∞ 是一个离散群，配备一个取值于$\mathbb{T}$ 中的 2-余循环 $\sigma := \{z \in \text{复数域} : |z| = 1\}$；并且 G_∞ 是一个按包含关系严格递增的子群序列 (G_n) 的并集，这些子群均属于 G_∞，且$G_\infty = \bigcup_{n\in\text{自然数集}} G_n$。

我们还假设给定了定义在$\mathbb{L}_H$ 上的长度函数G_∞，对于每个$n \in\mathbb{N}$，其在G_n 上的限制都是适当的，并且满足以下性质:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}[\mathbb{L}_H](G_\infty, G_n) = 0. \tag{4.2}$$



(A) 对于$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$，在有理数域中的$|\cdot|$的几何

(B) 使用$\mathbb{F}$的$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$的几何

图3. $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$的几何

此外，我们要求给定一个严格递增无界函数尺度函数：$\mathbb{N} \to [0,\infty)$，以及$\mathbb{F}: G_\infty \to [0,\infty)$，使得对于所有$g \notin G_0$：

$$\mathbb{F}(g) = \text{scale}(\min\{n \in \mathbb{N} : g \in G_n\}),$$

而$\mathbb{F}$限制在G_0上满足：

- $\forall g \in G0\ \mathbb{F}(g) = \mathbb{F}(g^{-1})$,
- $\forall g,\ h \in G0\ \mathbb{F}(gh) \leqslant$最大值$\{\mathbb{F}(g),\ \mathbb{F}(h)\}$,
- $\forall g \in G0\ \mathbb{F}(g) \in [0,$尺度函数$(0)]$,
- $\mathbb{F}(1) = 0$。

显然，上述假设为G_∞和G_n提供了许多长度函数；我们将在谱三元组的构造中使用这些函数。

本节的主要示例之一将是非交换螺线体，其基本组成部分如下所述。稍后我们将在本文中对这一示例作进一步详细介绍。

例 4.1. 设$d \geqslant 2$且p为素数。设$G_\infty = \left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)^d$，并令$G_n = \left(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}\right)^d$，对所有$n \in \mathbb{N}$均成立。注意到$G_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$。于是我们可以选择$\mathbb{L}_H$为$\mathbb{R}^d$上任意范数的限制，并选择尺度函数：$n \in \mathbb{N} \to p^n \in [0,\infty)$，使得：

$$\mathbb{F} : g \in G_\infty \mapsto \text{scale}\left(\min\left\{n \in \mathbb{N} : g \in \left(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}\right)^d\right\}\right).$$

现在，对于任意函数f: $G_n \to$复数域，我们将M_f记为在以下子空间上由f定义的乘法算子：

$$\text{dom}\left(M_f\right) := \left\{\xi \in \ell^2(G_n) : (h \in G_n \mapsto f(h)\xi(h)) \in \ell^2(G_n)\right\}$$

属于$\ell^2(G_n)$。当然，如果$f\|_{C(G_n)}$有界，则M_f有界；否则无界。不过，$\text{dom}\left(M_f\right)$总是包含$C_c(G_n)$，因此在$\ell^2(G_n)$中总是稠密的。

设E为一个有限维希尔伯特空间，其内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle_E$，且$\dim E \in 2$自然数集$\setminus\{0\}$。再设$\mathfrak{c}$为$E$上的复数域^{2}的克利福德代数的$*$-表示。令$\gamma_1 = \mathfrak{c}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

以及 $\gamma_2 = \mathfrak{c}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$。为此，我们记录：对于所有$j,k \in \{1,2\}$：

$$\gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = \begin{cases} 2 \text{ if } j = k, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}.$$

注记 4.2。 没有特别的理由要求我们将自身限制在 $E = \mathbb{C}^2$，中，尽管这是自然的选择。在这种情况下，我们可以选择通常的 Weyl矩阵：

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \text{ and } \gamma_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

作为我们构造中最自然的选择。

对于每个 $n \in \overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，我们将希尔伯特空间 $\ell^2(G_n,E)$ 识别为 E 值函数在 G_n 上的空间（内积为 $\langle \xi,\eta\rangle_{\ell^2(G_n,E)} := \sum_{g\in G_n} \langle \xi(g),\eta(g)\rangle_E$），其中 $\ell^2(G_n)\otimes E$。然后令

$$\operatorname{dom}(\not{D}_n) := \left\{\xi \in \ell^2(G_n,E) : (\mathbb{L}_H(g)\gamma_1\xi(g) + \mathbb{F}(g)\gamma_2\xi(g))_{g\in G_n} \in \ell^2(G_n,E)\right\}$$

并在 $\operatorname{dom}(\not{D}_n)$ 上定义狄拉克算子：

$$\not{D}_n := M_{\mathbb{L}_H}\otimes\gamma_1 + M_{\mathbb{F}}\otimes\gamma_2. \tag{4.3}$$

现在我们证明，如上所定义的 $(C^*(G_n,\sigma), \ell^2(G_n)\otimes E, \not{D}_n)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 确实都是谱三元组。第一步是计算方程（4.3）中狄拉克算子的定义域。为此，我们需要以下引理。回顾一下，$\mathbb{R}^2$ 上的范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ 在关于 $\mathbb{R}^2$ 上乘积序递增时称为单调的；对我们的目的而言，最重要的此类范数将是最大范数 $x, y \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$；我们还注意到，我们经常将 $\mathbb{R}^d$ 的元素写成简单的 d 元组。

引理 4.3. 在本节的记号和假设下，以下等式成立。

(1) 对所有 $g \in G_\infty$：

$$\mathbb{F}(g^{-1}) = \mathbb{F}(g);$$

(2) 对所有 $g,h \in G_\infty$：

$$\mathbb{F}(gh) \leqslant \max\{\mathbb{F}(g),\mathbb{F}(h)\} \leqslant \mathbb{F}(g) + \mathbb{F}(h).$$

此外，若 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ 是$\mathbb{R}^2$，上的任一单调范数，则 $g \in G_\infty \mapsto \|(\mathbb{L}_H(g),\mathbb{F}(g))\|_{\mathbb{R}^2}$ 是 G_∞上的一个适当的无界长度函数。

证明。设 $g \in G_\infty$，并设 $n \in \mathbb{N}$ 是唯一的自然数，使得 $F(g) = \text{scale}(n)$；若 $F(g) < \text{scale}(0)$，则 $n = 0$。若 $n = 0$，则由假设可得 $F(g) = F(g^{-1})$。若 $n > 0$，则对于 $p < n$，有 $g \in G_n$且 $g \notin G_p$；因此，当 $p < n$ 时，$g^{-1} \in G_n$且 $g^{-1} \notin G_p$；于是 $F(g^{-1}) = \text{scale}(n) = F(g)$。

现在，取 $h \in G_\infty$。同样，令 $m \in$ 自然数集为唯一确定的，使得 $F(h) =$ 尺度函数(m)，否则 $m = 0$。令 $k = \max\{m,n\}$。因此 $g、h \in G_k$，所以 $gh \in G_k$。首先，若 $g、h、gh \in G_0$，则根据 F 的假设，$F(gh) \leqslant \max\{F(g),F(h)\}$。否则，$k > 0$，我们只需注意到，若 $gh \in G_0$，则 $F(gh) \leqslant$尺度函数$(0) <$尺度函数(k)；或者 $gh \notin G_0$，，同样有 $F(gh) \leqslant$尺度函数(k)；无论哪种情况，我们都得到：

$$\mathbb{F}(gh) \leqslant \text{尺度函数}(k) = \text{尺度函数}(\max\{n,m\}) = \max\{\text{尺度函数}(n),\text{尺度函数}(m)\} = \max\{\mathbb{F}(g),\mathbb{F}(h)\}。$$

取一个单调范数 $\|\cdot\|_{\text{实数集}^2}$，定义在实数集^2 上，并令

$$\mathbb{L} : g \in G_\infty \longmapsto \|(\mathbb{L}_H(g),\mathbb{F}(g))\|_{\mathbb{R}^2}.$$

于是很容易验证，若g、$h \in G_\infty$，则由于 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ 是单调的：

$$\begin{aligned}\big\|(\mathbb{L}_H(gh),\mathbb{F}(gh))\big\|_{\mathbb{R}^2} &\leqslant \big\|(\mathbb{L}_H(g)+\mathbb{L}_H(h),\mathbb{F}(g)+\mathbb{F}(h))\big\|_{\mathbb{R}^2}\\ &\leqslant \big\|(\mathbb{L}_H(g),\mathbb{F}(g))\big\|_{\mathbb{R}^2}+\|(\mathbb{L}_H(h),\mathbb{F}(h))\|_{\mathbb{R}^2}.\end{aligned}$$

此外，对于所有$g \in G_\infty$，$\big\|(\mathbb{L}_H(g^{-1}),\mathbb{F}(g^{-1}))\big\|_{\mathbb{R}^2} = \big\|(\mathbb{L}_H(g),\mathbb{F}(g))\big\|_{\mathbb{R}^2}$。

最后，如果 $\big\|(\mathbb{L}_H(g),\mathbb{F}(g))\big\|_{\mathbb{R}_2}=0$，那么$\mathbb{L}_H(g)=0$，这反过来又意味着$g=1$。另一方面，$\mathbb{F}(1)=0$ 且$\mathbb{L}_H(1)=0$，因此$\mathbb{L}(1)=0$。由此可见，正如所述，$\mathbb{L}$ 是G_∞上的长度函数。

现在，更具体地说，我们选择 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$，并将其固定为通常的最大范数$\|\cdot\|_\infty$；然后将长度$\mathbb{L}_\infty$重新命名为；于是

$$\mathbb{L}_\infty(g) := \max\{\mathbb{L}_H(g),\mathbb{F}(g)\}.$$

取 $n \in$自然数集。根据定义，以下闭球之间的等式成立：

$$\{g \in G_\infty : \mathbb{L}(g) \leqslant \mathrm{scale}(n)\} = \{g \in G_n : \mathbb{L}_H(g) \leqslant \mathrm{scale}(n)\}.$$

由于 $\mathbb{L}_H$ 在G_n 上是适当的，因此该集合是有限的。所以 $\mathbb{L}$ 确实在 G_∞ 上是适当的。

根据假设，尺度函数在自然数集 上无界，并且对于所有$n \in$自然数集，都存在$g \in G_\infty \backslash G_n$（因为假设 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增），即 $\mathbb{F}(g) \geqslant \mathrm{scale}(n)$，因此$\mathbb{L}$ 无界。

现在回到一般的单调范数 $\|\cdot\|_{\text{实数集}^2}$，其定义在 实数集^2 上。由于实数集^2 上的所有范数都等价，存在 $c>0$ 使得 $\frac{1}{c}\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_{\text{实数集}^2} \leqslant c\|\cdot\|_\infty$。因此，

$$\frac{1}{c}\mathbb{L}_\infty \leqslant \mathbb{L} \leqslant c\mathbb{L}_\infty.$$

现在很容易验证，$\mathbb{L}$ 在G_∞ 上仍然是适当且无界的。证明至此完成。□

注记 4.4. 直接设定 $\mathbb{F}(g) =$对所有 $g \in G_0 \setminus \{1\}$ 均取 $\mathrm{scale}(0)$。如此选取 $\mathbb{F}$与其他任何满足我们对$\mathbb{F}$'的假设的选取相比G_0, 只相差一个有界扰动。关于从度量视角讨论谱三元组的有界扰动，请参阅 [36]。

如上文所述，上述长度函数 $\mathbb{L}_H$并非适当，因此它本身无法定义谱三元组；然而 $\mathbb{L}$ 是适当的，因而可用于在 $C^*(G_\infty,\sigma)$ 上定义谱三元组。不过，我们采取略有不同的路径，使用我们将证明是一个偶谱三元组的结构，以一种"二维"几何取代G_∞ 的线性几何（非交换螺线体的情形见图（3））。

现在证明，在上述假设下，我们确实可以定义谱三元组。首先计算方程（4.3）中定义的候选狄拉克算子的定义域。

引理 4.5. 采用本节的记号和假设，以下断言成立：对于所有 $\xi \in E$ 以及所有 $a,b \in$ 实数集：

$$\big\|(a\gamma_1+b\gamma_2)\xi\big\|_E^2 = \big(a^2+b^2\big)\,\|\xi\|_E^2.$$

特别地，对于所有 $n \in$自然数集，狄拉克算子 $\not{D}_n$ 的定义域 定义域($\not{D}_n$) 为

$$\left\{\xi \in \ell^2(G_n,E) : \sum_{g\in G_n}(\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2)\,\big\|\xi(g)\big\|_E^2 < \infty\right\}.$$

证明。 设 $\xi \in E$。对于所有 a、b ∈实数集，以下恒等式成立：

$$\begin{aligned}\left\|a\gamma_1\xi + b\gamma_2\xi\right\|_E^2 &= a^2\langle\gamma_1\xi,\gamma_1\xi\rangle_E + ab\langle\gamma_1\xi,\gamma_2\xi\rangle_E + ab\langle\gamma_2\xi,\gamma_1\xi\rangle_E + b^2\langle\gamma_2\xi,\gamma_2\xi\rangle_E \\ &= a^2\langle\gamma_1^2\xi,\xi\rangle_E + ab\langle(\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_1)\xi,\xi\rangle_E + b^2\langle\gamma_2^2\xi,\xi\rangle_E \\ &= (a^2+b^2)\,\|\xi\|_E^2.\end{aligned}$$

如前所述。

对所有n ∈ℕ，计算 dom($/D_n$) 可立即得出。 □

现在我们证明，我们的狄拉克算子确实是自伴的，且具有紧预解式，并且可以用来定义谱三元组。我们还建立了一些有用的估计，稍后将借此证明，我们的构造在非交换螺线体上给出了度量谱三元组。

定义 4.6. 若a是 $\ell^2(G_\infty)$上的有界算子，我们用a° 表示作用在 $\ell^2(G_\infty,E)$上的算子$a\otimes 1_E$。我们还定义 λ 在 $\ell^2(G_\infty,E)$上对$C^*(G_\infty,\sigma)$的表示，令 $\lambda_E := \lambda\otimes 1_E$，因此对于所有$f \in C_c(G_\infty)$，有 $\lambda(f)^\circ := \lambda_E(f)$。此外

(1) 对每个 n ∈自然数集，定义：

$$\mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_n) := \left\{a \in \mathfrak{sa}\left(C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma)\right) : a^\circ \mathrm{dom}\,(\not{D}_n) \subseteq \mathrm{dom}\,(\not{D}_n) \text{ and } [\not{D}_n, a^\circ] \text{ is bounded}\right\}.$$

(2) 对所有 a ∈定义域(Ln)，定义：

$$\mathsf{L}_n(a) := \left|\!\left|\!\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n,E)}.$$

我们通过证明确实定义了偶谱三元组来结束本小节，并为下一小节中的第三个主要定理奠定基础。回顾一下，根据引理 (4.3)，$\mathbb{L}_H + \mathbb{F}$ 在 G_∞ 上是适当且无界的。

引理 4.7。 </style}在本节的记号和假设下，对于任意固定的 n 自然数集，有序三元组

$$(C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma), \ell^2(G_n,E), \not{D}_n)$$

是一个偶谱三元组，其中 $\ell^2(G_n,E)$ 上的分次由 $1_{\ell^2(G_n)}\otimes i\gamma_1\gamma_2$ 给出。此外，对于所有 a ∈ 定义域(Ln)：

$$\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, a]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)} \leq \left|\!\left|\!\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n,E)},$$

以及：

$$\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{F}}, a]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)} \leq \left|\!\left|\!\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n,E)}.$$

特别地，若定义 $\mathbb{L} := \mathbb{L}_H + \mathbb{F}$，则对所有 n ∈∈自然数集 以及所有 a ∈∈定义域(Ln)：

$$\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}}, a]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)} \leq 2\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n,E)}.$$

若对任意 n ∈∈自然数集，谱三元组 (复数域 * red(G^n,σ), $\ell^2(G_n)$, $/D_{\mathbb{L}}$) 是度量的，则(复数域 * red(G^n,σ),$\ell^2(G_n,E)$, $/D_n$)也是度量的。

证明。 我们首先证明，对于任意固定的n ∈自然数集，$/D_n$是自伴的，且具有紧预解式。固定任意n ∈自然数集，注意到$/D_n$ 的定义域包含 $\ell^2(G_n,E)$中的所有有限支撑函数，因此是稠密的。此外，由于 γ_1 和 γ_2 都是自伴的，

若 $\xi,\eta\in$属于$\mathrm{dom}(\not{D}_n)$，则可得：

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{D}_n\xi,\eta\rangle_{\ell^2(G_n,E)} &= \sum_{g\in G_n}\langle\big(\mathbb{L}_H(g)\gamma_1+\mathbb{F}(g)\gamma_2\big)\xi,\eta\rangle_E\\ &= \sum_{g\in G_n}\langle\xi,\big(\mathbb{L}_H(g)\gamma_1+\mathbb{F}(g)\gamma_2\big)\eta\rangle_E\\ &= \langle\xi,\mathbb{D}_n\eta\rangle_{\ell^2(G_n,E)},\end{aligned}$$

所以 $\not{D}_n$ 也是一个对称算子。利用引理(4.5)，我们现在注意到：

$$\mathrm{dom}\left(\mathbb{D}_n^2\right)=\left\{\xi\in\ell^2(G_n,E):\sum_{g\in G_n}\left(\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2\right)^2\left\|\xi(g)\right\|_E^2<\infty\right\}$$

并且，在 $\mathrm{dom}\left(\not{D}_n^2\right)$ 上，克利福德代数关系意味着：

$$\mathbb{D}_n^2+1=\left(M^2_{\mathbb{L}_H}+M^2_{\mathbb{F}}+1\right)\otimes 1_E.$$

现在定义作用在 $\ell^2(G_n,E)$ 上的算子 K，规定对所有 $\xi\in\ell^2(G_n,E)$：

$$K\xi:g\in G_n\mapsto\frac{1}{\sqrt{\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2+1}}\xi(g).$$

根据构造，K 是正的。此外，如果 $n\in\mathbb{N}$，那么根据我们的假设，L_H 限制在 G_n 上是适当的，并且 F 在 G_n 上有界，因此 K 是紧的。如果 $n=\infty$，根据我们的假设，对于所有 $r\geqslant 0$，集合 $\{g\in G_\infty: F(g)\leqslant r\}$ 是某个 $k\in\mathbb{N}$ 对应的 G_k 的子集。由于 L_H 在 G_k 上是适当的，集合 $\{g\in G_\infty: L^2H(g)+F^2(g)\leqslant r\}$ 是有限的。因此，K 的特征空间都是有限维的。容易得到，K 也是紧的。

无论如何，也就是说，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$(\not{D}_n^2+1)K^2\xi=\xi$ 对于所有 $\xi\in\ell^2(G_n,E)$，而 $K^2(\not{D}_n^2+1)\xi=\xi$ 对于所有 $\xi\in$ 定义域$\left(\not{D}_n^2\right)$均成立，这可由直接计算看出；特别地，我们注意到，按构造，$K\ell^2(G_n,E)=$ 定义域$(\not{D}_n)$。

根据引理（4.5），对于所有 $\xi\in\ell^2(G_n,E)$，我们得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{g\in G_n}\left\|\mathbb{D}_nK\xi(g)\right\|_E^2\\ &\quad=\sum_{g\in G_n}\left\|\frac{\mathbb{L}_H(g)}{\sqrt{\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2+1}}(\gamma_1\xi(g))+\frac{\mathbb{F}(g)}{\sqrt{\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2+1}}(\gamma_2\xi(g))\right\|_E^2\\ &\quad=\sum_{g\in G_n}\frac{\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2}{\mathbb{L}_H(g)^2+\mathbb{F}(g)^2+1}\left\|\xi(g)\right\|_E^2\\ &\quad\leqslant\|\xi\|^2_{\ell^2(G_n,E)}.\end{aligned}$$

因此，$\not{D}_nK$是有界的，范数至多为 1。因此，$(\not{D}_n\pm i)K$在 $\ell^2(G_n,E)$ 上也有界。因此，$(\not{D}\pm i)K^2$是紧的。由此可知，$\not{D}\pm i$二者均具有紧逆算子 $(\not{D}\mp i)K^2$。具体而言，对于我们的目的，若 $\xi\in\ell^2(G_n,E)$，则：

$$(\mathbb{D}_n+i)\left((\mathbb{D}_n-i)K^2\right)\xi=(\mathbb{D}_n^2+1)K^2\xi=\xi.$$

因此，$\not{D}_n+i$ 的值域为 $\ell^2(G_n,E)$。同理，$\not{D}_n-i$ 的值域也为 $\ell^2(G_n,E)$。由于 $\not{D}_n$ 也是定义在稠密定义域上的对称算子，根据 [53, 第 VIII 节2] 和 [45, 引理 248]，我们得出 $\not{D}_n$ 确为自伴算子，且具有紧预解式（因为 $\not{D}_n+i$ 的逆是紧算子 $(\not{D}_n-i)K^2$）。

现在我们来验证交换子谱三元组条件。注意，若 $g\in G_n$，则

$$\left|\left|\left|[\mathbb{D}_n,\lambda_E(g)]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)}\leqslant\mathbb{L}_H(g)+\mathbb{F}(g)=\mathbb{L}(g).$$

因此，若 $f \in$ 复数域$c(G_n)$，则算子 $[/D_n, \lambda_E(f)]$ 是有界的，而且事实上，

$$\left|\left|\left|[\not{D}_n, \lambda_E(f)]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)} \leqslant \sum_{g\in G_n} |f(g)|\mathbb{L}(g).$$

我们得出结论：对所有 $n \in \mathbb{N}$，$(C^* \text{red}(G^\infty, \sigma), \ell^2(G_\infty), /D)$ 是一个谱三元组。

现在我们将证明我们的谱三元组是度量的。令 $a \in$dom(L$_n$)，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。接着注意到，

$$(1 \otimes \gamma_1)[\not{D}_n, a^\circ] + [\not{D}_n, a^\circ](1 \otimes \gamma_1) = [M_{\mathbb{L}_H}, a] \otimes 2,$$

这意味着：

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|[M_{\mathbb{L}_H}, a]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n)} &\leqslant \frac{1}{2}\left|\left|\left|(1 \otimes \gamma_1)[\not{D}_n, a^\circ] + [\not{D}_n, a^\circ](1 \otimes \gamma_1)\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\left|\left|(1 \otimes \gamma_1)[\not{D}_n, a^\circ]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)} + \left|\left|\left|[\not{D}_n, a^\circ](1 \otimes \gamma_1)\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\left|\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)} + \left|\left|\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)}\right) \\
&= \left|\left|\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)}.
\end{aligned}$$

用 $1 \otimes \gamma_1$ 替换 $1 \otimes \gamma_2$，同样的推理可得

$$\left|\left|\left|[M_{\mathbb{F}}, a]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n)} \leqslant \left|\left|\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)}.$$

因此，对于所有 $a \in$dom(L$_n$)，我们得到：

$$\left|\left|\left|[M_{\mathbb{L}}, a]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n)} \leqslant \left|\left|\left|[M_{\mathbb{L}_F}, a]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n)} + \left|\left|\left|[M_{\mathbb{F}}, a]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n)} \leqslant 2\left|\left|\left|[\not{D}_n, a^\circ]\right|\right|\right|_{\ell^2(G_n,E)}.$$

特别是，如果(复数域 * red$(G^n, \sigma), \ell^2(G_n), /D_{\mathbb{L}})$是一个度量谱三元组，那么根据 [55, 引理 1.10], (复数域 * red$(G^n, \sigma), \ell^2(G_n), /D_n)$也如此。

最后，我们将证明我们的谱三元组实际上是偶的，其分次由$1_{\ell^2(G_n)} \otimes \gamma$ 给出，其中 $\gamma := \mathrm{i}\gamma_1\gamma_2$。根据构造，$\gamma^2$ 是恒等映射，且 $\gamma^* = \gamma$，因此 γ 是自伴酉元；所以$1_{\ell^2(G_n)} \otimes \gamma$也是自伴酉元，它将 $\ell^2(G_n,E)$分解为对应于 1 和 -1 的两个谱子空间，并且满足 λ_E与 $1 \otimes \gamma$对易，而 /D$_n(1 \otimes \gamma) = -(1 \otimes \gamma)$ /D$_n$。因此，$(C^* \text{red}(G^n, \sigma), \ell^2(G_n,E), /D_n)$ 是一个偶谱三元组。□

注记 4.8。沿用引理（4.7）中的记号，我们注意到，对于每个有限的 $n \in$自然数集，谱三元组（复数域 * red$(G^n), \ell^2(G_n,E), /D_n)$ 在某种意义下是奇谱三元组（复数域 * red$(G^n), \ell^2(G_n), M_{\mathbb{L}}$）的有界扰动，因为 $\mathbb{F}$ 在G_n上是有界的。当然，当$n = \infty$时，情况则大不相同。

注记 4.9。设 ρ 是G_∞的另一个 2-余循环，它与 σ等价，即存在函数$f: G_\infty \to \mathbb{T}$，使得下式成立：

$$\forall g, h \in G_\infty \quad \rho(g,h) = f(g)f(h)\overline{f(gh)}\sigma(g,h).$$

算子 Mf 因而是一个酉算子，它交织了 G$_\infty$ 的左正则 σ ρ 射影表示。因此，(AdMf)$^\circ$ 实现了一个从 λ_E(C *(G$_\infty, \rho$)) 到 λ_E(C*(G$_\infty, \sigma$)) 的 * 同构。此外，M$^\circ$f 与 /D$^\infty$ 对易。因此，谱三元组 (C*(G$_\infty, \sigma$), ℓ^2(G$_\infty$,E), /D$_\infty$) 和 (C *(G$_\infty, \rho$), ℓ^2(G$_\infty$,E), /D$_\infty$) 酉等价。特别地，只要其中一个是度量的，另一个也是度量的；此时，它们在谱邻近度下的距离为零。

4.3. 主要结果。本节开篇先作一些基本的识别，这些识别将在本文其余部分中反复使用。我们将采用前文各节引入的记号。固定 n ∈ N，C* red(G^n,σ) 这个 C*代数严格来说是算子 $\lambda_n(g)$ 的线性张成在算子范数下的闭包，其中这些算子定义在 $\ell^2(G_n)$ 上，定义为：$\lambda_n(g)\xi : h \in \ell^2(G_n) \mapsto \sigma(g, g^{-1}h)\xi(g^{-1}h)$。另一方面，由于 $G_n \subseteq G_\infty$，我们通过将 G_∞ 上的 λ 射影表示限制到 G_n，在 $\ell^2(G_\infty)$ 上得到 G_n 的另一个酉 σ-射影表示，从而得到由 $\{\lambda(h) : h \in G_n\}$ 生成的另一个 C*代数。若 $S \subseteq G_\infty$ 是 G_∞ 的任意非空子集，我们将空间 $\ell^2(S)$ 与

$$\{\xi \in \ell^2(G_\infty) : \forall g \in G_\infty \setminus S \quad \xi(g) = 0\}.$$

令 $Q_n \subseteq G_\infty$ 为 G_∞ 的一个子集，使得 G_n 在 G_∞ 中的每个右陪集都可唯一地表示为 $G_n k$，其中 $k \in Q_n$。当然，

$$\ell^2(G_\infty) = \overline{\bigoplus}_{k\in Q_n} \ell^2(G_n k),$$

其中 $\overline{\oplus}$ 表示希尔伯特直和，即直和的闭包。

现在，对于所有 $k \in G_\infty$ 以及 $\xi \in \ell^2(G_\infty)$，我们定义：

$$\rho(k)\xi : h \in \ell^2(G_\infty) \mapsto \sigma(hk, k^{-1})\xi(hk). \tag{4.4}$$

如此定义的 ρ 是 G_∞ 在 $\ell^2(G_\infty)$ 上的右正则 $\check{\sigma}$-射影表示，其中 $\check{\sigma} : g、h \in G_\infty \mapsto \sigma(h^{-1}, g^{-1})$ 确实是 G_∞ 的2-余循环。

备注 4.10。 如果2-余循环 σ 是归一化的，即对于所有 $g \in G_\infty$，$\sigma(g, g^{-1}) = 1$，则 $\check{\sigma} = \overline{\sigma}$；不过，我们在此处不需要使用归一化余循环。

由于 σ 是一个 2-余循环，因此对所有 $g、h、k \in G_\infty$ 和 $\xi \in \ell^2(G_\infty)$，我们得到：

$$\begin{aligned}
\lambda(g)\rho(k)\xi(h) &= \sigma(g, g^{-1}h)\rho(k)\xi(g^{-1}h) \\
&= \sigma(g, g^{-1}h)\sigma(g^{-1}hk, k^{-1})\xi(g^{-1}hk) \\
&= \sigma(\underbrace{g}_{=:x}, \underbrace{g^{-1}hk}_{=:y}, \underbrace{k^{-1}}_{=:z})\sigma(\underbrace{g^{-1}hk}_{=y}, \underbrace{k^{-1}}_{=z})\xi(g^{-1}hk) \\
&= \sigma(\underbrace{g}_{=x}, \underbrace{g^{-1}hk}_{=y})\sigma(\underbrace{hk}_{=xy}, \underbrace{k^{-1}}_{=z})\xi(g^{-1}hk) \\
&= \sigma(hk, k^{-1})(\lambda(g)\xi)(hk) \\
&= \rho(k)\lambda(g)\xi(h).
\end{aligned}$$

因此，对所有 $g、k \in G_\infty$，$\lambda(g)$ 与 $\rho(k)$ 交换。此外，显然 $\rho(k^{-1})$ 将 $\ell^2(G_n k)$ 映到 $\ell^2(G_n)$ 上。

现在定义酉算子 V，它从 $\ell^2(G_\infty) = \bigoplus_{k\in Q_n} \ell^2(G_n k)$ 映到 $\bigoplus_{k\in Q_n} \ell^2(G_n)$，其定义为对所有 $\xi = (\xi_k)_{k\in Q_n} \in \bigoplus_{k\in Q_n} \ell^2(G_n k)$：

$$V\xi = \left(\rho(k^{-1})\xi_k\right)_{k\in Q_n} \in \overline{\bigoplus}_{k\in Q_n} \ell^2(G_n).$$

根据构造，V 是酉算子，而且对任意 $g \in G_n$：

$$V\lambda(g)V^*(\xi_k)_{k\in Q_n} = (\lambda_n(g)\xi_k)_{k\in Q_n}.$$

因此，$\mathrm{Ad}V$ 是一个 $*$-同构，它从由 $\{\lambda(g) : g \in G_n\}$ 生成的 C*-子代数和 C*代数 $C^*\,\mathrm{red}(G^n,\sigma)$ 出发，对所有 $g \in G_n$，将 $\lambda(g)$ 映到 $\lambda_n(g)$。

从现在起，我们因此将 $C^*\,\mathrm{red}(G^n,\sigma)$ 视为由 $\{\lambda(g) : g \in G_n\}$ 在 $C^*\,\mathrm{red}(G^\infty,\sigma)$ 中生成的 C*代数，并且只在后者中进行讨论。我们还将 $\ell^2(G_n,E)$ 视为 $\{\xi \in \ell^2(G_\infty,E) : \forall g \in G_\infty \setminus G_n \quad \xi(g) = 0\}$。

为使整个图景完整，我们还将 /Dn 视为对 $\xi = \xi_n + \xi_n^{\perp}$ 定义的算子，其中 $\xi_n \in \ell^2(G_n,E)^2$ 和 $\xi_n^{\perp} \in \ell^2(G_n.E) = \bigoplus_{k\in Q_n\backslash G_n} \ell^2(G_n k,E)$，由 $/D_n \overline{\xi} = /D_n \xi_n \in \ell^2(G_n,E)$ 给出。接着我们注意到，如果 Pn 是从 $\ell^2(G_\infty)$ 到 $\ell^2(G_n)$ 的正交投影，那么对所有 $\xi \in \mathrm{dom}(/D_n)$ 以及所有 $g \in G_\infty$，都有：

$$\begin{aligned} P_n^\circ \not{D}_n \xi(g) &= \begin{cases} (\mathbb{L}_H(g)\otimes\gamma_1 + \mathbb{F}(g)\otimes\gamma_2)\xi(g) \text{ if } g \in G_n, \\ 0 \text{ otherwise,} \end{cases} \\ &= \not{D}_\infty P_n^\circ \xi(g). \end{aligned}$$

因此，我们证明了 $P_n^\circ \mathrm{dom}(/D_n) \subseteq \mathrm{dom}(/D_\infty)$，并且 $P_n^\circ /D_n = /D_\infty P_n^\circ$。此外，$P_n^\circ /D_\infty P_n^\circ = /D_n$，因此，对于所有 $a \in \mathrm{dom}(L_n)$，利用以下事实 $[P_n,a] = 0$,，我们计算得到下列表达式：

$$\begin{aligned} P_n^\circ [\not{D}_\infty, a^\circ] P_n^\circ &= P_n^\circ \not{D}_\infty a^\circ P_n^\circ - P_n^\circ a^\circ \not{D}_\infty P_n^\circ \\ &= P_n^\circ \not{D}_\infty P_n^\circ a^\circ - a^\circ P_n^\circ \not{D}_\infty P_n^\circ \\ &= \not{D}_n a^\circ - a^\circ \not{D}_n. \end{aligned}$$

因此，对于所有 $a \in \mathrm{dom}(L_\infty)$，有：

$$L_n(a) = |||[\not{D}_n, a^\circ]|||_{\ell^2(G_n,E)} = |||P_n^\circ [\not{D}_\infty, a^\circ] P_n^\circ|||_{\ell^2(G_\infty,E)} \leqslant L_\infty(a). \tag{4.5}$$

通过上述所有识别，我们由此得到一个自然的含单位元 $*$-态射，从 $C^* \mathrm{red}(G^n,\sigma)$ 到 $C^* \mathrm{red}(G^\infty,\sigma)$，它恰好成为自然包含，并且

$$\lambda(g)\ell^2(G_n k) \subseteq \ell^2(G_n k)$$

对每个 $g \in G_n$ 和 $k \in G_\infty$ 均成立。由线性性和连续性可知，若 $a \in C^* \mathrm{red}(G^n,\sigma)$，则对所有 $k \in G_\infty$，$a\ell^2(G_n k) \subseteq \ell^2(G_n k)$。我们还注意到，$[/D_\infty$，对所有 $k \in G_\infty$ 且 $a \in \mathrm{dom}(L_n)$，$a^\circ]\ell^2(G_n k,E) \subseteq \ell^2(G_n k,E)$。

在本节余下部分，我们将使用上述同一认定及其基本性质，恕不再另行说明。

本节的主要定理尤其涉及一个关于由我们的谱三元组诱导的某些量子紧致度量空间收敛性的强结果：具体而言，我们在*Lipschitz* 距离意义下获得了某种收敛性。

Lipschitz 距离 LipD已在 [37], 中推广至非交换度量几何，它定义在任意两个量子紧致度量空间（$\mathfrak{A}$，$L_\mathfrak{A}$）和（$\mathfrak{B}$，$L_\mathfrak{B}$）之间，定义如下：

$$\mathrm{LipD}((\mathfrak{A},L_\mathfrak{A}),(\mathfrak{B},L_\mathfrak{B})) := \inf\left\{\ln(k) : \exists \pi : (\mathfrak{A},L_\mathfrak{A}) \to (\mathfrak{B},L_\mathfrak{B}) \text{ Lipschitz } * \text{同构，且 } \frac{1}{k} L_\mathfrak{A} \leqslant L_\mathfrak{B} \circ \pi \leqslant k L_\mathfrak{A}\right\},$$

约定 $\inf\emptyset = \infty$。因此，LipD 仅在建立于同构 C*代数之上的量子紧致度量空间之间取有限值。正如 [37], 所示，Lipschitz 距离支配 Gromov-Hausdorff 推进距离；事实上，Lipschitz 距离的闭球在推进距离中是紧的。

特别地，若 $\mathfrak{A}$ 是含幺 C*代数，且 L_1 和 L_2 是定义域相同的 $\mathfrak{A}$ 上的两个 Lipschitz 半范数，那么恒等映射是双 Lipschitz 的，并且根据定义，我们得到：

$$\mathrm{LipD}((\mathfrak{A},L_1),(\mathfrak{A},L_2)) \leqslant \ln(C) \text{ if } \frac{1}{C} L_1 \leqslant L_2 \leqslant C L_1.$$

现在我们证明关于离散群的归纳极限，以及这些离散群的谱三元组在谱邻近度下收敛的主要结果。请注意，下文使用的记号已在定义（4.6）中确立。

定理 4.11. 采用第 *4.2* 小节中的记号和假设，若

$$(C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma),\ell^2(G_n,E),\not{D}_n)$$

对所有 n ∈自然数集，它都是一个度量 谱三元组；并且如果

$$\{a\in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_n):\mathsf{L}_n(a)\leqslant 1\}=\mathrm{cl}\,(\{a\in C_c(G_n):\mathsf{L}_n(a)\leqslant 1\}),$$

then

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathsf{spec}}\left((C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma),\ell^2(G_n,E),\not{D}_n),(C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma),\ell^2(G_\infty,E),\not{D}_\infty)\right)=0.$$

此外，对于任意固定的 k ∈自然数集，序列 (复数域 $^*\mathrm{red}(G_k,\ \sigma)$，$\mathsf{L}n)_{n\geqslant k}$在 *Lipschitz* 距离 LipD 下收敛到量子紧致度量空间 (复数域 $^*\mathrm{red}(G_k,\ \sigma)$，$\mathsf{L}_\infty$)。

证明。 我们将验证，复数域 $^*\mathrm{red}(G^\infty,\ \sigma)$ 上的恒等自同构满足定理（3.17）的假设。

显然，恒等映射是（复数域 $^*\mathrm{red}(G^\infty,\sigma)$,$\mathsf{L}_\infty$) 的完全量子等距。

令 C = 2qdiam(C*(G∞,σ),L∞) — 注意，由于 $\mathsf{G}_\infty\neq\{1\}$，我们有 C > 0。令 tr : a ∈C * red(G∞,σ) ↦ 〈aδ1,δ1〉 ℓ2(G∞); tr 是 C *(G∞,σ) 上的迹态，它将 a ∈Cc(G∞) 映为 a(1)。

固定 $\varepsilon\in\left(0,\ \mathsf{C}_2\right)$。由于根据假设，(C* red(G∞,σ),L∞) 是量子紧致度量空间，因此集合 X∞ := {a ∈ dom(L∞) : L∞(a) ⩽ 1,tr(a) = 0} 是紧的。因此，存在一个有限的 ε-稠密子集 $\mathsf{X}^{\varepsilon}_{\infty}\subseteq\mathsf{X}_\infty$。由于 X∞ = cl({a ∈Cc(G∞) : L∞(a) ⩽ 1,tr(a) = 0})，我们还可以进一步假设 $\mathsf{X}^{\varepsilon}_{\infty}\subseteq C_c(\mathsf{G}_\infty)$。

由于 $\mathsf{X}^{\varepsilon}_{\infty}$ 是有限的，且其中每个元素都有有限支撑，因此存在一个有限子集 S ⊆G∞，它包含 $\mathsf{X}^{\varepsilon}_{\infty}$中所有元素的支撑。由于 $\mathsf{G}_\infty=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathsf{G}_n$ 且 $(\mathsf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增的，因此存在 $\mathsf{N}_1\in\mathbb{N}$，使得对所有 n ⩾N1,，都有 S ⊆Gn。因此 $\mathsf{X}^{\varepsilon}_{\infty}\subseteq C_c(\mathsf{G}_n)$。此外，由表达式 (4.5)，我们还得到对所有 a ∈$\mathsf{X}^{\varepsilon}_{\infty}$，Ln(a) ⩽L∞(a)。

总之，

$$\forall a\in X_\infty\quad \exists b\in X^{\varepsilon}_{\infty}\subseteq\text{复数域}C_c(G_n)\subseteq\text{复数域}\ ^*\mathrm{red}(G^n,\sigma):\|a-b\|_{C^*\mathrm{red}(G\ \ \infty,\sigma)}<\varepsilon\ \text{且}\ \mathsf{L}_n(a)\leqslant\mathsf{L}_\infty(a)\leqslant 1。$$

若 a ∈属于 dom(L∞)，则存在 b ∈属于 $\mathsf{X}^{\varepsilon}_{\infty}$，使得 ‖a −tr(a) −b‖$_{C^*}$red(G ∞,σ) < ε。当然，b +tr(a) ∈属于复数域 *red(Gn,σ)，且 Ln(b +tr(a)) =Ln(b) ⩽ 1。由齐性可知，对于所有 a ∈属于 dom(L∞)，以及所有 n ⩾属于自然数集1,，存在 b ∈属于 dom(Ln)，使得 ‖a −b‖$_{C^*}$ red(G ∞,σ) <εL∞(a)，且 Ln(b) ⩽L∞(a)。

现在，根据我们对方程（4.2）的假设，存在 $N_2\in\mathbb{N}$，且 $N_2\geqslant N_1$, 使得

$$\mathsf{Haus}[\mathbb{L}_H]\,(G_\infty,G_n)<\frac{\varepsilon}{C^2}.$$

对于 Gn 在 G∞ 中的每个右陪集 c，令 k ∈c。由于从 k ∈G∞ 到 Gn 的 L_H 距离严格小于 εC2，因此存在 g ∈Gn，使得 $\mathsf{L}_H(\mathsf{g}^{-1}\mathsf{k})<{}^{\varepsilon}\mathsf{C}^2$。令 $\mathsf{k}_c=\mathsf{g}^{-1}\mathsf{k}$，根据右陪集的定义，我们有 c = Gnkc。因此，存在 G∞ 的一个子集 $\mathsf{Q}_n\subseteq\mathsf{G}_\infty$，使得若 k ∈Qn，则 $\mathsf{L}_H(\mathsf{k})<{}^{\varepsilon}\mathsf{C}^2$；并且若 c 是 Gn 在 G∞ 中的一个右陪集，则存在唯一的 $\mathsf{k}\in\mathsf{Q}_n$，使得 c = Gnk。

令 $n\geqslant N_2$，并令 $b\in C_c(G_n)\subseteq C^*\mathrm{red}(G^n,\sigma)$，其中 $b(1)=\mathrm{tr}(b)=0$。注意，$b\in\mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)\cap\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，因此特别地，$\mathsf{L}_n(b)$ 和 $\mathsf{L}_\infty(b)$ 都是 有限。

因此我们有 $\ell^2(\mathsf{G}_\infty)=\oplus_{\overline{k\in Q_n}}\ell^2(G_nk)$，其中 ⊕ 是希尔伯特直和（各项之和的闭包）。若 $h\in G_n$，那么根据右陪集的定义，$\lambda(h)\ell^2(G_nk)\subseteq\ell^2(G_nk)$，对所有$k\in Q_n$均成立。由于对所有$k\in Q_n$，$/D_\infty(\mathrm{dom}(/D_n))\subseteq\ell^2(G_nk,E)$也成立，我们得出

$[/D_\infty, b^\circ]\left(\ell^2(G_n k, E)\right) \subseteq \ell^2(G_n k, E)$——也就是说，$b, /D_\infty$ 及其交换子在 $\ell^2(G_\infty)$ 的这一分解中都是块对角的。由此可得

$$\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_\infty, b^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_\infty, E)} = \sup_{k \in Q_n} \left|\!\left|\!\left|[\not{D}_n, b^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n k, E)}, \tag{4.6}$$

允许上述任一范数为无穷大。

现在，对 $/D_\infty$ 在 $\mathrm{dom}(/D_n)$ 上的限制恰好是 $/D_n$，因此：

$$\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_\infty, b^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n, E)} = \left|\!\left|\!\left|[\not{D}_n, b^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n, E)} = \mathsf{L}_n(b).$$

现在，固定 $\mathrm{k} \in \mathrm{Q}_n$ 和 $\mathrm{k} \notin \mathrm{G}_n$。根据假设，并反复利用 $(\mathrm{G}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ 是递增的这一事实，我们注意到，对于所有 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}_n$，均有 $\mathrm{F}(\mathrm{g}\,\mathrm{k}) = \mathrm{F}(\mathrm{k})$：引理 (4.3) 表明 $\mathrm{F}(\mathrm{g}\,\mathrm{k}) \leqslant \mathrm{F}(\mathrm{k})$，因为 $\mathrm{F}(\mathrm{g}) \leqslant \mathrm{n} < \mathrm{F}(\mathrm{k})$；另一方面，若 $\mathrm{p} \in \{0, \ldots, \mathrm{m}-1\}$，其中 $\mathrm{F}(\mathrm{k}) = \mathrm{scale}(\mathrm{m})$，注意到 $\mathrm{m} > 0$，因为 $\mathrm{k} \notin \mathrm{G}_0,$，那么 $\mathrm{g}\,\mathrm{k} \in \mathrm{G}_p$ 意味着 $\mathrm{k} = \mathrm{g}^{-1}\mathrm{g}\,\mathrm{k} \in \mathrm{G}_n$，这是矛盾；因此 $\mathrm{F}(\mathrm{kg}) = \mathrm{scale}(\mathrm{m})$，证毕。

因此，算子 $M_{\mathbb{F}}$ 在 $\ell^2(G_n k)$ 上为常数，故 $[M_{\mathbb{F}}, b] = 0$ 在 $\ell^2(G_n k)$ 上。因此，

$$\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_\infty, b^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n k, E)} = \left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, b]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n k)}.$$

我们将使用 G_∞ 在 $\ell^2(\mathrm{G}_\infty)$ 上的 $\check{\sigma}$-射影右表示，其定义见表达式 (4.4)。根据构造，$\rho(\mathrm{k})$ 在 $\ell^2(\mathrm{G}_n)$ 上的限制（仍记为 $\rho(\mathrm{k})$）是到 $\ell^2(\mathrm{G}_n \mathrm{k})$ 上的酉算子（其逆为其伴随算子 $\rho(\mathrm{k})^* = \rho(\mathrm{k}^{-1})$ 在 $\ell^2(\mathrm{G}_n \mathrm{k})$ 上的限制）。因此，

$$\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, b]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n k)} = \left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, b]\rho(k)\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)}. \tag{4.7}$$

接下来，简单计算可知（与 λ 的情形类似），酉算子 $\rho(k)$ 将 $\mathrm{dom}\left(M_{\mathbb{L}_H}\right)$ 映到其自身，并且对于所有 $\xi \in \ell^2(G_\infty)$ 以及 $h \in G_\infty$：

$$[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)]\xi(h) = (\mathbb{L}_H(h) - \mathbb{L}_H(hk))\sigma(hk, k^{-1})\xi(hk)$$

因此 $\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)]\xi\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)} \leqslant \sup_{h \in G_n} |\mathbb{L}_H(h) - \mathbb{L}_H(hk)| \, \|\xi\|_{\ell^2(G_n)} \leqslant \mathbb{L}_H(k) \|\xi\|_{\ell^2(G_n)}$。选取 $\xi = \delta_1$，我们得到

$$\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)} = \mathbb{L}_H(k). \tag{4.8}$$

现在，由于对所有 $g \in G_\infty$，$\rho(k)$ 与 $\lambda(g)$ 可交换，我们得出 $[b, \rho(k)] = 0$，因此，在 $\mathrm{dom}\left(M_{\mathbb{L}_H}\right)$ 上

$$\begin{aligned}
[M_{\mathbb{L}_H}, b]\rho(k) &= M_{\mathbb{L}_H} b \rho(k) - b M_{\mathbb{L}_H} \rho(k) \\
&= M_{\mathbb{L}_H} \underbrace{\rho(k) b}_{[b, \rho(k)] = 0} - b \rho(k) M_{\mathbb{L}_H} - b[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)] \\
&= [M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)] b + \rho(k) M_{\mathbb{L}_H} b - \underbrace{\rho(k) b}_{[\rho(k), b] = 0} M_{\mathbb{L}_H} - b[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)] \\
&= [M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)] b + \rho(k)[M_{\mathbb{L}_H}, b] - b[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)].
\end{aligned} \tag{4.9}$$

因此，根据方程（4.7），

$$
\begin{aligned}
&\left|\!\left|\!\left|[\not{D}_\infty, b^\circ]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n k,E)} \\
&= \left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, b]\rho(k)\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)} \\
&\leqslant \underbrace{\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)]b\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)} + \left|\!\left|\!\left|\rho(k)[M_{\mathbb{L}_H}, b]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)} + \left|\!\left|\!\left|b[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)}}_{\text{by Eq. (4.9)}} \\
&\leqslant \underbrace{\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)}}_{\leqslant \mathbb{L}_H(k) \text{ by Eq. (4.8)}} \|b\|_{C^*(G_n,\sigma)} + \underbrace{\left|\!\left|\!\left|\rho(k)\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)}}_{=1 \text{ as } \rho(k) \text{ is unitary}} \underbrace{\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, b]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}}_{\leqslant \mathsf{L}_n(b) \text{ by Lemma (4.7)}} \\
&\quad + \|b\|_{C^*(G_n,\sigma)} \underbrace{\left|\!\left|\!\left|[M_{\mathbb{L}_H}, \rho(k)]\right|\!\right|\!\right|_{\ell^2(G_n)}^{\ell^2(G_n k)}}_{\leqslant \mathbb{L}_H(k) \text{ by Eq. (4.8)}} \\
&\leqslant \mathbb{L}_H(k) \underbrace{\|b\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma)}}_{\leqslant \frac{C}{2}\mathsf{L}_\infty(b)} + \mathsf{L}_n(b) + \|b\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma)} \mathbb{L}_H(k) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{C^2}\frac{C}{2}\mathsf{L}_\infty(b) + \mathsf{L}_n(b) + \frac{C}{2}\mathsf{L}_\infty(b)\frac{\varepsilon}{C^2} \\
&\leqslant \mathsf{L}_n(b) + \frac{\varepsilon}{C}\mathsf{L}_\infty(b).
\end{aligned}
$$

由表达式（4.6），因此可得

$$\mathsf{L}_\infty(b) \leqslant \mathsf{L}_n(b) + \frac{\varepsilon}{C}\mathsf{L}_\infty(b).$$

因此，我们证明了，由于 $\varepsilon \in \left(0, \text{复数域}_2\right)$，

$$\forall b \in C_c(G_n) \quad \mathrm{tr}(b) = 0 \Longrightarrow \mathsf{L}_\infty(b) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}}\mathsf{L}_n(b). \tag{4.10}$$

现在，设 $b \in$ 复数域$_c(G_n)$。于是我们很容易计算得到：

$$\mathsf{L}_\infty(b) = \mathsf{L}_\infty(b - \mathrm{tr}(b)1) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}}\mathsf{L}_n(b - \mathrm{tr}(b)1) = \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}}\mathsf{L}_n(b).$$

现在，设 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，且 $\mathsf{L}_n(a) \leqslant 1$。根据假设，存在一个序列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其在 $C^*_{\mathrm{red}}(G^n,\sigma)$ 中收敛于 a，并满足 $\mathsf{L}_n(a_k) \leqslant 1$，且对所有 $k \in$ 自然数集，$a_k \in C_c(G_n)$。因此，由 L_n 的下半连续性以及表达式（4.10），我们有：

$$\mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathsf{L}_\infty(a_k) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}} \liminf_{k\to\infty} \mathsf{L}_n(a_k) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}}.$$

因此，我们证明了，对于所有 $n \geqslant$ 自然数集，若 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，则 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$，此外，

$$\forall a \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_n) \quad \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}}\mathsf{L}_n(a).$$

根据构造可立即得到，$\mathsf{L}_n \leqslant \mathsf{L}_\infty$ 在 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$ 上。因此我们证明了，对于所有 $n \geqslant$ 自然数集 以及 $k \geqslant n$，都有 $\mathsf{L}_k \leqslant \mathsf{L}_\infty \leqslant {}_{1-\varepsilon\,\text{复数域}}\frac{1}{}\mathsf{L}_k(a)$。由此还可得，我们证明了 $\lim_{k\to\infty} \mathsf{LipD}((\text{复数域}\ ^*(G_n,\sigma),\mathsf{L}_k),(\text{复数域}\ ^*(G_n,\sigma),\mathsf{L}_\infty)) = 0$。

现在我们暂停一下，指出：多亏了在此定理之前讨论过的那些识别，以及我们刚刚证明的 $\mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) \subseteq \mathrm{dom}(\mathsf{L}_\infty)$ 这一观察，$(C^*\mathrm{red}(G^n,\sigma), \ell^2(G_n) \otimes \mathbb{E}, \not{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 按照 [20]，的意义构成一个谱三元组的归纳序列，其中从 $C^*\mathrm{red}(G^n,\sigma)$ 到 $C^*\mathrm{red}(G_{n+1},\sigma)$ 的 $*$-态射以及线性等距映射

从 $\ell^2(G_n)$ 到 $\ell^2(G_{n+1})$ 的映射恰好是包含映射。此外，(复数域 * red$(G^\infty,\sigma),\ell^2(G_\infty,E),/D_\infty)$ 确实是该系统的归纳极限。

现在注意到，由于$\mathsf{L}_\infty \leqslant \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\text{复数域}\right)\underline{\mathsf{L}_n}$且 $\varepsilon \in \left(0,\ \text{复数域}_{\underline{2}}\right)$，我们有

$$\operatorname{qdiam}\left(C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma),\mathsf{L}_n\right) \leqslant \left(\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}}\right)\operatorname{qdiam}\left(C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma),\mathsf{L}_\infty\right) = \frac{C^2}{2(C-\varepsilon)} \leqslant C.$$

设$b \in$属于L_n的定义域，并设$a = \left(1-\varepsilon_{\text{复数域}}\right)b \in$属于$\mathsf{L}_\infty$的定义域。于是我们计算：

$$\begin{aligned}
\|b-a\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma)} &= \left\|b-\left(1-\frac{\varepsilon}{C}\right)b\right\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{C}\|b\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{C}\operatorname{qdiam}\left(C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma),\mathsf{L}_n\right)\mathsf{L}_n(b) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{C}C\,\mathsf{L}_n(b) = \varepsilon\,\mathsf{L}_n(b),
\end{aligned}$$

而

$$\mathsf{L}_\infty(a) = \mathsf{L}_\infty\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{C}\right)b\right) \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{C}}\mathsf{L}_n\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{C}\right)b\right) = \mathsf{L}_n(b).$$

因此，若$n \geqslant$属于自然数集$_2$，，则：

- $\forall a \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_\infty)\quad \exists b \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_n):\quad \mathsf{L}_n(b) \leqslant \mathsf{L}_\infty(a)$ and $\|b-a\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma)} < \varepsilon\,\mathsf{L}_\infty(a)$,
- $\forall b \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_n)\quad \exists a \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_\infty):\quad \mathsf{L}_\infty(a) \leqslant \mathsf{L}_n(b)$ and $\|a-b\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma)} < \varepsilon\,\mathsf{L}_n(b)$.

因此，由定理（3.17），我们得出

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathsf{spec}}((C^*_{\mathrm{red}}(G_n,\sigma),\ell^2(G_n,E),\not{D}_n),(C^*_{\mathrm{red}}(G_\infty,\sigma),\ell^2(G_\infty,E),\not{D}_\infty)) = 0,$$

如所述。 □

现在，我们希望将定理（4.11）应用于例（4.1）中的族，以及 Bunce-Deddens 代数。因此，我们现在将重点讨论阿贝尔群。

因此，从现在起我们假设G_∞是阿贝尔群。于是，对于群G_n（$n \in \mathbb{N}$），我们将采用加法记号。由于阿贝尔群是可 amenable 的，从现在起，对于所有$n \in \mathbb{N}$，我们也将C^*red（G^n，σ）与C^*（G_n，σ）等同起来。

在处理阿贝尔群时，定理（4.11）的一项关键条件总是成立，以下引理便说明了这一点。

引理4.12。 在小节（*4.2*）的假设和记号下，对任意 $n \in \mathbb{N}$，若 G_n是阿贝尔群，则有

$$\{a \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\} = \operatorname{cl}\left(\{a \in C_c(G_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\}\right).$$

证明。 固定$n \in \mathbb{N}$。由于L_n是下半连续的，我们得到

$$\operatorname{cl}\left(\{a \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_n) \cap C_c(G_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\}\right) \subseteq \{a \in \operatorname{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\}.$$

现在我们证明，当G_n是阿贝尔群时，反向包含关系也成立。

设 $\widehat{G_n}$ 是G_n 的庞特里亚金对偶（我们将对 $\widehat{G_n}$ 使用乘法记号）。 β G_n 在 $C^*(G_n,\sigma)$上的对偶作用由下述方式定义的酉算子实现：对每个 $z \in \widehat{G_n}$，定义 $v^z \in \ell^2(G_n,E)$，使得对所有 $\xi \in \ell^2(G_n) \otimes \mathrm{E}$</style}:

$$v^z\xi : g \in G_n \longmapsto \overline{z(g)}\xi(g)(= z(-g)\xi(g)).$$

容易验证，$z \in \widehat{G_n} \mapsto v^z$ 是 $\widehat{G_n}$ 的酉表示。接下来我们注意到：

$$\forall z \in \widehat{G_n} \quad v^z \lambda_E(g)(v^z)^* = \beta^z \lambda_E(g).$$

由构造可知，$/D_n$ 与所有$z \in \widehat{G_n}$对应的v^z 都交换，因此 β 在 $(C^*(G_n,\sigma),\mathsf{L}_n)$ 上作用为完全量子等距。

令G_n上的 Haar 概率测度。如 [32, 引理 3.1],[57, 定理 8.2], 所示，存在一个由 G_n上的非负函数构成的序列 $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中每个函数都是 $\widehat{\mathsf{G}_n}$的特征的线性组合（即根据 Pontryagin 对偶，具有 $\mathsf{z} \in \widehat{\mathsf{G}_n} \mapsto \mathsf{z}(\mathsf{g}) \in \mathbb{T}$ 的形式，其中 $\mathsf{g} \in \mathsf{G}_n$），使得 $\int_{\widehat{\mathsf{G}_n}} \varphi_k \mathrm{d}\mu = 1$ 对所有 $\mathsf{k} \in$ 自然数集都成立，并且 $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在分布意义下收敛到 $1 \in \widehat{\mathsf{G}_n}$处的 Dirac 测度；也就是说，对所有 $\mathsf{f} \in \mathsf{C}(\widehat{\mathsf{G}_n})$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\widehat{G_n}} f(z)\,\varphi_k(z)\,d\mu(z) = f(1).$$

我们对每个 $k \in$自然数集 定义连续线性自同态：

$$\beta^{\varphi_k} : a \in C^*(G_n,\sigma) \mapsto \int_{\widehat{G_n}} \beta^z(a)\,\varphi_k(z)\,d\mu(z),$$

作用于 复数域$^*(G_n,\sigma)$。由于对偶作用是强连续的，我们得出，对所有 $a \in$ 复数域$^*(G_n,\sigma)$:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \beta^{\varphi_k}(a) - a \right\|_{C^*(G_n)} = 0.$$

由于 L_n 是下半连续的，$\varphi_k \geqslant 0$且 $\int_{\widehat{G_\infty}} \varphi_k\, d\mu = 1$ 对所有 $k \in$ 自然数集 都成立，并且 β 通过量子等距作用，因此对所有 $a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$，我们也有

$$\mathsf{L}_n\left(\beta^{\varphi_k}(a)\right) \leqslant \int_{\widehat{G_n}} \varphi(z)\mathsf{L}_n(a)\,d\mu(z) = \mathsf{L}_n(a).$$

稍作岔开，下半连续性还意味着 $\mathsf{L}_n(a) \leqslant \mathrm{liminf}_{k\to\infty}\mathsf{L}_n(\beta^{\varphi_k}(a))$，因此综上，我们已证明 $\mathsf{L}_n(a) = \mathrm{liminf}_{k\to\infty}\mathsf{L}_n(\beta^{\varphi_k}(a))$。

对每个 $\mathsf{k} \in$自然数集，由于 φ_k 是 $\widehat{\mathsf{G}_n}$ 的特征的线性组合，存在有限子集 $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{G}_n$ 以及函数 $\mathsf{t} : \mathsf{F} \to$ 复数域，使得 $\varphi_k : \mathsf{z} \in \widehat{\mathsf{G}_n} \mapsto \sum_{\mathsf{g}\in\mathsf{F}} \mathsf{t}(\mathsf{g})\mathsf{z}(\mathsf{g})$；于是，$\beta^{\varphi_k}$ 的值域是复数域$_c(\mathsf{G}_n)$ 中由支撑在 F 上的函数构成的有限维子空间。就我们的目的而言，这里主要的观察是：给定 $\mathsf{a} \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n)$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathsf{K} \in$ 自然数集，使得当 $\mathsf{k} \geqslant \mathsf{K}$ 时，$\left\|\mathsf{a} - \beta^{\varphi_k}(\mathsf{a})\right\|_{C^*(\mathsf{G}_n,\sigma)} < \varepsilon$，且 $\mathsf{L}_n(\beta^{\varphi_k}(\mathsf{a})) \leqslant \mathsf{L}_n(\mathsf{a})$。特别地，同样由于 L_n 是下半连续的，可得：

$$\{a \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_{\mathbb{D}}) : \mathsf{L}_{\mathbb{D}}(a) \leqslant 1\} = \mathrm{cl}\,(\{a \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_{\mathbb{D}}) \cap C_c(G_n) : \mathsf{L}_{\mathbb{D}}(a) \leqslant 1\}), \tag{4.11}$$

正如所述。 □

注记 4.13。沿用引理（4.12）证明中的记号，固定 $\varphi \in \mathscr{S}$(复数域$^*(G_n,\sigma)$). 由于对所有 $k \in$ 自然数集，都有 $\int_{\widehat{G_n}} \varphi^k\, d\mu = 1$，因此我们得出 β^{φ_k}是一个含单位元映射，故

$$\sup\left\{\left\|a - \beta^{\varphi_k}(a)\right\|_{C^*(G_n)} : a \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_n), \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\right\}$$
$$= \sup\left\{\left\|a - \beta^{\varphi_k}(a)\right\|_{C^*(G_n)} : a \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_n), \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1, \mu(a) = 0\right\}$$

其中第二个上确界确实有限，因为$X = \{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1, \mu(a) = 0\}$是紧集，而我们是在该集合上对连续函数取上确界。事实上，可以在此应用阿尔泽拉-阿斯科利定理来证明$(\beta^{\varphi_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 到

到X上的恒等映射是一致的，不过这里我们给出一个简单的 $\frac{\varepsilon}{3}$型论证。首先注意，对所有$a,b \in$ 复数域$^*(G_\infty)$以及所有$k \in$ 自然数集，

$$\left\|\beta^{\varphi_k}(a)-\beta^{\varphi_k}(b)\right\|_{C^*(G_\infty)} \leqslant \int_{\widehat{G_\infty}} \|a-b\|_{C^*(G_\infty)}\, \varphi^k(z)\, d\mu(z) = \|a-b\|_{C^*(G_\infty)}.$$

此外，对于所有 $\varepsilon>0$，都存在一个有限的 $\frac{\varepsilon}{3}$-稠密子集 X_ε，它属于 X；由于 X_ε 是有限的，因此存在 $K \in$ 自然数集，使得对于所有 $k \geqslant K$以及所有 $a \in X_\varepsilon$，都有 $\left\|a-\beta^{\varphi_k}(a)\right\|_{C^*(G_\infty)} < \frac{\varepsilon}{3}$，如上所见；因此对于所有 $k \geqslant K$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|a-\beta^{\varphi_k}(a)\right\|_{C^*(G_\infty)} &\leqslant \left\|a-a'\right\|_{C^*(G_\infty)} + \left\|a'-\beta^{\varphi_k}(a')\right\|_{C^*(G_\infty)} + \left\|\beta^{\varphi_k}(a'-a)\right\|_{C^*(G_\infty)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这证明了，$(\beta^{\varphi_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 确实在 X上一致收敛到恒等映射。

我们将通过援引一项在文献 [9, 50], 中称为 有界倍增的核心性质，证明第（4.2）小节中引入的一些谱三元组是度量的。现在我们回顾 [50]中的表述。

定义 4.14 ([9, 50])。 离散群G 上的适当长度函数$\mathbb{L}$ 满足有界倍增性质，当且仅当存在 $\theta>1$ 和$c>0$，使得对所有$r \geqslant 1$:

$$\left|\{g \in G : \mathbb{L}(g) \leqslant \theta \cdot r\}\right| \leqslant c\left|\{g \in G : \mathbb{L}(g) \leqslant r\}\right|.$$

有界倍增性质确实保证了以下结果。

引理4.15。 如果适当长度函数 $\mathbb{L} := \max\{\mathbb{L}_H, \mathbb{F}\}$ 具有有界倍增性质，那么第（4.2）小节中构造的谱三元组是度量的。

证明。 注意，引理（4.3）证明了$\mathbb{L}$ 是真无界长度函数。

由 [9, 50], 由于我们的群都是阿贝尔群，因而是幂零群，对于任意 $\mu \in \mathcal{S}$(复数域*(群$_n$),σ)，集合

$$\left\{a \in C_c(G_n) : |||[M_{\mathbb{L}}, a]|||_{\ell^2(G_n)} \leqslant 1, \mu(a)=0\right\}$$

是全有界的。由于 $|||[M_{\mathbb{L}},\cdot]|||_{\ell^2(\text{群}_n)} \leqslant \mathsf{L}_n$ 在复数域$_c$(群$_n$)上，因此我们得出结论:

$$\left\{a \in C_c(G_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1, \mu(a)=0\right\} \subseteq \left\{a \in C_c(G_n) : |||[M_{\mathbb{L}}, a]|||_{\ell^2(G_n)} \leqslant 1, \mu(a)=0\right\}$$

因此 $\{$一个 $\in$ 复数域$_c(G_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1,\ \mu(a)=0\}$ 也是全有界的。根据引理（4.12），我们还有:

$$\{a \in \mathrm{dom}\,(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1, \mu(a)=0\} = \mathrm{cl}\left(\left\{a \in C_c(G_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1, \mu(a)=0\right\}\right)$$

因此 $\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1, \mu(a)=0\}$ 是紧的。因此，根据定理（2.9），L_n 是一个 Lipschitz 半范数，也就是说，我们的谱三元组是度量的。□

我们现在可以证明以下定理了。

定理 4.16. 设 $G = \bigcup_{n\in\text{自然数集}} G_n$ 是一个阿贝尔离散群，由 G 的一个严格递增子群序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的并构成。设 σ 为 G 的一个2-余循环，且$\mathbb{L}_H$是 G 上的长度函数，满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}[\mathbb{L}_H](G_n, G) = 0,$$

并且对所有 $n \in$自然数集，其在 G_n 上的限制都是适当的。假设尺度函数 : 自然数集 $\to [0,\infty)$ 是一个严格递增且无界的函数，使得若我们设

$$\mathbb{F} : g \in G \longmapsto \mathrm{scale}(\min\{n \in \mathbb{N} : g \in G_n\})$$

则适当长度函数$\mathbb{L} := \max\{\mathbb{L}_H, \mathbb{F}\}$具有有界倍增性质。

那么，对于任意厄米空间E，

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathsf{spec}}((C^*(G,\sigma), \ell^2(G)\otimes E, \not{D}), (C^*(G_n,\sigma), \ell^2(G_n)\otimes E, \not{D}_n)) = 0,$$

其中

- $\not{D} = M_{\mathbb{L}_H}\otimes\gamma_1 + M_{\mathbb{F}}\otimes\gamma_2$ *on* $\left\{\xi \in \ell^2(G)\otimes E : \sum_{g\in G}(\mathbb{L}_H(g)^2 + \mathbb{F}(g)^2)\left\|\xi(g)\right\|_E^2 < \infty\right\}$, *with* γ_1, γ_2 *unitaries of* E *such that, for all* $j,k \in \{1,2\}$*:*

$$\gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = \begin{cases} 2 \text{ if } j = k, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

- $\ell^2(Gn)\otimes E$ 与 $\ell^2(G)\otimes E$ 中由 Gn 支撑的向量所构成的子空间等同，
- $\not{D}n$ 是 $\not{D}$ 在 $\mathrm{dom}(\not{D}) \cap \left(\ell^2(Gn)\otimes E\right)$ 上的限制，
- $C^*(G,\sigma)$ 和 $C^*(Gn,\sigma)$ 通过其左正则 σ-射影表示作用。

证明。我们的定理由定理（4.11）推出。首先注意，引理（4.15）证明了我们的所有谱三元组都是度量的。根据引理（4.12），由于G_∞是阿贝尔的，我们得出，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$\{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\} = \mathrm{cl}(\{a \in C_c(G_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\}).$$

由于定理 (4.11) 的所有假设均已满足，结论得证。 □

特别地，对于例 (4.1) 中的非交换 solenoid，我们得到如下结果。

推论 4.17。取素数 $p \in$ 自然数集，并取 $d \in$ 自然数集$\setminus\{0,1\}$。对于每个 $n \in$ 自然数集，令

$$G_n := \left(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}\right)^d$$

and

$$G_\infty := \left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)^d.$$

取 G_∞ 上的一个 2-余循环 σ，使得对于任意 $\forall g \in G_\infty$ $\sigma(g,-g) = 1$。

令 $\mathbb{L}_H$ 为某个 实数集[2]上的范数在 G_∞ 上的限制。定义 $\mathbb{F}$ 如下：对于所有 $g \in G_\infty$:

$$\mathbb{F}(g) := \min\left\{p^n : g \in \left(\frac{1}{p^n}\right)^d\right\}.$$

设 E 是一个偶数维厄米空间，且 γ_1, γ_2 是 E 上的两个酉算子，使得对于所有 $j,k \in \{1,2\}$:

$$\gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = \begin{cases} 2 \text{ if } j = k, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

若我们对所有 $n \in$ 自然数集 定义算子

$$\not{D}_n := M_{\mathbb{L}_H}\otimes\gamma_1 + M_{\mathbb{F}}\otimes\gamma_2 \text{ on } \mathrm{dom}(\not{D}_n)$$

在定义域上

$$\mathrm{dom}(\not{D}_n) := \left\{\xi \in \ell^2(G_n, E) : \sum_{g\in G_n}(\mathbb{L}_H(g)^2 + \mathbb{F}(g)^2)\left\|\xi(g)\right\|_E^2 < \infty\right\},$$

于是，对于所有 $n \in$ 自然数集，三元组 $(C^*(Gn, \sigma), \ell^2(Gn, E), \not{D}n)$ 是一个度量谱三元组，并且：

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^{\mathsf{spec}}((C^*(G_n,\sigma), \ell^2(G_n,E), \not{D}_n), (C^*(G_\infty,\sigma), \ell^2(G_\infty,E), \not{D}_\infty)) = 0.$$

此外，对于每个 $n \in$ 自然数集，量子紧致度量空间的序列 $(C^*(G_n, \sigma), \mathsf{L}_k)_{k \geq n}$ 收敛于 $(C^*(G_n, \sigma), \mathsf{L}_\infty)$，其中采用 *Lipschitz* 距离。

证明。 我们首先证明某些相关长度函数具有有界倍增性质。

固定一个素数 p 和 $d \geqslant 2$。对于所有 $g \in G_\infty$，令

$$\mathbb{L}'(g) = \max\left\{ \|g\|_{\mathbb{R}^d}, p^{\min\left\{ n \in \mathbb{N} : g \in \left(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}\right)^d \right\}} \right\},$$

本证明中，我们在 R^d 上选取的范数是最大范数。根据引理 (4.3)，函数 L' 是一个无界的适当长度函数。根据引理 (4.7)，对于所有 $\mathrm{n} \in$ 自然数集 N，有 $\|[\mathrm{ML}', \cdot]\|_{\ell^2(\mathrm{G}_n)} \leqslant \mathrm{L}_n$ 在复数域 $\mathrm{C}(\mathrm{G}_n)$ 上。由 [11]，此，三元组 $(\mathrm{C}^*(\mathrm{G}_n, \sigma), \ell^2(\mathrm{G}_n), \mathrm{ML}')$ 是一个谱三元组。

假设 $\mathrm{L}'(\mathrm{g}) \leqslant \mathrm{p}^n$。由于 $\mathrm{g} \in \left(\frac{1}{\mathrm{p}^n}\mathrm{Z} \right)^d$，我们可以将 g 写为 $= \left(\mathrm{a}_n^j \right)_{1 \leqslant \mathrm{p}\, \mathrm{j} \leqslant \mathrm{d}}$，其中 $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_d \in \mathrm{Z}$。由于 $\|\mathrm{g}\|_{\mathbb{R}^d} \leqslant \mathrm{p}^n$，我们还有 $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_d \in [-\mathrm{p}^{2n}, \mathrm{p}^{2n}]$。反过来，如果 $\mathrm{g} = \left(\mathrm{a}_n^j \right)_{1 \leqslant \mathrm{p}\, \mathrm{j} \leqslant \mathrm{d}}$，且对于所有 $\mathrm{j} \in \{1, \ldots, \mathrm{d}\}$ 都有 $-\mathrm{p}^{2n} \leqslant \mathrm{a}_j \leqslant \mathrm{p}^{2n}$，那么根据定义，$\mathrm{L}'(\mathrm{g}) \leqslant \mathrm{p}^n$。因此，中心为 (0,0)、半径为 p^n 的闭球的基数为 $(2\mathrm{p}^{2n} + 1)^d$。

因此：

$$\begin{aligned} \left| \{ g \in G_\infty : \mathbb{L}'(g) \leqslant p^{n+1} \} \right| &= (2p^{2n+2} + 1)^d \\ &\leqslant (2p^{2n+2} + p^2)^d \\ &= p^{2d}(2p^{2n} + 1)^d \\ &\leqslant p^{2d} \left| \{ g \in G_\infty : \mathbb{L}'(g) \leqslant p^n \} \right|. \end{aligned}$$

因此，$\mathbb{L}'$ 是一个具有有界倍增性质的适当无界长度函数。

设 $\mathbb{L}_H$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的任意范数。由于 $\mathbb{R}^d$ 上的所有范数都等价，存在 $C > 0$ 使得 $\frac{1}{C}\mathbb{L}_H \leqslant \|\cdot\|_{\mathbb{R}^d} \leqslant C\mathbb{L}_H$。于是

$$\frac{1}{C}(\max\{\mathbb{L}_H, \mathbb{F}\}) \leqslant \mathbb{L}' \leqslant C \max\{\mathbb{L}_H, \mathbb{F}\}.$$

因此，

$$\left| \{ g \in G_\infty : \max\{\mathbb{L}_H(g), \mathbb{F}(g)\} \leqslant p^{n+1} \} \right| \leqslant C^2 p^{2d} \left| \{ g \in G_\infty : \max\{\mathbb{L}_H(g), \mathbb{F}(g)\} \leqslant p^n \} \right|.$$

记 $\mathbb{L} := \max\{\mathbb{L}_H, \mathbb{F}\}$ 在 $C_c(G_n)$。由此我们证明了 L 由引理（4.3）可知，它是无界且适当的，并且具有有界倍增性质。

根据引理（4.12），由于 G_∞ 是阿贝尔的，我们得出

$$\forall n \in \overline{\mathbb{N}} \quad \{a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\} = \mathrm{cl}(\{a \in C_c(G_n) : \mathsf{L}_n(a) \leqslant 1\}).$$

因此，我们的推论由定理（4.11）得出。 □

通过改变的不仅是 L_H，还有 F，我们可以在 $\left(\mathrm{Z}\left[\frac{1}{\mathrm{p}} \right] \right)^d$ 上选取略有不同的长度函数。例如，如果将 F 替换为 F'：$(\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_d) \in \mathrm{G}_\infty \mapsto \max_{\mathrm{j}=1}^d |\mathrm{g}\, \mathrm{j}|_p$，其中 $|\cdot|_p$ 现在表示 p-范数，则推论 (4.17) 仍然成立。所得长度函数 $\max\{\mathrm{L}_H, \mathrm{F}'\}$ 具有有界倍增性质，这可通过应用 [19, 命题 3.17]（在度量等价意义下）看出。我们还注意到，若要通过此构造得到不同于推论 (4.17) 的结果，就要求至少存在一个 $\mathrm{g} \in \mathrm{Z}^d \setminus \{0\}$，使得 $\mathrm{L}_H(\mathrm{g}) < \mathrm{F}'(\mathrm{g})$。一般而言，两者的差别仅在于对底层狄拉克算子的有界扰动。

另一类适用于我们研究成果的有趣 C*代数，是某些*Bunce-Deddens* 代数。

记号 4.18. 令 $\mathscr{P}$ 为所有由非零自然数组成的序列 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的集合，使得对所有 n ∈自然数集， $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$都是素数。

记号 4.19. 对于任意整数 m ∈整数，我们将商群 整数$\diagup m$整数 简记为整数$\diagup m$。

记号 4.20. 令 $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}$。若$n$ ∈自然数集，则 α_n整除 α_{n+1}，因此映射

$$\rho_n : (m \mod \alpha_{n+1}) \in \mathbb{Z}\diagup_{\alpha_{n+1}} \to (m \mod \alpha_n) \in \mathbb{Z}\diagup_{\alpha_n}$$

其中x模y表示x ∈整数 模y ∈整数 \ {0}的等价类，这是一个定义良好的满群同态。该射影序列的射影极限

$$\mathbb{Z}\diagup_{\alpha_0} \xleftarrow{\rho_0} \mathbb{Z}\diagup_{\alpha_1} \xleftarrow{\rho_1} \mathbb{Z}\diagup_{\alpha_2} \xleftarrow{\rho_2} \mathbb{Z}\diagup_{\alpha_3} \xleftarrow{\rho_4} \cdots$$

记作整数 $\diagup\alpha$。根据构造，我们可以观察到：

$$\mathbb{Z}\diagup_{\alpha} = \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z}\diagup_{\alpha_n} : \rho_n(z_{n+1}) = z_n \right\}.$$

我们赋予整数 $\diagup_\alpha$ 作为紧空间射影空间的拓扑，即赋予由j=0整数$\diagup_{\alpha_n}$上的乘积拓扑所诱导的拓扑；根据蒂霍诺夫定理，该空间是紧的。

$\widehat{\quad}$对于任意 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，我们以显然的方式将 $\mathbb{Z}\diagup m$（即 $\mathbb{Z}\diagup m$ 的庞特里亚金对偶）与 $\mathbb{T}$ 中由 m 次单位根构成的子群等同起来——当然，$\mathbb{Z}\diagup m$ 是自对偶的；$\widehat{\quad}$这一等同有助于我们的表述。由反变函子性，$\mathbb{Z}(\alpha) := \widehat{\mathbb{Z}\diagup_\alpha}$ 的庞特里亚金对偶因此是如下归纳序列的极限：

$$\widehat{\mathbb{Z}\diagup_{\alpha_0}} \xrightarrow{j_0} \widehat{\mathbb{Z}\diagup_{\alpha_1}} \xrightarrow{j_1} \widehat{\mathbb{Z}\diagup_{\alpha_2}} \xrightarrow{j_2} \widehat{\mathbb{Z}\diagup_{\alpha_3}} \xrightarrow{j_3} \cdots$$

其中 $j_1, j_2, \ldots$ 只是单射映射。当然，根据构造：

$$\mathbb{Z}(\alpha) = \left\{ \zeta \in \mathbb{T} : \exists n \in \mathbb{N} \quad \zeta^{\alpha_n} = 1 \right\},$$

其中 $\mathbb{T} = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$ 是圆群；此外，$\mathbb{Z}(\alpha)$ 是一个离散群，因为它是紧群的对偶（即我们不 赋予它作为$\mathbb{T}$子集所继承的拓扑）。

$\mathbb{Z}(\alpha)$ 与其对偶$\mathbb{Z}$ $\diagup_\alpha$ 之间的庞特里亚金对偶配对，对于所有 $\zeta \in Z(\alpha)$ 以及所有 $z := (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}\diagup_\alpha$，定义为 $\zeta^z := \lim_{n\to\infty} \zeta^{z_n}$；注意，根据构造，序列 $(\zeta^{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 最终为常数。

在 $\alpha = (p, p^2, p^3, \ldots)$ 的特殊情形下，群 $\mathbb{Z}(\alpha)$ 是普吕弗群 $\mathbb{Z}(p^\infty)$，而群$\mathbb{Z}$ $\diagup_\alpha$ 是p-进整数的群 $\mathbb{Z}_p$。

引理 4.21. 设 $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}$。设 $\mathbb{L}_H$ 是圆群 $\mathbb{T}$ 上限制到 $\mathbb{Z}(\alpha)$ 的长度函数，使得 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Haus}[\mathbb{L}_H]\left(\diagup_{\alpha_n}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(\alpha)\right) = 0$。

对于所有 $\zeta \in \mathbb{Z}(\alpha)$，我们定义

$$\mathbb{F}(\zeta) := \min\left\{ p \in \mathbb{N} : \zeta^p = 1 \right\}.$$

令 $\|\cdot\|_{\text{复数域}^2}$ 是 复数域^2 上任意一个单调范数。函数

$$\mathbb{L} : \zeta \in \mathbb{Z}(\alpha) \mapsto \|(\mathbb{L}_H(\zeta), \mathbb{F}(\zeta))\|_{\mathbb{R}^2}$$

是$\mathbb{Z}(\alpha)$上的真无界长度函数。
此外，当且仅当序列 $\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$有界时，$\mathbb{L}$ 才具有有界倍增性质。

证明。 首先，很容易看出，对于所有 $\zeta\in\mathbb{Z}(\alpha)\setminus\{1\}$，

$$\mathbb{F}(\zeta)=p^{\min\left\{n\in\mathbb{N}:\zeta\in\widehat{\mathbb{Z}/\alpha_n}\right\}},$$

而 $\mathbb{F}(1)=0$。因此，根据引理（4.3），我们已经知道，$\mathbb{L}$ 是$\mathbb{Z}(\alpha)$上的真无界长度函数。

现在，假设 $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ 是最大范数。

对于任意 $\rho>0$，我们将$B[\rho]$ 记为以 $(1,0)$ 为中心、半径为 ρ 的闭球在$\mathbb{Z}(\alpha)\times\mathbb{Z}$ 中的基数。对于任意$d\in\mathbb{N}$，我们计算以下表达式：

$$B[\alpha_d]=|\{\zeta\in\mathbb{Z}(\alpha):\mathbb{L}(\zeta)\leqslant\alpha_d\}|=\left|\left\{\zeta\in\widehat{\mathbb{Z}/\alpha_d}\right\}\right|=\alpha_d.$$

现在，令$R\geqslant 1$。于是，存在$d\in\mathbb{N}$ 使得 $\alpha_d\leqslant R\leqslant\alpha_{d+1}$。注意，由于$B[R]\leqslant B[\alpha_{d+1}]<\infty$，我们的长度函数$\mathbb{L}$ 确实是适当的；还要注意，由于$B[R]\geqslant B[\alpha_d]=\alpha_d\geqslant 2^d$，长度函数$\mathbb{L}$ 也是无界的。

现在，假设$M:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}<\infty$。于是我们计算：

$$\begin{aligned}B[2R]&\leqslant B[2\alpha_{d+1}]\leqslant B[\alpha_{d+2}]=\alpha_{d+2}\\&=\frac{\alpha_{d+2}}{\alpha_{d+1}}\frac{\alpha_{d+1}}{\alpha_d}\alpha_d\leqslant M^2\alpha_d=M^2B[\alpha_d]\leqslant M^2B[R].\end{aligned}$$

因此，我们的长度$\mathbb{L}$ 具有有界倍增性质。现在，若我们为$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$，选取不同的单调范数，那么，由于$\mathbb{R}^2$ 上的所有范数都等价，所得的长度函数仍具有有界倍增性质。

现在，转而假设$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\infty$。令$n\in\mathbb{N}$，并令$r_n=\alpha_{n+1}/2$。利用上述计算，我们注意到

$$B[2r_n]=\alpha_{n+1}=\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\cdot B[r_n],$$

因此，对所有$n\in\mathbb{N}$，$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=B[2r_n]\ B[r_n]$；所以，我们的长度$\mathbb{L}$ 实际上并不具有有界倍增性质。□

推论 4.22. 设 $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个非零自然数序列，使得$\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个有界素数序列，并设

$$\mathbb{Z}(\alpha):=\left\{\zeta\in\mathbb{C}:\exists n\in\mathbb{N}\quad\zeta^{\alpha_n}=1\right\}.$$

定义：

$$G_\infty:=\mathbb{Z}(\alpha)\times\mathbb{Z}\ and\ \forall n\in\mathbb{N}\quad G_n:=\widehat{\mathbb{Z}/\alpha_n}\times\mathbb{Z},$$

即 $G_n=\{(\zeta,z)\in G_\infty:z\in\mathbb{Z},\zeta^{\alpha_n}=1\}$。设 σ 是 G_∞的一个2-余循环。

设$\mathbb{L}_Z$是$\mathbb{T}$上任意连续长度函数在$\mathbb{Z}(\alpha)$上的限制，并定义$\mathbb{L}_H:(u,z)\in G_\infty\mapsto\mathbb{L}_Z(u)+|z|$。

对于所有 $\zeta\in\mathbb{Z}(\alpha)$，令：

$$\mathbb{F}(\zeta):=\min\{n\in\mathbb{N}:u^n=1\}.$$

设 E 为厄米向量空间，且设 γ_1、γ_2 为满足 $\gamma_1\gamma_2=-\gamma_2\gamma_1$ 和 $\gamma_1^2=\gamma_2^2=1_E$ 的酉算子。

若我们对所有 $n\in$自然数集设定，

$$\not{D}_n:=M_{\mathbb{L}_H}\otimes\gamma_1+M_{\mathbb{F}}\otimes\gamma_2,$$

则对所有 $n \in$ 自然数集，谱三元组 (复数域 $^*(G_n,\ \sigma)$，$\ell^2(G_n)\otimes E$，$/D_n)$ 是度量的，并且

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^{\mathsf{spec}}\left(\left(C^*(G_n,\sigma),\ell^2(G_n)\otimes E,\not{D}_n\right),\left(C^*(\mathbb{Z}(\alpha)\times\mathbb{Z},\sigma),\ell^2(\mathbb{Z}(\alpha)\times\mathbb{Z})\otimes E,\not{D}_\infty\right)\right)=0.$$

证明。 直接计算可得，$|\cdot|$ 是适当的，并具有有界倍增性质。

根据 [19, 命题 3.7] 应用于适当的无界长度函数 $|\cdot|$ 和 $\mathbb{L}_Z$，我们得出 $\mathbb{L}:=(\zeta,z)\in G_\infty\mapsto \mathbb{L}_Z(\zeta)+\mathbb{F}(\zeta)+|m|$ 具有有界倍增性质。

由于 $\mathbb{L}_Z$ 在 $\mathbb{T}$ 上连续，因此它在 $\mathbb{T}$ （作为 复数域的子集）上诱导出通常拓扑。因此，豪斯多夫距离 $\mathsf{Haus}[\mathbb{L}_H]$ 的拓扑是 $\mathbb{T}$的通常拓扑对应的 Vietoris 拓扑，因而与 复数域上的通常度量在 $\mathbb{T}$上取限制后，由 $\mathsf{Haus}[\mathbb{T}]$, 诱导出的拓扑相同。于是可得：

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{Haus}[\mathbb{L}_H]\left(\widehat{\mathbb{Z}/\alpha_n},\mathbb{Z}(\alpha)\right)=0.$$

由于现在所有其他假设都已满足，根据定理(4.16)，我们得出推论成立。 □

映射

$$\varpi:z\in\mathbb{Z}\mapsto(z\mod\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}/\alpha$$

是一个值域稠密的群 *-态射。现在，我们定义 $\mathbb{Z}(\alpha)$的如下自同构：

$$\tau:u\in\mathbb{Z}(\alpha)\mapsto u+\varpi(1).$$

C*-交叉积$C(\mathbb{Z}(\alpha))\rtimes_\tau\mathbb{Z}$ 是与“超自然”数相关联的 Bunce-Deddens 代数

$$\mathbf{n}:=\left(p^{|\{n\in\mathbb{N}:\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=p\}|}\right)_{p\text{ prime}}.$$

如上所定义，当 σ 是通过对所有 $(\zeta,z),(\eta,y)\in G_\infty$ 设定而定义的 2-余循环时，它也与 $C^*(\mathbb{Z}(\alpha)\times Z,\sigma)$ *-同构：

$$\sigma((\zeta,z),(\eta,y)):=\eta^z.$$

实际上，利用 [52] 即可得到这个同构。我们先注意到，Bunce-Deddens 代数 [8] 是 C*-交叉积 [54, 18]。现在，简要说明这个同构的构造。由于自然嵌入$j:\mathbb{Z}(\alpha)\to\mathbb{T}$是$\mathbb{Z}(\alpha)$的一个特征，它由$\mathbb{Z}/\alpha$中的一个元素的配对给出；这个元素恰好就是上文定义的 $\varpi(1)$。在我们的情形中，注意到对于所有$\zeta\in\mathbb{Z}(\alpha)$，$\lambda_{(1,1)}\lambda_{\zeta,0}\lambda^*(1,1)=\zeta^{-1}\lambda_{\zeta,0}$。若$f\in C_c\left(\mathbb{Z}/\alpha\right)$，我们将其傅里叶变换记为 $\widehat{f}$；具体而言

$$\widehat{f}:\zeta\in\mathbb{Z}(\alpha)\mapsto\sum_{z\in\mathbb{Z}/\alpha}f(z)\zeta^{-z}.$$

直接计算可得 $\widehat{\tau}(f)(\zeta)=\zeta^{-1}\widehat{f}(\zeta)$。因此，我们得出$\lambda_{(1,1)}\lambda(\widehat{f})\lambda^*(1,1)=\lambda\left(\widehat{\tau}(f)\right)$。利用典范生成元对 C*-交叉积 $C\left(\mathbb{Z}/\alpha\right)\rtimes_\tau\mathbb{Z}$应用逆傅里叶变换，也可进行类似计算。根据 C*- 交叉积和扭曲群 C*- 代数的泛性质（此处由于我们的群是阿贝尔群，这些代数与其左正则表示的像一致），我们得出了该同构的描述。

因此，我们为有界超自然数构造了 Bunce-Deddens 代数上的度量谱三元组；对于谱邻近度而言，这些三元组是度量谱三元组序列的极限。

特别地，$C^*(\mathbb{Z}(\alpha) \times \mathbb{Z}, \sigma)$ 被证明是 C*代数 $C^*\left(\widehat{\mathbb{Z}/\alpha_n\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}, \sigma\right)$ 的归纳极限，也是这些代数在此处所述量子度量下关于近似距离的极限，其中 $n \in \mathbb{N}$ 趋近于 ∞。值得注意的是，$C^*\left(\widehat{\mathbb{Z}/\alpha_n \times \mathbb{Z}}, \sigma\right)$ 实际上与圆 $\mathbb{T}$ 上一个向量丛的连续截面构成的 C*代数 *-同构，其纤维是由平方 α_n 阶矩阵构成的代数。当然，这种情况令人联想到这样一个事实：特别是，Bunce-Deddens 代数属于 AT代数。然而，从 Bunce-Deddens 代数作为 AT代数的通常描述出发，会在 [6], 中带来困难；在那里，Bunce-Deddens 代数上的量子度量并非来自谱三元组，而且收敛仅在 Rieffel 的量子 Gromov-Hausdorff 距离意义下得到证明。因此，对于仅由有限多个素数组成的超自然数所对应的 Bunce-Deddens 代数，我们现在构造了度量谱三元组，它们确实在我们的几何框架中体现了这些代数的归纳极限结构。我们希望定理 (4.11) 和 (4.16) 能够有助于构造其他例子：定义在具有有趣归纳极限结构的群上的扭曲群 C*-代数的度量谱三元组。

参考文献

[1] V. Aiello, D. Guido, T. Isola, 《由自覆盖构造的非交换螺线空间的谱三元组》, 448 (2017), 1378–1412.[2] A. Austad 和 F. Luef, 《调制空间作为非交换几何中的光滑结构》, Banach数学分析杂志 15 (2021) 15–35.[3] K. Aguilar 和 J. Kaad, 《Podle´s 球面作为谱度量空间》, J. Geom. Phys. 133 (2018), 260–278.[4] K. Aguilar、F. Latrèmolière 和 T. Rainone, 《Bunce-Deddens 代数作为圆代数在量子 Gromov-Hausdorff 距离下的极限》, Integral Equations Operator Theory 94 (2022), no. 1, Paper No. 2, 42 pp.[5] K. Aguilar 和 F. Latrémolière, 《AF代数上的量子超度量与 Gromov-Hausdorff 近似距离》, Studia Math. 231 (2015), no. 2, 149–194, ArXiv: 1511.07114.[6] K. Aguilar、F. Latrémolière 和 T. Rainone, 《Bunce-Deddens代数作为圆代数在量子 Gromov-Hausorff 距离下的极限》, Integral Equations Operator Theory 94 (2022), no. 1, Paper no. 2, 42pp, ArXiv: 2008.07676.[7] C. Antonescu 和 E. Christensen, 《AF C^*-代数的谱三元组与康托尔集上的度量》, J. Oper. Theory 56 (2006), no. 1, 17–46, arXiv: 0309044.[8] J. W. Bunce 和 J. Deddens, 《一族与加权移位算子相关的简单 C^*-代数》, J. Functional Analysis 19 (1975), 13–24.[9] M. Christ 和 M. A. Rieffel, 《幂零群 C^*-代数作为紧量子度量空间》, Canad. Math. Bull. 60 (2017), no. 1, 77–94, arXiv: 1508.00980.[10] E. Christensen、C. Ivan 和 M. Lapidus, 《在曲线上构造的某些分形集的狄拉克算子与谱三元组》, Adv. Math. 217 (2008), no. 1, 42–78.[11] A. Connes, 《紧度量空间、Fredholm模与超有限性》, Ergodic Theory Dynam. Systems 9 (1989), no. 2, 207–220. [12] ,《非交换几何》, 学术出版社, 圣迭戈, 1994.[13] L. Dabrowski、G. Landi、A. Sitarz、W. van Suijlekom 和 J. C. Varilly, 《SUq(2) 上的狄拉克算子》, Comm. Math. Phys. 259 (2005), 729–759.[14] K. R. Davidson, 《C^*–代数：实例讲解》, 菲尔兹研究所专著丛书, 美国数学会, 1996.[15] L. Da̲browski 和 A. Sitarz, 《曲非交换环面与高斯-博内公式》, J. Math. Phys. 013518 (2013).[16] ,《非对称非交换环面》, SIGMA 11 (2015), 11 pages, arXiv: 1406.4645.[17] David A. Edwards, 《超空间的结构》, 《拓扑学研究》（会议论文集，北卡罗来纳大学夏洛特分校，北卡罗来纳州夏洛特，1974；献给波兰科学院数学部）, 1975, p. 121–133. MR 0401069[18] R. Exel, 《Bunce-Deddens 代数作为部分自同构的交叉积》, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25 (1994), 173–179.[19] C. Farsi、T. Basa Landry、N. S. Larsen 和 J. Packer, 《非交换螺线体的谱三元组与维纳引理》, (2022), ArXiv: 2212.07470.

[20] R. Floricel 和 A. Ghorbanpour, 《归纳极限谱三元组》, Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), no. 8, 3611–3619, ArXiv: 1712.09621.[21] O. Gabriel 和 M. Grensing, 《遍历作用与谱三元组》, J. Oper. Theory 76 (2016), no. 2, 307–334.[22] M. Gromov, 《多项式增长群与扩张映射》, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 53 (1981), 53–78.[23] , 《黎曼空间与非黎曼空间的度量结构》, Progress in Mathematics, BirkhÃ€user, 1999.[24] A. Hawkins、A. Skalski、S. White 和 J. Zacharias, 《关于由等度连续作用产生的交叉积上的谱三元组》, Math. Scand. 113 (2013), no. 2, 262–291.[25] D. A. Herron, 《带基点度量空间的 Gromov-Hausdorff 距离》, J. Anal. 24 (2016), no. 1, 1–38.[26] Antoine Julien 和 I. Putnam, 《子移位的谱三元组》, J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 3, 1031–1063, arXiv: 1411.6800.[27] L. V. Kantorovich, 《求解某些极值问题类的一种有效方法》, Dokl. Akad. Nauk. USSR 28 (1940), 212–215.[28] L. V. Kantorovich 和 G. Sh. Rubinstein, 《完全可加函数空间》, Vestnik Leningrad Univ., Ser. Mat. Mekh. i Astron. 13 (1958), no. 7, 52–59, 俄文.[29] T. Landry、M. Lapidus 和 F. Latrémolière, 《Sierpinski 垫片及其他分形上的谱三元组的度量近似》, Adv. Math. 385 (2021), Paper No. 107771, 43 pp.[30] M. Lapidus 和 J. Sarhad, 《调和 Sierpi ´nski 垫片及其他分形集上的狄拉克算子与测地度量》, J. Noncommut. Geom. 8 (2014), no. 4, 947–985.[31] F. Latrémolière, 《谱邻近度下谱三元组的狄拉克算子谱的连续性》, 已提交 (2022), 49 pages.[32] F. Latrémolière, 《量子环面在量子 Gromov-Hausdorff 距离下向有限量子环面的逼近》, J. Funct. Anal. 223 (2005), 365–395, math.OA/0310214.[33] , 《模糊环面与量子环面在量子 Gromov-Hausdorff 邻近度下的收敛：一种显式方法》, Münster J. Math. 8 (2015), no. 1, 57–98, arXiv: math/1312.0069.[34] , 《曲非交换环面作为 Leibniz 紧量子度量空间》, J. Math. Phys. 56 (2015), no. 12, 123503, 16 pages, arXiv: 1507.08771.[35] , 《对偶 Gromov-Hausdorff 邻近度》, J. Math. Pures Appl. 103 (2015), no. 2, 303–351, arXiv: 1311.0104.[36] , 《量子度量空间与 Gromov-Hausdorff 近似距离》, 《非交换几何与最优输运》, Contemp. Math., no. 676, Amer. Math. Soc., 2015, arXiv: 150604341, p. 47–133.[37] , 《具有公共定义域的量子度量等价性》, J. Math. Anal. Appl. 443 (2016), 1179–1195, arXiv: 1604.00755.[38] , 《量子 Gromov-Hausdorff 邻近度》, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 1, 365–411.[39] , 《对偶 Gromov-Hausdorff 邻近度的紧性定理》, Indiana Univ. Math. J. 66 (2017), no. 5, 1707–1753, arXiv: 1501.06121.[40] , 《三角不等式与对偶 Gromov-Hausdorff 邻近度》, Indiana Univ. Math. J. 66 (2017), no. 1, 297–313, arXiv: 1404.6633.[41] , 《协变 Gromov-Hausdorff 邻近度下柯西序列的收敛》, J. Math. Anal. Appl. 469 (2019), no. 1, 378–404, arXiv: 1806.04721.[42] , 《模 Gromov-Hausdorff 邻近度》, Dissertationes Math. 544 (2019), 1–70, arXiv: 1608.04881.[43] , 《海森堡模在模 Gromov-Hausdorff 邻近度下的收敛》, J. Operator Theory 84 (2020), no. 1, 211–237.[44] , 《协变 Gromov-Hausdorff 邻近度》, Studia Math. 251 (2020), no. 2, 135–169, arXiv: 1805.11229.[45] , 《模糊环面上的谱三元组向量子环面上的谱三元组收敛》, Comm. Math. Phys. 388 (2021), no. 2, 1049–1128, arXiv: 2102.03729.[46] , 《对偶模 Gromov-Hausdorff 邻近度与完备性》, J. Noncommut. Geometry 115 (2021), no. 1, 347–398.[47] , 《度量谱三元组的 Gromov-Hausdorff 邻近度》, Adv. Math. 404 (2022), Paper No. 108393, 56.[48] F. Latrēmolīère 和 J. Packer, 《非交换螺线体与 Gromov-Hausdorff 邻近度》, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 5, 1179–1195, arXiv: 1601.02707.[49] , 《非交换螺线体》, New York J. Math. 24A (2018), 155–191, arXiv: 1110.6227.[50] B. Long 和 W. Wu, 《作为 C*-度量代数的扭曲有界膨胀群 C*-代数》, Sci. China Math. 64 (2021), no. 3, 547–572.

[51] N. Ozawa 和 M. A. Rieffel，双曲群复数域 *-代数与自由积复数域 *-代数作为紧量子度量空间，《加拿大数学杂志》**57**(2005)，1056–1079，arXiv: math/0302310。[52] J. Packer，扭曲群复数域 *-代数与幂零离散群相对应，《斯堪的纳维亚数学》**64**(1989)，第 1 期，109–122。[53] M. Reed 和 B. Simon，《泛函分析》，《现代数理物理方法》，学术出版社，圣迭戈，1980。[54] N. Riedel，与极小旋转相关的复数域 *-代数的分类，《太平洋数学杂志》**101** (1982)，153–161。[55]M. A. Rieffel，紧群作用所诱导的态上的度量，《数学文献》**3** (1998)，215–229，math.OA/9807084。[56] ，态空间上的度量，《数学文献》**4**(1999)，559–600，math.OA/9906151。[57] ，量子度量空间的 *Gromov-Hausdorff* 距离，《美国数学会回忆录》**168** (2004)，第 796 号，1–65，math.OA/0011063。[58] ，“矩阵代数收敛到球面”的莱布尼茨半范数，《克莱数学论文集》**11**(2010)，543–578，arXiv: 0707.3229。

电子邮箱地址：carla.farsi@colorado.edu科罗拉多大学博尔德分校数学系，博尔德，科罗拉多州 80309-0395电子邮箱地址：frederic@math.du.edu网址：http://www.math.du.edu/~frederic丹佛大学数学系，丹佛，科罗拉多州 80208电子邮箱地址：judith.jesudason@colorado.edu科罗拉多大学博尔德分校数学系，博尔德，科罗拉多州 80309-0395