arXiv:2301.00287v1 [math.GT] 31 Dec 2022

标记图镶嵌

Seonmi Choi* Sam Nelson†

摘要

我们利用标记图图示，探讨曲面链环的镶嵌图概念。我们为 ch 指数不超过 10 的曲面链环的镶嵌数建立了界限，其中一些情形下的界限是紧的。作为应用，我们使用镶嵌图增强无向曲面链环以及经典结与链环的 kei 计数不变量。

KEYWORDS: 镶嵌结、曲面链环、标记图图示、kei同态集增强2020 MSC: 57K12

1 引言

曲面链环 是平滑嵌入在 $\mathbb{R}^4$ 或 S^4中的紧曲面，也就是说，它们是在四维空间中打结或相互链接的曲面。与经典结相比，曲面链环包含更多不同的未打结对象拓扑类型——球面、环面、射影平面、克莱因瓶等——并且还包括可定向和不可定向两种情形。

在 [12],中引入的标记图图示 是带有标记顶点 的结图，这些顶点表示曲面链环的鞍点。满足某些温和条件的标记图图示确定了 $\mathbb{R}^4$中一个在环境同痕意义下唯一的曲面链环；标记图图示与吉川移动 共同构成一种便于对曲面链环进行组合计算的图示演算。此外，标记图图示及其Yoshikawa等价类提供了一种图示化方式，用于表示经典结与链环之间的配边。

经典结 K 的镶嵌图 是由方形瓷砖组成的矩形（通常为正方形）排列，其中包含交叉、弧或空白，使得这些弧连接起来后构成 K的图。镶嵌图曾用于[11] 定义量子纽结，即由镶嵌图生成的希尔伯特空间中的元素。

本文通过研究使用标记图图示表示曲面链环的镶嵌表示，初步探索将这些构造推广到曲面链环情形。我们为标记图镶嵌建立了一组拼块和吉川移动，并为 Yoshikawa 表中 ch 指数不超过 10 的每个曲面链环给出镶嵌图，从而建立了这些曲面链环镶嵌数的上界。作为一项应用，我们利用镶嵌表示为经典结与链环以及曲面链环定义了一种新的 kei 计数不变量增强。与镶嵌数类似，对于给定的曲面链环图示或经典结或链环图示，我们可以根据某种特定的序，计算这一新增强的不变量的上界。

本文结构如下。第 2 节回顾有关纽结镶嵌图和标记图图示的一些预备知识。第 3 节介绍标记图镶嵌，并得出一些结果，包括 ch 指数小于或等于 10 的可定向与不可定向曲面链环的镶嵌数上界，其中一些上界是紧的。第 5 节定义 kei着色镶嵌，并利用它们增强经典结与链环以及曲面链环的 kei 计数不变量。最后，第 6 节提出一些有待未来研究的问题。

*电子邮件：smchoi@knu.ac.kr。部分经费由韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划（2021R1I1A1A01049100）以及韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：2022R1A5A1033624）提供。

†电子邮件：Sam.Nelson@cmc.edu。部分经费由西蒙斯基金会合作资助 702597 提供。

2 预备知识

我们回顾纽结镶嵌图，并简述曲面链环、标记图图示及其相互关系。

2.1 曲面链环与标记图图示

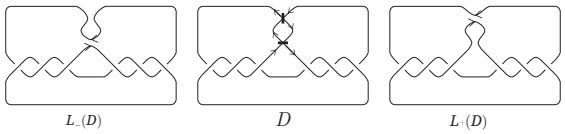
若干维流形（光滑地（分片线性且局部平坦地）嵌入于 $\mathbb{R}^4$（或 S^4）中的闭曲面的像称为一个**曲面链环**。如果称其为**曲面纽结**，则其底层曲面是连通的。当底层曲面是可定向的时，曲面链环称为**可定向的**；否则称为**不可定向** 或**不可定向的**。一个**无定向的** 曲面链环，要么是不可定向的曲面链环，要么是未指定定向的可定向曲面链环。若存在一个保定向同胚 $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，使得 $h(F) = F'$，则两个曲面链环 F 和 F' 称为**等价的**。由于在研究中很难直接处理四维空间中的曲面链环，因此有许多用于描述曲面链环的实用方案。例如，断裂曲面图、标记图图示、运动图等。更多信息请参见 [2, 5, 6, 15]。

我们使用一种有效的工具来处理曲面链环，称为**标记图图示**。标记图是嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的空间图，其中可以有用线段装饰的四价顶点，如图所示。我们称这样的线段为**标记**，带有标记的顶点则称为**标记顶点**。

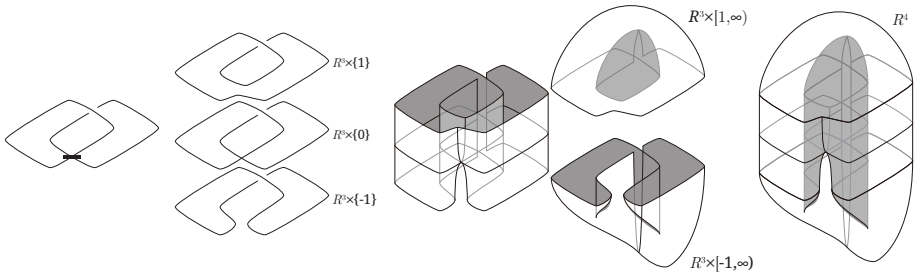
与标记顶点相连的边的定向有两种，如图所示。若标记图允许赋予定向，则称其为**可定向**；否则称其为**不可定向**。如果两个（有向）标记图在 $\mathbb{R}^3$ 中保持矩形邻域和标记（及其定向）不变的情况下环境同痕，则称它们等价。与链环图类似，我们可以定义标记图图示，即 $\mathbb{R}^2$ 中带有经典交叉和标记顶点的图示。

对于标记图图示 D中的每个标记顶点，沿着与其标记一致的方向（例如 $+$ 方向）进行拼接后得到的局部图示如图所示。沿相反方向（称为 $-$ 方向）进行拼接后，得到的局部图示则如图所示。因此，分别沿 $+$ 方向和$-$ 方向拼接 D 中的所有标记顶点，可以得到两个经典链环图，记作 $L_+(D)$ 和 $L_-(D)$。我们分别称 $L_+(D)$ 和 $L_-(D)$ 为 D的**正解析**和**负解析**。

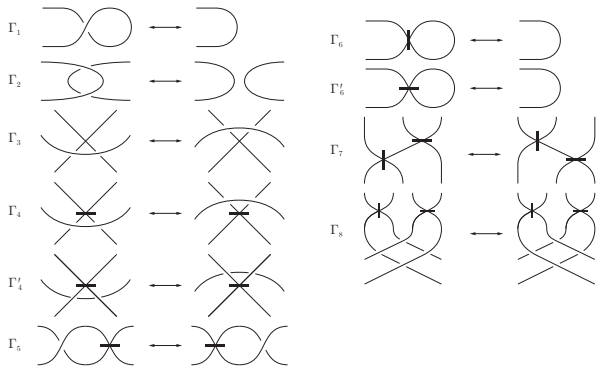
若两个解消 $L_-(D)$和 $L_+(D)$均为平凡，则称标记图图示 D 是**可容许** 的。若一个标记图具有可容许的标记图图示，则称该标记图是**可容许** 的。例如，很容易
检查如下旋转三叶结的标记图图示 D 是否可容许。



设 D 是一个可容许的标记图图示。由此可以构造一个曲面链环 $F(D)$，且除等价外，它由 D 唯一确定。反过来，每个曲面链环 F 都可以表示为一个可容许的标记图图示 D，也就是说， $F(D)$ 与 F 等价。更多详情请参见 [7, 12, 15]。例如，标记图图示与标准射影平面之间的对应关系如下图所示。



标记图图示的等价移动 Γ_1、$\cdots$、Γ_8 称为吉川移动 [15]。

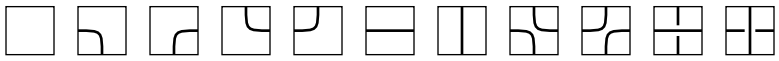


命题 1 ([8, 14, 15])。 两个标记图图示 D 和 D' 表示等价的定向曲面链环，当且仅当 D 可通过在 $\mathbb{R}^2$ 中的有限次环境同痕和吉川移动由 D' 得到。

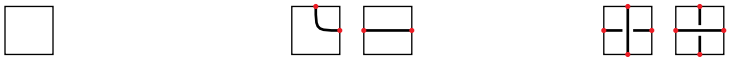
定义 1。 </style}设 是一个标记图图示。的ch 指数 记作 ch(K)，是 K中交叉点和标记顶点的总数。

2.2 镶嵌结

一个镶嵌（无向）瓦片是由带有弧、且可能有一个交叉的矩形之一，如下所示。

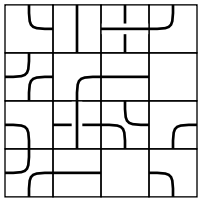


镶嵌瓦片集合 T_0，T_1，$\cdots$，T_{10} 记为 $\mathbb{T}^{(u)}$，在旋转意义下恰有 5 种瓦片。镶嵌瓦片上弧的端点称为该瓦片的连接点，它们也位于边的中心。 $\mathbb{T}^{(u)}$中有连接点数为 0、2 和 4 的瓦片。



0 个连接点　　2 个连接点　　4 个连接点

(m，n)-镶嵌是一个 $m \times n$ 矩阵，其元素为 $\mathbb{T}^{(u)}$ 中的镶嵌瓦片。如果 $m = n$，则简称为 n-镶嵌。(m，n)-镶嵌和 n-镶嵌的集合分别记为 $\mathbb{M}^{(m,n)}$ 和 $\mathbb{M}^{(n)}$。

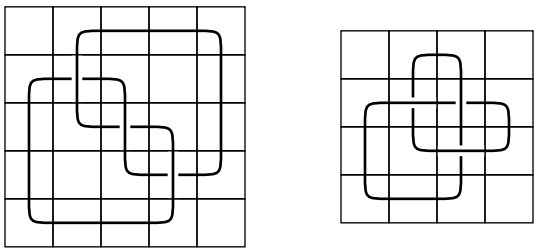


镶嵌中的两个拼块若在同一行或同一列中紧挨着彼此，则称它们相邻。如果一个镶嵌中的拼块，其所有连接点都与

相邻拼块的连接点相接，则称该拼块适当连接。也就是说，它的所有连接点都与相邻拼块的连接点相接。请注意，对于上图所示的 4-镶嵌，其 (2，2) 项拼块适当连接，但 (3，3) 项拼块未适当连接。

定义 2。结$(m，\ n)$-镶嵌是所有瓦片均适当连接的 $(m，\ n)$-镶嵌。所有结 $(m，\ n)$-镶嵌的集合是 $\mathbb{M}^{(m,n)}$ 的子集，记作 $\mathbb{K}^{(m,n)}$。如果 $m = n$，则称其为结 n-镶嵌，其集合记作 $\mathbb{K}^{(n)}$。

例 1。三叶结 3_1 有一个结 5-镶嵌和一个 4-镶嵌，如下所示。



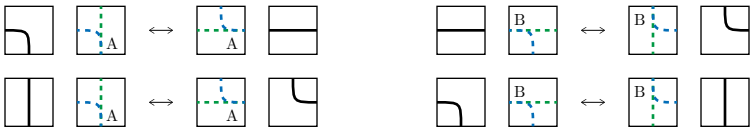
对于镶嵌结的等价，利用镶嵌瓦片可以定义平面同痕变换和 Reidemeister 变换。定义这些变换需要非确定性瓷砖，如下所示：



每个非确定性瓷砖代表两种类型的瓷砖。

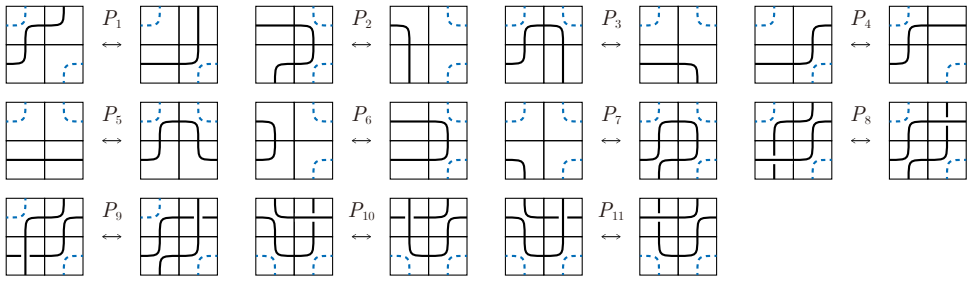


标记为相同字母 A 或 B 的非确定性瓷砖是同步的。

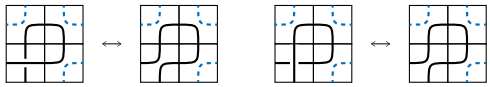


镶嵌结的等价变换包括 11 个平面同痕变换、2 个 Reidemeister I 型变换、4 个 Reidemeister II 型变换和 6 个第三类 Reidemeister 变换。

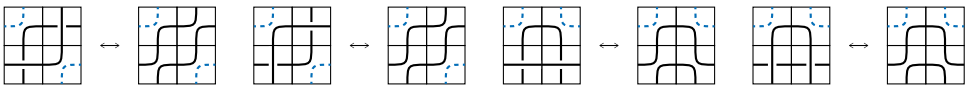
0. 平面同痕变换：11 种



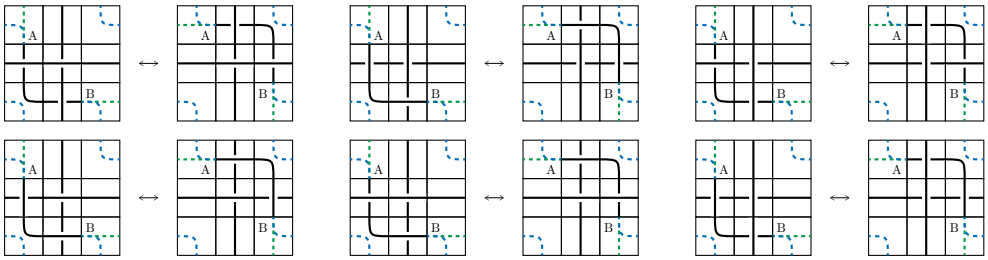
1. Reidemeister I 型变换：2 种



2. Reidemeister II 型变换：4 种



3. 第三类 Reidemeister 变换：6 种



所有镶嵌移动都是集合 $\mathbb{M}^{(n)}$ 中的 n-镶嵌上的置换。事实上，它们也属于集合 $\mathbb{K}^{(n)}$ 中的纽结 n-镶嵌的所有置换所构成的群。

定义 3. 环境同痕群 $\mathbb{A}(n)$ 是由所有平面同痕变换和所有 Reidemeister 变换生成的、集合 $\mathbb{K}^{(n)}$ 上的所有置换所构成的群的子群。

若存在 $\mathbb{A}(n)$ 中的一个元素将 M 变换为 M'，则称两个 n-镶嵌 M和 M'为同一纽结 n类型，记作 $M \overset{n}{\sim} M'$，。若存在一个非负整数 k，使得两个 n-镶嵌 M 和 M' 是同一纽结类型

$$i^k M \overset{n+k}{\sim} i^k M',$$

其中 $i\colon\ \mathbb{M}^{(j)} \to \mathbb{M}^{(j+1)}$ 是通过添加一行和一列仅由空瓦片组成的拼块来实现的镶嵌图嵌入。在 [11], , Lomonaco 和 Kauffman 猜想驯结理论等价于纽结镶嵌图理论；在 [9], , Kuriya 和 Shehab 证明了该猜想。

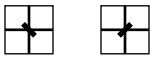
命题 2. 设 K 和 K' 分别是两个温和纽结 k 和 k'的纽结镶嵌图。那么，当且仅当 k 和 k' 具有相同的纽结类型时， K 和K' 具有相同的纽结镶嵌图类型。

定义 4. 纽结（或链环） K的镶嵌数 记为 $m(K)$，它是满足以下条件的最小整数 n： K 可以表示为一个 n-镶嵌图。

显然，镶嵌数是结和链环的不变量。例如， 3_1 的镶嵌数是 4，这一点很容易证明。在论文 [13, 10], 中，他们计算了交叉点数不超过 8 的结的镶嵌数。

3 标记图镶嵌

令 $\mathbb{T}_M^{(u)}$ 表示由以下 2 个符号组成的集合，称为带标记的镶嵌（无向）拼块：



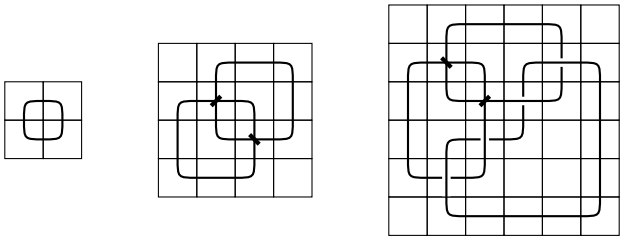
注意，这两个拼块经过旋转后相同，并且具有 4 个连接点。为了构造标记图图示的 n-镶嵌，将 $\mathbb{T}^{(u)} \cup \mathbb{T}_M^{(u)}$ 的所有拼块视为基本瓦片。



其他定义也可以采用类似镶嵌结的方式给出，例如连接点、相邻、适当连接。一个（m，n）-镶嵌是一个由拼块组成的 $m \times n$ 矩阵 $M = (M_{ij})$，其行和列的索引为 0、1、$\cdots$、$m-1$，其中每个（i，j）项 M_{ij} 都是 $\mathbb{T}^{(u)} \cup \mathbb{T}_M^{(u)}$ 的一个元素。（m，n）-镶嵌的集合记为 $\mathbb{M}_M^{(m,n)}$。若 $m = n$，则一个（n，n）-镶嵌是一个 n-镶嵌，其集合记为$\mathbb{M}_M^{(n)}$。

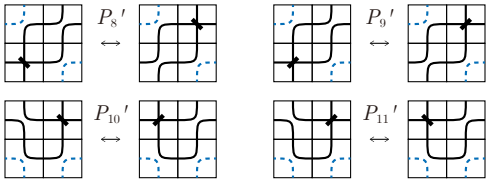
定义 5。一个标记图（m，n）-镶嵌是一个（m，n）-镶嵌，其中所有拼块均适当连接。所有标记图（m，n）-镶嵌的集合是 $\mathbb{M}_M^{(m,n)}$ 的子集，记为 $\mathbb{K}_M^{(m,n)}$。如果 $m = n$，则称其为一个标记图 n-镶嵌，其集合记为 $\mathbb{K}_M^{(n)}$。

示例 2。　标记图图示 0_1, 2_1^1 和 $6_1^{0,1}$ 的标记图镶嵌如下。

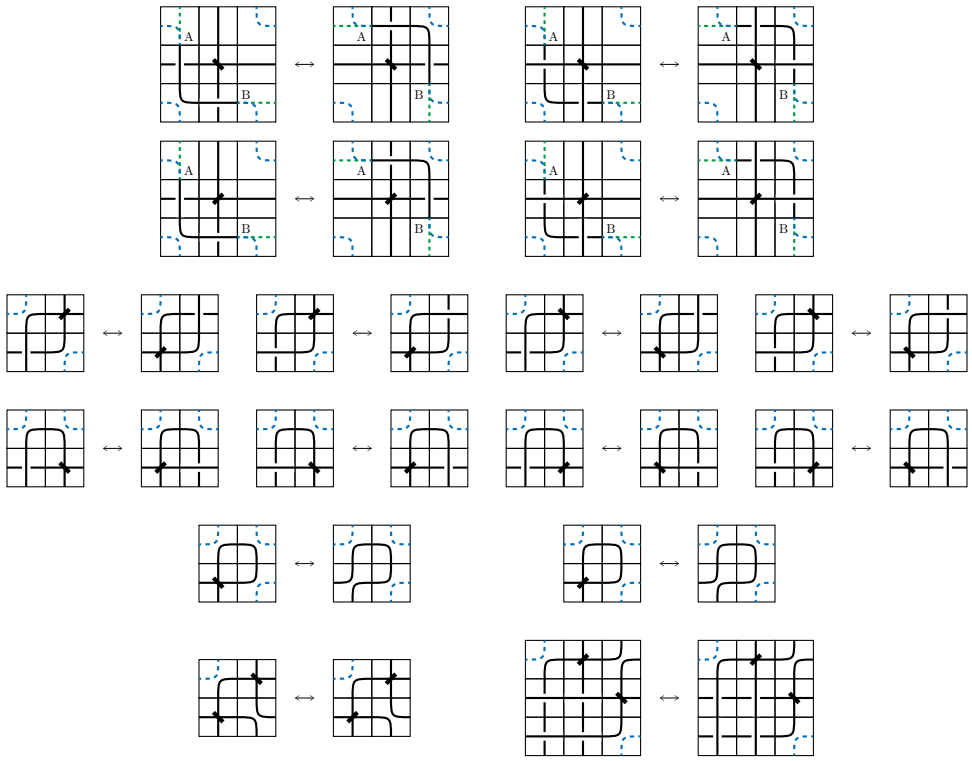


0_1　　$2_1{}^1$　　$6_1{}^{0,1}$

对于标记图镶嵌的等价，在 $\mathbb{T}^{(u)} \cup \mathbb{T}_M^{(u)}$ 中使用镶嵌瓦片，可通过平面同痕变换和吉川移动实现。用于平面同痕变换的镶嵌移动与结镶嵌移动相同 P_1，$\cdots$，P_{11}，此外还有 4 种移动 P_8'，P_9'，P_{10}'，P_{11}'，如下所示。



吉川移动 Γ_1， Γ_2， Γ_3 与 Reidemeister I、II、III 型变换相同。用于吉川移动的镶嵌移动 Γ_4， $\cdots$， Γ_8 如下所示。



所有标记图镶嵌移动都是集合 $\mathbb{M}_M^{(n)}$ 上的 n 镶嵌的置换。事实上，它们也属于集合 $\mathbb{K}_M^{(n)}$ 上的所有标记图 n 镶嵌的置换群。

定义 6. 环境同痕群 是由所有平面同痕变换和所有吉川移动生成的集合$\mathbb{K}_M^{(n)}$ 上所有置换群的子群。

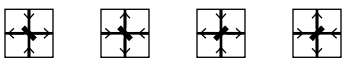
如果存在 $\mathbb{A}_M^{(n)}$ 中的一个元素将 M 变为 M'，则称两个标记图 n 镶嵌 M 和 M' 为同一标记图 n类型，记作$M \overset{n}{\sim} M'$，。如果存在一个非负整数 k，使得两个标记图 n 镶嵌M 和 M' 为同一标记图类型，则

$$i^k M \overset{n+k}{\sim} i^k M',$$

其中 $i : \mathbb{M}^{(j)} \to \mathbb{M}^{(j+1)}$ 是通过添加一行和一列仅由空瓦片组成的拼块得到的镶嵌图嵌入。因此，我们可以得到以下结果。

定理 3. 设 M 和 M' 分别是两个标记图 K 和 K'的标记图镶嵌。当且仅当 K 和 K' 等价时， M 和 M' 属于同一标记图镶嵌类型。

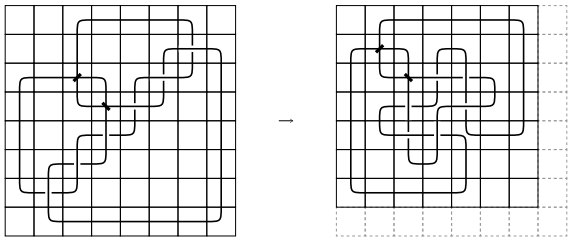
对于定向曲面链环，考虑 $\mathbb{T}^{(o)}$ 中的原始定向镶嵌瓦片（见 [11]），并按如下方式添加 4 个带标记的定向镶嵌瓦片。这样，我们就可以像处理定向结镶嵌一样处理定向标记图镶嵌。



给定定向时，适当连接的定义也只考虑定向匹配良好的情形。因此，定向标记图镶嵌也可以遵循相同的流程。

4 镶嵌数

标记图图示 8_1 可以通过镶嵌移动缩小其标记图镶嵌的尺寸。



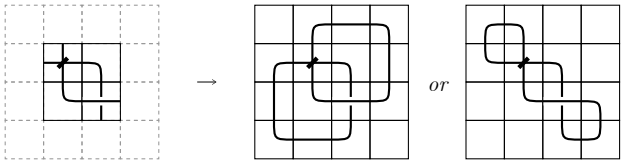
定义 7. 标记图图示 K的镶嵌数 记作 $m(K)$，它是使 K 能够表示为标记图 n-镶嵌的最小整数n 。

显然，标记图图示的最小镶嵌尺寸数是曲面链环的不变量。

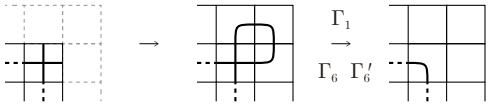
定理 4. 标记图图示的镶嵌数是曲面链环的不变量。

显然，标准球面 0_1 的镶嵌数为 2，而 2_1^1和 2_1^{-1} 的镶嵌数均为 4。

求镶嵌数时，可以使用 [13] 中引入的二重规则。对于给定的 (m,n)-镶嵌D，由于在 D 的边界上，相邻连接点恰好有两种连接方式，因此可以得到恰好两个标记图 $(m+2,n+2)$-镶嵌 $\widehat{D}^1$ 和 $\widehat{D}^2$，其中 D 除其边界上的连接点外均适当连接。 D 的入口拼块称为 $\widehat{D}^1$ 或 $\widehat{D}^2$的内部拼块 。显然，为满足适当连接条件，交叉和标记顶点必须位于内部拼块的位置上。



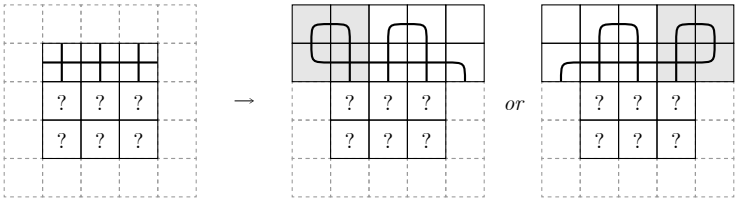
显然，如果四个内部角点之一有交叉或标记顶点，并且两个镶嵌中有一个根据二重规则形成扭结，那么分别可以通过 Γ_1 或 Γ_6，Γ_6'移除该交叉或标记顶点。



定理 5. 设 K 是一个标记图 K。若$\mathrm{ch}(K) \geq 7$，则 $m(K) \geq 6$ ，其中$\mathrm{ch}(K)$ 表示 K的 ***ch*** 指数。

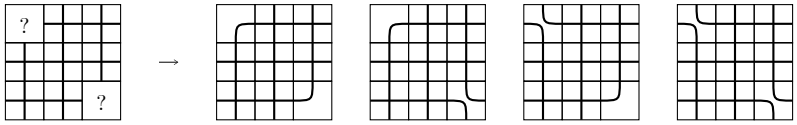
证明。 设 K 是一个 ch 指数大于或等于 7 的标记图。如果 ch(K) ≥ 10，那么 $m(K) \geq 6$，因为 5-马赛克图的内部拼块数为 9。类似地，容易验证，如果 ch(K) ≥ 7，则 $m(K) \geq 5$ 。

在 ch(K) $= 8$ 的情况下，我们将证明 $m(K) \neq 5$。假设 $m(K) = 5$，也就是说，存在一个表示 K 的标记图 5-马赛克图 D ，其 D 的 ch 指数为 8。由于 D 的内部拼块数量为 9，因此内部拼块共有 9 种类型。所有情形的内部瓦片边界中至少有 1 行，其上的所有镶嵌瓦片都是交叉点或标记顶点；除旋转外，情况如下。

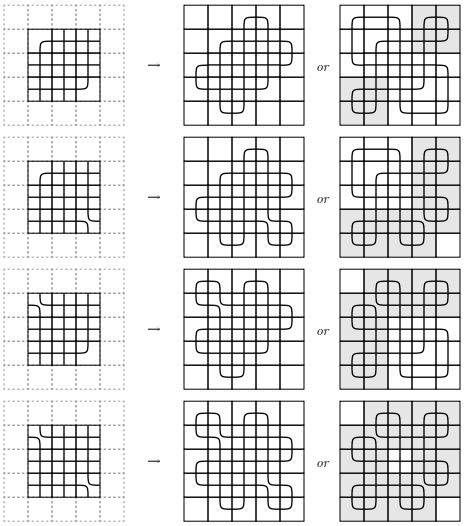


应用二重规则后，所得镶嵌总是至少包含一个扭结。因此，可以移除相应的交叉点或标记顶点。这与 ch 指数为 8 矛盾。因此， $m(K) \geq 6$。

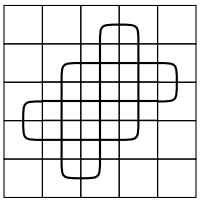
与 ch(K) $= 7$ 的情形类似，假设 $m(K) = 5$。设 D 是表示 K 的标记图 5-马赛克图，其 ch 指数为 7。其内部拼块共有 36 种情形，除 2 种外，都如上图所示，至少有 1 行。应用 ch(K) $= 8$ 情形中的相同论证，可知其中 34 种情形会导致矛盾。在剩余的 2 种情形中，每种都恰有两个角点，且没有交叉点和标记顶点。接下来，每种情形都有 4 个子情况，如下所示。



根据二重规则，每个子情形都有两个标记图镶嵌；其中一个总是至少有一个扭结。由于我们可以降低 D 的 ch 指数，因此这与 ch 指数为 7 且 $m(K) \geq 6$ 相矛盾。



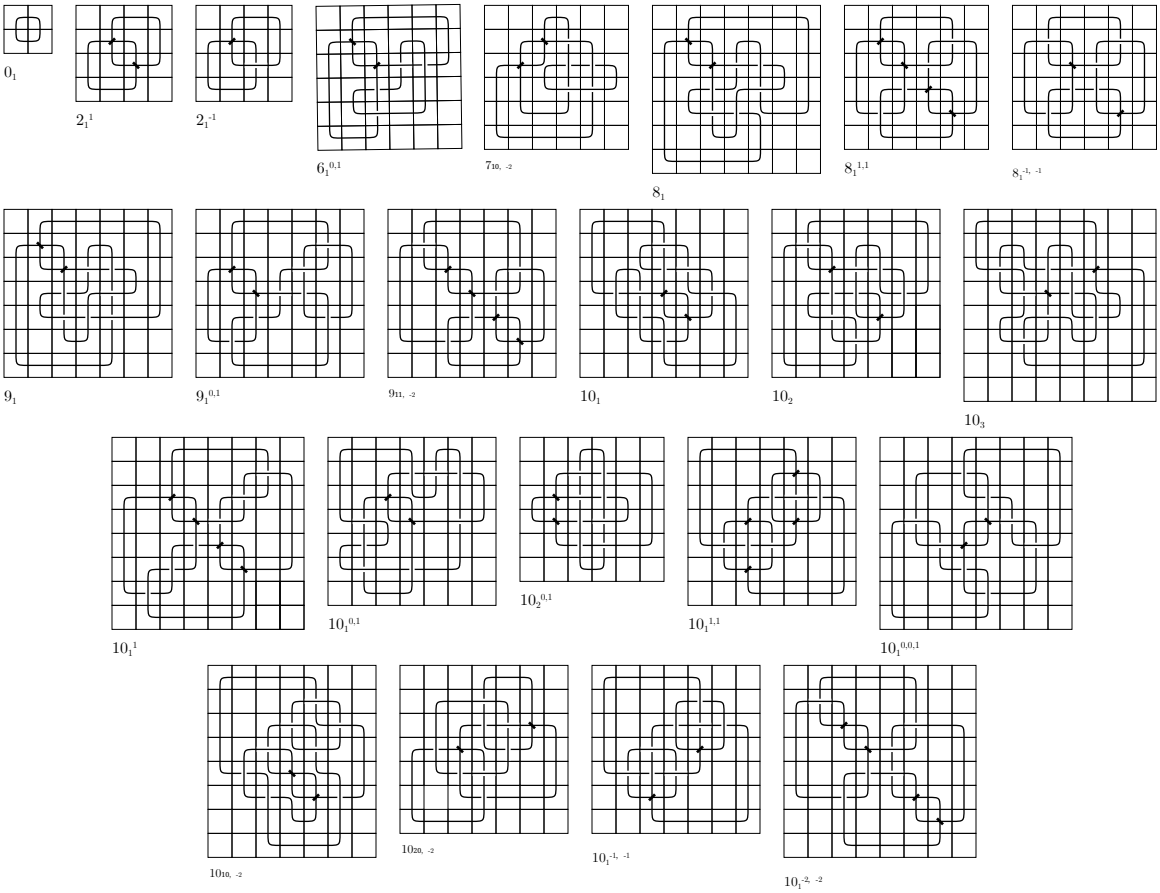
子情形 4 的其余图示与下图所示相同。



它恰好有一个连通分支。这与 $7_{0,\ 1}{}^{-2}$ 有两个连通分支相矛盾。因此， $m(K) \geq 6$。

□

以下图示是 ch 指数为 ≤ 10 的曲面链环的标记图镶嵌。如下所示，某些镶嵌图的尺寸为 6。根据定理5，我们知道它们的镶嵌数恰好为 6。



我们用一张表列出小 ch 指数曲面链环的镶嵌数，以此结束本节。

K	$m(K)$
0_1	2
$2_1^1, 2_1^{-1}$	4
$6_1^{0,1}$	5, 6
$7_1^{0,-2}, 8_1^{1,1}, 8_1^{-1,-1}, 10_2^{0,1}$	6
$8_1, 9_1, 9_1^{0,1}, 9_1^{1,-2}, 10_1, 10_2, 10_1^{0,1}, 10_1^{1,1}, 10_2^{0,-2}, 10_1^{-1,-1}$	6, 7
$10_3, 10_1^1, 10_1^{0,0,1}, 10_1^{0,-2}, 10_1^{2,-2}$	6, 7, 8

5 kei 着色镶嵌图

回顾一下，kei 是一个带有二元运算 $*$ 的集合 X，满足以下公理

(i) 对所有 $x \in X$, $x * x = x$, (ii) 对所有 $x,\ y \in X$,
我们有 $(x * y) * y = x$，并且 (iii) 对所有 $x,\ y,\ z \in X$,
我们有 $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$

.

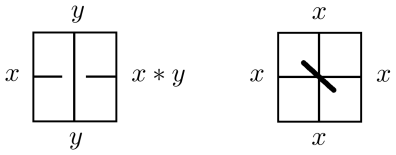
映射 $f : X \to X'$（在 kei 之间）是 ***kei*** 同态，如果它满足

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

对所有 $x,\ y \in X$。kei 也称为对合 ***quandles***；更多信息请参见 [3]。

例 3。每个群在运算 $x * y = yx^{-1}y$ 下都是一个 kei，称为该群的核心 ***kei***。

每个曲面链环 L（包括经典结和链环，它们可视为平凡配边）都有一个基本 ***kei*** $\mathcal{K}(L)$，其表示可以从曲面链环的图中读出。更准确地说，曲面链环的基本 kei 的生成元对应于片，也就是表示 L 的标记图图示的连通分支，其中我们在经典下穿处分割；此外，交叉处还满足如图所示的关系（直观地表示为镶嵌瓦片）



基本 kei 的元素是这些生成元上的 kei 字在由交叉关系和 kei 公理生成的等价关系下的等价类。基本 kei 的同构类是无向曲面链环的一个著名不变量。

给定一个有限 kei X，将 X 中的元素赋给定向标记图图示的片（即以经典下穿点或标记顶点为端点的线段），若该赋值在每个交叉处都满足上图所示的交叉条件，则称该图具有***kei* 着色**（也称为 X-**着色**）。

曲面链环 L 的图 D 的一个 X-着色由 kei 同态集合 $\mathrm{Hom}(\mathcal{K}(L)\ X)$ 中唯一的一个元素定义，反之亦然。对于每个有限 kei X，这个同态集都是曲面链环的不变量，并可据此提取有用的可计算不变量。最简单的例子是该集合的基数，称为 ***kei*** 计数不变量，记作 $\Phi_X^{\mathbb{Z}}(L) = |\mathrm{Hom}(\mathcal{K}(L)\ X)|$。

一般来说，kei 着色图（或等价地，同态集元素）的任何不变量都会产生一种不变量，称为 kei 计数不变量的**增强**。例如，[1] 中研究的著名**余循环不变量**，以及近期在 [4] 中提出的***kei* 模不变量**。

我们将通过以下方式使用镶嵌图来增强 kei 计数不变量。设 L 是一个具有镶嵌图 D 的曲面链环，X 是一个有限 kei。将 X 中的元素（称为“kei 颜色”）

赋给 D 中拼块上的每条弧，使颜色在连接点处匹配，并在交叉点和标记顶点处满足 kei 着色条件，由此得到一个 X-着色镶嵌图。若令 $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}(L)\ X)$ 为该着色所表示的同态集元素，则可将这个着色图记为 D_f。

定义 8. 设 L 是由标记图图示 D 表示的曲面链环， X 是有限 kei。对于每个 kei 着色 $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}(L)\ X)$，我们将 D_f 的*kei* 缺陷度 定义为 f 的像子 kei 的基数与 D_f 中出现的 kei 颜色数目之差。设 ϕ_f 为表示 f 的最小镶嵌数图示 D_f 上的最小 kei 缺陷度。那么，多重集

$$\Phi_X^{\mathrm{Mos},M}(L) = \{\phi_f \mid f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}(L), X)\}$$

就是 kei 同态集不变量的镶嵌缺陷度增强多重集 。为便于比较，我们也可以将其转换为多项式形式，对形如 u^{ϕ_f} 的多重集项求和，从而定义镶嵌缺陷度增强多项式

$$\Phi_X^{\mathrm{Mos}}(L) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}(L), X)} u^{\phi_f}.$$

由于 L 可能有许多不同但等价的最小镶嵌数图示，为了得到一个不变量，我们对每个着色，取 L 的所有最小镶嵌数图示（有限集合）上的最小 kei 缺陷度。由此构造可知， ϕ_f 值构成的多重集是曲面链环的不变量。从 L 的一个最小镶嵌数图示中，我们可以得到每个 ϕ_f 值的上界；通常，要计算该不变量，需要找出 L 的完整最小镶嵌数图示集合，这在计算上可能颇为困难。

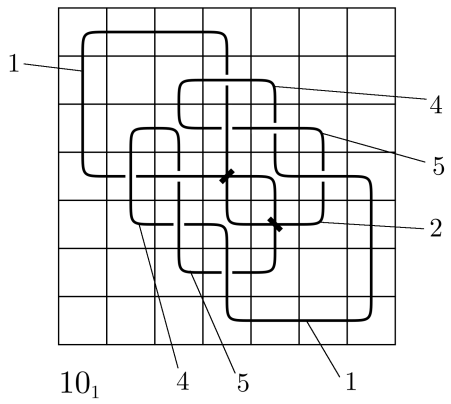
我们将非负整数系数多项式集合按指数的字典序排列。也就是说，比较两个多项式时，我们先比较它们的常数项；若常数项相同，则以一次项作为决胜项；若常数项和一次项都相同，则以二次项作为决胜项，以此类推。接着，找出一个能降低亏损度的新图，会将一个着色代表从较高指数移至较低指数，从而得到较小的字典序位置；因此，任何特定图都给出了该不变量的一个上界。

要证明这个上界是紧的，可以穷尽检验（我们在下面的示例中并未这样做）：对于所讨论的链环或曲面链环，所有镶嵌数相同或更小的其他镶嵌图，其代表非平凡同态集元素的着色具有相同的亏损度。

注 1。 我们注意到，也可以用交叉数或 ch 指数代替镶嵌数，类似地定义亏损度增强。一般来说，对于任何亏损度非零的图，我们都可以进行第二类 Reidemeister 变换，以显现像子 kei 中“缺失”的颜色。由于这些变换会增加 ch 指数，却不会改变镶嵌数，因此我们预期它们应当是不同的不变量。

例 4. 考虑曲面纽结 10_1 和 kei Core($\mathbb{Z}_5$)。我们的 Python 计算表明， 10_1有 25 种由 kei Core($\mathbb{Z}_5$) 给出的着色。其中包括五种亏格为零的单色着色

并且有20种非平凡着色，每一种在此图上都是满射，且缺陷度为1，例如



.

Then 由此图可得 kei 亏格多项式的一个上界 $5 + 20u$.

本节最后，我们将定义另一个易于定义但难以计算的、利用镶嵌和 kei 的曲面链环不变量。

定义9。 设 L 是一个曲面链环， X 是一个有限 kei。对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}(L)\ X)$ 和每个正整数 $n \geq 2$，令 ρ_f^n 为 L 的所有 n-镶嵌图中的最小 kei 缺陷度值。那么，序列 $\{\rho_f^n\}_{n=2}^{\infty}$ 就是 f 的 kei 亏格谱；与之前一样，我们还得到这类谱构成的不变量多重集。

注2。 我们注意到，经典结可以理解为标记顶点集合为空的曲面链环（即两个相同结的副本之间的平凡配边），因此，本节定义的不变量也是经典结和链环的不变量。

6 个问题

关于镶嵌曲面链环这一主题，仍有许多工作有待完成。寻找有效的方法来证明界的紧性很有意义，扩展文献 [11] 中的量子结构造也同样如此。

若曲面链环 L 是 X-亏格异质的，即至少有两个同态集元素，它们需要不同的最小镶嵌数图示才能实现其最小 X-亏格，那么称该曲面链环具有 X-亏格异质性。是否存在这样的曲面链环？对于给定的 kei X，具有 X-亏格异质性的链环中，最小的 ch-指数是多少？对于固定的曲面链环 L，是否存在某个有限 kei X，使其具有 L X-亏格异质性？

本文准备期间，Seiichi Kamada 在一次关于这一主题的报告中提出了一个问题：按 ch数对曲面链环进行排序，是否与按镶嵌数排序所得的顺序一致？例如，是否存在某个曲面链环，其最小 ch图的镶嵌数大于其最小镶嵌图的镶嵌数？如注 1 所述，由于存在一些变换可以改变 ch 指数而不改变镶嵌数，因此这两种衡量曲面链环复杂度的方式之间究竟有何关系，尚不明确。

参考文献

[1] J. S. Carter、D. Jelsovsky、S. Kamada、L. Langford 和 M. Saito。基于架代数上同调的打结曲线与曲面的状态和不变量。美国数学会电子研究通讯，5:146–156（电子版），1999年。

[2] S. Carter、S. Kamada 和 M. Saito。四维空间中的曲面。数学科学百科全书。施普林格出版社，2004年。[3] M. Elhamdadi 和 S. Nelson。拟群——纽结代数导论，学生数学文库第74卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2015年。[4] Y. Joung 和 S. Nelson。定向曲面链环的双拟群模不变量。美国数学会会刊，148(7):3135–3148，2020年。[5] S. Kamada。四维中的辫子与纽结理论。数学调查与专著。美国数学会，2002年。[6] S. Kamada。四维空间中的曲面纽结。施普林格数学专著。施普林格，2017年。导论。[7] A. Kawauchi、T. Shibuya 和 S. Suzuki。四维空间中曲面的描述。i. 标准形。神户大学数学研讨班笔记，10:75–125，1982年。[8] C. Kearton 和 V. Kurlin。四维空间中的所有二维链都位于一个通用三维多面体内。代数与几何拓扑，8:1223–1247，2008年。[9]T. Kuriya 和 O. Shehab。Lomonaco-Kauffman 猜想。《纽结理论及其影响》，23:1450003，20页，2014年。[10] H. J. Lee、L. Ludwig、J. Paat 和 A. Peiffer。纽结马赛克计数。《*Involve*》，11:13–26，2018年。[11] S. J. Lomonaco 和 L. H. Kauffman。量子纽结与镶嵌。载于量子信息科学及其对数学的贡献，第177–208页。美国数学会，2010年。[12] S. J. Lomonaco, Jr. 纽结的同伦群。I. 如何计算代数二型。《太平洋数学杂志》，95(2):349–390，1981年。[13] S. Oh、K. Hong、H. Lee 和 H. J. Lee。量子纽结与纽结马赛克数量。《量子信息处理》，14:801–811，2015年。[14] F. J. Swenton。关于二维纽结及四维空间中曲面的演算。《纽结理论及其影响》，10:1133–1141，2001年。[15] K. Yoshikawa。四维空间中的曲面枚举。《大阪数学杂志》，31:497–522，1994年。

Nonlinear Dynamics and Mathematical Application Center
Kyungpook National UniversityDaegu, 41566, Republic of Korea

Department of Mathematical Sciences
Claremont McKenna College
850 Columbia Ave.Claremont,
CA 91711 USA