arXiv:2301.00279v1 [math.AC] 31 Dec 2022

关于弱 w-投射模的注记

REFAT ABDELMAWLA KHALED ASSAAD

Abstract. 设 R 是一个环。如果对所有 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger}\infty$，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N) = 0$（见 [18]），则称 R-模 M 为弱 w-投射模。本文介绍并研究弱 w-投射模的一些性质。我们还利用这些模刻画若干经典环。例如，我们将证明：环 R 是 DW-环，当且仅当每个弱 w-投射模都是投射模；R 是冯·诺依曼正则环，当且仅当每个 FP-投射模都是弱 w-投射模，这又当且仅当每个有限表示的 R-模都是弱 w-投射模；此外，R 是 w-半遗传环，当且仅当自由模的每个有限型子模都是弱 w-投射模，这又当且仅当 R 的每个有限生成理想都是弱 w-投射模。

1. Introduction

本文中，所有环均视为含幺交换环，所有模均为含幺模。设 R 为环，M 为一个 R-模。按照惯例，我们分别用 $\mathrm{pd}_R(M)$、$\mathrm{id}_R(M)$ 和 $\mathrm{fd}_R(M)$ 表示 M 的经典投射维数、内射维数和平坦维数，并分别用 $\mathrm{w.gl.dim}(R)$ 和 $\mathrm{gl.dim}(R)$ 表示 R 的弱同调维数和整体同调维数。

现在，我们回顾一些定义和记号。设 J 是 R的一个理想。按照[23]的定义，若 J 为有限生成的，且自然同态 $\varphi: R \to J^* = \mathrm{Hom}_R(J,R)$ 是一个同构，则称 J 为 Glaz-Vasconcelos 理想（简称 GV-理想）。注意，R 的 GV-理想集合 $GV(R)$ 是R的一个理想乘法系。设 M 为一个 R-模。它被定义为

$$\mathrm{tor}_{GV}(M) = \{x \in M \mid Jx = 0 \text{ for some } J \in GV(R)\}.$$

显然，$\mathrm{tor}_{GV}(M)$ 是 M 的子模。若 M 满足 $\mathrm{tor}_{GV}(M) = M$（分别地，$\mathrm{tor}_{GV}(M) = 0$），则称 M 为 GV-挠（分别地，GV-挠无）。若一个 GV-挠无模 M 对任意 $J \in GV$（R）均满足 $\mathrm{Ext}_R^1(R/J,M) = 0$，则称其为 w-模。因此，投射模和自反模都是 w-模。近期论文 [23], 证明了平坦模是 w-模。此外，众所周知，一个 GV-挠无的 R-模 M 是 w-模，当且仅当对每个 GV-挠R-模 N，均有 $\mathrm{Ext}_1^R(N,M) = 0$（见 [13], 定理 6.2.7）。$w$-模这一概念最初是在整环 [17] 上为研究强 Mori 整环而引入的，随后在 [23] 中扩展到含零因子的交换环。令 $w - Max(R)$ 表示 R 的极大真整 w-理想（极大 w-理想）中所有 w-理想组成的集合。根据 [23, 命题 3.8], , 每个极大 w-理想都是素理想。对于任意 GV-挠无模 M,

$$M_w := \{x \in E(M) \mid Jx \subseteq M \text{ for some } J \in GV(R)\}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13D05, 13D07, 13H05.*Key words and phrases.* 投射模，弱 w-投射模，w-平坦，GV-挠，有限表示型，DW-环，相干环，w-相干环。

它是 $E(M)$ 的一个包含 M 的 w-子模，称为 M 的 w-包络，其中 $E(M)$ 表示 M 的内包。显然， GV- 挠无模 M 是 w- 模，当且仅当 $M_w = M$。

设 M 和 N 为 R-模，并设 $f: M \to N$ 为一个同态。按照 [12]，如果对于所有 $\mathfrak{m} \in w - Max(R)$， $f_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ 是单态（分别为满态、同构），则称 f 为 w-单态（分别称为 w-满态、 w-同构）。如果对于所有 $\mathfrak{m} \in w - Max(R)$，序列 $A \to B \to C$ 中的序列 $A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}} \to C_{\mathfrak{m}}$ 都是正合的，则称由模和同态组成的序列 $A \to B \to C$ 为 w-正合。若存在有限生成自由 R-模 F 以及一个 w-满态 $g: F \to M$，则称 R-模 M 为有限型。类似地，若存在一个 w-正合列 $F_1 \to F_0 \to M \to 0$，其中 F_1 和 F_0 是有限生成自由模，则称 R-模 M 为有限表示型。

近年来，文献中的若干论文关注了 w-模的同调刻画（例如参见 [[1], [21], [19], [18]]）。 w-投射模和 w-平坦模的概念最早出现在 [11] 中，当R是整环时成立，随后在[[14], [2]]中推广到了任意交换环。在 [14], 中，F. G. Wang 和 H. Kim 通过 w 运算将投射模推广为w-投射模。若对任意挠无 w-模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(L(M)\ N)$ 都是 GV-挠的，则称 R-模 M 为 w-投射模，其中$L(M) = (M/\mathrm{tor}_{GV}(M))_w$。记所有 w-投射 R-模构成的类为 $\mathcal{P}_w$。根据 [20],， R-模 M是 w-分裂的，当且仅当对所有 R-模 N，$\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ 都是 GV-挠的。记所有 w-分裂 R-模构成的类为 $\mathcal{S}_w$。因此，根据[[?], 推论 2.4]，，每个 w-分裂模都是 w-投射的。根据 [2]，，若对任意 w-单态 $f: A \to B$，其诱导序列 $1 \otimes f: M \otimes_R A \to M \otimes_R B$ 是 w-单态，则称 R-模 M 为 w-平坦模。记所有 w-平坦 R-模构成的类为 $\mathcal{F}_w$。本文中，沿用 [18], 的记号， $\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$表示具有如下性质的 GV-挠无 R-模 N构成的类：对所有 w-投射 R-模 M 以及所有整数 $k \geq 1$ ，$\mathrm{Ext}^k_R(M, N) = 0$。显然，每个 GV- 挠无内射 R- 模都属于 $\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$。若对所有 $N \in \mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$，$\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$，则称 R-模 M 为弱 w-投射模。记所有弱 w-投射模构成的类为 $\mathrm{w}\mathcal{P}_w$。根据 [18], ，Wang 和 Qiao 引入了模的弱 w-投射维数（w.w-pd）以及环的全局弱 w-投射维数（gl.w.w-dim）的概念。根据 [18], ，若对任意整数$i \geq 1$ 以及所有 GV-挠模 N，$\mathrm{Ext}^i_R(N, M) = 0$，则称 GV-挠无模 M为强 w-模。记所有强 w-模构成的类为 $\mathcal{W}_\infty$。因此，所有 GV-挠无内射模都是强 w-模。显然，$\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w \subseteq \mathcal{W}_\infty$。但是，在 [18], 中，他们没有证明 $\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$和 $\mathcal{W}_\infty$ 是不同的 R-模类；这一问题在 [8]中得到了解答。

回顾 [4]，若对于任意绝对纯的 R-模 N，都有 $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$，则称 M 为 FP-投射模。用 $\mathcal{FP}$ 表示所有 FP-投射模构成的类。回顾，若 A 在每个包含 A 作为子模的 R-模中都是纯子模，则称 A 为绝对纯的 R-模（见 [3]）。C. Megibbeni 在 [5], 中证明，对于每个有限表示模 F， A 是绝对纯的 R-模，当且仅当 $\mathrm{Ext}^1_R(F, A) = 0$。因此，绝对纯模恰好就是 [7] 中的 FP-内射模。

2. RESULTS

本节中，我们介绍某些经典环的一种刻画。不过，我们需要以下引理

引理 2.1.（[18], 命题 2.5）一个 R模 M 是弱 w-投射的，当且仅当对于所有 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$以及所有 $k \geq 0$，$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ =0。

显然，对于以下模类
{ 投射 } ⊆ { w-分裂 } ⊆ { w-投射 } ⊆ {弱 w-投射 } ⊆ { w-平坦 }。根据 [[1], 命题 2.5], , 如果 R 是完美环，那么上述五类模彼此相同。

在下面的命题中，我们将给出弱 w-投射模的一些刻画。

命题 2.2. 设 M 是一个 R-模。则以下条件等价:

(1) M 是弱 w-投射的。(2) 对任意投射 R-模 F， $M \otimes F$都是弱 w-投射的。(3) 对任意有限生成投射 R-模 F，$\mathrm{Hom}_R(F,M)$都是弱 w-投射的。(4) 对任意满足 $A \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$的 R-模正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$，序列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,C) \to 0$ 是正合的。(5) 对任意 R- 模的 w- 正合列 $0 \to L \to E \to M \to 0$，对于任意 R-模 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，序列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(E,N) \to \mathrm{Hom}_R(L,N) \to 0$是正合的。(6) 对任意 R-模的正合列 $0 \to L \to E \to M \to 0$，对于任意$R$-模 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，序列$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(E,N) \to \mathrm{Hom}_R(L,N) \to 0$是正合的。

证明。（1） ⇒ （2）。设 F 为一个投射 R-模。对于$\mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$中的任意 R-模 N，由 [[13], 定理 3.310], 有 $\mathrm{Ext}_R^1(F \otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(F, \mathrm{Ext}_R^1(M,N))$。由于$M$是弱 w-投射的，故 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N) = 0$。因此，$\mathrm{Ext}_R^1(F \otimes M, N) = 0$。所以，$F \otimes M$ 是弱 w-投射的。

（2） ⇒ （1）且（3） ⇒ （1）。令 $F = R$即可得到。

（1） ⇒ （3）。设 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，对于任意有限生成投射 R-模 F，由 [[13], 定理 3.312], 有 $F \otimes \mathrm{Ext}_R^1(M,N) \cong \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Hom}_R(F,M)\ N)$。由于$M$是弱 w-投射的，因此 $\mathrm{Ext}_R^1(M, N) = 0$。于是，$\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Hom}_R(F,M)\ N) = 0$，这意味着 $\mathrm{Hom}_R(F,M)$ 是弱 w-投射的。

(1) ⇒(4)。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 为一个正合列，且 $A \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，则有正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,C) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,A)$。由于 M是弱 w-投射的，且 $A \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(M,A) = 0$。因此，$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,C) \to 0$是正合的。

(4) ⇒ (1)。设 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，考虑正合列 $0 \to N \to E \to L \to 0$，其中 E是内射模，则有正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,E) \to \mathrm{Hom}_R(M,L) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,N) \to 0$。注意到$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,E) \to \mathrm{Hom}_R(M,L) \to 0$是正合的，我们推得 $\mathrm{Ext}_R^1(M,N) = 0$。因此，$M$是弱 w-投射的。

(1) ⇒ (5)。设 $0 \to L \to E \to M \to 0$ 是一个 w-正合列。对于任意 R-模 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，有 $N \in \mathcal{W}_\infty$。由 [[18], 引理 2.1], , 我们得到正合列

$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(E,N) \to \mathrm{Hom}_R(L,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$。由于 M 是弱 w-投射的，因此 $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = 0$，且 (5) 成立。
(5) $\Rightarrow$ (6)。显然。(6) $\Rightarrow$ (1)。设 $0 \to L \to E \to M \to 0$ 是一个正合列，其中 E 是投射的。因此，对于任意 R-模 $N \in \mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$，我们有 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(E,N) \to \mathrm{Hom}_R(L,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \to 0$ 是正合列；又注意到 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(E,N) \to \mathrm{Hom}_R(L,N) \to 0$ 是正合的，我们可推出 $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = 0$，这意味着 M 是弱 w-投射的。□

回顾 [12], ，若环的每个有限生成理想 R 都是有限表示型，则称该环为 w-相干环。

命题 2.3。设 R 是一个 w-相干环， E 是一个内射 R-模， M 是有限表示型，且 N 是一个 $R\{x\}$- 模。那么，若 M 是弱 w- 投射 R- 模，则 $\mathrm{Tor}^R_n(M, \mathrm{Hom}(N,E)) = 0$。

证明。设 M 是弱 w-投射 R-模，且 N 是一个 $R\{x\}$-模，因此 $\mathrm{Ext}^n_R(M,n) = 0$ ，由 [[18], 命题 2.5] 可知；又因为每个 $R\{x\}$-模都在 $\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$中，由[[18], 命题 2.4]可知。因此，根据 [[16], 命题 2.13(6)], ，我们有

$$\mathrm{Tor}^R_n(M, \mathrm{Hom}(N,E)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}^n_R(M,N), E) = 0.$$

这意味着， $\mathrm{Tor}^R_n(M, \mathrm{Hom}(N,E)) = 0$ □

命题 2.4. 每个有限型的弱 w-投射模都是有限表示型的。

证明。设 M 是有限型的弱 w-投射 R-模，则由 [[18], 推论 2.9] M 可知，它是有限型的 w-投射模。因此，由 [[13], 定理 6.7.22],可知， M是有限表示型的。□

命题 2.5. 设 M 是一个 GV-挠无模。以下断言成立。

(1) M_w/M 是弱 w-投射模。(2) M 是弱 w-投射模，
当且仅当 M_w也是如此。

证明。(1) 设 M 是一个 GV-挠无模。由 [[13], 命题 6.2.5] ，我们有 M_w/M 是一个 GV-挠模。因此，由 [[18], 命题 2.3(2)], ，我们有M_w/M 是弱 w-投射模。

(2) 设 N 是 $\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$中的一个 R-模。由于 M 是 GV-挠无的，由 (1) 可知 M_w/M 是弱 w-投射模。考虑下面的正合列

$$0 \to M \to M_w \to M_w/M \to 0$$

它是 w-正合的。因此，由 [[18], 命题 2.5], M 是弱 w-投射模，当且仅当 M_w 是弱 w-投射模。□

回顾一下，若环 R 的每个理想都是 w-理想，则称 R 为 DW-环；等价地， R 的每个极大理想都是 w-理想 [6]。 DW-环的例子包括 Pr¨ufer 整环、Krull 维数为一的整环，以及 Krull 维数为零的环。我们注意到，若 R 是 DW-环，则每个 R-模都在 $\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$。

在以下命题中，我们将给出 DW-环的新刻画，它们是唯一具有这些性质的环。

命题 2.6。设 R 是一个环。以下命题等价：

(1) 每个弱 w-投射 R-模都是投射模。(2) 每个 w-投射 R-模都是投射模。(3) 每个 GV-挠 R-模都是投射模。(4) 每个 GV-挠无 R-模都是强 w-模。(5) 每个有限表示型 w-平坦模都是投射模。(6) 每个弱 w-投射 R-模都是 w-模。(7) R 是 DW-环。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) and (2) $\Rightarrow$ (3)。它们显然成立。
(3) $\Rightarrow$ (4)。设 M 是一个 GV-挠无 R-模，对于任意 GV-挠 R-模N，我们有 $\mathrm{Ext}^i_R(N,M)=0$，因为 N 是投射的。因此，M 是一个强 w-模。(4) $\Rightarrow$ (7)。根据 [[12], 定理 3.8] ，因为每个强 w-模都是 w-模。(1) $\Rightarrow$ (6)。显然成立，因为每个投射 R-模都是 w-模。

(2) $\Rightarrow$ (5)。设 M 是一个有限表示型 w-平坦模。根据 [[18], 推论 2.9], ，我们有 M 是有限型 w-投射的。因此，根据 (2)，M 是一个投射 R-模。
(5) $\Rightarrow$ (7)。设 M 是一个有限表示的 w-平坦模。那么，M 是有限表示型w-平坦模，因此 M 是投射的。于是，根据 [[9], 命题 2.1], ，我们有 R 是一个DW-环。

(6) $\Rightarrow$ (7)。设 M 是一个 GV-挠无 R-模。因此，由命题 2.5 可知，M_w/M 是弱 w-投射，并且由 (6) 可知它是 w-模。因此，M_w/M 是一个 GV-挠无模。因此，$M_w/M=0$，于是 $M_w=M$。因此，M 是 w-模。于是，根据 [[12], 定理 3.8], R 是一个 DW-环。

(7) $\Rightarrow$ (1)。设 M 是弱 w-投射的。对于任意 R-模 N，我们有 $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)=0$，因为 $N\in\mathcal{P}^{\dagger\infty}_w$（因为 R 是 DW）。因此，M 是一个投射模。□

注意，命题 2.6 中的等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (7) 已在 [[8], 命题 4.4] 中针对整环情形给出。

L. Mao 和 N. Ding 在 [[4]], 中证明，环 R 是冯·诺伊曼正则环，当且仅当每个 FP-投射 R-模都是投射模。
接下来，我们将通过弱w-投射模给出冯·诺依曼正则环的新刻画。

命题 2.7. 设 R 是一个环。则下列命题等价:
(1) 每个 FP-投射 R-模都是弱 w-投射的。(2) 每个有限表示的 R-模都是弱 w-投射的。(3) 每个有限表示的 R-模都是 w-平坦的。(4) R 是冯·诺依曼正则的。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。由每个有限表示的 R-模都是 FP-投射的这一事实可得。

(2) $\Rightarrow$ (3)。设 M 是一个有限表示的 R-模，则 M 是弱 w-投射的。因此，由 [[18], 推论 2.11]可知，M 是 w-平坦的。(3) $\Rightarrow$ (4)。设 I 是 R的一个有限生成理想，则 R/I 是有限表示的。因此，由 (3) 可知，R/I 是 w-平坦的，于是 $\mathrm{w}-\mathrm{fd}_R(R/I)=0$。因此，由[[19], 命题 3.3]可知，$\mathrm{w}-\mathrm{w.gl.dim}(R)=0$。由此，根据 [[15], 定理 4.4], R 是冯·诺依曼正则的。(4) $\Rightarrow$ (1)。设 M 是一个 FP-投射模，则根据 [[4], 注 2.2], M 是投射的。因此，M 是弱 w-投射的。□

接下来，我们给出一个 FP-投射模的例子，它不是弱 w-投射的。

例 2.8. 考虑局部准弗罗贝尼乌斯环 $R := k[X]/(X^2)$，其中 k是一个域，并用$\overline{X}$ 表示 R 中 X的剩余类。那么，$(\overline{X})$ 是 FP-投射R-模，但不是弱 w-投射的。

证明。由于 R 是准弗罗贝尼乌斯环，因此每个绝对纯 R-模都是内射的。因此，对于任意绝对纯 R-模 N，我们有 $\mathrm{Ext}^1_R((\overline{X}) N) = 0$，所以$(\overline{X})$是 FP-投射的。但是，根据 [[10], 例 2.2], ，$(\overline{X})$不是投射的，因此也不是弱 w-投射的，因为 R 是 DW-环。□

回顾 [[15]] ，若环 R 的每个有限型理想都是 w-投射的，则称环 R 为 w-半遗传的。

命题 2.9。以下各项等价:

(1) R w-半遗传。(2) 自由模的每个有限型子模都是弱 w-投射的。(3) R 的每个有限型理想都是弱 w-投射的。(4) 自由模的每个有限生成子模都是弱 w-投射的。(5) R 的每个有限生成理想都是弱 w-投射的

证明。(1) ⇒ (2)。设 J 是任意自由模的有限型子模。因此，根据 [[15], 定理 4.11]，J 是 w-投射的。于是，根据 [[18],推论 2.9]， J 是弱 w-投射的。

(2) ⇒ (3) ⇒ (5) 且 (2) ⇒ (4) ⇒ (5)。这些显然成立。
(5) ⇒ (1)。设 J 是 R 的有限型理想。则 J 与 J 的一个有限生成子理想 I w-同构。因此，根据假设和 [[18],推论 2.7]， J 是弱 w-投射的。□

命题 2.10。每个 GV-挠无弱 w-投射模都是挠无的。

证明。设 M 是一个 GV-挠无弱 w-投射模。因此，根据 [[18], 推论 2.11]， M 是一个 GV-挠无 w-平坦模。因此，根据 [[13], 命题 6.7.6], ，我们有 M 是挠无的。□

在下一个例子中，我们将证明弱 w-投射模未必是挠无的。

例 2.11. 设 R 是一个整环， J 是 R 的一个真 GV-理想。那么， $M := R \oplus R/J$ 是一个弱 w-投射模，但不是挠无的。

命题 2.12. 设 R 是一个环， M 是一个有限表示的 R-模。那么，以下陈述等价:

（1） M 是 w-分裂的。（2） M 是弱 w-投射的。（3）对于任意 w-正合 $0 \to A \to B \to C \to 0$ ，序列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C) \to 0$ 是 w-正合的。

证明。（1） ⇒ （2）。显然，因为每个 w-分裂的 R-模都是弱 w-投射的。
(2) ⇒ (3)。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 w-正合列的 R-模。于是，对于 R 的任意极大 w-理想 $\mathfrak{m}$ ， $0 \to A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}} \to C_{\mathfrak{m}} \to 0$ 是 $R_{\mathfrak{m}}$-模的正合列。因此，由于根据 [[18], 命题 2.8], ， $M_{\mathfrak{m}}$ 是自由的，我们得到正合

列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(M_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{Hom}_R(M_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}) \to \mathrm{Hom}_R(M_{\mathfrak{m}}, C_{\mathfrak{m}}) \to 0$。由于 M 是有限表示的，我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, A_{\mathfrak{m}}) & \to & \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}) & \to & \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, C_{\mathfrak{m}}) \\ || \wr & & || \wr & & || \wr \\ \mathrm{Hom}_R(M, A)_{\mathfrak{m}} & \to & \mathrm{Hom}_R(M, B)_{\mathfrak{m}} & \to & \mathrm{Hom}_R(M, C)_{\mathfrak{m}} \end{array}$$

因此，$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A)_{\mathfrak{m}} \to \mathrm{Hom}_R(M, B)_{\mathfrak{m}} \to \mathrm{Hom}_R(M, C)_{\mathfrak{m}} \to 0$ 是正合的，所以，$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C) \to 0$ 是 w-正合的。(3) $\Rightarrow$ (1)。由 [[20], 命题 2.4]可知。 □

回顾一下，[22], 若 w-正合列中的 R-模 $0 \to A \to B \to C \to 0$满足以下条件，则称其为 w-纯正合：对于任意 R-模 M，诱导出的序列

$$0 \to A \otimes M \to B \otimes M \to C \otimes M \to 0$$

是 w-正合的。

命题 2.13. 设 C 是一个有限表示型 R-模。那么，以下陈述等价：

(1) C 是一个弱 w-投射 R-模。(2) 每个 w-正合列的 R-模 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 都是 w-纯正合的。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。由于每个弱 w-投射模都是 w-平坦的，根据 [[18], 推论 2.11]。因此，由 [[22], 定理 2.6], 可得结论。
(2) $\Rightarrow$ (1)。设 $0 \to A \to B \to C \to 0$是一个 w-正合列，因此根据假设，它也是 w-纯正合的。于是，根据 [[22], 定理 2.6], C 是 w-平坦的。因此，根据 [[18], 推论 2.9], C 是弱w-投射的。□

命题 2.14。对于有限型 R-模 M，以下条件等价。
(1) M 是一个 w-投射模。(2) 对任意 $B \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$, $\mathrm{Ext}_R^1(M, B) = 0$。(3) 对任意 $R\{x\}$-模 N，$\mathrm{Ext}_R^1(M, N) = 0$。(4) $M\{x\}$ 是一个投射 $R\{x\}$-模。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。这是显然的。(2) $\Rightarrow$ (3)。根据 [[18], 命题 2.4]。(3) $\Rightarrow$ (4)。设 N 是一个 $R\{x\}$-模，由 [[16], 命题 2.5],可得

$$\mathrm{Ext}^n_{R\{x\}}(M\{x\}, N) \cong \mathrm{Ext}^n_R(M, N) = 0.$$

因此，$M\{x\}$ 是一个投射 $R\{x\}$-模。
(4) $\Rightarrow$(1)。设 $M\{x\}$是一个投射 $R\{x\}$-模，因此由 [[13], 定理 6.6.24]可知，$M\{x\}$是有限生成的；又因为 M 是有限型的，所以根据 [[13], 定理 6.7.18], M 是 w-投射模。□

回顾 [[18]], , 若一个 R-模 D 同构于 E/N，则称其为 $\mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$-可除的，其中 E 是一个 GV- 无扭内射 R- 模，而 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$ 是 E 的子模。

命题 2.15. 设 M 是一个 R-模，且 $m \geq 1$ 为任意整数。以下各项等价。

(1) $\mathrm{w.}w\text{-}\mathrm{pd}_R M \leq m$。(2) 对所有 $\mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$-可除的 R-模 D, $\mathrm{Ext}_R^m(M, D) = 0$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。设 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$。那么存在一个由 R-模组成的正合列 $0 \to N \to E \to H \to 0$，其中 E 是一个 GV-挠无内射 R-模。因此，D 是 $\mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$-可除的。于是我们得到诱导正合列

$$\mathrm{Ext}_R^m(M,H) \to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,N) \to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,E) = 0,$$

对任意整数 $m \geq 1$。根据假设，左端项为零。因此，$\mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,N) = 0$，这意味着由 [[18], 命题 3.1] 可知 $\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R M \leq m$。

(2) $\Rightarrow$ (1)。设 $\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R M \leq m$，且 D 是一个 $\mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$-可除的 R-模。那么我们有正合列 $0 \to N \to E \to H \to 0$，其中 E 是一个 GV-挠无内射 R-模，且 $N \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$。因此，我们有正合列

$$0 = \mathrm{Ext}_R^m(M,E) \to \mathrm{Ext}_R^m(M,H) \to \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,N).$$

由 [[18], 命题 3.1] 可知，右端项为零。因此，$\mathrm{Ext}_R^m(M,H) = 0$。 □

命题 2.16。设 M 和 N 是两个 R-模。那么，

$$\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R(M \oplus N) = \sup\{\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R M, \mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R N\}$$

证明。由弱 w-投射模的类在直和下封闭这一事实（见 [[18], 命题 2.5(1)]），可得不等式 $\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R(M \oplus N) \leq \sup\{\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R M, \mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R N\}$。为证明反向不等式，我们可以假设 $\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R(M \oplus N) = n$ 是有限的。因此，对任意 R-模 $X \in \mathcal{P}_w^{\dagger\infty}$，

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M \oplus N, X) \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,X) \oplus \mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,X).$$

由于根据命题 3.1]，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M \oplus N, X) = 0$ by [[18],。因此，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,X) = \mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,X) = 0$，这意味着 $\sup\{\mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R M, \mathrm{w}.w\text{-}\mathrm{pd}_R N\} \leq n$。 □

References

[1] F. A. Almahdi、M. Tamekkante 和 R. A. K. Assaad，《w-平坦模类的右正交补》，J. Ramanujan Math. Soc. **33** 2 2018 159 175 2, 3 第 13, 4 2014 [2] （）期，–。H. Kim 和 F. Wang，《LCM-稳定模》，J. Algebra Appl. 第（）期，1350133，18 2页。[3] 18 1967 155 158 2 B. H. Maddox, [4] **33** 2005 1153 1170 《绝对纯模》，Proc. Amer. Math. Soc.（）–。L. Mao 和 N. Ding，《FP-投射维数》，Comm. in Algebra.（）–。2, 5[5] 26 1970 561 566 2 C. [6] **33** Megibben，《绝对纯模》，Proc. Am. Math. Soc.（）-。A. Mimouni，《每个理想都是一个 w-理想的整环》，Commun. Algebra（2005年），1345–1355。4[7] B. Stenstr¨om，《相干环与 FP-内射模》，J. Lond. Math. Soc. 2(2)（1970年）323–329。2[8] Y. Y. Pu、W. Zhao、G. H. Tang 和 F. G. Wang，《w_∞-投射模与 Krull 整环》，Commun. Algebra，第 50, 8, 2022 3390 3402 2, 5 卷第（）期，–。[9] M. Tamekkante、R. A. K. Assaad 和 E. Bouba，《DW 环札记》，Inter. Elec. J. of Algebra. 第 **25** 2019 5 卷（）。M. Tamekkante、M. Chhiti 和 K.Louartiti，《弱投射模与维数》，[10] Int. J. of Algebra. **5** 2011 1219 1224 6 （）-。F. Wang，《关于 w-投射模与 [11] w w **4** 1997 1, -平坦模》，111 120 2 Algebra Colloq.（），第 - 期。[12] F. Wang，《有限表示型模与 w-相干环》，J. Sichuan Normal Univ. 33 2010 1 9 2, 4, 5 （）–。F. Wang 和 H. Kim，《交换环及其模基础》，（Springer Nature [13] Singapore Pte Ltd., 新加坡, 2016 1, 3, 4, 6, 7 ）。F. Wang 和 H. Kim，《投射模的两种推广及其应用》，J. Pure Applied Algebra 219 （2015 年） 2099-2123。[14] 2

[15] F. Wang 和 H. Kim, 《 w-内射模与 w-半遗传环》, 《韩国数学会杂志》 51 2014 3, 509 525 5, 6 （）第 – 期。F. Wang 和 H. Kim, 《相对 FP-内射模与相对 IF 环》, [16] Commun. Alge- bra, 第 49, 2021 3552 3582 4, 7 卷（）, -。F. Wang 和 R. L. McCasland, 《强 Mori 整环上的 w-模》, [17] Comm. Algebra 25 4 1285 1306 1997 1 （）, -（）。F. Wang 和 L. Qiao, 《 Krull 整环的同调刻画 II》, Comm. in Algebra.（ 2019 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ）。F. Wang 和 L. Qiao, 《交换环 [18] 的 w-弱整体维数》, 《韩国数学会通报》 52 2015 4, 1327 1338 2, 5 （）第 – 期。F. Wang 和 L. Qiao, 《 Kaplansky 定理的新版本》。[19] arXiv: 1901 02316 2, 7 。。F. G. Wang 和 [20] D. C. Zhou, 《Krull 整环的同调刻画》, 《韩国数学会通报》 55 2018 2, 649 657 2 （）第 – 期。S. Xing 和 F. Wang, 《 *Purity over Prüfer v-multiplication domains*》, 《代数及其应用杂志》第 [21] **16**, 5 1850100 2018 7 卷第（）期。H. Y. Yin、F. G. Wang、X. S. Zhu 和 Y. H. Chen, 《交换环上的 w-模》, [22] J. Korean. Math. Soc. 48(1)（2011年）207–222。[23] 1

Department of Mathematics, Faculty of Science, University Moulay Ismail Meknes, Box 11201, Zitoune, Morocco*Email address*: refat90@hotmail.com