arXiv:2301.00305v1 [math.CT] 31 Dec 2022

卡尔加里大学

李理论的函子语义

by

Benjamin MacAdam

论文

提交至研究生院，作为满足哲学博士学位要求的部分条件

计算机科学研究生项目

阿尔伯塔省卡尔加里
2022 年 6 月

© Benjamin MacAdam 2022

摘要

Ehresmann 在20世纪50年代引入可微群胚，可视为两条逐渐分道扬镳的研究路线的起点：多对象李理论（研究李代数丛和李群胚）与图式理论。本文借助切范畴，在这两条研究路线之间搭建桥梁，并从结构角度阐述李代数丛和李函子。

为此，我们发展了对合代数丛理论，它是李代数丛的一种切范畴图式。我们证明，李代数丛范畴恰好是光滑流形中的对合代数丛范畴，而 Weil 代数范畴恰好是对合代数丛的分类范畴。这表明，李代数丛范畴是一个切范畴函子范畴，而李函子则通过与一个函子进行前复合

$$\partial : \mathsf{Weil}_1 \to \mathscr{T}_{\mathsf{Gpd}},$$

将李代数丛和李函子纳入函子性语义的范畴 *cs.*

前言

本论文是作者的原创作品。

本论文项目源于对微分几何，尤其是力学的微分几何进行广泛理解的尝试。最初，我与 Jonathan Gallagher 一起探讨范畴论的富化视角如何与微分几何结构相关联；这一视角由 Garner(2018年提出。不过，本论文中的基本结构是在李理论背景下，通过与 Matthew Burke 的讨论和合作得出的。

第 1 章介绍切范畴理论，不包含新的结果。第 2 章最初是与 Matthew 合作的项目；由于时间限制，他最终不得不退出。尽管如此，在那之前，我们已经找到了证明光滑流形范畴中的微分丛是向量丛这一结论的基本证明结构（见定理 2.5.1）。本章目前的结构，尤其是对弱切余单子 $(T$ 的结合余代数的强调，$\ell)$ 以及与 Grabowski 先前关于欧拉向量场构造的工作（Grabowski 和 Rotkiewicz (2009）的紧密联系，均为原创工作。本章的基本结果见 MacAdam (2021）；不过，结果已作精简（最初曾有“强 微分丛”的概念，而在第 2.4 节中指出，所有微分丛都是强的），并且还提出了一些关于线性联络的新观察（定理 2.6.6）。

第 3 章改写自一篇与 Matthew 合写、关于对合代数丛的预印本（Burke 和 MacAdam(2019年）），而第 3.4 节则源于与 Richard Garner 的讨论（我们计划以合作成果的形式发表一篇基于这些结果、关于对合代数丛的新论文）。用对合映射扩充锚定丛这一构想完全出自 Matthew；对合代数丛与李代数丛在对象上的同构，则源自 Richard Garner 分享的计算（命题3.4.12）。本节中我个人的贡献，是将其与 Martínez(2001）的研究联系起来，并给出了对合代数丛与李代数丛之间态射的双射（定理 3.5.1）。

前三章为第 4 章更深入的结果提供了所需的背景。在关于李代数丛的研究中，Weinstein (1996）；Martínez(2001）；de León 等人(2005）指出，李代数丛的“延拓”表现得如同切丛。命题 4.5.1 通过证明延拓是李代数丛范畴上的第二切结构，使这一直觉得以精确表述。本章的主定理（定理 4.4.8）表明，切范畴 $\mathbb{C}$ 中的对合代数丛等价于切函子 (A, α) 从 Weil$_1$ 到 $\mathbb{C}$，且函子 A 保留横截极限，自然变换 α 是 T-笛卡尔的（定义 4.4.1）。这些是关于李代数丛的全新观察，均为作者的原创工作。

最后，第 5 章运用 Garner 对切范畴的富化视角（Garner (2018年）），将前四章的内容纳入富化范畴论的语言。本章的首批原创成果表明，微分丛和锚定丛是 $\mathscr{W}$-图式的模型（命题 5.2.6 和 5.2.10），其中 $\mathscr{W}$ 是切范畴的富化基底。接下来，运用 Bourke 和 Garner（Bourke 和 Garner (2019年）的富集理论框架，证明定理 5.4.14：对合代数丛是神经理论的模型，这是定理 4.4.8 的富化版本。论文最后以李实现定理 5.5.13作结，该定理为李微分提供了一种全新的刻画——

，并介绍了一种全新的构造方式：仅使用富化范畴方法，在“光滑群胚”范畴与“李代数丛”范畴之间构造伴随（这不同于 Crainic 和 Fernandes(2003年）采用的几何方法，也不同于 Sullivan (1977年）采用的同伦论方法）。

本文涉及数学两个领域中相对高深的主题：微分几何（李代数丛）和富化范畴论（富集神经构造）。我努力使本文尽可能自足，介绍了光滑流形范畴和切范畴，并附有一篇附录，介绍富化范畴论和局部可呈范畴论的基础知识。基础范畴论方面的内容（也就是说，任何能在MacLane(1988年）中找到的内容）以及微分学基础（参见任意一本微积分教材）均未加引用或介绍，所涉及的内容包括极限、伴随、单子和单子性定理，以及 Kan 扩张和余端的微积分。第4章使用了关于水平复合跨度的一些事实，但没有超出其基本定义。

致谢

首先，我要感谢我的导师 Robin Cockett，他指导了这个项目，并投入时间阅读各种预印本、与我一起梳理证明。我还特别感谢 Matthew Burke，他是这个项目的紧密合作者，并率先将切范畴应用于李理论；也感谢 Jonathan Gallagher 与我就切范畴进行了广泛讨论。我也很感谢 Rory Lucyshyn-Wright，他花了一个夏天教我富化范畴论；还要感谢 Kristine Bauer 多年来与我进行了许多有益的交流。此外，我要感谢漫游研讨班的所有成员，以及多年来参与友好讨论并给予反馈的其他人：Chad Nester、Prashant Kumar、J.S. Lemay、Priyaa Srinivasan、Cole Comfort、Daniel Satanove、Rachel Hardeman 和 Geoff Vooys。

最后，我要感谢我的父母和家人，也感谢我的妻子 Niloofar 在我撰写这篇论文期间给予我的支持。

谨献给我的妻子 Niloofar。

记号

我们先来看一张符号表:

记号	
C、D、... ...	一个（通常是切映射）范畴，作为数学的一般背景，记作 de- 使用 mathbb 表示
A、C、.....	作为数学对象处理的小范畴，记作 mathcal
A、B、.....	范畴中的对象以及函子。用大写字母表示
f，ϕ	范畴中的态射和自然变换：小写罗马字母以及 希腊字母
$f \circ g$	两个映射的复合 $g\colon A \to B, f\colon B \to C$（应用式记法）
π_i	从n重拉回i_{th}分量的投影 A_0 $q_0 \times_{q_1} \cdots \times_{q_n} A_n$ 或积 $\prod^n A_i$
$F.G$	两个函子的复合，$F\colon \mathrm{D} \to \mathrm{E}$，$G\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$（应用式记法）
$\phi.G$	自然变换的粘合
$\otimes$	幺半范畴中的张量积
$\boxtimes$	在定义 4.3.3 中引入的一种受限的跨度复合概念
T，p，0,$+$,ℓ，c	定义 1.3.2 中引入的任意切范畴的数据
D，$\odot$，0，$!$，δ	定义 1.3.7中引入的无穷小对象的数据
T^n	自函子 T的迭代应用
T_n	n 重拉回幂 $p\colon T \to id$对于切范畴，$T_p \times_{p_\circ} .p \times_p T$

我们还提供了一个范畴表：

记号	
SMan	光滑流形范畴
$\mathbb{C}^{\ell}$	切范畴中的提升范畴 $\mathbb{C}$，定义见 2.2.3
NonSing($\mathbb{C}$)	切范畴 $\mathbb{C}$ 中的非奇异提升范畴，定义见 Defini- 记号 2.3.1
PDiff($\mathbb{C}$)	切范畴 $\mathbb{C}$ 中的预微分丛范畴，定义于 定义 2.4.1(i)
Diff($\mathbb{C}$)	切范畴 $\mathbb{C}$ 中的微分丛范畴，定义于定义— 义 2.4.1(ii)
李锚丛范畴	李代数丛范畴，见第 3.1
InvAlgd($\mathbb{C}$)	切范畴 $\mathbb{C}$ 中的锚定丛范畴，见定义— 符号 3.2.1
Anc(A)	切范畴 $\mathbb{C}$ 中的锚定丛范畴，定义于 符号 3.2.1
$\mathrm{Anc}^{\mathscr{L}}(A)$	切范畴中具有选定延拓的对合代数丛范畴 $\mathbb{C}$
Weil_1	Weil 代数范畴，见第 4.1
W	Weil代数自然数集$[x]/x^2$
$\mathscr{W}$	保横向极限函子的范畴 $\mathrm{Weil}_1 \to$集合范畴，见 定义 5.1.1
Weil_1^n	定义 *5.2.8* 中使用的宽度为 n 的 Weil 代数范畴
Weil_1^*	由 $\{N, W\}$ 张成的 Weil_1 的全子范畴
$\mathscr{L}$	锚定丛及其所有延拓的 W-范畴分类 定义 5.4.12 中引入

目录

A摘要 . . . . . **ii**
Preface . . . . . **iii**
致谢 . **v**
献词 . **vi**
记号 n . . . . . **vii**
目录 . **viii**
1 切范畴 . **4**
1.1 微分学.51.2 光滑流形范畴.81.3 切结构.151.4 切范畴中的局部坐标.211.5 浸没.25

2 微分丛 . **29**
2.1 向量丛.302.2 切弱余单子的提升.342.3 非奇异提升.382.4 微分丛.412.5 范畴同构.442.6 微分丛上的联络.45

3 对合代数丛 . **48**
3.1 李代数丛.503.2 锚定丛.553.3 对合代数丛.633.4 对合代数丛上的联络.693.5 李代数丛范畴与对合代数丛范畴的同构.76

4 代数丛的 Weil 神经 .78
4.1 Weil 代数与切结构.804.2 切结构作为幺半作用.834.3 对合代数丛的 Weil 神经.874.4 对合代数丛的识别.974.5 延拓切结构.103

5 无穷小神经及其实现 . **107**
5.1 通过富集得到切范畴.1095.2 作为富集结构的微分丛和锚定丛.1135.3 富集神经构造.1175.4 神经单子与代数丛.1205.5 群胚的无穷小近似.125

6 结论与未来工作 .133
6.1 结论 . 133
6.2 未来工作.134

附录 .135参考文献 .140

引言

李群胚和李代数丛的研究可追溯至20世纪50年代末的 Charles Ehresmann 及其学生 Jean Pradines，他们以 Sophus Lie 最初关于将光滑对称性群应用于求解常微分方程的研究为基础（李(1893）。受偏微分方程的启发，Ehresmann (1959) 提出了可微群胚的概念，用以刻画光滑流形的内在对称性，这与由李群（光滑流形范畴中的群对象）或李群作用所给出的外在对称性形成对比。Pradines (1967) 将李函子（它将李群和李群作用映射为李代数和李代数作用）从外在对称性推广至内在对称性，并提出了李代数丛的概念。在此过程中，他指出了 Ehresmann 原始可微群胚定义中的一些不足，并由此提出了现代意义上的李群胚。

Ehresmann 对可微群胚的研究，开启了二十世纪下半叶微分几何领域的一项重要研究计划：研究李群胚和李代数丛（为区别于传统研究的“单对象”李群和李代数，这一领域也可称为多对象李理论）。20世纪80年代和90年代的多对象李理论研究，着重于推广李第二定理和 Cartan–Lie定理；用现代术语来说，这些定理指出李代数构成李群范畴的一个余反射子范畴，也就是说，李函子有一个全忠实左伴随（Mackenzie 和 Xu（2000）；Moerdijk 和 Mrˇcun（2002）；Nistor（2000））。这个左伴随通常称为李积分。在他们的著名论文中，Crainic 和 Fernandes（2003）找到了决定李代数丛能否积分为李群胚的确切条件。Weinstein（1996）开创了一项关于李代数丛和群胚上的经典力学的研究，拓展了 Poincarè 关于具有李群作用的空间上的力学以及欧拉–Poincarè 方程的研究（Poincaré（1901）；现代论述见 Marle（2013））；此后，Eduardo Martinez 及其合作者进一步发展了这一研究（de León 等（2005）；Martínez（2001）；Martínez（2018）；Fusca（2018））。

然而，Ehresmann 在可微群胚方面的工作标志着其研究重心的转变，他日益将注意力转向当时新兴的范畴论领域。20 世纪 60 年代和 70 年代期间，Ehresmann 在函子语义这一新兴领域发表了一系列颇具影响力的论文，发展了图式理论的形式体系。图式理论在数理逻辑中影响深远，发展至今已有约 40 年，并扩展到了句法/语义伴随Gabriel 和 Ulmer(2006年)、富化范畴论 Kelly (1982)以及广义极限学说 Adámek 等人 (2002。图式理论的影响至今仍可见于李理论之中：Kirill Mackenzie 及其合作者致力于发展双李代数丛、李代数丛群胚、双向量丛以及其他张量积理论（Mackenzie (1992，2011）。

本文旨在利用切范畴，为从李群胚到李代数丛的李函子提供一种结构性阐述 Cockett 和 Cruttwell (2014)，从而统一 Ehresmann 的多对象李理论与图式理论。切范畴基于 Kock 和 Lawvere 的合成微分几何（Kock (2006)、Lawvere (1979年）和 Weil 函子形式体系，对切结构进行句法描述（全面论述可参见 Kolár 等人 (1993年），而与

抽象切结构的明确联系见于 Leung(2017），这是微分几何中的另一条研究路线，与现代李理论并行发展（尽管二者也有所交流，例如 Kolár (2007））。近期研究将切范畴重新表述为一类富范畴(Garner(2018年）），从而使图式理论和函子语义中的现代技术得以应用于微分几何。通过这一研究，我们表明，切范畴的语言有助于阐明李代数丛和群胚上的经典力学，以及 Mackenzie 对向量丛和李代数丛的“Ehresmann 双丛”的研究。

概述

本论文的前三章建立在切范畴文献中的既有工作之上（例如，Cockett 和 Cruttwell （2017、2018年）；Lucyshyn-Wright （2018年）），并给出了微分几何结构的切范畴图式。这些结构与 Ehresmann 对图式的原始概念非常接近；它们被规定为图（范畴中的一组对象和箭头），以及一组必须交换的图表和必须是泛的锥；不同之处在于，现今这些数据还可以包含切函子 T以及切自然变换 p、0、 +、 ℓ 和 c。每个图式都附有一个证明，说明其在光滑流形中的模型范畴（我们通常将其记作 SMan）恰好就是它旨在建模的几何结构范畴。

第一章回顾切范畴的基本理论，尤其关注光滑流形范畴。介绍了切范畴文献中的首批“图式”示例，即微分对象和仿射联络，它们分别对向量空间和联络进行建模（Cockett 和 Cruttwell （2017、2018））。本章最后研究了切浸没，它们对经典微分几何中的浸没进行建模，也是第2 和3章中相关工作的一个有用示例。

第二章和第三章分别为向量丛和李代数丛构建切范畴图式。第 2 章拓展了以下观察：由 Grabowski 和 Rotkiewicz (2009) 指出，向量丛范畴是由非负实数 $\mathbb{R}^+$作用所构成的乘法幺半群作用范畴的全子范畴；随后应用欧拉向量场构造（定义2.1.8）。接着，基于一个态射，构建了向量丛的切范畴图式，称为微分丛 $\lambda: E \to TE$，并证明了 SMan 中的微分丛范畴与光滑向量丛范畴同构。第SMan 3 章引入3 对合代数丛，以对合映射取代李代数丛中的括号

$$\sigma : A_\varrho \times_{T\pi} TA \to A_\varrho \times_{T\pi} TA$$

（其中 $\varrho: A \to TM$ 是李代数丛的锚）。利用 Martinez 对李代数丛结构方程的表述（Martínez(2001)），我们再次得以证明范畴同构：李代数丛范畴与 SMan 中的对合代数丛范畴同构。这为微分几何结构与切范畴图式之间搭建了最初的桥梁，使得我们能够在第SMan4 章和第 5 章运用更精巧的技术4 和5。

第四章为李代数丛构造了一个句法切范畴，并证明李代数丛正是广义切丛。我们将这一结果称为 *Weil* 神经，因为它遵循与 Grothendieck 原始神经定理相同的结构，即 Segal (1974年) 的结构；在本例中使用的是由 *Leung*（2017）提出的切范畴表述。这一结果对研究李代数丛上的广义力学和几何结构具有重要意义，因为它为李代数丛范畴引入了一种新颖的切结构。这种新颖的切结构对应于 Poincarè/Weinstein/Martinez 对李代数丛上经典力学的刻画。

第五章也是最后一章介绍了 Garner(2018年提出的切范畴富化范畴视角，从而可以用富化图式重新表述第 2 章和第 3 章的工作

。 Kelly (2005)。我们构造了一个函子，将对合代数丛的句法范畴映射到切范畴中的群胚的句法范畴，从而以 Ehresmann 图式理论的思路给出了李函子的一个表示。李函子的句法版本是通过在李群胚范畴（或更一般地，切范畴中的群胚范畴）上构造另一种新颖的切结构建立的；该结构也与先前关于李群胚上的经典力学的研究相一致。最后，我们证明，在一个 局部可呈切范畴 中，可以利用左 Kan 延拓构造李函子的左伴随，我们称之为 李实现。

第1章

切范畴

切范畴是数学中趋同演化的一个例子：两条彼此无关、目标迥异的研究路线最终抵达了同一个终点，在此即为抽象微分几何的同一形式体系。较早的研究路线植根于微分几何本身，尤其是 Weil 对光滑流形切丛的代数刻画（Weil (1953）。Weil 的工作启发了 Kock 和 Lawvere 开创合成微分几何，这一理论见于同名著作 Lawvere(1979)；Kock (2006)，以及 Kolár 等人提出的 Weil 函子形式体系 Kolár 等人 (1993)。第二条较新的研究路线则以理论计算机科学为基础，起始于 线性逻辑 的发表，该著作由 Girard (1987) 撰写。Ehrhard 和 Regnier 注意到，某些线性逻辑模型中存在证明的“泰勒级数近似”概念；这促成了 Ehrhard 和 Regnier (2003) 对微分线性逻辑的开创。Blute、Cockett 和 Seely 研究了带有导数运算的线性逻辑模型的范畴语义——也就是说，他们辨识出了其内语言构成微分线性逻辑模型的那些范畴，并于 Blute 等人 (2006, 2009) 发展了微分的范畴论。

切范畴自然地出现在各条研究脉络中：一条脉络是将合成微分几何提炼为Rosický (1984)中的抽象切函子；较近的一条脉络则是 Cockett 和 Cruttwell 在研究笛卡尔微分限制范畴的流形范畴时，对抽象切函子作了进一步完善，见 Cockett 等人(2011)；Cockett 和 Cruttwell(2014年)。从某种意义上说，它们是将 Weil 对切丛作为自函子的刻画公理化的范畴；这种公理化方式能够捕捉考察某类内交换幺半群时高阶导数的组合结构（Cockett 和 Seely (2011)），具体内容将在第 4章中阐明。切范畴还将 Kock 和 Lawvere 的合成微分几何纳入富化范畴论的框架，这将在第 5章中探讨。

数学和计算机科学中处处可见切结构。例如，许多几何空间范畴都具有自然的切结构，如便利流形范畴（其对象是局部以便利向量空间为模型的流形；Kriegl 和 Michor(1997)）以及概形范畴（参见 Garner (2018年)例 2 中的 (ii) 点）。数理逻辑中的一个例子是 Köthe 序列空间范畴（Ehrhard(2002)），以及微分 λ 演算的范畴模型（Cockett 和 Gallagher(2019年)）。近来，切范畴和微分范畴已应用于可微编程和机器学习（Wilson 和 Zanasi(2021)），也用于理解 Johnson 和 McCarthy 的函子微积分Bauer 等人(2018年)。

本文沿袭合成微分几何的传统，运用切范畴的语言研究微分几何结构。因此，本章将阐述切范畴，并重点讨论光滑流形范畴。在新型切范畴的背景下拓展对这些形式结构的研究，是一项重要的工作，应作为未来研究的一个方向——

。第一节介绍笛卡尔微分范畴，将其作为多元微积分的范畴公理化。第二节介绍光滑流形范畴，并说明其切丛的两种刻画（运动学与操作性刻画）；第三节则确定运动学切丛中刻画抽象切结构的结构。第四节介绍一对结构，它们使微分对象与联络的切范畴中能够进行“局部坐标计算”。最后一节介绍切映射浸没。浸没是可微流形之间的一种可微映射，其微分处处满射；作为第2 章和3章内容的预览，本节将说明，在光滑流形范畴中，切映射浸没恰好就是浸没。第1.5节最初发表于MacAdam(2021)，也是本章唯一的原创内容。

1.1 微分学

与大多数合成微分几何的论述一样，例如 Kock (2006年)，从微分学入手是合理的——在本例中，即介绍微分的范畴论。近年来，范畴微分因其与机器学习的关系而受到相当多的关注 Cockett 等人 (2020)，并被应用于同伦论 Bauer 等人(2018年)。本节仅讨论 Blute 等人 (2009) 引入的基本结构，以及笛卡尔微分范畴的典型例子（有限维实向量空间及其间光滑映射所构成的范畴）。

定义 1.1.1。 *[定义 1.2.1 Blute 等人 (2009)]* 笛卡尔左加性范畴是一个笛卡尔范畴[1] $\mathbb{C}$，满足：

(i) 每个同态集 $\mathbb{C}(A,B)$ 都是一个交换幺半群，具有加法 $+_{AB}$和零映射 $0_{AB}:A \to B$（当上下文明确时，将省略下标 AB）。

(ii) 复合运算 $\circ$ 在左侧保留加法：

$$(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$$

(iii) 投影是一个加法映射（保留加法）：

$$\pi_i \circ (f+g) = (\pi_i \circ g \circ f) + (\pi_i \circ g)$$

其中，π_i表示积或拉回中第 i 个分量的投影。j

笛卡尔左加法范畴有多种实例——它们都符合相同的模式：每个对象都配备了一种非自然但相容的线性结构：

例 1.1.2。

(i) 任意范　具有双积的范畴是一个笛卡尔左加性范畴，其中每个映射都是加性的　　*e.*

(ii) 笛卡尔空间范畴 CartSp 的对象是有限维实向量空间，态射是它们之间的光滑映射，因此它是一个笛卡尔左加性范畴。”显然，从 $A \to B$ 出发的光滑映射在加法下封闭，投影是加性映射，并且 $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$。

[1] 我们采用标准记号：1 表示终对象，$\times$ 表示积，而 π_i 表示 i^{th} 投影。

(iii) 拓扑向量空间及其连续态射所构成的范畴是一个笛卡尔左加性范畴。

事实上，笛卡尔左加性范畴也可以等价地描述为这样的笛卡尔范畴：每个对象都具有一个相容的交换幺半群结构。

命题 1.1.3 (Blute 等人 (2009))。 以下各项等价：

(i) $\mathbb{C}$ 是一个笛卡尔左加性范畴

(ii) $\mathbb{C}$ 是一个笛卡尔范畴，且每个对象都具有一个选定的交换幺半群结构 $(A,\ +_A,\ 0_A)$并满足以下相容性条件：

$$\begin{array}{ccc} (A\times B)^2 & \xrightarrow{+_{A\times B}} & A\times B \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & \nearrow_{+_A\times +_B} & \\ A^2\times B^2 & & \end{array}$$

（其中 $\tau=((\pi_0\circ\pi_0,\ \pi_0\circ\pi_1),\ (\pi_1\circ\pi_0,\ \pi_1\circ\pi_1))$ 。

(iii) 存在一个具有双积的范畴 $\mathbb{C}^+$，以及一个对象上的双射子范畴包含 $i:\mathbb{C}^+,\to\mathbb{C}$，它创建积。

笛卡尔左加范畴为定义微分运算提供了合适的框架。回想一下，初等微积分中映射 $f\colon \mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 的通常导数可以写作

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

更一般地，对于映射 $f\colon \mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$，$f$ 在 x 处的 雅可比矩阵 写作：

$$J[f]:\mathbb{R}^n\to(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m):=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

然而，雅可比矩阵需要某种“矩阵”概念[2] 来表示从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$的线性映射——并非每个具有微分概念的范畴都支持这种运算。相反，方向导数：

$$D[f](x,v):=\lim_{d\to 0}\frac{f(x+t\cdot v)}{t}$$

给出了一种适当广义的微分概念，可扩展到线性映射空间 $A\to B$无法由范畴 [3] 中的某个对象表示的范畴。笛卡尔微分范畴通过笛卡尔左加性范畴上的一个组合子，将方向导数公理化。

[2]这在范畴逻辑文献中会被称为内 *Hom* 。[3]在自动微分的情形下，还值得注意的是，计算映射的方向导数$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的复杂度为 $2\mathcal{O}(f)$，而构造雅可比矩阵的复杂度为 $n\mathcal{O}(f)$，因此，单纯从实际计算的角度来看，方向导数是更合适的基本运算（关于前向模式自动微分的计算复杂度讨论，参见 Hoffmann (2016) 的第 5 节）。

定义 1.1.4。 *[定义 2.1.1，见 Blute 等人 (2009)]* 笛卡尔微分范畴是配备了一个组合子（例如，同态集上的一个函数）的笛卡尔左加性范畴

$$\frac{A \xrightarrow{f} B}{A \times A \xrightarrow[D[f]]{} B}$$

满足以下公理：

[CD.1] 可加性：

$$D[f+g] = D[f] + D[g] \qquad D[0] = 0$$

[CD.2] 对第二个变量可加：

$$D[f] \circ (g, h+k) = D[f] \circ (g,h) + D[f] \circ (g,k) \qquad D[f] \circ (g,0) = 0$$

[CD.3] 投影是线性的：

$$D[\pi_i] = \pi_i \circ \pi_1 \qquad D[id] = \pi_1$$

[CD.4] 配对：

$$D[(f,g)] = (D[f], D[g])$$

[CD.5] 链式法则：

$$D[g \circ f] = D[g] \circ (\pi_0, D[f])$$

[CD.6] 关于第二个变量是线性的：

$$D[D[f]] \circ ((a,0),(0,d)) = D[f] \circ (a,d)$$

[CD.7] 偏微分的对称性：

$$D[D[f]] \circ ((a,b),(c,d)) = D[D[f]] \circ ((a,c),(b,d))$$

例 1.1.5。 笛卡尔空间的范畴（例 *1.1.2*（*ii*）），CartSp，是典型的笛卡尔微分范畴。设 f： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，并考虑其在 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的雅可比矩阵，$J[f](x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$。定义微分组合子：

$$D[f] \circ (u,v) = J[f](v) \cdot u = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v)}{t}.$$

在 *Bauer 等人*（*2018年*）中，作者基于 *Johnson 和 McCarthy*（*1998*）的阿贝尔函子演算构造了一个笛卡尔微分范畴。

在 *Wilson 和 Zanasi*（*2021*）中，作者研究了一个笛卡尔微分范畴，其对象是 $\mathbb{Z}_2$-模，并将基于梯度的方法应用于学习布尔电路的参数。

每个笛卡尔微分范畴都具有线性的概念。这种线性概念严格强于加性——确实存在非线性加性映射的例子。

定义 1.1.6 (Blute 等人 (2009) 的定义 2.2.1)。 映射 f： $A \to B$ 是线性的，当且仅当 $D[f] \circ (0_{AB}, id) = f$。

我们将笛卡尔微分范畴 C 中的线性映射范畴记作 Lin(C)。范畴Lin(C) 具有双积，并且是 C 的笛卡尔微分子范畴。

引理 1.1.7 （Blute 等人（2009）中的推论 2.2.3）。 设 $\mathbb{C}$ 是一个笛卡尔微分范畴，并将其线性映射范畴记作 $\mathsf{Lin}(\mathbb{C})$。

(i) 线性映射保持加法。

(ii) 范畴$\mathsf{Lin}(\mathbb{C})$ 是$\mathbb{C}$ 的一个对象上的双射子范畴，且具有双积；包含$\mathsf{Lin}(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathbb{C}$ 创建积。

(iii) 每个具有双积的范畴都是笛卡尔微分范畴，其中

$$D[f]=f\circ\pi_1,$$

并且这个微分结构使包含$\mathsf{Lin}(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathbb{C}$ 保持左可加结构和微分组合子（也就是说，它是一个笛卡尔微分函子）。

1.2 光滑流形范畴

切范畴公理化了一种比微分学更一般的结构，其中的空间仅为“局部线性”。光滑流形范畴提供了历史上典范的例子，而本文相当一部分内容都涉及该范畴内部的结构，因此为这一背景设定一个工作定义似乎值得。我们遵循Tu(2011)，并允许流形的不同连通分支具有不同维数。

定义 1.2.1. *[Tu（2011）中的定义 5.5–5.7]*拓扑空间 M 上的一个坐标图是一个对 $(U_i,\phi_i{:}U_i\to\mathbb{R}^n)$，其中 U_i是 $U_i\subseteq M$ 的一个开子集，且 $\phi_i{:}U_i\to\mathbb{R}^n$是一个局部同胚。一个图册是由坐标图组成的集合$\{(U_i,\phi_i{:}U_i\to\mathbb{R}^n)|i\in I\}$（其中每个连通分支上的 n 固定），使得对于每个 $i,j\in I$，完成该图表的过渡函数 $\psi_{i,j}$

$$\begin{array}{ccc}\phi_i^{-1}(U_i\cap U_j) & \overset{\psi_{i,j}}{\dashrightarrow} & \mathbb{R}^n\\ \downarrow{\scriptstyle\phi_i} & & \uparrow{\scriptstyle\phi_j}\\ U_i\cap U_j & \xrightarrow{\subseteq} & U_j\end{array}$$

是一个光滑映射。一个光滑流形是配备了一个（极大[4]）图册的拓扑空间。光滑流形之间的一个态-射是拓扑映射 $f{:}M\to N$，且局部光滑——对于 M 上每一对坐标图 (U_i,ϕ_i)和 (V_j,θ_j)，示意见图 *1.1*。只要每个完成该图表的映射 $f_{i,j}$都是光滑的，映射 f就是光滑的

$$\begin{array}{ccc}U_i & \overset{f_{i,j}}{\dashrightarrow} & V_j\\ \downarrow & & \downarrow\\ M & \xrightarrow{f} & N\end{array}$$

光滑流形范畴 光滑流形范畴，SMan，是由光滑流形及其态射构成的范畴。

注 1.2.2。在第*2*章中，有些结果会隐含地使用单位分解论证，而这要求流形所基于的拓扑空间是豪斯多夫的，并且具有可数基（即它是第二可数的）。我们将避免直接提及这些性质，因此在光滑流形的定义中省略它们。

[4]关于子集包含。

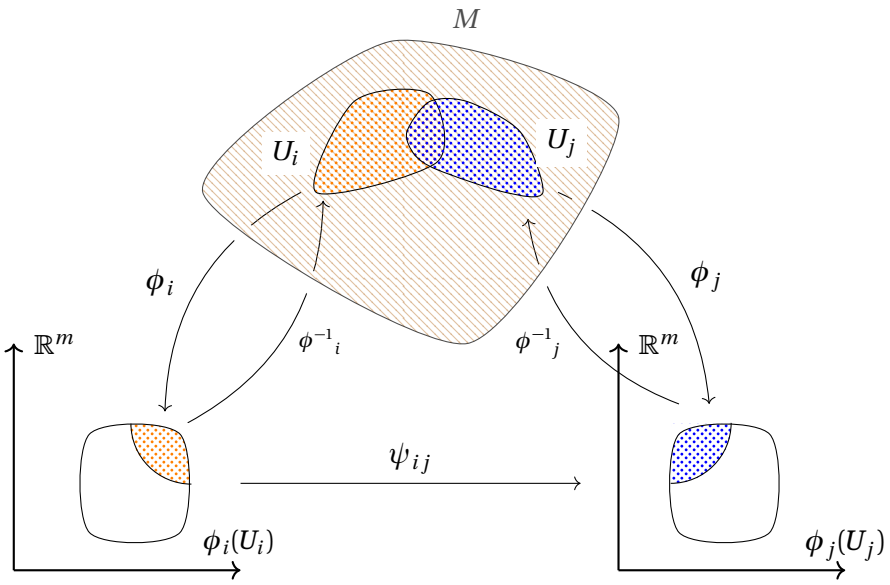
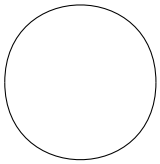


图 1.1：图册中的重叠图册（此 TeX 代码的版权归用户 Cragfelthttps://tex.stackexchange.com/a/388493/101171。）

示例 1.2.3。

(i) 每个向量空间 $\mathbb{R}^n$（其中 $n \in$ 自然数集）都具有典范光滑流形结构，其图册由一个坐标图构成（恒等映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$）。

(ii) 大多数没有奇点或锐利边缘的几何形状，都可以毫无问题地配备图册。例如，考虑圆：{(余弦(x), 正弦(x))： $x \in [-\pi, \pi)$}



对于任意足够小的 $\epsilon > 0$，都有两个来自 $I_\epsilon = (-\epsilon, \pi + \epsilon)$ 的坐标图；

$$\phi_0(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad \phi_1(t) = (\cos(t - \pi), \sin(t - \pi))$$

从而使圆成为光滑流形。

范畴论在微分几何中的应用不如在拓扑学或代数中广泛，这可能是因为光滑流形范畴（定义 1.2.1）的性质不太理想。光滑流形范畴“使用起来不方便”主要有以下两个原因：

- 两个流形之间的光滑映射集合 M,N通常无法构成一个光滑流形；因此，该范畴不是笛卡尔闭的。
- 流形范畴没有商或任意纤维积。

然而，光滑流形范畴存在一些极限，例如有限积。

命题 1.2.4(　　1.12 Kolár 等人 (1993年))。 范畴 SMan 光滑流形范畴具有有限积　　.

证明。 给定两个流形M、N，将它们的底层拓扑空间与积图取积

$$(\phi_i \times \psi_j) : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

□

光滑流形范畴——按照我们的定义，流形的不同连通分支可以具有不同维数——确实具有一类本文中会用到的（余）极限，即幂等元分裂。

定义 1.2.5 (Borceux 和 Dejean (1986))。 一个 幂等元 是一个自同态 $e : E \to E$，使得 $e \circ e = e$。幂等元的 分裂 由一对映射 $e = s \circ r$ 给出，使得 $r \circ s = id$。幂等元 e 存在分裂，当且仅当以下这对平行箭头具有一个（余）等化子：

$$E \overset{e}{\rightrightarrows} E$$

范畴$\mathbb{C}$ 的幂等元分裂（也称为该范畴的柯西完备化），是预层$\mathbb{C}^{op}$,集合范畴] 中由可表函子收缩而成的全子范畴。任何指向具有幂等元分裂的范畴的函子，都会经由范畴的这一包含进行分解，因此它是 C 在幂等元分裂下的自由余完备化。

命题 1.2.6(Lawvere (1989))。 光滑流形范畴是这样一个范畴的幂等分裂：其对象是笛卡尔空间的开子集，态射是光滑映射 $f : U \to V$。

范畴的幂等分裂中的幂等元也是基范畴中的幂等元，因此存在分裂。

推论 1.2.7。 光滑流形范畴在幂等元分裂下封闭：对于每个映射 $e : M \to M$，使得 $e = e \circ e$，都存在一对映射 $r : Q \to M, s : M \to Q$，使得 $e = s \circ r, r \circ s = id$。

光滑流形范畴上值得关注的主要构造——至少对于切范畴而言——是切丛。给定一个光滑映射f: $M \to N$，将其限制为坐标邻域之间的态射，因此可将其视为映射$f|_U$: $U \to V$，其中$U \subseteq \mathbb{R}^m$，$V \subseteq \mathbb{R}^n$。这给出了一个局部导数运算（记住，π_i表示从积$\prod^n A_i$出发的i_{th}投影）[5]

$$\frac{D[f|_U] : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,}{(f|_U \circ \pi_0, D[f|_U]) : U \times \mathbb{R}^m \to V \times \mathbb{R}^n.}$$

切丛使这一构造成为全局构造；也就是说，存在一个函子T: SMan → SMan，它给出一个对应关系

$$T.M \xrightarrow{T.f} T.N$$

在 M、N 的坐标片上与局部导数一致。

[5]这里的措辞原本含糊不清，后来已经修正。

定义 1.2.8 (Kolár 等人 (1993年))**.** 将流形上的光滑函数代数记作 $C^\infty(M) := \mathsf{SMan}(M, \mathbb{R})$. 光滑流形 M 上切向量的集合$\mathsf{SMan}(\mathbb{R}, M)/\cong$ 由曲线$\mathbb{R} \to M$ 构成，并满足如下等价关系：对于一对曲线 $\phi, \theta : \mathbb{R} \to M$，$\phi \cong \theta$ 当且仅当$\phi(0) = \theta(0)$ 且对于每个$f \in C^\infty(M)$，

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x}(0) = \frac{\partial f \circ \theta}{\partial x}(0).$$

集合范畴$\mathsf{SMan}(\mathbb{R}, M)/\cong$具有一个自然确定的光滑流形结构，我们称之为 M 上的切丛，TM。

例 1.2.9。

(i) 对于一个向量空间，经过点 $v \in V$ 的线性路径空间与 V 同构，因此 $TV \cong V \times V$。

(ii) 圆上的切丛与圆柱面微分同胚。这是因为一个经典结论：圆上的切向量必定垂直于其位置向量。

切丛将“局部导数”提升为一个全局定义的构造，因此切丛构造具有函子性。

命题 1.2.10. 切丛是光滑流形范畴上的保积自函子。

证明。 函子性可通过证明光滑流形态射保持定义切向量的曲线等价关系来说明:

$$\forall g \in C^\infty(M), \frac{\partial g \circ \phi}{\partial x}(0) = \frac{\partial g \circ \theta}{\partial x}(0)$$

注意，若 f: 自然数集 $\to M \in C^\infty$(自然数集)，且 $g \circ f \in C^\infty(M)$，则链式法则保证

$$\forall g \in C^\infty(N), \frac{\partial f \circ g \circ \phi}{\partial x}(0) = \frac{\partial f \circ g \circ \theta}{\partial x}(0)$$

要证明 T保积，只需证明曲线等价类在配对下封闭。首先注意，对任意 M和 $\phi \cong \theta : \mathrm{R} \to M$,

$$(\phi, id) \cong (\theta, id) : \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$$

给定一对曲线 es $\theta_M, \psi_M : \mathrm{R} \to M$，其中 $\theta_M \cong \psi_M$，对于 N也同样如此，这意味着

$$\begin{aligned} & f \circ (\phi_M, \phi_N) \\ = & f \circ (\phi_M \times id) \circ (id, \phi_N) \\ = & f \circ (\phi_M \times id) \circ (id, \theta_N) \\ = & f \circ (id, \theta_N) \circ (\phi_M \times id) \\ = & f \circ (id, \theta_N) \circ (\theta_M \times id) \\ = & f \circ (\theta_M \times \theta_N) \end{aligned}$$

所以 $(\phi_M, \phi_N) \cong (\theta_M, \theta_N)$。 □

R 对切向量的标量作用以及部分定义的加法，还赋予切丛纤维化 R-模的结构（也就是说，它是切片范畴 SMan/M中的一个 R-模；该范畴的对象是指向 M的态射 $f\colon X \to M$，而态射则是交换三角形）。

命题 1.2.11。 M 上的切丛在 SMan/M 中是一个$\mathbb{R}$-模，定义如下：设 γ, ω 是 M 上的切向量，并定义

- $p\colon\ TM \to M\ ;\ p(\gamma) = \gamma(0)$。
- $0 : M \to TM ; 0(m) = [r \mapsto m]$（常值映射 $\mathbb{R} \to M$ 将所有 $r \in \mathbb{R}$ 都映到 $m \in M$）
- $\cdot p : TM \times \mathbb{R} \to TM ; \gamma \cdot_p r = [x \mapsto \gamma(r \cdot x)]$
- $+ : TM\,{}_p\times_p TM \to TM := [\gamma], [\omega] \mapsto [\gamma + \omega]$（其中 $\gamma(0) = \omega(0)$ 周围的加法用局部坐标定义）。

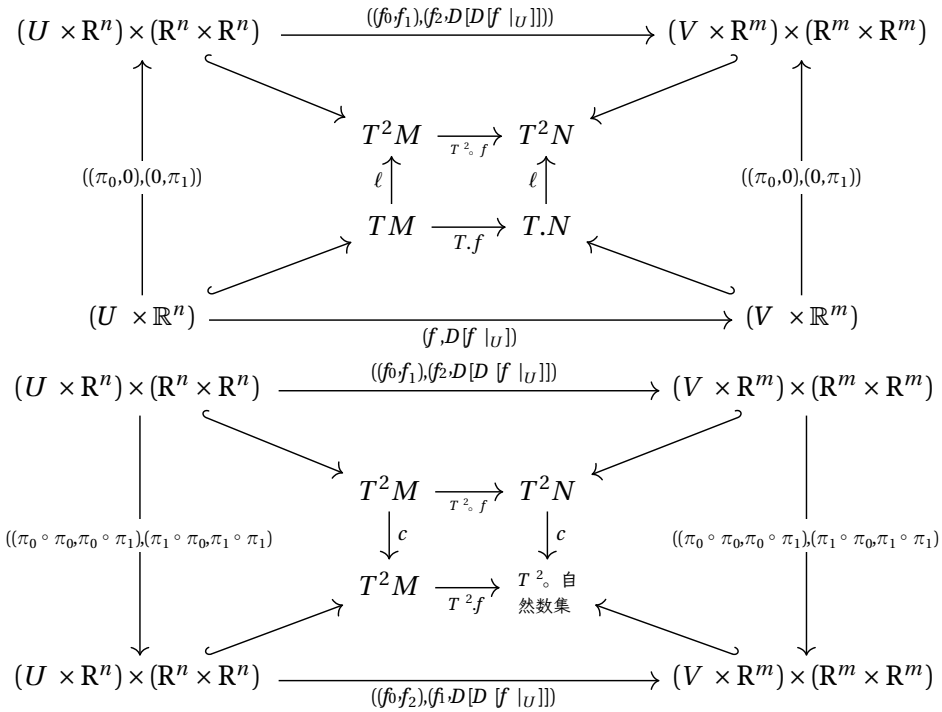
二阶导数涉及笛卡尔微分范畴中更精细的公理，即向量参数上的线性以及混合偏导数的对称性。首先，令$f|_U$为$f\colon M \to N$在局部坐标片$U \subseteq M$、$V \subseteq N$之间的映射限制，然后定义

$$f_0 = f|_U \circ \pi_0 \circ \pi_1, \quad ,$$

and

$$f_1 = D[f] \circ (\pi_0 \circ \pi_0, \pi_1 \circ \pi_0), \quad f_2 = D[f] \circ (\pi_0 \circ \pi_0, \pi_0 \circ \pi_1) \quad .$$

公理 $[CDC.6], [CDC.7]$ 于是给出：



这两个自然变换 ℓ 和 c——垂直提升和典范翻转——刻画了这些相干性。局部来看，ℓ 是一个在第二和第三个坐标中插入零元的映射，而 c 则翻转第二个和第三个参数，从而得到下一条命题中确立的相干性。为了刻画

切丛上的这些相干性，首先注意到，TM 上的一个切向量等价于M上的一个曲面等价类，

$$\phi \cong \theta : \mathbb{R}^2 \to M \iff \phi(0,0) = \theta(0,0)$$
$$\text{and } \forall f \in C^\infty(M), \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_i}(0,0) = \frac{\partial f \circ \theta}{\partial x_i}(0,0), i = 0,1$$

命题 1.2.12 (Cockett 和 Cruttwell (2014年))。 存在两个自然变换

$$\ell : TM \to T^2M; \ell([\gamma]) = [\gamma \circ (\pi_0 \cdot_{\mathbb{R}} \pi_1)] \quad c : T^2M \to T^2M; c([\gamma]) = [\gamma \circ (\pi_1, \pi_0)]$$

满足以下相干性：

(i) $\ell.T \circ \ell = T.\ell \circ \ell$[6]

(ii) 以下映射是纤维化$\mathbb{R}$-模的态射。

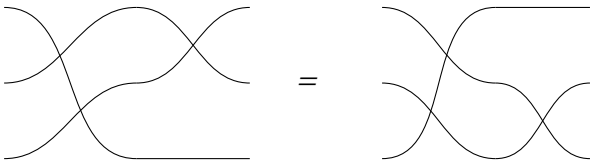
$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\ell} & T^2M \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p.T} \\ M & \xrightarrow{0} & TM \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\ell} & T^2M \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle T.p} \\ M & \xrightarrow{0} & TM \end{array}$$

(iii) $c \circ c = id$

(iv) $T_\circ c \circ c_\circ T \circ T_\circ c = c_\circ T \circ T_\circ c \circ c_\circ T$

(v) $c \circ \ell = \ell$ *(vi)* $T.c \circ c \circ T.\ell = \ell.T \circ c$.

观察 1.2.13. 等式 *(iv)* 称为 杨–巴克斯特 方程。它是对称幺半范畴中的相干条件之一，说明两个变量之间的扭转操作是相容的。我们可以将一个范畴上的自函子范畴视为严格幺半范畴，并使用弦图记法（例如参见 *Selinger(2010)*)。将映射 c 解释为扭转两条弦，相容性便成为



投影 $p : TM \to M$是局部平凡的：对于以 R^n 为模型的 M的每个连通分支，其中的每一点 m都属于某个开子集 U_m，使得 $p^{-1}(U_m) \cong U_m \times \mathrm{R}^n$。这一局部平凡性性质引出了以下泛性质条件。

命题 1.2.14. 下图是一个等化子：

$$TM \xrightarrow[\ell]{} T^2M \underset{0 \circ p \circ p}{\overset{T.p}{\rightrightarrows}} TM$$

[6]请回想一下，我们使用的是前言中介绍的 2-范畴记号

因此，下面推论中的图表是一个拉回：

推论 1.2.15. 将映射 $\mu : TMp \times_p TM \to T^2M$ 记作 $T.+\circ(\ell \times 0)$。下图是一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} TM_p \times_p TM & \xrightarrow{\mu} & T^2M \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T.p} \\ M & \xrightarrow[0]{} & TM \end{array}$$

这五个映射 (p、0、$+$、c、ℓ)，连同它们的相干性和泛性质，刻画了运动学 切丛，并将在下一节中公理化为切结构。不过，对于有限维光滑流形的切丛，还有一种等价刻画将在本文中发挥重要作用：操作性 切丛。我们首先需要定义流形上的向量场模，其中向量场本质上是定义在流形上而非笛卡尔空间上的常微分方程。

定义 1.2.16 (3.1,3.3of Kolár 等人 (1993年))。 流形 M 上的向量场 是投影 $p : M \to TM$ 的一个截面 X，其中 p 是投影 $: TM \to M$，且 $p \circ X = id_M$。流形 M 上的向量场集合记作$\chi(M)$，并利用纤维化 M)-模结构以及 p $\mathbb{R}$-模结构，赋予其一个 $C : TM \to M$:

$$X +_{\chi(M)} Y := +.M \circ (X, Y), \quad 0_{\chi(M)} := 0.M, \quad f \cdot_{\chi(M)} X(m) := f(m) \cdot_{TM} X(m)$$

其中 X、$Y \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M)$。

模 $\chi(M)$ 具有一个重要的泛性质，即作为$C^\infty(M)$-模——它恰好是$C^\infty(M)$的导子模：

$$\chi(M) = \{X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : \forall f, g \in C^\infty(M), X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)\}$$

命题 1.2.17 (Kolár 等人 (1993年))：存在一个 $C^\infty(M)$-模的同构：

$$\mathrm{Der}(C^\infty(M)) \cong \chi(M).$$

最后，我们注意到， $\chi(M)$上存在一个$C^\infty(M)$-李代数结构，并且有两种等价的定义。首先，这是括号的运动学定义，它是利用垂直提升的泛性质诱导出来的。给定X、Y上的向量场M，注意到

$$X = p.T \circ (T.Y \circ X -_{TM} c \circ T.X \circ Y), \quad 0 = T.p \circ (T.Y \circ X -_{TM} c \circ T.X \circ Y)$$

因此根据推论 1.2.15，存在唯一的映射 $[X、Y] : M \to TM$使得

$$(T.Y \circ X -_{TM} c \circ T.X \circ Y) = \mu([X, Y], X). \tag{1.1}$$

类似地，利用导子的反交换子，可以在$\mathrm{Der}(M)$ 上定义一个括号：

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)). \tag{1.2}$$

对于有限维光滑流形，这些括号是等价的。

命题 1.2.18。 *[Mackenzie (2013)]*回顾一下，环 R 上的李代数是一个 R-模 A，并配备了一个双线性映射

$$[-.-] : A \otimes A \to A$$

该映射是交替的，并满足雅可比恒等式：

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

该 t 来自方程 $\chi(M)$ （视为李代数）上的括号，与方程*1.1*和*1.2*中的括号一致。

1.3 切结构

本节通过公理化切丛，建立研究更一般的光滑流形范畴的范畴框架。切范畴最早见于Rosický （1984）。任意切范畴都比光滑流形范畴一般得多，并涵盖了计算机科学和逻辑中带有“切丛”的范畴实例，相关发展见Cockett 和 Cruttwell（2014年）。首先请注意，切范畴不再考虑上一节中的基环，而只关注切丛的纤维化交换幺半群结构。

定义 1.3.1. 范畴 $\mathbb{C}$ 中的加性丛是一个三元组 $E\,q \longrightarrow M, +: E\,q \times_q E \to E, \xi: M \to E$，它赋予 $(q, +, \xi)$ 交换幺半群结构，使其成为切片范畴 $\mathbb{C}/M$ 中的交换幺半群。若 $(q, \xi, +), (q', \xi', +')$ 都是加性丛，则一个丛态射

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ M & \xrightarrow{f_0} & M' \end{array}$$

若满足 $f \circ + = +' \circ (f \circ \pi_0, f \circ \pi_1)$ 且 $f \circ \xi = \xi' \circ f_0$，则称其为加性的。范畴$\mathbb{C}$ 中的加性丛范畴由$\mathbb{C}$ 中的加性丛及加法丛态射构成。

我们通常将加性丛$E_q \times_q \ldots {}^{\times_q} E$的拉回幂记作$E_n$，并使用中缀记法表示加法，因此 $+ \circ (a, b)$可写作$a + b$。在光滑流形范畴中，切丛函子给出一个性质良好的函子性向量丛。切范畴具有一个函子性的加性丛，并将光滑流形范畴中切丛的相容性和泛性质公理化。

定义 1.3.2 (Rosický(1984); Cockett 和 Cruttwell (2014年))。 切结构由一个函子 $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 以及满足以下条件的自然变换组成

$$p: T \Rightarrow id,\ 0: id \Rightarrow T, + : T_p \times_p T \Rightarrow T$$
$$\ell: T \Rightarrow T.T \quad c: T.T \Rightarrow T.T$$

满足以下 公理；我们称配备切结构的范畴为一个切范畴 .

[TC.1] 加性丛公理：

(i) p 的拉回幂存在，且在 T 下保持不变；将这些记为 T_n。*(ii)* 每个三元组 $(p.M: T M \to M, 0.M: M \to T M, +.M: T_2 M \to T M)$ 都是加性丛。

$$\begin{array}{ccc} T & T & T_2 \xrightarrow{+} T \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \uparrow{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle p\circ\pi_i}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} \\ id & id & id \end{array} \tag{1.3}$$

[TC.2] 对称性公理：

(i) 对合：

$$\begin{array}{ccc} T.T & \xrightarrow{c} & T.T \\ & \searrow\!\!\searrow & \downarrow{\scriptstyle c} \\ & & T.T \end{array} \tag{1.4}$$

(ii) 杨–巴克斯特：$c \circ_{} T \circ T \circ_{} c \circ c \circ_{} T = T \circ_{} c \circ c \circ_{} T \circ T \circ_{} c$

$$\begin{array}{ccccc} & & T.T.T & \xrightarrow{c.T} & T.T.T & & \\ & \overset{T.c}{\nearrow} & & & & \overset{T.c}{\searrow} & \\ T.T.T & & & & & & T.T.T \\ & \underset{c.T}{\searrow} & & & & \underset{c.T}{\nearrow} & \\ & & T.T.T & \xrightarrow[T.c]{} & T.T.T & & \end{array} \tag{1.5}$$

(iii) 自然性方程：

$$\begin{array}{ccccc} T.T & & \xrightarrow{\quad c \quad} & & T.T \\ {\scriptstyle T.\ell}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \ell.T} \\ T.T.T & \xrightarrow{c.T} & T.T.T & \xrightarrow{T.c} & T.T.T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & T \\ {\scriptstyle 0.T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T.0} \\ T.T & \xrightarrow{c} & T.T \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T.T_2 & \xrightarrow{(c\circ T.\pi_0, c\circ T.\pi_1)} & T_2T \\ {\scriptstyle T.+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle +.T} \\ T.T & \xrightarrow[c]{} & T.T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T.T & \xrightarrow{c} & T.T \\ {\scriptstyle p.T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T.p} \\ T & = & T \end{array} \tag{1.6}$$

[TC.3] 提升公理：

(i) 与加法的自然性：

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\ell} & T.T \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T.p} \\ id & \xrightarrow[0]{} & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T.T & \xrightarrow{T.\ell} & T.T \\ {\scriptstyle 0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 0.T} \\ T & \xrightarrow[0]{} & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_2 & \xrightarrow{(\ell\circ\pi_0, \ell\circ\pi_1)} & T.T_2 \\ {\scriptstyle +}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle +} \\ T & \xrightarrow[\ell]{} & T.T \end{array} \tag{1.7}$$

(ii) 余结合律：

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\ell} & T.T \\ {\scriptstyle \ell}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell.T} \\ T.T & \xrightarrow[T.\ell]{} & T.T.T \end{array} \tag{1.8}$$

(iii) 对称余乘法：

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\ell} & T.T \\ & \underset{\ell}{\searrow} & \downarrow{\scriptstyle c} \\ & & T.T \end{array} \tag{1.9}$$

(iv) 泛性质：对于 $\mu : = T \circ \ +\circ(0 \circ \pi_0,\ \ell \circ \pi_1)$，以下图表对所有 $X:$ 都是一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} T_2X & \xrightarrow{\mu} & T^2X \\ {\scriptstyle p\circ\pi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T.p} \\ X & \xrightarrow{0} & TX \end{array}$$

定义 1.3.3(Cockett 和 Cruttwell (2014年))。 当 $\mathbb{C}$ 是幺半范畴、T 是幺半函子，且 $+$、p、c、ℓ 是幺半自然变换时，切范畴称为幺半的。当 $\mathbb{C}$ 是笛卡尔范畴时，切范畴称为笛卡尔范畴；对于积而言，它是严格幺半切范畴。

记号 1.3.4. 在本文中，采用以下两个重要记号：

- Tn 表示 $p:T \Rightarrow id$ 的拉回幂（更一般地，En 表示 $q:E \to M$ 的拉回幂）；T 的迭代幂写作 Tn。

- 由于 Tn 拉回和函子 $F:A \to B$ 往往会形成很长的串，因此常采用一种 *2*-范畴记号，将函子复合写成带句点的形式：$Tn.F.T'm$。函子 T 作用于 $Tn.Tm.M$ 后得到的自然变换 c 通常写作 $T(cT_n.T_m.M)$，但在本文中将写作

$$T.c.T_n.T_m.M : T.T^2.T_n.T_m \Rightarrow T.T^2.T_n.T_m$$

而 *2*-胞腔的复合将用 $\circ$ 表示，并采用应用顺序，而非切范畴文献中通常使用的图示顺序。也就是说，复合

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$$

将写作 $f \circ g$，而不是 gf。

例 1.3.5. 应用第 *1.2* 节中的结果可知，光滑流形范畴是一个切范畴。回顾一下，若 M 是一个光滑流形，则对每个点 $m \in M$，都存在一个坐标片 $m \in U \to M$，使得 $U \cong U' \subseteq \mathbb{R}^n$。$U$ 上方的纤维 $p^{-1}(U)$ 局部同构于 $U' \times \mathbb{R}^n$，类似地，$(p \circ p)^{-1}(U) \cong U' \times (\mathbb{R}^n)^3$，因此：

$p: U \times \mathbb{R}^n \to U$	$(m, x) \mapsto m$
$0: U \to U \times \mathbb{R}^n$	$m \mapsto (m, 0)$
$+: U \times \mathbb{R}^n \times R^n \to U \times \mathbb{R}^n$	$(m, x, y) \mapsto (m, x+y)$
$\ell: U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$	$(m, x) \mapsto (m, 0, 0, x)$
$c: U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$	$(m, x, y, z) \mapsto (m, y, x, z)$

切范畴的研究与 Lawvere 的合成微分几何密切相关，它最初由 Lawvere (1979年) 引入，后由 Kock (2006年) 发展；Lavendhomme(1996)；Moerdijk 和 Reyes(1991)。合成微分几何的框架是一个拓扑斯 $\mathcal{E}$（就我们的目的而言，我们只需要一个完备的笛卡尔闭范畴），它配备了一个选定的环对象 R，并满足 *Kock-Lawvere* 公理：给定 R 中的幂零元素对象 $D = [d:R | d^2 = 0]$，以下映射是一个同构：

$$\alpha: R \times R \to [D, R];\ \ \alpha(a,b) = (d \mapsto a + db).$$

可以找到一类构成切范畴的对象：无穷小线性对象。

定义 1.3.6. 设$\mathbb{C}$是一个合成微分几何模型，其中环对象为 $(R, \cdot, 1, +, 0)$。合成微分几何模型中的对象 M 在满足以下公理时称为无穷小线性。

(i) 以下自然态射必须是同构：

$$[D(2), M] \cong [D, M]_{0^*} \times_{0^*} [D, M];\ where\ D(2) := [(d_0, d_1) \in D^2 : d_i \cdot d_j = 0].$$

(ii) M 满足性质 W（由*Kock*（*2006年*）归功于 *Gavin Wraith*），即以下图表是一个三元等化子：

$$[D,M] \xrightarrow{[\cdot,M]} [D\times D,M] \underset{[D\times 0\circ !,M]}{\overset{[0\circ !\times D,M]}{\rightrightarrows}} [D,M]$$

（我们经常在图表中使用 M 作为 id_M 的简写）。

一个无穷小对象将D推广为合成微分几何模型中的无穷小线性对象范畴中的对象。本论文采用的定义严格推广了Cockett 和 Cruttwell（2014年）给出的定义：在这里，我们使用对称幺半闭范畴，而不是笛卡尔闭范畴，以涵盖逻辑中的一些示例。

定义 1.3.7（定义 5.6Cockett 和 Cruttwell（2014年））。一个无穷小对象在对称幺半范畴中

$$(\mathbb{C},\otimes,I,\alpha,\rho,\sigma)$$

是一个元组 $(\odot\colon D\otimes D\to D,\ 0\colon I\to D,\ \epsilon\colon D\to I,\ \delta\colon D\to D\,(2))$（其中 $D\,(n)$ 表示 0 的推出幂）使得：

[IO.1]0 的推出幂 $D\,(n)$ 存在，并且 $\epsilon\circ 0=id_I$。

[IO.2] $\odot$ 是一个带零元的交换半群，因此以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} D\otimes D & \xrightarrow{-\sigma\to} & D\otimes D \\ & {\scriptstyle\odot}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\odot} \\ & & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D\otimes D\otimes D & \xrightarrow{\odot\otimes D} & D\otimes D \\ {\scriptstyle D\otimes\odot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\odot} \\ D & \xrightarrow[\odot]{} & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{(D,0)} & D\otimes D \\ & {\scriptstyle 0_D\circ\epsilon}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\odot} \\ & & D \end{array}$$

第三个图表表明，0 是吸收元，而不是单位（可以将0视为由乘法定义在集合 $[0,1)$ 上的交换半群中的元素）。

[IO.3] 映射 $\delta\colon D\to D\,(2)$ 使得 $(0\colon I\to D,\delta,\epsilon)$ 在余切片范畴 $I/\mathbb{C}$ 中成为一个交换余幺半群：

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\delta} & D(2) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle(0\circ\epsilon+_I D)} \\ & & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{-\delta\to} & D(2) \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D+_I\delta} \\ D(2) & \xrightarrow[\delta+_I D]{} & D(3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\delta} & D(2) \\ {\scriptstyle\delta}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle(\iota_1|\iota_0)} & \\ D(2) & & \end{array}$$

*[IO.4]*以下图表交换（$\odot$ 是余可加的）：

$$\begin{array}{ccc} D\otimes D & \xrightarrow{\odot} & D \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ D\otimes D(2) & \xrightarrow[(\iota_0\circ\odot|\iota_1\circ\odot)]{} & D(2) \end{array}$$

记号 $(f\mid g)\colon A+B\to C$ 表示推出/余积，与配对 $(f',g')\colon C\to A\times B$ 表示拉回/积互为对偶，正如 ι_i 与投影互为对偶。因此，$(f\mid g)\circ\iota_0=f$，正如 $\pi_0\circ(f,g)=f$。

[IO.5] 下图是一个余等化子：

$$D\otimes I \underset{D\otimes 0}{\overset{0\circ\epsilon\otimes 0}{\rightrightarrows}} D\otimes D \xrightarrow[(\odot|_I\epsilon\otimes D)\circ(\delta\otimes id)]{} D(2)$$

对称幺半范畴中，与无穷小对象相关联的切结构有两种$\mathbb{C}$。第一种依赖于无穷小对象的可指数化性，而第二种切结构定义在$\mathbb{C}$的对偶范畴上。第5.1 节中关于切结构的富化视角将阐明这两种切结构之间的关系。

命题 1.3.8。 设 $(\mathbb{C},\otimes,I,\alpha,\rho,\sigma)$ 为一个对称幺半范畴，并且

$$\odot : D\otimes D\to D, 0 : I\to D, \epsilon : D\to I, \delta : D\to D(2)$$

在$\mathbb{C}$中定义一个无穷小对象。

(i) $\mathbb{C}^{op}$上存在一个切结构，其中 $T = D\otimes(-)$。

(ii) 如果$\mathbb{C}$还是一个对称幺半闭范畴，那么它是一个切范畴，其中 $T = [D,-]$。

证明。

(i) C 的对偶范畴是一个对称幺半范畴：

$$(\mathbb{C}^{op},\otimes,I,\alpha^{-1},\rho^{-1},\sigma).$$

切函子是$D\otimes(-)$，投影是

$$p = D\otimes(-)\xrightarrow{0^{op}} I\otimes(-)\xrightarrow{\rho^{-1}}(-).$$

零映射定义为

$$(-)\xrightarrow{\rho} I\otimes(-)\xrightarrow{\epsilon^{op}} D\otimes(-).$$

$\mathbb{C}^{op}$ 中的加法由 C 中的余加法给出：

$$D(2)\otimes(-)\xrightarrow{\delta^{op}\otimes(-)} D\otimes(-).$$

提升由半群结构（以及幺半相干性）给出：

$$D\otimes(-)\xrightarrow{\odot\otimes(-)}(D\otimes D)\otimes(-)\xrightarrow{\alpha^{-1}} D\otimes(D\otimes(-)).$$

翻转也由幺半相干性给出，并结合幺半范畴上的对称性：

$$D\otimes(D\otimes(-))\xrightarrow{\alpha}(D\otimes D)\circ(-)\xrightarrow{\sigma\otimes(-)}(D\otimes D)\otimes(-)\xrightarrow{\alpha^{-1}} D\otimes(D\otimes(-)).$$

(ii) 首先，我们确定以下自然同构：

$$u : id\Rightarrow[I,-],\qquad b : [A,[B,-]]\Rightarrow[A\otimes B,-].$$

• 切函子是 $[D,-]$，而三元组 $(0: I\to D, \delta: D\to D(2), \epsilon: D\to I)$ 给出了加性丛结构

$$p:[D,-]\xrightarrow{0^*}[I,-]\xrightarrow{u} id, \qquad 0: id\xrightarrow{u}[I,-]\xrightarrow{[\epsilon,-]}[D,-]$$
$$+:[D(2),-]\xrightarrow{\delta^*}[D,-].$$

注意，由于 $[-,M]: C^{op}\to C$ 的连续性，我们有 $[D(2),M]\cong[D,M]_p\times_p[D,M]$。

• 提升由下式给出

$$\ell:[D,-]\xrightarrow{\odot^*}[D\otimes D,-]\xrightarrow{b^{-1}}[D,[D,-]].$$

• 典范翻转由下式给出

$$c:[D,[D,-]]\xrightarrow{b}[D\otimes D,-]\xrightarrow{\sigma^*}[D\otimes D,-]\xrightarrow{b^{-1}}[D,[D,-]].$$

无穷小对象的相干性和余普遍性质，以及以下对象的连续性

$$[-,M]:\mathbb{C}^{op}\to\mathbb{C}$$

进而导出切丛的相干性和普遍性质。证明至此完成。

□

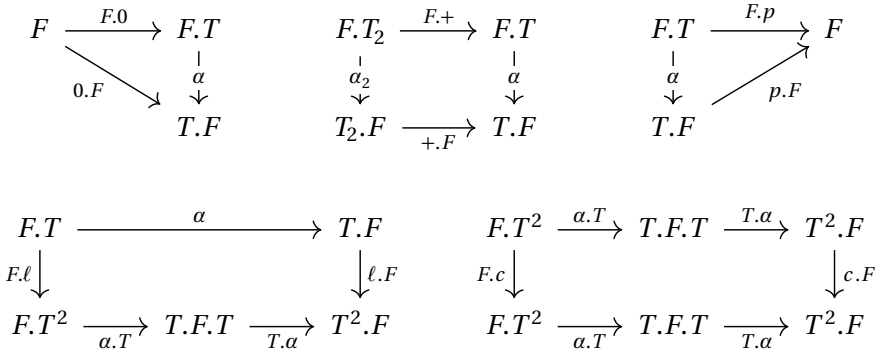
C 上的切结构 $\mathbb{C}^{op}$ 由无穷小对象导出，是 对偶 切结构于$\mathbb{C}$。在从富化视角考察切范畴时，我们将在第 4 章和第 5 章中重新讨论这一点。

回到合成微分几何，无穷小对象上的余普遍条件对应于无穷小线性（定义 1.3.6）。从某种意义上说，无穷小线性对象范畴是$\mathcal{E}$中最大的子范畴，其中 D 是一个无穷小对象。

推论1.3.9。 在一个合成微分几何模型 $(\mathcal{E}, R)$ 中，对象 $D=[d\in R\mid d^2=0]$ 是$\mathcal{E}$中无穷小线性对象范畴里的无穷小对象。

本文使用切范畴的2-范畴（Cockett 和 Cruttwell（2014年）的第2.3节），它形式化了切结构态射及其间2-胞腔的概念。这一2-范畴框架有别于合成微分几何的经典理论，在后者的文献中，切结构态射基本上仅以全忠实嵌入的形式得到讨论 SMan $\to$ Micrl(E)。

定义1.3.10. 设 $(\mathbb{C}, \mathbb{T})$，$(\mathbb{D}, \mathbb{T}')$ 是一对切范畴。若一对 $(F:\mathbb{C}\to\mathbb{D},\ \alpha: F.T\Rightarrow T'.F)$ 使下列图表可交换，则称其为切函子：



当 α 是自然同构时，切函子称为强；对于切范畴子范畴的包含，$\alpha = id$。笛卡尔切范畴之间的切函子 $(F,\ \alpha)$若 F 是同构幺半函子，且 α 是幺半自然变换，则称为笛卡尔切丛函子。

例 1.3.11。

(i) 典范翻转 c 上的相干性保证了，在任意切范畴上，$(T:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ c:\ T_{\circ}T\ \Rightarrow T_{\circ}T\ )$是一个强切丛自函子。

(ii) 给定一对切函子 $(A,\ \alpha):\ \mathbb{C}\to\mathbb{D}$，$(B,\ \beta):\ \mathbb{D}\to\mathbb{E}$，其复合

$$(B.A:\mathbb{C}\to\mathbb{E}, \beta.A\circ B.\alpha:\ B.A.T^C \xRightarrow{B.\alpha} B.T^D.A \xRightarrow{\beta.A} T^E.B.A\ )$$

是一个切函子。

(iii) 合成微分几何的一个模型 $(\mathcal{E},\ R)$在 存在一个从 *SMan* 到 严格且全忠实的切函子，映射到 E 的微线性空间范畴，SMan $\to$Micrl($\mathcal{E}$)时称为良适模型。合成微分几何良适模型的最初构造见*Dubuc (1981年)*；关于这类模型构造的最新论述，可参见*Bunge* 等人 *(2018年)*，或参见*Kock(2006年)* 的第 *3* 节。

定义 1.3.12。 切丛自然变换 γ 是切函子 $(F,\ \alpha)$，$(G,\ \beta)$之间的一个自然变换，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F.T(A) & \xrightarrow{\gamma_{TA}} & G.T(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_A} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{TA}} \\ T.F(A) & \xrightarrow{T\gamma_A} & T.G(A) \end{array}$$

若 F、G 是笛卡尔切丛函子，那么只要 γ 是一个等幺半自然变换，它就是笛卡尔的。

定义 1.3.13. 我们将切范畴、切函子和切自然变换构成的 *2*-范畴称为 TangCat。笛卡尔切范畴构成的 *2*-范畴记为 CartTangCat。

1.4 切范畴中的局部坐标

本节将介绍一些结构，以便使用“局部坐标”来推理高阶切丛。在笛卡尔微分范畴中，$T^n(A) = \prod_{2^n} A$；而对于开子集 $U \subseteq \mathrm{R}^m$，切丛分解为 $T_n U \cong U \times (\mathrm{R}^m)^{2^n-1}$。本节将介绍两种结构，使我们能够在任意切范畴中进行这类论证：微分对象和联络。

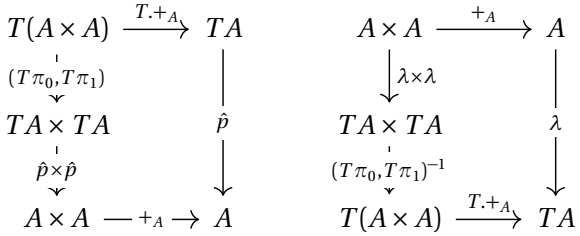
定义 1.4.1 (Cockett 和 Cruttwell (2018年))**.** *A* 微分对象[7] 是笛卡尔切范畴中的一个交换幺半群 $(A,\ +_A,\ 0_A)$并且存在一个截面-收缩对 $A \xrightarrow{\lambda} TA \xrightarrow{p} A$，使得 $T(A)$ 在交换幺半群范畴中构成一个双积：

$$A \oplus A \cong TA.$$

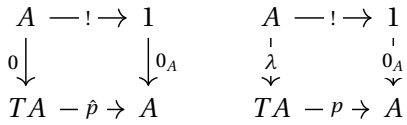
具体而言，微分对象是一个交换幺半群，配备了 $\lambda:\ A\to TA$，$p:\ TA\to A$，$p\circ\lambda = id$，使其满足以下公理：

[7]不要与 Barr (2002）中的 4.1 混淆。

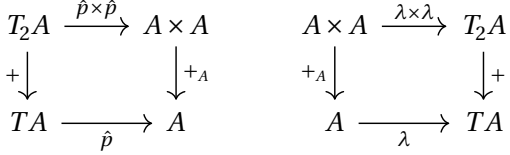
DO.1 $+$ 与 λ之间的相容性，$\hat{}p$:



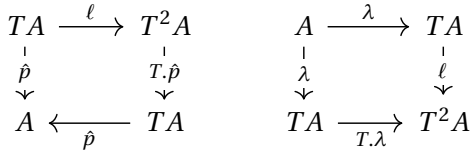
DO.2 0_A 与$0.A$之间的相容性:



DO.3 $+_A$ 与 $+.A$之间的相容性:



DO.4 λ 与$\hat{}p$之间的相容性，其中 ℓ:



微分对象 $(A, \lambda_A, \hat{}p_A, +_A, 0_B) \to (B, \lambda_B, \hat{}p_B, +_B, 0_B)$之间的映射 $f{:}A \to B$，若 f 保持提升和投影，则称其为线性的

$$(T.f \circ \lambda_A = \lambda_B \circ f)\ and\ (\hat{p}_B \circ T.f = f \circ \hat{p}_A).$$

根据Cockett 和 Cruttwell (2018年在第 3 节中的工作，只需检查 f保持 λ or $\hat{}p$ (每个条件都蕴含另一个条件)。

例 1.4.2。

(i) 在光滑流形范畴中，实数是一个微分对象，因为 $T.\mathbb{R} = \mathbb{R}[x]/x^2$，因此此处的提升映射为

$$\lambda(a) = 0 + a \cdot x, \qquad \hat{p}(a + b \cdot x) = b.$$

更一般地，赋予其典范光滑流形结构的有限维实向量空间，恰好是光滑流形范畴中的微分对象。提升映射利用 $T\mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]/x^2$定义，因此

$$V \xrightarrow{(0,1^{\mathbb{R}})} T(V \times \mathbb{R}) \xrightarrow{T \cdot_V} TV.$$

这等价于同构 $T_\circ V = R[x]/x^2 \otimes V$。

(ii) 笛卡尔微分范畴中的每个对象都有一个典范的微分对象结构，即 $TA := A \times A$。

经典地，光滑流形上每一点的切空间都是一个向量空间。对于微分对象，我们有一个类似的结果，见 Cockett 和 Cruttwell (2018年)。

引理 1.4.3. 设在一个笛卡尔切范畴$\mathbb{C}$中有如下拉回，且 T 的所有幂都保持它。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\iota} & TM \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ 1 & \xrightarrow{m} & M \end{array}$$

存在唯一的微分对象结构 $(E, \lambda, \hat{}p)$，使得 $\ell \circ \iota = T.\iota \circ \lambda$.[8]

微分对象之间有两类自然的态射：线性态射和“光滑”态射（即任意态射）。

定义 1.4.4 (Cockett 和Cruttwell (2018年))。 设 $\mathbb{C}$ 是一个笛卡尔切范畴。我们定义以下范畴：

(i) $\mathsf{Diff}(\mathbb{C})$ 是由微分对象和任意态射构成的范畴，因此，对于任意微分对象 A, B，有 $\mathsf{Diff}(\mathbb{C})(A, B) := \mathbb{C}(A, B)$。

(ii) $\mathsf{DLin}(\mathbb{C})$ 是微分对象和线性态射构成的范畴。

微分对象和光滑映射构成的范畴是一个笛卡尔微分范畴，将微分学展现为切范畴中的一种专门化逻辑。

命题 1.4.5 （Cockett 和 Cruttwell （2018年）**的第 3.5 节**）。设 $\mathbb{C}$ 是一个笛卡尔切范畴。那么：

(i) $\mathsf{Diff}(\mathbb{C})$ 是一个笛卡尔微分范畴，其中我们将微分组合子 D 定义为

$$\frac{A \xrightarrow{f} B}{A \times A \xrightarrow{\lambda \times 0} T(A \times A) \xrightarrow{T.+_A} T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B) \xrightarrow{\hat{p}_B} B}$$

（其中，λ_A，$+_A$ 是 A 上微分对象结构的提升和加法，而$\hat{}p_B$ 是 B 上微分对象结构的投影映射）。

(ii) 范畴之间存在等式，$\mathsf{Lin}(\mathsf{Diff}(\mathbb{C})) = \mathsf{DLin}(\mathbb{C})$，这意味着，在笛卡尔切范畴$\mathbb{C}$ 中，微分对象之间的态射是线性的，当且仅当它在笛卡尔微分范畴$\mathsf{Diff}(\mathbb{C})$中是线性的。

回想一下，若M是 R^n 的开子集，则开子集$U \subseteq \mathrm{R}^n$ 的二阶切丛可分解为

$$T^2(U) = T(U \times \mathbb{R}^n) = (U \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = T_3 U.$$

每个光滑流形的二阶切丛上都存在这样的分解；这种分解称为仿射联络[9]，并提供了一种方法，使我们能够在任意切范畴中将对象视为具有局部坐标来进行推理。

[8]原稿此处混入了一些图表记号，我已将其修正。[9]前缀“仿射”用于将这些联络与微分丛上更一般的联络区分开来；后者将在第 2.6 节介绍。

定义 1.4.6（Cockett 和 Cruttwell （2017））。在切范畴$\mathbb{C}$中，定义如下：

(i) 仿射垂直联络是一个映射 $\kappa: T^2M \to TM$，使得

a) κ 是一个垂直下降，即垂直提升 $\ell: TM \to T^2M$ 的一个截面，因此 $\kappa \circ \ell = id$；*b)* κ 与 T^2M 上的两个提升相容：$T.\kappa \circ \ell.T = T.\kappa \circ T.\ell = \ell \circ \kappa$。

(ii) 仿射水平联络是一个映射 $\nabla: T_2 \to T^2M$，使得

a) ∇ 是一个水平提升，即水平下降 $(p.T, T.p): T^2 \Rightarrow T_2$，使得$(p.T, T.p) \circ \nabla = id$；*b)* ∇ 与 $T_{2,T_2}: T.\nabla \circ (\ell \times 0) = \ell \circ \nabla$以及 $T.\nabla(0 \times \ell) = T.\ell \circ \nabla$ 上的线性结构相容。

(iii) 仿射联络是由 $(\kappa, \nabla)M$ 上的垂直联络和水平联络组成的一对，并满足以下相容条件：

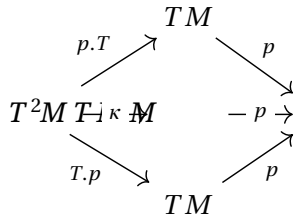
a) $T.+ \circ (+.T \circ (\ell \circ \kappa, T.0 \circ p.T), \nabla(p.T, T.p)) = id_{T^2M}$，

b) $\kappa \circ \nabla = 0 \circ p \circ \pi_i$.

若 $\kappa \circ c = \kappa$，则称仿射联络为无挠。

正如Lucyshyn-Wright（2018年）所指出的，垂直联络的数据足以定义完整联络。

引理 1.4.7 （Lucyshyn-Wright （2018年））。 完整联络等价于这样一种垂直联络：下图是一个纤维积：



例 1.4.8.

(i) 切范畴中的每个微分对象都有一个典范垂直联络，由 $(p \circ p.T, \hat{}p \circ T.\hat{}p)$ 给出。微分对象的态射会保持这个垂直联络。

每个光滑流形都可以非自然地选取一个黎曼度量。根据黎曼几何基本定理，与该度量相伴的联络是无挠的。（黎曼几何的标准参考文献均可，参见例如 *do Carmo (1992)* 。）

联络使得可以将关于切丛高次幂的论证转化为关于T拉回幂的论证。

观察 1.4.9. 设 M，N 各自都有联络 (κ_-, ∇_-)。映射 $T^2.f: T^2M \to T^2N$ 可用局部坐标写成 $T^2.f: T_3M \to T_3N$，如下

$$\begin{array}{ccc} T^2M & \xrightarrow{T^2.f} & T^2N \\ {\scriptstyle T.+ \circ (+.T \circ (\ell \circ \pi_2, T.0 \circ \pi_0), \nabla(\pi_0, \pi_1))}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle (p.T, T.p, \kappa_N)} \\ T_3M & \dashrightarrow & T_3N \end{array}$$

——其中 $T^2 f$ 定义为

$$(T.f \circ \pi_0, T.f \circ \pi_1, T.f \circ \pi_2 +_N \nabla[f](\pi_0, \pi_1))$$

对于 $\nabla[f] := \kappa_N \circ T^2 \circ f \circ \nabla_M$。

注意，如果 f 保联络，则 $\nabla[f] = 0$，因为

$$\kappa_N \circ T^2.f \circ \nabla_M = Tf \circ \kappa_M \circ \nabla_M = Tf \circ 0 \circ p = 0 \circ f \circ p.$$

1.5 浸没

光滑流形范畴并不完备：存在一些余跨图[10] $X \overset{f}{\longrightarrow} M \overset{g}{\longleftarrow} Y$ 其拉回不存在。按照 Thom （1954），如果对于每个点 $f(x) = g(y)$，$T_x f$ 与 $T_y g$ 的像的直和等于整个向量空间 $T_{f(x)}M$，那么余跨图的拉回就存在且被 T 保持（即它是一个 T-极限）；这样的余跨图称为横截的。因此，浸没构成了一类方便的映射，因为任何一个映射中有一个是浸没的余跨图都是横截的。更确切地说：

定义 1.5.1。 若 A 和 B 是光滑流形，则光滑函数 $f : A \to B$ 是浸没 当且仅当 f 在每个点 $a \in A$ 处的导数 $Df|_a$ 是满射线性映射。

根据这个定义，我们有如下结果：

命题 1.5。 **2.** 在光滑流形范畴中，记浸没类为 $\mathscr{S}$.

(i) 浸没在切函子下封闭：$f \in \mathscr{S} \Rightarrow T.f \in \mathscr{S}$。

(ii) 浸没在沿任意映射作拉回时封闭：

$$\begin{array}{ccc} X & & g^*X \xrightarrow{\bar{g}} X \\ {\scriptstyle f\in\mathscr{S}}\downarrow & \Longrightarrow & \downarrow{\scriptstyle g^*f\in\mathscr{S}} \quad \downarrow{\scriptstyle f} \\ N \xrightarrow[g]{} M & & N \xrightarrow[g]{} M \end{array}$$

这通常称为 T-在重新索引下稳定，因为它会在切片范畴之间诱导一个函子：

$$g^* : \mathsf{Submersions}/M \to \mathsf{Submersions}/N.$$

光滑流形范畴中浸没类的性质由Cockett 和 Cruttwell (2018年) 研究，并公理化为一个切显示系统。

定义 1.5 **.3.** 切范畴$\mathbb{C}$ 中的一个切显示系统是$\mathbb{C}$ 中一类映射$\mathscr{D}$，满足 *is*

- 在切函子下稳定，$d \in \mathscr{D} \Rightarrow T_{\circ} d \in \mathscr{D}$,
- 在重新索引下 T-稳定（如命题 *1.5.2*所述）。

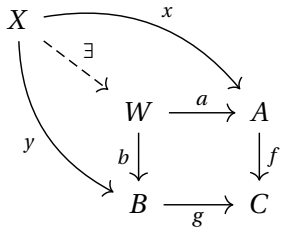
我们将箭范畴中对收缩封闭的任意切显示系统称为可收缩显示系统。若对所有 M，$p_M \in \mathscr{D}$，我们称$\mathscr{D}$ 为适当的（可收缩）显示系统。

[10]按照范畴论中的一般约定，前缀“co”-X 表示对偶范畴中的一个 X，因此，C 中的余跨图是 C 的对偶范畴中的跨图。

本节将说明，光滑流形范畴中的浸没构成一个可收缩显示系统，从而给出从显示系统构造可收缩显示系统的一般方法。

浸没的定义可以改述如下：f是浸没，当且仅当对于所有$a \in A$以及所有 $v \in T(B)$，只要满足 $fa = pv$，就存在一个 $w \in T(A)$，使得 $Tf \circ w = v$。这是关于 $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{p} TB$ 的一个弱泛锥：对于该图表上的任意其他锥，至少存在一个态射映入此锥。

定义 1.5.4. 如果对于任意满足 $fx = gy$ 的 $x : X \to A$ 和 $y : X \to B$，都存在一个映射 $X \to W$，使下图交换，那么交换方块就是弱拉回：



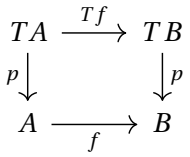
如果对于每个 Tn，上述图表都是弱拉回，那么它就是一个弱T-拉回。

引理 1.5.5. 如果 $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ 的拉回存在，那么定义 *1.5.4* 等价于要求诱导映射 $(a, b) : W \to Af \times_g B$ 是一个分裂满射。

证明。 设r是 $(a、b)$ 的收缩：$W \to Af \times_g B$。对于任意$X \xrightarrow{(\ \ )} x、yAf \times_g B$，映射$r \circ (x、y)$使该图表成为弱拉回。反之，由弱泛性质诱导的任意映射$Af \times_g B \to W$，其截面将是唯一映射 $(a、b) : W \to Af \times_g B$。 □

现在使用整体元（对于所有$a \in A$ 以及所有$v \in T(B)$，使得$fa = pv$，存在$w \in T(A)$，使得$T(f)w = v$）来重新表述映射f的浸没性质，使用广义元。

定义 1.5.6。 切范畴中的箭头 $f : A \to B$ 是切映射浸没，当且仅当自然性图表



是一个弱 T-拉回。

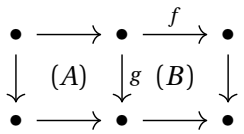
根据引理1.5.5，在拉回存在的情况下，这等价于要求存在一个水平下降的截面$h : Af \times_p TB \to TA$（$p$，$Tf) : TA \to Af \times_p TB$（在微分几何文献中，这个截面有时称为水平提升 Cordero 等人(1989）） 。在光滑流形范畴中，沿投影T- 拉回总是存在的，因此，要证明每个浸没都是切映射浸没，只需证明水平提升的存在性。$p : T \Rightarrow id \to$

命题 1.5.7。 在光滑流形范畴中，切浸没恰好是浸没（定义*1.5.1*）

证明。在 Cushman andBates (2015) 的 VII.1 节中，给出了经典光滑浸没的水平提升的显式构造。 □

可以证明，光滑流形范畴中浸没的 T-稳定性性质可由弱拉回的一般理论推出。我们首先说明弱拉回满足弱化版的拉回引理，然后证明弱拉回的收缩仍是弱拉回（第二个引理是 Adámek 等人 (2010) 的引理 2.1）。

引理 1.5.8（拉回引理）。 考虑图表



（i）如果 f，g 是联合单态的，且 $(A)+(B)$ 是弱拉回，那么 (A) 是弱拉回。

（ii）如果 (A)，(B) 是弱拉回，那么 $(A)+(B)$ 是弱拉回。

证明。

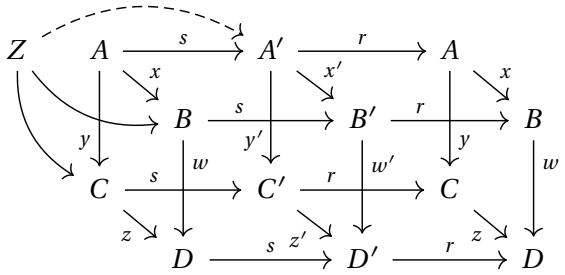
（i）如果 $(A)+(B)$ 是弱拉回，则对于 (A) 上的一个锥，将其与 (B) 拼接即可诱导出一个映射；f 、g 的联合单态条件保证了为 $(A)+(B)$ 诱导出的映射对于 (A) 是交换的。

(ii）给定 $(A)+(B)$ 的一个锥，诱导出一个关于 (B) 的映射，进而诱导出一个关于 $(A$ 的锥).

□

引理 1.5.9。 （弱）拉回在收缩下封闭。

证明。 设 S' 是一个弱拉回，且 S 在交换方块范畴中是它的一个收缩。考虑以下图表（省略 s、r 的下标）：



给定 S 的一个锥，与之对应的 S' 的一个锥会诱导一个映射 $Z \to A'$，再与 r_A 复合，即可得到所需的映射到 A。 □

利用这些引理，可以直接证明以下 T-稳定性性质对切浸没成立。

引理 1.5.10。 在任意切范畴 $\mathbb{X}$ 中，

（a）切映射浸没在复合下封闭；

(b) 切向浸没在收缩下封闭；

(c) 切映射浸没的任意 T-拉回都是切映射浸没。

证明。 (a) 由引理1.5.8 得出，而 (b) 由引理 1.5.9得出。剩下要证明 (c)。考虑一个 T-拉回，其中 u 是切映射浸没：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

由自然性可知，下面两个图表的外侧路径相等：

$$\begin{array}{ccccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TM & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow{\scriptstyle Tv} & & \downarrow{\scriptstyle Tu} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ TB & \xrightarrow{Tg} & TN & \xrightarrow{p} & N \end{array} = \begin{array}{ccccc} TA & \xrightarrow{p} & A & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow{\scriptstyle Tv} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ TB & \xrightarrow{p} & B & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

注意，由复合可知，左侧图表是一个弱拉回。因此，右侧图表的外围是一个弱拉回，且右侧方块是一个拉回，所以根据引理1.5.8，左侧方块是一个弱拉回，证毕。

□

切浸没类在箭范畴中对收缩封闭，并且在重新索引下有条件地保持T-稳定（若切浸没的T-拉回存在，则它仍是切浸没）。这一稳定性性质导出以下结果：

命题 1.5.11。 设$\mathbb{X}$ 是一个切范畴，允许对切浸没类$\mathscr{R}$进行重新索引。那么，切浸没类是一个显示系统。

证明。 任何在重新索引下封闭的映射类都是一个切显示系统，而浸没类在箭范畴中对收缩封闭。

□

推论 1.5.12. 光滑流形范畴中的浸没类是真收缩显示系统。

第 2 章

微分丛

本文的主要目标是为李代数丛提供一种抽象的切范畴公理化。为此，我们必须为李代数丛提供一种本质上代数性的公理化（按 Freyd 和 Kelly (1972) 的含义）。然而，在光滑流形范畴中，李代数丛是通过向量丛来定义的，而向量丛乍看之下是一种高度非代数性的概念。

除了使其成为以基底M上的切片范畴中的 R-模的代数公理外，向量丛$q : E \to M$还必须满足一项关键的拓扑要求：局部平凡。这意味着，对某个M的开子集U和自然数n，投影$q : E \to M$必须局部同构于投影 $\pi_0 : U \times \mathbb{R}^n \to U$。正是这一性质使得人们能够使用局部坐标进行计算，而这种方法已深深融入微分几何的传统之中。

Cockett 和 Cruttwell (2017) 提出了微分丛这一代数概念。通过证明向量丛的经典结果可以推广到任意切范畴中的微分丛，研究者为微分丛是向量丛的恰当推广提供了证据Cockett 和 Cruttwell (2017、2018年）。然而，光滑流形范畴中向量丛与微分丛之间的确切关系仍未明了。本章的主要结果（见 MacAdam (2021）表明，在光滑流形范畴中，向量丛与微分丛是一致的。

微分丛的公理化关注向量丛的另一项重要性质：给定一个向量丛 $q : E \to M$ 以及一个向量 v，它属于纤维 E_x，且位于 $x \in M$上方，则切空间$T_v(E_x)$可以自然地识别为 E_x。这给出了一个提升映射 $\lambda : E \to TE$，它可以公理化。虽然微分几何文献早已以欧拉向量场的形式提及提升映射（参见 Kolár 等人 Kolár 等人(1993年) 第 6.11 节，以及 Michor (1996) 第 1 节，其中明确使用了“提升”一词），但尚未将其作为抽象公理化的基础。

近年来，在微分几何文献中，Grabowski 和 Rotkiewicz (2009) 和 Bursztyn 等人(2016) 发现，全空间上的乘法$\mathbb{R}^+$作用决定了 E 上的向量丛结构，其中 $q : E \to M$；反过来，当其欧拉向量场（定义 2.1.8）满足一个额外的“非奇异”性质时，这种乘法作用恰好决定一个向量丛。本章将这些关于向量丛的最新观察推广到微分丛。

本章节首先回顾向量丛，介绍欧拉向量场构造：该构造将一个向量丛 $q : E \to M$映射为一个“提升”映射 $\lambda : E \to TE$，该构造由 Grabowski 和 Rotkiewicz (2009) 提出；本章节其余部分则包含与 Matthew Burke 合作得到的新结果。第二节证明，对于弱余单子 (T, ℓ)，这些提升是结合余代数，并且对于光滑流形，存在一个从向量丛到提升范畴的全忠实函子。第三节确定了该提升所满足的泛性质（或等价地，欧拉向量

场），而第四节表明，非奇异提升恰好对应于微分丛。第五节证明了本章节的主定理：对于光滑流形，向量丛恰好就是微分丛。最后一节包含一些关于将仿射联络延拓到任意微分丛的备注，这些内容将在第 3 节中发挥作用。

2.1 向量丛

流形 M 上的向量丛将这样一种概念公理化：以点 $m \in M$ 为索引、随点光滑变化的向量空间族。一个典型例子是光滑流形 M 上的切丛，其中每个点 $m \in M$ 上方的纤维都是切空间 T_mM。流形结构保证投影是局部平凡的：给定一个坐标图 $U \to M$，下面的拉回分裂为一个积：

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & TM \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ U & \hookrightarrow & M \end{array}$$

切丛的局部平凡性对于各种构造都是必不可少的，也是向量丛定义的一部分。

定义 2.1.1。向量丛是一个由以下元素组成的组

$$(q : E \to M, \xi : M \to E, + : E_q \times_q E \to E, \cdot : \mathbb{R} \times E \to E)$$

SMan 中的态射，使得

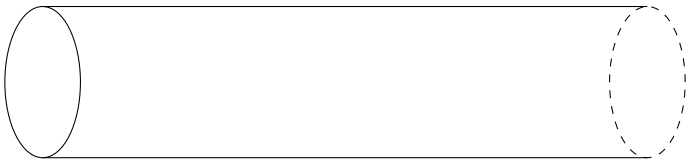
(i) 组 $(q, \xi, +, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}$-模 SMan/M 中定义了一个模；

(ii) 映射 $q : E \to M$ 是局部平凡的。

纤维化 $\mathbb{R}$-模结构意味着 E 是一族由 M 中元素索引的向量空间，$\{E_m | m \in M\}$。

请注意，局部平凡性公理保证向量丛的投影是浸没（定义 1.5.1）；因此，$q : E \to M$ 的拉回幂存在，且在切函子作用下保持不变。

例2.1.2。考虑圆柱面，它定义为由以下条件张成的 $\mathbb{R}^3$ 的子集：$C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$：



$\mathbb{R}$

在每个点 $i \in S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ 上方，i 上的纤维是 $\mathbb{R}$。对于每个点 i，我们可以选取一个足够小的 ϵ，并取开集

$$U_i = \{(x, y) \in S^1 | (i_x - x)^2 + (i_y - y)^2 \leq \epsilon\},$$

可将其平坦化为 $(-(1+\epsilon), 1+\epsilon) \times \mathbb{R}$。

向量丛的截面也构成一个 $C^\infty(M)$-模，这推广了切丛纤维化 R-模结构的这一方面。

引理 2.1.3。给定一个向量丛 $q:E\to M$，记 q 的截面集合为 $\Gamma(q)$；例如，$\Gamma(p_。M)=\chi(M)$（回忆定义 *1.2.16* 中的记号）。集合 $\Gamma(q)$ 具有 $C^\infty(M)$- 模结构，其构造方式与 $\chi(M)$ 类似：

$$X+_{\Gamma(q)}Y:=+\circ(X,Y),\quad 0_{\Gamma(q)}:=\xi,\quad (f\cdot_{\Gamma(q)}X)(m):=f(m)\cdot X(m)$$

此外，还有各种一般构造可以产生向量丛。

例 2.1.4。

(i) 切丛是一个向量丛：第 *1.2* 节中的构造清楚地表明，投影 $p:TM\to M$ 是底空间 M 上的局部平凡纤维化 R-模。*(ii)* 纤维为 V 的 M 上的平凡向量丛是积 $M\times V$。特别地，每个向量空间都是单点空间 $\{*\}$ 上方的平凡向量丛。*(iii)* 每个 T_kM 都是局部平凡的；局部来看，它类似于切空间 $p^{-1}k(U)\cong U\times(R^n)^k$ 的 k 重积，其中 M 是一个 n 维流形。更一般地，可以对 $E_k=E\,q\times_q E\,q\times_q\ldots{}^q\times_q E$ 作逐纤维拉回，从而得到一个 M 上的向量丛。*(iv)* M 的余切丛 T^*M 在 M 的每一点上都具有 T_mM 的对偶向量空间：$T^*m(M)=(T_mM)^*$。可以为这个空间赋予适当的拓扑，使其成为光滑空间；而 $\Gamma(T^*M)$ 的截面集合同构于 $TM\to R$ 的态射集合，其中这些态射在每个纤维上都是线性的。这个构造可应用于任意向量丛，并称为对偶向量丛。*(v)* 考虑空间 $\Lambda^n(E)$，即 E^* 的交错张量积。这个向量丛的截面集合等价于交错 n 线性态射 $E_n\to R$；将其限制在切丛上，便得到微分 n-形式空间。

要证明本节的主定理，需要对向量丛进行两种构造。

命题 2.1.5。设 $(q:E\to M,\ \xi,\ +_q,\ \cdot_q)$ 是一个向量丛。

(i) 对于任意映射 $f:N\to M$，q 关于 f 的 T-重新索引是一个向量丛：

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar f} & E \\ {\scriptstyle f^*q}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q} \\ N & \xrightarrow[f]{} & M \end{array} \tag{2.1}$$

(ii) q 在箭头空间中的任意收缩都是一个向量丛；也就是说，给定

$$\begin{array}{ccccc} F & \underset{s'}{\rightleftarrows} & E & \underset{r'}{\rightrightarrows} & F \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ N & \underset{s}{\rightleftarrows} & M & \underset{r}{\rightrightarrows} & N \end{array} \tag{2.2}$$

*i*如果 q 上存在向量丛结构，那么 π 上也存在向量丛结构 .

向量丛范畴以“局部线性”的丛态射作为其映射 s.

定义 2.1.6。 q: 向量丛态射 $E \to M$ 与 $\pi: F \to N$ 之间的向量丛态射是一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow[v]{} & N \end{array}$$

且逐纤维线性，也就是说，在每个纤维上

$$f|_m : E_m \to F_{v(m)}$$

都是向量空间之间的线性态射。这也可以等价地表述为纤维化$\mathbb{R}$-模的态射，使得下列图表交换:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{v} & N \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \uparrow{\scriptstyle \xi} & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} \\ M & \xrightarrow{v} & N \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{f_2} & F_2 \\ \downarrow{\scriptstyle +} & & \downarrow{\scriptstyle +} \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \xrightarrow{\mathbb{R}\times f} & \mathbb{R}\times F \\ \downarrow{\scriptstyle \cdot_E} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot_F} \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

例 2.1.7。

(i) 对于 ¯图表 2.1中的拉回向量丛，映射对 $(f,\ f)$ 是一个线性丛态射 .

(ii) 对于截面/图表 2.2中的收缩向量丛结构，截面和收缩都是线性态射。注意，这恰好是 $q: E \to M$ 上线性幂等元的分裂。

切丛上的提升在第 1.2节中定义为

$$[\gamma]_\sim \mapsto [\gamma \circ \cdot_{\mathbb{R}}]_\sim.$$

相反，考虑 R 对切向量的作用:

$$([\gamma]_\sim, r) \mapsto [\gamma \circ (r \cdot x)]_\sim.$$

注意，$T.\cdot$ 给出了方程

$$T.\cdot \circ ([\omega \circ (x,y)], [(a,b) \mapsto a + b \cdot x]) = (\omega \circ (a \cdot x, a \cdot b \cdot y));$$

因此，提升映射 ℓ 可重新推导如下:

$$\begin{array}{ccccccc} TM & \xrightarrow{(id,1^{\mathbb{R}})} & TM \times \mathbb{R} & \xrightarrow{0\times\lambda} & T(TM\times\mathbb{R}) & \longrightarrow & T^2M \\ [\gamma] & \longmapsto & ([\gamma], 1) & \longmapsto & ([\gamma\circ\pi_0], [r \mapsto 1 \bullet r]) & \longmapsto & [\gamma \circ \bullet_{\mathbb{R}}] \end{array}$$

这种一般构造称为由 R^+ 作用产生的欧拉向量场 。

定义 2.1.8. 考虑一个乘法幺半群作用 $a : \mathbb{R}^+ \times E \to E$。该作用的欧拉向量场[1] 是如下构造的态射 $\lambda : E \to TE$:

$$\lambda := E \xrightarrow{(id, 1^{\mathbb{R}} \circ !)} E \times \mathbb{R} \xrightarrow{0 \times \lambda} TE \times T\mathbb{R} \cong T(E \times \mathbb{R}) \xrightarrow{T.a} TE.$$

切丛的局部平凡性由垂直提升条件的泛性质刻画。向量丛也满足类似的普适性条件。

命题 2.1.9. 设 $q : E \to M$ 是一个向量丛，其对应的欧拉向量场为 λ。则下图是一个 T-拉回:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & TE \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle (p, T.q)} \\ M & \xrightarrow[(\xi, 0)]{} & E \times TM \end{array}$$

Ex利用纤维化 R-模具有减法这一事实，可得以下结果: s.

推论 2.1.10. 以下两个图表是 T-等化子:

$$E_2 \xrightarrow{\mu^E := 0 \circ \pi_0 +_{Tq} \lambda \circ \pi_1} TE \underset{T.q \circ 0 \circ p}{\overset{T.q}{\rightrightarrows}} TM$$

$$TM_p \times_q E \xrightarrow{\nu^E := T.\xi \circ \pi_0 +_p \lambda \circ \pi_1} TE \underset{p \circ T.\xi \circ T.q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} E$$

（回顾一下，E_2 是一个浸没沿着另一个浸没的拉回，因此保证存在，并且由切函子保持。）

证明。设 $v : X \to TE$ 使得

$$T.q \circ v = T.q \circ 0 \circ p \circ v$$

then

$$p \circ (v -_{T.q} 0 \circ p \circ v) = p \circ v -_q p \circ v = \xi \circ q \circ v.$$

因此存在唯一的v' 使得

$$\lambda \circ v' = (v -_{T.q} 0 \circ p \circ v)$$

这意味着

$$v = 0 \circ p \circ v +_{T.q} \lambda \circ v' = \mu(0 \circ p \circ v, v')$$

正如所要求的。投影 q 是一个浸没，因此拉回 E_2 在切函子作用下保持不变，命题 2.1.9中的拉回也如此，并且可以对每个T^n应用相同的计算。 ν 的证明可用同样的论证得出。

□

回顾一下，浸没类在光滑流形范畴中构成一个可收缩显示系统（定义 1.5.3），因此它们在重新索引下稳定，并且在收缩下封闭。由此可得:

推论 2.1.11。 向量丛的投影是一个浸没。

证明。 这由以下事实可得： π： $TE \to E$是浸没，因此$q \circ \pi_0$： $E_q \times_p TM \to M$是浸没，因此映射q: $E \to M$是箭范畴中投影$p.E$: $TE \to E$的一个收缩。 □

[1]有些令人困惑 通常，欧拉向量场几乎从来不是一个向量 场。

保持欧拉向量场也足以保证，态射$f\colon E \to F$确定一个向量丛态射。

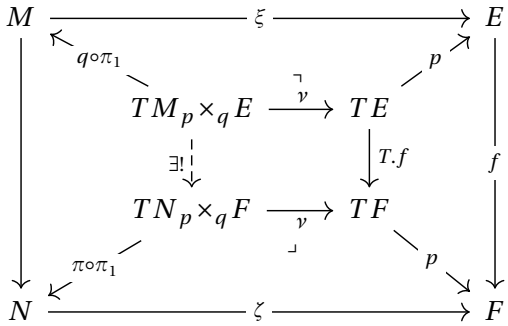
命题 2.1.12。 设 $q:E \to M$, $\pi:F \to N$ 是一对向量丛，其欧拉向量场为 λ^E, λ^F。那么，丛态射 $(f,v)\colon q \to \pi$ 是向量丛态射，当且仅当

$$\lambda^F \circ f = T.f \circ \lambda^E$$

证明。 注意， v^F 推论 2.1.10 中的映射是单态；若 f保提升，则它保 v:

$$v^F \circ (T.v, f) = + \circ (T.\zeta \circ T.v, \lambda^F \circ f) = + \circ (T.f \circ T.xi, T.f \circ \lambda^E) = T.f \circ v^E.$$

接下来注意， $T.v \times f$是使下图交换的唯一映射:



现在， v 是一个单态的向量丛态射，而$T.f$是一个向量丛态射，因此$T.v \times f$是一个向量丛态射，从而f也是一个向量丛态射。反向结论显然成立。

□

2.2 切向弱余单子的提升

提升 $\ell : T \Rightarrow T^2$ 由此导出一个弱余单子。Wisbauer Wisbauer (2013) 引入了弱余单子，并提出了结合代数的自然概念[2]。弱余单子(T,ℓ) 的结合余代数称为提升；本章将说明，提升提供了定义向量丛所必需的基本结构。

定义 2.2.1。 范畴 $\mathbb{C}$ 上的弱余单子是一个自函子 $S:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，并配备一个余结合映射 $\delta:S \Rightarrow S.S:$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\delta} & S.S \\ \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle S.\delta} \\ S.S & \xrightarrow{\delta.S} & S.S.S \end{array}$$

一个 结合的 弱余单子的代数是一个对象 E，配备映射 $\lambda\colon E \to SE$，使得 t

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & S.E \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \delta.E} \\ S.E & \xrightarrow{S.\lambda} & S.S.E \end{array}$$

[2]这并非严格 正确。Wisbauer 提出了更为细致的拟单子层级；用他的术语来说，(T,ℓ) 会是一个具有结合积的自函子。

这些代数之间的态射是一个映射 $f:\ (E,\ \lambda)\Rightarrow(D,\ \gamma)$ 使得

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & D \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ S.E & \xrightarrow{S.f} & S.D \end{array}$$

回顾一下，对于满余单子，基范畴与余代数范畴之间存在伴随。本例中的这一结果有所弱化：

Lem引理 2.2.2. 对于范畴 $\mathbb{C}$ 上的每个弱余单子，都存在一个自由余代数函子

$$F:\mathbb{C}\to \mathsf{CoAlg}(\mathbb{C});E\mapsto(S.E,\delta:S.E\to S.S.E)$$

一个底层对象函子

$$U:\mathsf{CoAlg}(\mathbb{C})\to\mathbb{C};(E,\lambda)\mapsto E$$

以及一个自然变换

$$\lambda:id\Rightarrow F.U;\quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & S.E \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ S.E & \xrightarrow{S.\lambda} & S.S.E \end{array}$$

定义 2.2.3. 切范畴 C 中的一个提升 是 (T,ℓ) 的一个结合余代数，即一个对 $(E,\lambda{:}E\ \to TE)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & TE \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T.\lambda} \\ TE & \xrightarrow[\ell.E]{} & T^2E \end{array}$$

提升的态射是余代数态射。切范畴 $\mathbb{C}$中的提升及提升态射构成的范畴记为 $\mathsf{Lift}(\mathbb{C})$。

请注意，一般而言，切丛并非余单子：虽然切丛投影的类型符合余单位的要求，$p{:}\ T\Rightarrow id$，但它不满足 $p\circ\ \ell=id$。事实上，若p是余单位，则这将迫使$id=p\circ\ \ell=0\circ\ p$，从而 $0=p^{-1}$；因此，若(T,ℓ,p)是余单子，则T与恒等函子自然同构。

例 2.2.4.

(i) 对于切范畴$\mathbb{C}$中的每个对象 M，二元组 $(TM,\ell:TM\ \to T^{\ 2}M\ )$是一个提升，称为 M 上的自由提升 。

(ii) 每　个切范畴中的对象 M 都有一个平凡 提升，$0:M\ \to TM$，其中 $T.0\circ 0=\ell\circ 0$。*(iii)* 每个不同的 *ial* 对象具有一个提升 λ；相容性等价于公理 [$D0$。3] 在定义 *1.4*。 *1.*

（*iv*）乘法 $\mathbb{R}^+$ 作用 $h:R^+\times E\ \to E$ 在 SMan 中的欧拉向量场是一个提升。回顾一下，标量作用 $s_M:TM\ \times\mathbb{R}\ \to\mathbb{R}$ 上的欧拉向量场会在流形上诱导出垂直提升：

$$\ell=T.s_M\circ(0,\lambda^{\mathbb{R}}\circ 1^{\mathbb{R}}\circ !).$$

在光滑流形范畴中，$T\mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]/x^2$,，其中 $\lambda(r) = [x \mapsto r \cdot x]$，对应于映射$\lambda'(r) = 0 + r \cdot x$。同样，存在一个同构 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, y^2)$，使得对于映射 $0.T$ *and* $T.0$，

$$0.T(a + r \cdot x) \cong a + r \cdot x + 0y + 0xy, \quad T.0(a + r \cdot x) \cong a + 0x + r \cdot y + 0xy.$$

由于我们知道 $(0 + x)(0 + y) = (0 + xy)$ 属于 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, y^2)$（根据 *1.4.2*），我们可以利用这些同构看出

$$\ell \circ \lambda^{\mathbb{R}} \circ 1^{\mathbb{R}} \circ ! = (0.T \circ \lambda^{\mathbb{R}} \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !) \cdot_{T^2.\mathbb{R}} (T.0 \circ \lambda^{\mathbb{R}} \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !).$$

考虑流形 E 上的一个幺半群作用 $(\mathbb{R}^+, h)$。该作用的欧拉向量场，

$$\lambda : E \xrightarrow{(id, 1^{\mathbb{R}} \circ !)} E \times \mathbb{R} \xrightarrow{(0, \lambda^{\mathbb{R}})} TE \times T\mathbb{R} \xrightarrow{T.h} TE$$

如果诱导的 TE 上的标量作用与自然标量作用交换，则将定义一个代数：

$$\begin{aligned}
T.\lambda \circ \lambda &= T^2.h \circ (T.0 \circ \lambda, T.\lambda \circ 0 \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !) \\
&= T^2.h \circ (T.0 \circ T.h \circ (0, \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !), 0 \circ \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !) \\
&= T^2.h \circ (T^2.h \circ (T0 \circ 0, T0 \circ \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !), 0 \circ \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !) \\
&= T^2.h \circ (T.0 \circ 0, (T.0 \circ \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !) \cdot_{T^2.\mathbb{R}} (0.T \circ \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !)) \\
&= T^2.h \circ (\ell \circ 0, \ell \circ \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !) \\
&= \ell \circ T.h \circ (0, \lambda \circ 1^{\mathbb{R}} \circ !) \\
&= \ell \circ \lambda.
\end{aligned}$$

观察 2.2.5。 回忆命题 *2.1.12*，态射保持幺半群作用，当且仅当它们保持该作用所对应的欧拉向量场。这意味着，欧拉向量场构造给出了从幺半群作用到光滑流形范畴中提升的全忠实函子，因此也给出了从向量丛范畴到 SMan 中提升的全忠实函子。

下面的命题给出了提升上的一对构造——在切函子下封闭以及有限的T-极限——这将在本节中发挥作用。

引理 2.2.6。 设 $\mathbb{C}$ 是一个切范畴。

(i) 切函子提升为提升范畴中的一个自函子，其中 $\mathbb{C}$。

(ii) 给定一个图表

$$D : \mathscr{D} \to \mathsf{Lift}(\mathbb{C})$$

在 $\mathbb{C}$ 的提升范畴中，若 $.D$ 的 T-极限在 $\mathbb{C}$ 中存在，则 $\lim U.D$ 有一个与之关联的自然提升 λ'，使得 $(\lim U.D, \lambda')$ 是 $\mathsf{Lifts}(\mathbb{C})$ 中 D 的极限。（也就是说，提升的 T-极限是在基范畴中逐点计算的。）

证明。

(i) 只需检查

$$\begin{aligned}
T.(c \circ T.\lambda) \circ c \circ T.\lambda = T.c \circ T^2.\lambda \circ c \circ T.\lambda = T.c \circ c.T \circ T^2.\lambda \\
= T.c \circ c.T \circ T.\ell \circ T.\lambda = \ell.T \circ c \circ T.\lambda.
\end{aligned}$$

(ii) 具体而言，切丛终对象将有一个提升：

$$(1, 1 \xrightarrow{0} T.1 \cong 1).$$

给定 $(E,\ \lambda)$和 $(F,\ l)$，若切丛积 $E \times F$存在，则有一个提升

$$(E \times F, E \times F \xrightarrow{\lambda \times l} TE \times TF \cong T(E \times F)).$$

给定　　的 T-等化子叉 f、g：$(E,\ \lambda) \to (F,\ l)$，该等化子具有如下诱导的提升　　ws:

$$\begin{array}{ccccc} C & \overset{k}{\dashrightarrow} & E & \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} & F \\ \vdots\lambda & & \downarrow\lambda & & \downarrow l \\ T.C & \overset{k}{\dashrightarrow} & T.E & \underset{T.g}{\overset{T.f}{\rightrightarrows}} & T.F \end{array}$$

□

命题 2.2.7. 提升范畴是一个切范畴。

证明。 切函子映射

$$\frac{f : (E, \lambda) \to (F, l)}{T.f : (TE, c \circ T.\lambda) \to (TF, c \circ T.l).}$$

为验证这仍是一个代数态射，计算

$$c \circ T.l \circ T.f = c \circ T^2.f \circ T.\lambda = T^2.f \circ c \circ T.\lambda$$

结构映射是提升的底层对象上的结构映射；泛性质由命题 2.2.6得出。

□

以下幂等元在提升理论中起着关键作用，并将用于定义非奇异提升（定义 2.3.1）；其分裂将给出向量丛的投影和零截面（定义 2.4.1）。

Prop命题 2.2.8。 切范畴 $\mathbb{C}$ 中的提升范畴具有一个自然幂等元　　：

$$e : id \Rightarrow id; e_{(E,\lambda)} : (E, \lambda) \xrightarrow{p \circ \lambda} (E, \lambda).$$

证明。 首先，我们看到 $e = p \circ \lambda$是一个幂等元：

$$p \circ \lambda \circ p \circ \lambda = p \circ p.T \circ T.\lambda \circ \lambda = p \circ p.T \circ \ell \circ \lambda = p \circ 0 \circ p \circ \lambda = p \circ \lambda.$$

此外，每个f: $(E, \lambda) \to (F, l)$都保持该幂等元：

$$f \circ p \circ \lambda = p \circ T.f \circ \lambda = p \circ l \circ f.$$

最后，请注意，该幂等元是一个提升态射：

$$T.\lambda \circ \lambda = \ell \circ \lambda = c \circ \ell \circ \lambda = c \circ T.\lambda \circ \lambda$$

这意味着

$$\lambda \circ e = \lambda \circ p \circ \lambda = p \circ T.\lambda \circ \lambda = p \circ c \circ T.\lambda \circ \lambda = T.p \circ T.\lambda \circ \lambda = T.e \circ \lambda.$$

□

2.3 非奇异提升

Grabowski 和 Rotkiewicz (2009) 引入了非奇异提升的概念，以此公理化向量丛乘法 $\mathbb{R}^+$-作用的欧拉向量场。虽然我们无法立即确定我们的定义是否与 Grabowski 的定义相同，但第 2.5 节的结果将证明使用这一术语是合理的，因为二者必然相同。

定义 2.3.1. 切范畴 $\mathbb{C}$ 中的提升 (E,λ) 若下图是一个 T-等化子，则称其为非奇异的：

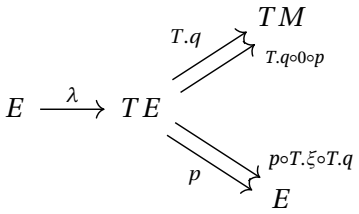
$$E \xrightarrow{\lambda} TE \underset{e.E}{\overset{T.e}{\rightrightarrows}} TE$$

其中，$e.E = p \circ \ell$ 是与 E 上的自由提升相关联的幂等元，而 $T.e = T.p \circ T.\lambda$ 是切函子作用于与 (E,λ) 相关联的幂等元后所得的像。非奇异提升范畴记作NonSing($\mathbb{C}$)。

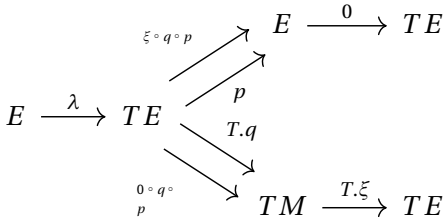
最重要的一类例子是向量丛上的 R-作用所对应的欧拉向量场。

命题 2.3.2. 向量丛的欧拉向量场是一个非奇异提升。

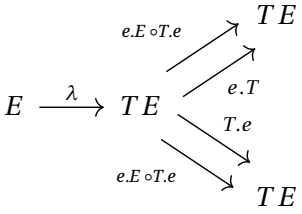
证明. 设 $(q : E \to M, +, \xi, \cdot)$ 是一个带有欧拉向量场 λ的向量丛。由命题 2.1.9，图表



是一个 T-极限。若图表中每一对平行箭头都后复合一个 T-单态，则该图表的 T-泛性质成立，当且仅当该图表是泛的。截面是一个 T-单态，因此前一个图表是T-泛的，当且仅当下面的图表是T-泛的：



现在利用以下事实来简化这个图表：$T.(\xi \circ q) = T.e, 0 \circ p = e.E$：



注意，这两对平行箭头有一个共同的箭头，这意味着可以将它们合并为一个三元等化子。因此，剩下要验证的是，对于任意 $x\colon X \to TE$,

$$(e.e \circ x = T.e \circ x = e.E \circ x) \iff (T.e \circ x = e.E \circ x).$$

正向蕴含显然，因此只需证明反向蕴含。假设 $T.e \circ x = e.E \circ x$；则

$$e.e \circ x = e.E \circ T.e \circ x = e.E \circ e.E \circ x = e.E \circ x$$

由此得到结论，即图表

$$E \xrightarrow{\lambda} TE \underset{e.E}{\overset{T.e}{\rightrightarrows}} TE$$

是一个 T-等化子。 □

每个映射 $f\colon E \to F$都给出一个自由余代数之间的映射 $T.f\colon (TE, \ell) \to (TF, \ell)$且幂等元 e由命题 2.2.8 可知是一个余代数态射，所以下述结论显然成立：

命题 2.3.3。 非奇异提升是提升范畴中的一个等化子：

$$(E, \lambda) \xrightarrow{\lambda} (TE, \ell) \underset{e.E}{\overset{T.e}{\rightrightarrows}} (TE, \ell)$$

注意，非奇异提升范畴在提升范畴中对有限极限封闭。

命题 2.3.4。 范畴 $\mathbb{C}$ 中的非奇异提升在 T-极限下封闭：

(i) 提升上的切函子保持非奇异提升，因此若 (E, λ) 是非奇异的，则 $(TE, c \circ T.\lambda)$ 是非奇异的。

(ii) 对象上的平凡提升 $0\colon M \to TM$ 是非奇异的。

(iii) 非奇异提升的 T-积是非奇异提升。

(iv) 非奇异提升的 T-等化子是非奇异提升。

证明。

(i) 这是因为非奇异性条件是一个 T-极限。

(ii) 零映射将幂等元 $0 \circ p$ 分裂，因此它是 $0 \circ p$、$p \circ 0 = id$ 的等化子 .

(iii) 这由极限在积下的稳定性得出。

(iv) 由自然性，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
C & \dashrightarrow & E & \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} & F \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\
TC & \dashrightarrow & TE & \underset{Tg}{\overset{Tf}{\rightrightarrows}} & TF \\
{\scriptstyle e.C}\Downarrow{\scriptstyle Te} & & {\scriptstyle e.E}\Downarrow{\scriptstyle Te} & & {\scriptstyle e.F}\Downarrow{\scriptstyle Te} \\
TC & \dashrightarrow & TE & \underset{Tg}{\overset{Tf}{\rightrightarrows}} & TF
\end{array}$$

每个水平图表都是一个 T-等化子，而右侧两列是 T-等化子，因此左侧一列是一个 T-等化子。

□

最后，当一个切范畴具有某些 T-等化子时，提升范畴上存在一个幂等单子，其代数是非奇异提升：

定理2.3.5. 设$\mathbb{C}$ 是一个具有幂等元的指定 T-等化子的切范畴。那么，下列等化子确定了提升范畴上的一个左正合幂等单子，其代数即为非奇异提升。

$$(F,l) \longrightarrow (T.E,\ell) \underset{T.e}{\overset{e.E}{\rightrightarrows}} (T.E,\ell)$$

证明。 首先，在Lift(C)中取等化子；该函子将 (E,λ) 映到指定极限 (F,l)。单子的单位是由泛性质诱导的、从 (E,λ) 到等化子 (F,l) 的唯一态射：

$$\begin{array}{ccccc} (F,l) & \longrightarrow & (TE,\ell) & \underset{e.E}{\overset{T.e}{\rightrightarrows}} & (TE,\ell) \\ \exists!\uparrow & \nearrow_{\lambda} & & & \\ (E,\lambda) & & & & \end{array}$$

注意，非奇异提升在有限极限下封闭，因此 (F,l) 是一个非奇异提升。若 (E,λ) 是一个非奇异提升，则 $\lambda\colon (E,\lambda) \to (TE,\ell)$ 等化该图表，因此存在唯一的同构$(F,l) \cong (E,\lambda)$，使单子的乘法成为自然同构（从而得到一个幂等单子）。该函子由一个T-极限定义，因此保留提升的所有T-极限，故为左正合。

□

在光滑流形范畴中，ℓ是一个 R^+作用的欧拉向量场，这保证了每个 λ 都是一个乘法 R^+作用的欧拉向量场。我们得到以下推论。

推论 2.3.6。 在 SMan中的乘法 $\mathbb{R}^+$ 作用范畴里，乘以0 等价于全忠实函子中的自然幂等元 e。该函子将一个 $\mathbb{R}^+$作用映射到其欧拉向量场。根据非奇异性，以下图表是一个等化子，从而赋予 E 一个乘法$\mathbb{R}^+$ 作用，其欧拉向量场为 λ:

$$(E,\cdot_E) \xrightarrow{\lambda} (TE,\cdot_T) \underset{e.T}{\overset{T.e}{\rightrightarrows}} (TE,\cdot_T)$$

此外，λ 是该提升的欧拉向量场，且下图可交换 :

$$\begin{array}{ccccc}
E & \xrightarrow{\lambda} & TE & \underset{T.e}{\overset{e.E}{\rightrightarrows}} & TE \\
{\scriptstyle (1^{\mathbb{R}},id)}\downarrow & & {\scriptstyle (1^{\mathbb{R}},id)}\downarrow & & {\scriptstyle (1^{\mathbb{R}},id)}\downarrow \\
\mathbb{R}^+\times E & \xrightarrow{\mathbb{R}^+\times\lambda} & \mathbb{R}^+\times TE & \underset{\mathbb{R}^+\times T.e}{\overset{\mathbb{R}^+\times e.E}{\rightrightarrows}} & \mathbb{R}^+\times TE \\
{\scriptstyle \lambda^{\mathbb{R}}\times 0}\downarrow & & {\scriptstyle \lambda^{\mathbb{R}}\times 0}\downarrow & & {\scriptstyle \lambda^{\mathbb{R}}\times 0}\downarrow \\
T(\mathbb{R}^+\times E) & \xrightarrow{\mathbb{R}^+\times\lambda} & T(\mathbb{R}^+\times TE) & \underset{T(\mathbb{R}^+\times T.e)}{\overset{T(\mathbb{R}^+\times e.E)}{\rightrightarrows}} & T(\mathbb{R}^+\times TE) \\
{\scriptstyle T\cdot_E}\downarrow & & {\scriptstyle T\cdot_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cdot_p} \\
TE & \xrightarrow[T\lambda]{} & TTE & \underset{T.e}{\overset{e.E}{\rightrightarrows}} & TTE
\end{array}$$

2.4 微分丛

本节介绍（预）微分丛，它补足了向量丛所需的其余数据：即投影、零截面和加法映射。零截面和投影数据由自然幂等元的分裂得到$e: id \Rightarrow id$，而非奇异性将导出加法映射。每个微分丛都满足一对泛性图表，将这种微分丛表述与 Cockett 和 Cruttwell (2018年) 中的原始定义联系起来。

定义 2.4.1。

(i) 一个 预微分丛 是一个提升 $\lambda\colon\ E \to TE$，配备了命题 *2.2.8* 中自然幂等元 $e\ = p \circ \lambda$ 所指定的分裂。预微分丛的形式化记法为 $(q\colon\ E\ \to M,\ \xi,\ \lambda)$，其中 $q\colon\ E \to M$ 是收缩，$\xi\colon\ M \to E$ 是截面，而 $\lambda\colon\ E \to TE$ 是提升（只有投影需要标明类型，其余类型均可推知，通常会省略以节省空间）。

(ii) 一个 微分丛 是一个预微分丛 $(q\colon\ E\ \to M,\ \xi,\ \lambda)$ 满足以下性质：λ 是非奇异的，并且 q 的 T-拉回幂存在。

（预）微分丛的态射恰好是其底层提升的态射。（预）微分丛的范畴恰好由（预）微分丛及提升态射构成，分别记作$\mathsf{Pre}(\mathbb{C})$，$\mathsf{DBun}(\mathbb{C})$。

回想一下，由于e是提升范畴中的自然幂等元，任何提升态射都会保持e，因而也会保持其幂等分裂。保持该幂等元意味着每个微分丛态射都是丛态射，其基映射由下式给出

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow[m:=\pi\circ f\circ\xi]{} & N \end{array}$$

现在我们来考察（预）微分丛的极限。

观察 2.4.2。

(i) 预微分丛图表的极限，是其底层提升的极限，并赋予 $p\circ\lambda$ 的一个选定分裂；这是由幂等元分裂的基本性质所致。

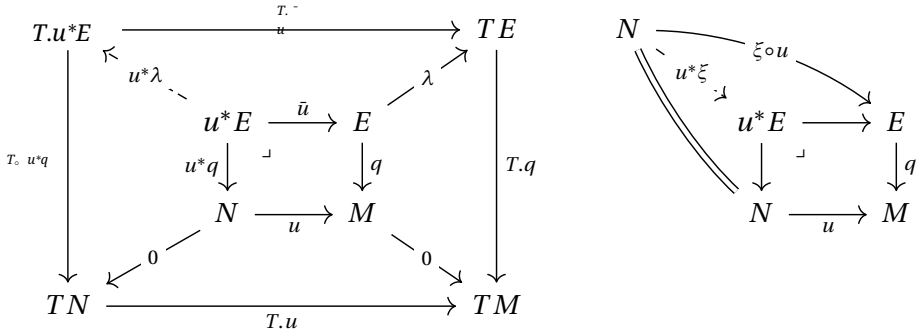
(ii) 微分丛图表的极限，是预微分丛范畴中的极限（根据命题 *2.3.4*，该提升将是泛的），前提是所得投影的 T-拉回幂存在。

由于（预）微分丛关联有一个投影，因此现在可以应用命题 *1.5.2*中所述的 T-重新索引运算。类似于命题 2.1.5，这给出了一个拉回微分丛。

引理 2.4.3 (Cockett 和 Cruttwell (2018年))。 设 $(q\colon E\ \to M,\ \xi,\ \lambda)$ 是切范畴 $\mathbb{C}$中的一个（预）微分丛，并考虑 $\mathbb{C}$中的一个 T-拉回：

$$\begin{array}{ccc} u^*E & \xrightarrow{\bar{u}} & E \\ {\scriptstyle u^*q}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q} \\ N & \xrightarrow[u]{} & M \end{array}$$

那么诱导的三元组映射



诱导一个（预）微分丛 $(u^*q:\ u^*E \to$ 自然数集，$u^*\xi,\ u^*\lambda)$。若 λ 非奇异且存在 u^*q 的 T-拉回幂，则 $(u^*q,\ u^*\xi,\ u^*\lambda)$ 是一个微分丛。

证明。 注意，C 中的预微分丛 $(q\colon E \to M,\xi,\lambda)$ 也可以视为 Lift(C) 中的预微分丛 $(q\colon (E,\lambda)\to(M,\ 0),\xi,\lambda)$。在 Lift(C) 中取如下拉回：

$$\begin{array}{ccc}(u^*E,u^*\lambda) & \longrightarrow & (E,\lambda)\\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle q}\\ (N,0) & \xrightarrow{u} & (M,0)\end{array}$$

根据构造可知 $\iota\circ\ u^*\lambda=\lambda\circ\ \iota$。因此结论成立。 □

命题 2.4.4. 设 $(q:E\ \to M,\xi,\lambda)$ 是切范畴$\mathbb{C}$中的非奇异预微分丛，因此 q 的 T-拉回幂存在。则存在加性丛结构 $(q,\xi,+_q)$，使得微分丛态射具有加性：

$$(\lambda,\xi):(q,\xi,+_q)\to(p,0,+)\quad (\lambda,0):(q,\xi,+_q)\to(T.q,T.\xi,T.+_q).$$

此外，每个微分丛态射都保持加法。

证明。 非奇异性保证加法映射存在：

$$\begin{array}{ccccc}E_2 & \xrightarrow{\lambda\times\lambda} & T_2E & \underset{T_2.e}{\overset{(e\times e).E}{\rightrightarrows}} & T_2E\\ {\scriptstyle\exists!+_q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle +} & & \downarrow{\scriptstyle +}\\ E & \xrightarrow[\lambda]{} & TE & \underset{T.e}{\overset{e.E}{\rightrightarrows}} & TE\end{array}$$

注意，该图表可交换，因为 T_2E是一个预微分丛，其提升为 $\ell\times\ell$，并且 $+$是一个线性态射，因此它与加法映射 $e\circ a+e\circ\ b=e\circ(a\times b)$可交换。后复合 λ可确保 ξ 是单位，且结合律成立。微分丛态射会诱导等化子图表之间的态射，而这些图表分别诱导各个加法映射，从而保持加法。

□

回想一下，根据命题 2.3.2，每个向量丛的欧拉向量场都是一个非奇异提升。如果 $TM_q\times_q E$存在，则映射

$$\nu^E:TM_p\times_q E\xrightarrow{T.\xi\times\lambda}T_2E\xrightarrow{+.E}TE$$

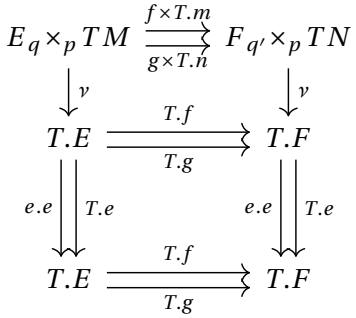
可以构造。类似地，利用命题 2.4.4 中的加法丛结构，可以构造 μ 映射：

$$\mu^E:E_q\times_q E\xrightarrow{0\times\lambda}T(E_q\times_q E)\xrightarrow{T.+_q}TE$$

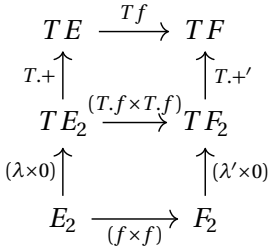
请注意，任意微分丛态射都会保持 μ 和 ν。

引理 2.4.5。 微分丛映射保持 $\mu(x,\ y):=0\circ x\ +_{T.q}\lambda\circ y$ *and* $\nu(v,\ y):=T_{\circ}\ \xi\circ v\ +_p\lambda\circ y$。

证明。 以下图表展示了提升映射保持 ν:



类似地，该图表展示了提升映射保持 μ:



□

引理 2.4.6。 考虑 $\mathbb{C}$ 中微分丛的全子范畴，其对象是微分丛 (E,λ)，使得这些叉

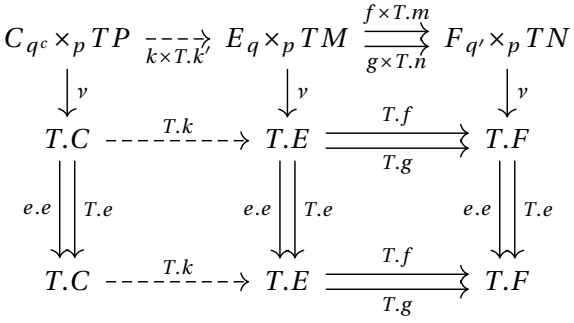
$$\begin{aligned} E_2 &\xrightarrow{\mu^E:=0\circ\pi_0+_{Tq}\lambda\circ\pi_1} TE \underset{T.q\circ 0\circ p}{\overset{T.q}{\rightrightarrows}} TM \\ TM_p\times_q E &\xrightarrow{\nu^E:=T.\xi\circ\pi_0+_p\lambda\circ\pi_1} TE \underset{p\circ T.\xi\circ T.q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} E \end{aligned} \tag{2.3}$$

是 T-等化子。该子范畴在 T-等化子下封闭。

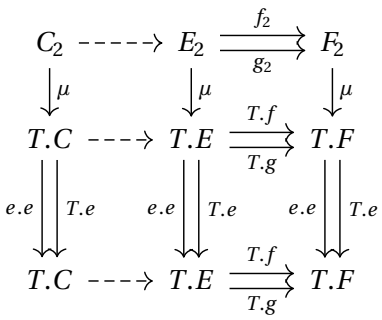
证明。 从提升的T-等化子开始:

$$C \overset{k}{\dashrightarrow} E \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F$$

注意到 k 是一个提升映射，因此由引理2.4.5，以下图表可交换:



接下来，由于 k 是预微分丛之间的态射，由引理 2.4.5 ，以下图表可交换：



顶行成立是因为满足 Rosicky 的普适性条件的映射保持 μ，底行则由 e 的自然性、C以及线性映射保持自然幂等元这一事实得出。因此，如果E、F满足图表 2.3中的泛性质图表，那么等化子 C也满足，因为 T-等化子在叉图范畴中对 T-极限封闭。

□

定理 2.4。 **7.** 对于切范畴中的每个微分丛 $(q : E \to M,\ \xi,\ \lambda)$ 该图表是

$$E_2 \xrightarrow{\mu^E} TE \underset{T.q\circ 0\circ p}{\overset{T.q}{\rightrightarrows}} TM$$

T-等化子；如果 $TM\, p \times_q E$ 存在，则

$$E_q \times_p TM \xrightarrow{\nu^E := \lambda\circ\pi_0 +_p T.\xi\circ\pi_0} TE \underset{p\circ T.\xi\circ T.q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} E$$

是 T-等化子。

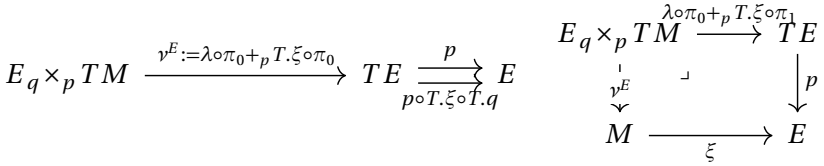
证明。 切丛满足两个普适性条件，并且根据引理 2.4.6，每个微分丛都将由于提升的非奇异性而满足这些条件。 □

推论 2.4.8. 在完备切范畴中，微分丛范畴恰好是定理 *2.3.5* 中预微分丛上单子的代数范畴。

注 2.4.9. 定理 *2.4.7* 中的泛性质条件表明，这一定义的微分丛与 *Cockett 和 Cruttwell (2018年)* 中的定义一致。

2.5 范畴的同构

现在很容易证明本章的主定理成立。首先注意，对于光滑流形范畴中的每个微分丛 $(q : E \to M, \xi, \lambda)$，$T$-拉回 $E_p \times_q TM$ 存在，因为p是浸没。注意，这两个图表的泛性质等价：



因此，以下结论成立。

定理 2.5.1. 光滑流形上的向量丛范畴与微分丛范畴之间存在范畴同构。

证明。 注意，命题 2.3.2 给出了从向量丛范畴到光滑流形微分丛范畴的全忠实函子，因为与该向量丛相关联的提升是非奇异的，而投影和零截面提供了微分丛的其余结构：正如定义 2.1.1之后所述，局部平凡性保证投影是浸没，因此投影的拉回幂存在，从而得到一个微分丛。

要证明对象之间存在同构，回想一下，根据推论 ℝ2.3.6，每个微分丛都是一个纤维化 ℝ-模，并且这一识别是一个双射（它可以从 ℝ-作用的欧拉向量场恢复原来的 ℝ-作用，反之亦然）。最后，注意普适性条件

$$\begin{array}{ccc} E_q \times_p TM & \xrightarrow{\lambda\circ\pi_0 +_p T.\xi\circ\pi_1} & TE \\ {\scriptstyle \nu^E}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \xrightarrow[\xi]{} & E \end{array}$$

连同命题 2.1.5 确保了 q 的局部平凡性，因此与微分丛相关联的唯一纤维化 ℝ-模结构确实是一个向量丛。 □

2.6 微分丛上的联络

本节讨论的联络将仿射联络的概念推广到微分丛，为 TE 提供一种类似于仿射联络所诱导的 T^2M 的“局部坐标”表示，即 T_3M。第 3 章广泛运用向量丛上的联络，因此在开始讨论代数丛理论之前，先介绍基本定义是很有必要的。

定义 2.6.1 (Cockett 和 Cruttwell (2017))。 设 $(q: E \to M,\ \xi,\ \lambda)$ 是切范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个微分丛。

- 垂直联络是一个映射 $\kappa:\ TE \to E$，使得
  - *(i)* κ 是垂直下降，因此是提升的一个收缩；于是，$\kappa \circ \lambda = id$；
  - *(ii)* κ 与 TE 上的两种微分丛结构均相容，因此这些映射

$$\kappa : (TE, \ell) \to (E, \lambda)$$
$$\kappa : (TE, c \circ T.\lambda) \to (E, \lambda)$$

  是提升态射。

- 水平联络是一个映射 $\nabla:\ Eq \times_p TM \to TE$，使得
  - (i) ∇ 是一个水平提升，因此也是 $(p_\circ E,\ T_\circ q):\ TE \to E_q \times_p TM$[3]的收缩；因此，$(p,\ T_\circ q)\circ\nabla = id$；
  - (ii) ∇ 与每一对提升相容，因此映射

$$\nabla : (E_q \times_p TM, \lambda \times \xi) \to (TE, c \circ T.\lambda)$$
$$\nabla : (E_q \times_p TM, 0 \times \ell) \to (TE, \ell)$$

  是提升态射。

[3]映射 $(p.E,\ T.q)$ 落在拉回 $E_q \times_p TM$ 中是自然性的结果，因为 $p \circ T.q = q \circ p$。

- A 完整联络是一对 (κ,∇)，满足以下相容关系：

  (i) $\kappa\circ\nabla=\xi\circ q\circ\pi_0$, *(ii)* $\nabla(p,T.q)+_{T.q}\mu(p,\kappa)=id$，因此存在一个同构 $Eq\times_p TMp\times_q E\cong TE$。

在处理经典微分几何时，一个有用的概念是协变导数，其定义等价于光滑流形范畴中的垂直联络定义。

定义 2.6.2。设 $(q:E\to M,\xi,\lambda,\kappa)$ 是一个垂直联络。[4] 与之关联的协变导数 是与 (κ,∇) 相关的映射

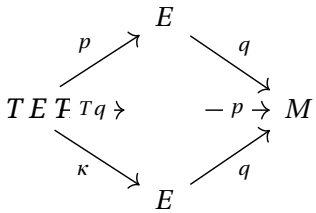
$$\nabla_{(-)}[=]:\Gamma(\pi)\times\Gamma(p)\to\Gamma(\pi);(A,X)\mapsto(\kappa\circ TA\circ X).$$

Lucyshyn-Wright (2018年) 通过证明完整联络恰好是满足某个泛性质的垂直联络，大幅简化了完整联络的概念。

命题 2.6.3(Lucyshyn-Wright (2018年))。微分丛上的联络等价地可由一个垂直联络来指定

$$\kappa:TE\to E$$

使得以下 图表将 TE 表示为 M 上微分丛范畴中的一个双积 ：



联络的平坦性也有一个概念，它可以推广到微分丛上的垂直联络。

定义 2.6.4. 微分丛 $(q:E\to M,\xi,\lambda)$ 上的联络 κ 在平坦时，r

$$\kappa\circ T.\kappa\circ c=\kappa\circ T.\kappa.$$

我们可以看到，联络在类似于微分丛的构造下保持封闭，特别是引理 2.4.3 中的幂等分裂和重指标构造。

引理 2.6.5。设 $(q:E\to M,\xi,\lambda)$ 是一个配备了垂直联络的微分丛。

(i) (q,ξ,λ) 的任意线性收缩都将具有垂直联络。

(ii) 沿 $f:N\to M$ 拉回 q 所诱导的拉回微分丛将具有垂直联络。

如果垂直联络是平坦的，或属于完整联络的一部分（也就是说，它满足命题 *2.6.3* 中的普适性条件），那么诱导的联络也具有相同性质。

证明。泛性质在每种情况下都会诱导出垂直联络。由于平坦性是一个等式条件，这种构造会保留平坦性；而通过极限的交换性，它也保留有效性。

□

[4]定义 协变导数的 ction.

切范畴中的微分丛并不一定都有联络（例如，自由切范畴 Weil$_1$ 第 4 章中的切丛就是一个没有联络的微分丛）。然而，如果某个微分丛的全空间具有仿射联络，就可以由此在该微分丛及其底空间上诱导出相容联络。

定理 2.6.6. 设 $(q : E \to M, \xi, \lambda)$ 是切范畴$\mathbb{C}$中的一个微分丛，其中 E 带有一个（平坦的）垂直联络。那么，全空间 M 和微分丛 (q, ξ, λ) 各自都带有一个（平坦的）垂直联络。若该联络是完全的（即存在相容的水平联络），那么诱导的联络也同样是完全的。

证明。由微分丛的强泛性质条件可知，微分丛 $(\mathrm{q} \circ \pi_0 : \mathrm{E\,q} \times_p \mathrm{T\,M} \to \mathrm{M}, (\xi, 0), \lambda \times \ell)$ 是 $\mathrm{p} : \mathrm{T\,E} \to \mathrm{E}$ 沿 $\xi : \mathrm{M} \to \mathrm{E}$ 的拉回微分丛。由引理 2.6.5，这给出一个$(\mathrm{q} \circ \pi_0, (\xi, 0), (\lambda, \ell))$，（平坦、有效的）垂直联络，因此根据幂等分裂性质，它导出 $(\mathrm{q} : \mathrm{E} \to \mathrm{M}, \xi, \lambda)$和 $(\mathrm{p} : \mathrm{T\,M} \to \mathrm{M}, 0, \ell)$，作为（平坦、有效的）垂直联络。 □

每个光滑　　流形都有一个仿射联络，因此会在任意向量丛上诱导出一个联络　　.

推论2.6.7。 每个向量丛都有一个联络。

第3章

对合代数丛

本章通过给出李代数丛（即对合代数丛）的切范畴公理化，完成了论文的首个主要目标。与向量丛类似，李代数丛是一种高度非代数性的概念（按 Freyd 和 Kelly (1972) 的意义而言）：它是配备了李代数结构的向量丛，该结构定义在投影的截面集合上。此外，截面上的括号必须满足相对于底空间上取值于 $\mathbb{R}$ 的函数的乘积法则（即莱布尼茨法则），这又为定义引入了一项非代数结构。李代数丛的切范畴定义将切丛视为“原型李代数丛”，其中垂直提升 $\ell : T \Rightarrow T^2$ 标识向量丛结构，而典范翻转 $c : T^2 \Rightarrow T^2$ 则起到李括号的作用。

李代数丛是李代数的自然多对象类比，正如李群胚是李群的多对象类比。在单对象情形下，李群通常被视为某个光滑流形的对称变换空间（通常将群作用 $G \times M \to M$ 视为同一对象）；类似地，李代数也可以被视为导子空间（通常将其视为流形 M 上 $\chi(M)$ 的李子代数）。将群推广为群胚是很自然的；事实上，Brandt 在 Brandt（1927）中引入群胚，比 MacLane 和 Eilenberg 在 Eilenberg 和 MacLane（1945）中创立范畴论早了近二十年。将李代数推广到多对象情形则没有那么直接。第一步是用向量丛 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda)$ 替代李代数所基于的向量空间。其思路是对这个向量丛作公理化，使得 $\Gamma(\pi)$ 中的每个截面都对应于 $C^\infty(M)$ 上的一个导子。命题 1.2.18 中导子的反交换子运算表明，应当存在一个李括号 $[-,-]: \Gamma(\pi)\otimes\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi)$（类似于群胚中部分定义的乘法）；而与 $C^\infty(M)$ 上导子的对应关系则表明，应当存在一个向量丛态射 $\varrho : A \to TM$，满足莱布尼茨法则：

$$[X, f\cdot Y] = f\cdot[X,Y] + [X,f]\cdot Y; \quad [X,f] := \hat{p}\circ T.f\circ\varrho\circ X \tag{3.1}$$

（李代数丛的完整定义可见3.1.1）。这种关于李代数丛的“操作性”定义，使得描述其态射变得困难；此外，从经典意义上说，它本质上也未能构成代数结构，因为它公理化的是一个映射的截面集合上的结构，而非范畴本身中的态射。

引入对合代数丛，是为了为李代数丛提供一种切范畴表示，这与微分丛和向量丛之间的关系类似。第2 章聚焦于向量丛上的欧拉向量场构造，表明该构造诱导出一个从向量丛到弱余单子 (T,ℓ) 的结合余代数（提升）范畴的全忠实函子，并将满足泛性质的Lift(SMan) 识别为向量丛的一个子范畴。相应的

[1]回顾引理2.1.3中的记号。

李代数丛的构造便是典范对合，由 Eduardo Martinez 及其合作者确认（可参见de León 等人(2005)）。给定一个李代数丛 $(\pi : A \to M,\ \varrho : A \to TM,\ [-,-]: \Gamma(\pi)\otimes\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi))$，其典范对合是一个映射

$$\sigma : A_\varrho \times_{T\pi} TA \to A_\varrho \times_{T\pi} TA.$$

利用这个 σ 映射，可以直接刻画李代数丛态射：李代数丛态射恰好是一个保持锚和对合映射的向量丛态射 $(f, m): A \to B$：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \varrho^A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varrho^B} \\ TM & \xrightarrow[T.m]{} & TN \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_\varrho \times_{T\pi} TA & \xrightarrow{f\times T.f} & B_{\varrho^B} \times_{T.\pi^B} TB \\ {\scriptstyle \sigma^A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^B} \\ A_\varrho \times_{T\pi} TA & \xrightarrow[f\times T.f]{} & B_{\varrho^B} \times_{T.\pi^B} TB \end{array}$$

此外，Martínez (2001）的工作隐含地表明，σ 满足与李代数丛公理相对应的公理。因此，对合性对应于李括号的反对称性

$$\sigma\circ\sigma = id \iff [X,Y]+[Y,X]=0,$$

而莱布尼茨法则成立，当且仅当 ϱ 映射将代数丛对合映射到 M 上的典范翻转，

$$T.\varrho\circ\pi_1\circ\sigma = c\circ T.\pi\circ\varrho \iff \forall f\in C^\infty(M), [X, f\cdot Y] = f\cdot[X,Y]+[X,f]\cdot Y$$

（$[X, f\ ]$采用与之前相同的定义）。

因此，对合代数丛的构想是直接公理化典范对合，正如微分丛公理化微分丛的欧拉向量场一样。对合代数丛是配备了一对结构映射的微分丛

$$\varrho : A\to TM,\ \sigma : A_\varrho \times_{T\pi} TA \to A_\varrho \times_{T\pi} TA$$

它们满足一组公理。其中一些是对Martínez(2001）中给出的李代数丛结构方程的直接转述，例如

$$T.\varrho\circ\lambda = \ell\circ\varrho,\ \sigma\circ\sigma = id,\ T.\varrho\circ\pi_1\circ\sigma = c\circ T.\varrho\circ\pi_1.$$

然而，这要求底层向量丛的欧拉向量场与对合映射之间具有新的相容性：

$$\sigma\circ(\xi\circ\pi,\lambda) = (\xi\circ\pi,\lambda).$$

关于这种相容性，最引人注目的新发现是，括号 $[-,-]$ 上的雅可比恒等式对应于 σ 上的杨–巴克斯特方程：

$$\begin{array}{ccc} A_\varrho \times_{T\pi} TA_{T.\varrho} \times_{T^2.\pi} T^2A & \xrightarrow[\sigma\times c.A]{} & A_\varrho \times_{T\pi} TA_{T.\varrho} \times_{T^2.\pi} T^2A \\ \downarrow{\scriptstyle 1\times T.\sigma} & & \downarrow \\ A_\varrho \times_{T\pi} TA_{T.\varrho} \times_{T^2.\pi} T^2A & & A_\varrho \times_{T\pi} TA_{T.\varrho} \times_{T^2.\pi} T^2A \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma\times c.A} & & {\scriptstyle \sigma\times c.A}\downarrow \\ A_\varrho \times_{T\pi} TA_{T.\varrho} \times_{T^2.\pi} T^2A & \xrightarrow{1\times T.\sigma} & A_\varrho \times_{T\pi} TA_{T.\varrho} \times_{T^2.\pi} T^2A \end{array}$$

这既令人惊讶（它为微分几何和数学物理中的一个核心研究对象提供了新的刻画），又在某种程度上可以预料（Cockett andCruttwell （2015）中的研究

Mackenzie（2013）表明，流形上向量场集合的李代数结构源自c上的杨–巴克斯特方程。这种不涉及向量场的雅可比恒等式表述，使得我们能够以结构性方法研究李代数丛，而这也推动了第4 章和5章

与第2章一样，第一节为概述，旨在介绍李代数丛范畴。第二节介绍锚定丛，以及锚定丛的延拓空间。锚定丛与对合代数丛之间的关系，等同于自反图与群胚之间的关系（这是第5章的主题）：锚定丛的延拓空间等同于群胚中可复合箭头的集合。本节主要是将 Martinez 的延拓构造推广到一般的切范畴。本章其余部分介绍与 Matthew Burke 和 Richard Garner 合作取得的新成果。

第 3 节介绍对合代数丛，它是配备了延拓空间上的对合映射的锚定丛。第 4 节研究切范畴中的锚定丛，该范畴具有负元，且锚定丛配备了联络。联络使对合代数丛具有一种“局部坐标”表示（依照第1.4节的含义），这等同于第 1 节中李代数丛的局部刻画。本章最后一节确立了主要结果：光滑流形中的李代数丛范畴与对合代数丛范畴同构。

3.1 李代数丛

本节回顾李代数丛的基本理论：其定义及态射的定义，并介绍一些入门示例。不过，本章其他部分不会再出现经典定义，因为我们很快就会介绍 Martínez 的结构方程，用于李代数丛（Martínez(2001)），随后借助联络将其转化为切丛范畴的术语。

定义 3.1.1。李代数丛是一个向量丛 $\pi\colon A \to M$，配备一个锚 $\varrho\colon A \to TM$ 和一个括号 $[-,-]\colon \Gamma(\pi)\otimes\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi)$，满足以下公理：

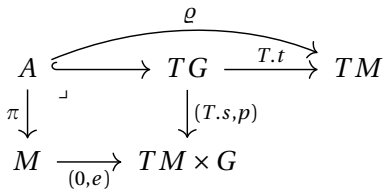
- 双线性：$[a\,X_1+b\,X_2,\ Y\,]=a\,[X_1,\ Y\,]+b\,[X_2,\ Y\,]$ 以及 $[X,\ a\,Y_1+b\,Y_2]=a\,[X,\ Y_1]+b\,[X,\ Y_2]$
- 反对称：$[X,\ Y\,]+[Y,\ X\,]=0$
- 雅可比：$[X,\ [Y,\ Z\,]]=[[X,\ Y\,],Z\,]+[Y,\ [X,\ Z\,]]$
- 莱布尼茨：$[X,\ f\cdot Y\,]=f\cdot[X,\ Y\,]+[X,\ f\,]\cdot Y$

（其中 $[X,\ f\,]$ 的定义与方程*3.1*中相同）。

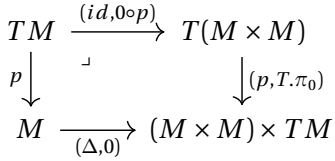
例3.1.2。

（*i*）李代数丛的典型例子当然是切丛，即使用定义 *1.2.16* 中的操作切丛。（*ii*）一个李代数是终对象上的李代数丛：对于一个群G，源恒定切向量丛就是从李群到李代数的通常李函子，因为群胚是一个单对象群。

（*iii*）李群胚的源恒定切向量丛 s，t：$G \to M$ 构成一个李代数丛。这个丛通过拉回定义



其中投影为 π，目标由图表中的 ϱ 给出。从 π、$\Gamma(\pi)$ 的截面到 G 上的向量场存在一个单射 $\mathbb{R}$-模态射，即 $\chi(G)$，而 G 上的李括号在此提升的像下封闭，从而在 $\Gamma(\pi)$ 上定义了李括号。特别地，我们可以看到，TM 是流形 M 上对偶群胚的源恒定切向量丛：



给定 $(u, v): X \to T(M \times M)$ 上方的 $(m, m): X \to TM$，且 $u = 0 \circ m$，则可得 $u = 0 \circ p \circ u$，因此 v 是映入 TM 的唯一映射。

（*iv*）每个群都是以单个对象为底的群胚。因此，与群 G 相关联的李代数丛就是通常的李代数。

（*v*）根据力学的哈密顿形式体系，每个泊松流形都关联着一个李代数丛。泊松流形是一个流形 M，其 $C^\infty(M)$ 上配备了泊松代数结构，即一个同时也是导子的李代数：

$$[f \cdot g, h] = f \cdot [g, h] + [f, h] \cdot g$$

其中 $\cdot$ 是代数 C 中的乘法 $^\infty(M)$ 如引理 *2.1.3*所述。泊松流形 M 上的余切丛具有典范的李代数胚结构，称为泊松李代数胚 *Courant (1994年)*。

(vi) 任何李代数丛——即一个在其截面空间上赋有李括号的向量丛——都是李代数胚，其锚映射为 $\xi \circ \pi$。

李代数胚态射以难以处理著称，其定义也相当繁复。

定义 3.1.3。设 A、B 是 M、N 上的一对锚定丛，且 $\Phi: A \to B$ 是覆盖映射 $\phi: M \to N$ 的锚定丛态射。$X \in \Gamma(\pi_A)$ 的一个 Φ-分解是由 $X_i \in \Gamma(\pi_B)$ 和 $f_i \in C^\infty(M)$ 组成的集合，使得

$$\Phi \circ X = \sum_i f_i \cdot X_i \circ \phi.$$

保锚向量丛态射 Φ 是李代数丛态射，当且仅当对于 X、$Y \in \Gamma(\pi_A)$ 以及 Φ-分解 $\{X_i, f_i\}$，$\{Y_j, g_j\}$ 而言，以下方程成立：

$$\Phi \circ [X, Y] = \sum f_i \cdot g_j \cdot ([X_i, Y_j] \circ \phi) + \sum [X, f_i] \cdot (X_i \circ \phi) - \sum [Y, g_j] (Y_j \circ \phi).$$

定义李代数丛态射的方程与所选的 Φ-分解无关（证明见 Higgins 和 Mackenzie （1990）。

例 3.1.4。

(i) 若 A,B 是基流形 M 上的李代数丛，则 $\Phi:A\to B$ 是李代数丛态射，当且仅当它保持锚和李括号。

(ii) 给定两个李代数丛态射 $f:A\to B, g:B\to C$，它们的复合 $g\circ f$ 也是李代数丛态射。

(iii) 一个泊松σ模型（参见*Bojowald* 等人*(2005)* 是李代数丛态射

$$\phi:T\Sigma\to T^*M$$

其中 Σ 是二维流形，$T\Sigma$ 表示其切李代数丛；而 M 是泊松流形，T^*M 表示其余切丛上的李代数丛结构。

李代数丛是李代数向“多对象”情形的自然推广，但并不适合对该理论作函子性表述。朝这一方向迈出的一步，是考虑 Martínez（2001）给出的李括号及其相干性的基于坐标的表述。设 A 是 M 上的一个锚定丛，其截面空间上配有一个双线性括号，并为 $\Gamma(\pi)$ 和 $\chi(M)$ 选取一对基：对于 $\Gamma(\pi)$，记作 $\{e_\alpha\}$；对于 $\chi(M)$，记作 $\{\partial_{x_i}\}$。于是，锚和括号可用局部坐标表示为：

$$\varrho(e_\alpha)=\sum_i \varrho_\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}\qquad [e_\alpha,e_\beta]=\sum_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$$

（从这里开始，我们使用爱因斯坦求和约定来简化计算，因此改写为

$$\varrho(e_\alpha)=\varrho_\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}\qquad [e_\alpha,e_\beta]=C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$$

省略了 $\sum$）。以下对李代数丛公理的刻画使用了 Martinez 的结构方程。

命题 3.1.5. *[Martínez (2001)]* 配备了括号的 M 上的锚定丛 A 是李代数丛，当且仅当 ϱ 和 $[-,-]$ 满足以下结构方程：

（*i*）交替：

$$C_{\alpha\beta}^\nu+C_{\beta\alpha}^\nu=0$$

（*ii*）莱布尼茨：

$$\varrho_\alpha^j\frac{\partial\varrho_\beta^i}{\partial x^j}=\varrho_\gamma^i C_{\alpha\beta}^\gamma+\varrho_\beta^j\frac{\partial\varrho_\alpha^i}{\partial x^j}$$

（*iii*）*Bianchi*恒等式：

$$0=\varrho_\alpha^i\frac{\partial C_{\beta\gamma}^\nu}{\partial x^i}+\varrho_\beta^i\frac{\partial C_{\gamma\alpha}^\nu}{\partial x^i}+\varrho_\gamma^i\frac{\partial C_{\alpha\beta}^\nu}{\partial x^i}+C_{\beta\gamma}^\mu C_{\alpha\mu}^\nu+C_{\gamma\alpha}^\mu C_{\beta\mu}^\nu+C_{\alpha\beta}^\mu C_{\gamma\mu}^\nu$$

该命题是利用协变导数将李代数丛公理直接转写为局部坐标形式。首先回顾，根据光滑 Serre–Swan 定理（11.33 Nestruev(2003年)），括号的双线性

$$[-,-]:\Gamma(\pi)\times\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi)$$

作为$C^\infty(M)$-模的态射，保证它对应于向量丛之间的双线性态射$A_2\to A$，这意味着存在一个全局定义的双线性映射$A_2\to A$，当作用于投影的截面时，它等于李括号。我们将其记录为一个引理：

引理 3.1.6. 对于每个李代数丛$\mathscr{A}$，都存在一个双线性态射

$$\langle-,-\rangle:A_2\to A$$

使得对于任意截面 $X,\ Y\in\Gamma(\pi),\ \langle X,\ Y\rangle\ =[X,\ Y\ ]$。

由〈–,–〉导出的两个结构映射，编码了李代数丛的相容性。第一个映射衡量锚映射在多大程度上未能保持向量丛 π 上选定的联络：$A\to M$，以及切丛 p：$TM\to M$ 上选定的联络。

定义 3.1.7. 设 A 为一个李代数丛，并在 A 上选定水平联络 ∇、在 TM 上选定垂直联络 κ'，令

$$\{v,x\}_{\kappa',\nabla}:=TM_p\times_q A\xrightarrow{\nabla}TA\xrightarrow{T.\varrho}T^2M\xrightarrow{\kappa'}TM.$$

当上下文已明确所选联络时，我们将省略下标。

观察 3.1.8. 上述圆括号括号对应于符号

$$\{-,-\}=\varrho^j_\beta\frac{\partial\varrho^i_\alpha}{\partial x^j}.$$

莱布尼茨相容性可改写如下：

引理 3.1.9. 设 A 为一个带有双线性括号（诱导出对合 σ）的锚定丛。分别在 A 和 TM 上选取联络 $(\kappa,\nabla),(\kappa',\nabla')$。括号和锚映射满足莱布尼茨法则，当且仅当

$$\varrho\circ\langle x,y\rangle_{(\kappa,\nabla)}+\{\varrho x,y\}_{(\kappa',\nabla)}=\{\varrho y,x\}_{(\kappa',\nabla)}.$$

证明. 该条件等价于恒等式

$$\varrho^j_\alpha\frac{\partial\varrho^i_\beta}{\partial x^j}=\varrho^i_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta}+\varrho^j_\beta\frac{\partial\varrho^i_\alpha}{\partial x^j}.$$

□

比安基公理刻画了雅可比恒等式在局部坐标下的失效，并指出必须用括号的曲率加以修正。我们看到

$$C^\nu_{\alpha\mu}C^\mu_{\beta\gamma}=[e_\alpha,[e_\beta,e_\gamma]]$$

而

$$\frac{\partial C^\nu_{\beta\gamma}}{\partial x^i}e_\nu=\kappa\circ T(\langle-,-\rangle_{(\kappa,\nabla)})\circ\nabla^{A_2}\circ(\frac{\partial}{\partial x^i},e_\beta,e_\gamma)$$

确定一个三线性映射

$$\{\frac{\partial}{\partial x^i}, e_\beta, e_\gamma\}_{(\kappa,\nabla)} := \kappa \circ T(\langle -,-\rangle_{(\kappa,\nabla)}) \circ \nabla^{A_2} \circ (\frac{\partial}{\partial x^i}, e_\beta, e_\gamma).$$

这是李代数丛结构方程中使用的第二个导出映射。

定义 3.1.10. 设 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$ 是一个配备了双线性映射的锚定丛

$$\langle -,-\rangle : A_2 \to A.$$

导出三元括号 $\{-,-,-\} : TMp \times_\pi A_\pi \times_\pi A \to A$ 定义为

$$\{v,x,y\}_{(\kappa,\nabla)} := TM_p \times_\pi A_\pi \times_\pi A \xrightarrow{\nabla[A2]} TA_2 \xrightarrow{T.\langle -,-\rangle} TA \xrightarrow{\kappa} A$$

其中 $\nabla[A2]$ 是配对 $(\nabla(\pi_0,\pi_1), \nabla(\pi_0,\pi_2))$。

观察 3.1.11. 三元括号对应于以下符号：

$$\{-,-,-\}_{(\kappa,\nabla)} := \varrho^i_\alpha \frac{\partial C^\nu_{\beta\gamma}}{\partial x^i}.$$

引理 3.1.12. 设 A 是 M 上的一个锚定丛，配备了双线性括号，并用 σ 表示诱导的对合。取一对联络，并将导出映射记为 $\langle -,-\rangle$,$\{-,-,-\}$。则

(i) 括号是反对称的，当且仅当其整体化也是反对称的；也就是说，$\langle e_\alpha, e^\beta\rangle + \langle e^\beta, e_\alpha\rangle = 0$;

(ii) 括号满足雅可比恒等式，当且仅当它关于最后两个参数交替，且

$$0 = \sum_{\gamma \in \mathrm{Cy}(3)} \langle x_{\gamma_0}, \langle x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}\rangle\rangle + \sum_{\gamma \in \mathrm{Cy}(3)} \{\varrho\, x_{\gamma_0}, x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}\}.$$

证明。

(i) 这等价于 $C^\nu_{\alpha\beta} + C^\nu_{\beta\alpha} = 0$。

(ii) 这等价于

$$0 = C^\mu_{\beta\gamma} C^\nu_{\alpha\mu} + C^\mu_{\gamma\alpha} C^\nu_{\beta\mu} + C^\mu_{\alpha\beta} C^\nu_{\gamma\mu} + \varrho^i_\alpha \frac{\partial C^\nu_{\beta\gamma}}{\partial x^i} + \varrho^i_\beta \frac{\partial C^\nu_{\gamma\alpha}}{\partial x^i} + \varrho^i_\gamma \frac{\partial C^\nu_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

□

命题 3.1.13。 李代数丛恰好是一个锚向量丛 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$，配备一个双线性、交替映射

$$\langle -,-\rangle : A_2 \to A; \quad \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 0$$

使得对于 A 上的任意联络 (∇, κ)，映射

$$\{v,x\}_{(\kappa,\nabla)} := \kappa' \circ T.\varrho \circ \nabla(v,x), \quad \{v,x,y\}_{(\kappa,\nabla)} := \kappa \circ T(\langle -,-\rangle_{(\kappa,\nabla)}) \circ \nabla^{A_2} \circ (v,x,y) \tag{3.2}$$

满足方程

(i) $\varrho \circ \langle x,y\rangle + \{\varrho\, x, y\}_{(\kappa',\nabla)} = \{\varrho\, y, x\}_{(\kappa',\nabla)}$,

(ii) $\sum_{\gamma\in Cy(3)}\langle x_{\gamma_0},\ \langle x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}\rangle\rangle+\sum_{\gamma\in Cy(3)}\{\varrho x_{\gamma_0}, x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}\}_{(\kappa,\nabla)}=0$。

此外，态射还可以采用局部坐标表示，如 Martínez(2018年) 第2节所示。锚定丛态射 $A\to B$ 是李代数丛态射，当且仅当

$$f_\gamma^\beta A_{\alpha\delta}^\gamma+\varrho_\delta^i\frac{\partial f_\alpha^\beta}{\partial x^i}=B_{\theta\sigma}^\beta f_\alpha^\theta f_\delta^\sigma+\varrho_\alpha^i\frac{\partial f_\delta^\beta}{\partial x^i}.$$

这里将 A 和 B 作为括号的参数，因此该条件可改写为

$$f_\gamma^\beta A_{\alpha\delta}^\gamma=f\circ\langle\alpha,\delta\rangle,\quad B_{\theta\sigma}^\beta f_\alpha^\theta f_\delta^\sigma=\langle f\circ\alpha, f\circ\delta\rangle.$$

对于带联络的向量丛之间的映射，采用以下记号：

$$\frac{f:A\to B\quad(\kappa^A,\nabla^A,A,\lambda^A)\quad(\kappa^B,\nabla^B,B,\lambda^B)}{\nabla[f]:A_2\to B:=\kappa^B\circ T.f\circ\nabla^A}\tag{3.3}$$

这里将 ϱ 项视为挠率，因此

$$\varrho_\delta^i\frac{\partial f_\alpha^\beta}{\partial x^i}=\kappa\circ T.f\circ\nabla(\varrho e_\delta,e_\alpha)=\nabla[f](\varrho e_\delta,e_\alpha),$$
$$\varrho_\alpha^i\frac{\partial f_\delta^\beta}{\partial x^i}=\kappa\circ T.f\circ\nabla(\varrho\alpha,\delta)=\nabla[f](\varrho e_\alpha,e_\delta),$$

使用方程 3.3中建立的记号。于是，李代数丛态射的概念可表示如下：

命题*3.1.14*（*Martínez*（*2018*年））。设 $(\pi:A\to M,\ \varrho^A,\ \langle-,-\rangle^A),(q:B\to N,\ \varrho^B,\ \langle-,-\rangle^B)$ 是一对选定了联络 (κ^-,∇^-) 的李代数丛。保锚向量丛态射 $f:A\to B$ 是李代数丛态射，当且仅当

$$f\circ\langle e_\alpha,e_\delta\rangle+\nabla[f]\circ(\varrho e_\delta,e_\alpha)=\langle f\circ\alpha,f\circ\delta\rangle+\nabla[f]\circ(\varrho e_\alpha,e_\delta).$$

3.2 锚定丛

锚定丛之于李代数丛，犹如自反图之于群胚。两种理论的结构（大体上）相同；然而，自反图缺少群胚的复合运算，而锚定丛缺少李代数丛的括号运算。本节回顾锚定丛及其延拓的基本理论（更多详情请参见 Mackenzie(2005)）。

定义3.2.1。 切范畴中的锚定丛是一个微分丛 $(A\xrightarrow{\pi}M,\xi,\lambda)$，并配备一个线性态射

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varrho} & TM \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & M & \end{array}$$

锚定丛态射是一个线性丛态射 $(f,\ v)$，它保持锚

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{T.f} & TB \\ \uparrow{\scriptstyle\lambda} & & \uparrow{\scriptstyle l} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle\varrho} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ TM & \xrightarrow{T.v} & TN \end{array}$$

切范畴$\mathbb{C}$ 中的锚定丛及锚定丛态射所构成的范畴记作$\mathsf{Anc}(\mathbb{C})$，一般锚丛记作 $(A\xrightarrow{\pi}M,\xi,\lambda,\varrho)$。

每个锚定丛都关联着两个拉回。它们扮演可复合箭头空间的角色：$G_2 := G_t \times_s G$，$G_3 := G_t \times_s G_t \times_s G$，对应于自反图$s$、$t\colon G \to M$。

定义 3.2.2。设 $(A \xrightarrow{\pi} M, \xi, \lambda, \varrho)$ 为一个锚定丛。其一阶和二阶延拓 由以下极限给出

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(A) & \longrightarrow & TA \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T.\pi} \\ A & \xrightarrow{\varrho} & TM \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{L}^2(A) & \longrightarrow & T^2A \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T^2.\pi} \\ TA & \xrightarrow{T.\varrho} & T^2M \\ \downarrow{\scriptstyle T.\pi} & & \\ A & \xrightarrow{\varrho} & TM \end{array}$$

（纤维积的记号略有不同寻常，因为严格来说它并非拉回。）在本章中，始终假设锚定丛的一阶和二阶延拓存在（尽管并未明确选定任何延拓）。

注记 3.2.3。锚定丛的延拓并非必须存在；这一条件主要是为了便于讨论对合代数丛。本节中所有未明确提及延拓的结果，对锚定丛均成立，而不取决于延拓是否存在。

例 3.2.4。

（i）对于任意对象 M，$id\colon TM \to TM$ 是切微分丛的一个锚，并且每个 $f\colon M \to N$ 都给出一个锚定丛态射。此外，对于 M 上的任意锚定丛，其锚本身也是锚定丛态射 $(A, \pi, \xi, \lambda, \varrho) \to (TM, p, 0, \ell, id)$。这诱导出一个全忠实函子：

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathsf{Anc}(\mathbb{C}).$$

这个包含有一个左伴随，它将锚定丛 $(\pi\colon A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$ 映射到底空间 M（单位是锚映射 ϱ），因此 $\mathbb{C}$ 是 $\mathsf{Anc}(\mathbb{C})$ 的反射子范畴。

(ii) 对于任意微分丛 (A, π, ξ, λ)，映射 $0 \circ \pi\colon A \to TM$ 是一个锚，并且微分丛之间的每个态射 $f\colon A \to B$ 也会给出一个锚定丛态射。0 的自然性确保每个微分丛态射都会保留这个平凡锚映射，从而得到一个全忠实函子

$$\mathsf{DBun}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathsf{Anc}(\mathbb{C}).$$

这个函子有一个右伴随，它将锚映射替换为平凡锚映射

$$(\pi\colon A \to M, \xi, \lambda, \varrho) \mapsto (\pi\colon A \to M, \xi, \lambda, 0 \circ \pi)$$

其中余单位由自然幂等元 $e = \xi \circ \pi\colon (A, \lambda) \to (A, \lambda)$给出。很容易验证，锚映射在丛态射 (e, id) 下保持不变：

$$\varrho \circ \xi \circ \pi = 0 \circ T.id \circ \pi$$

因此，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} TM & = & TM \\ {\scriptstyle 0\circ\pi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varrho} \\ A & \xrightarrow[p\circ\lambda]{} & A \end{array}$$

这意味着，微分丛是锚定丛的一个余反射子范畴。

(iii) 切范畴中的任意自反图 $(s,\ t:C\ \to M,\ e:M\ \to C\ )$ 都有一个锚定丛（在极限充分存在时），其构造如下：

$$C^{\partial}\ \longrightarrow\ T.C\ \underset{T.e^{s}}{\overset{e.T_{1}}{\rightrightarrows}}\ T.C$$

（其中 $e\,s:C\ \to C\ =e\circ s$）。在 C^{∂} 上构造一个提升：

$$\begin{array}{ccccc} T.C^{\partial} & \longrightarrow & T^{2}C_{1} & \underset{T.T.e^{s}}{\overset{T.e.C_{1}}{\rightrightarrows}} & T^{2}C_{1} \\ {\scriptstyle\lambda}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\ell} & & \uparrow{\scriptstyle\ell} \\ C^{\partial} & \longrightarrow & T.C_{1} & \underset{T.e^{s}}{\overset{e.C_{1}}{\rightrightarrows}} & T.C_{1} \end{array}$$

由于 T-极限的可交换性，此提升是非奇异的。预微分丛的数据由投影给出：

$$C^{\partial}\hookrightarrow T.C\xrightarrow{p.e^{s}}M.$$

截面由下式诱导：

$$M\xrightarrow{(0.e)}T.C$$

而与 $T.t$ 作后复合，得到锚映射：

$$C^{\partial}\hookrightarrow T.C\xrightarrow{T.t}T.C.$$

根据复合，该图表是一个拉回，而最外层边界定义了拉回 $\mathscr{L}(A)$。注意，任意自反图态射都将通过自然性诱导出一个锚定丛态射，因此从自反图构造锚定丛是函子性的。

(iv) 对于切范畴中的任意对象 M，c_{M}：$T^{\,2}M\ \to T^{\,2}M$ 是 $(T_{\circ}p、T_{\circ}0、c\circ T_{\circ}\ell)$上的锚，并且每个映射 f：$M\ \to N$ 都给出一个锚定丛态射。

(v) 对于任意锚定丛 $(q:\ E\ \to M,\ \xi,\ \lambda,\ \varrho)$，微分丛 $(T_{\circ}q,\ T_{\circ}\xi,\ c\circ T_{\circ}\lambda)$ 具有一个锚

$$\varrho_{T}:TE\xrightarrow{T.\varrho}T^{2}M\xrightarrow{c}T^{2}M.$$

锚定丛 $\mathrm{L}\ (A)$ 的一阶延拓与二阶切丛的表现相似，但没有典范翻转。在仿射联络的定义中，切丛发挥了与理论的“元数”类似的作用。有一个提升映射使该联络更强：

定义 3.2.5。设 $(\pi:\ A\ \to M,\ \xi,\ \lambda,\ \varrho)$ 是切范畴 $\mathbb{C}$中的一个锚定丛。我们定义一个广义提升：

$$\hat{\lambda}:A\to A_{\varrho}\times_{T\pi}TA:=(\xi\circ\pi,\lambda).$$

此广　义化提升满足与第二切丛上的提升相同的相干性　　e:

命题 3.2.6。　　设 $(\pi:A\ \to M,\xi,\lambda,\varrho)$ 是切范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个锚定丛。由此可　　*t*

^^　^　^　^*(i)*（λ的余结合律）$(\lambda\times\ell)\circ\lambda=(i\,d\ \times T.\lambda)\circ\lambda$;

(ii)（泛性质）下图是一个 T-拉回：

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{\hat{\mu}} & A_\varrho \times_{T\pi} TA \\ {\scriptstyle \pi\circ\pi_i}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ M & \xrightarrow[\xi]{} & A \end{array}$$

其中 $\hat{\mu} := (\xi \circ \pi \circ \pi_0,\ \mu)$。

证明。

(i) 计算

$$\begin{aligned} (\hat{\lambda} \times \ell) \circ \hat{\lambda} &= (\xi \circ \pi \circ \xi \circ \pi, \lambda \circ \xi \circ \pi, \ell \circ \lambda) \\ &= (\xi \circ \pi, T.(\xi \circ \pi) \circ \lambda, T.\lambda \circ \lambda) \\ &= (\pi_0, T.(\xi \circ \pi) \circ \pi_1, T.\lambda \circ \pi_1) \circ (\xi \circ \pi, \lambda) \\ &= (id \times T(\hat{\lambda})) \circ \hat{\lambda}. \end{aligned}$$

(ii) 利用拉回引理可知，对任意锚定丛，以下图表都是泛的：

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{\mu}{\frown} & \\ A_2 & \xrightarrow[\hat{\mu}]{} & \mathscr{L}(A) & \xrightarrow[\pi_1]{} & TA \\ {\scriptstyle \pi\circ\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle T\pi} \\ M & \xrightarrow{\xi} & A & \xrightarrow{\varrho} & TM \\ & & & \underset{0}{\smile} & \end{array}$$

根据定义，图表的上方三角形可交换。根据定义，右侧方形和外周是拉回，底部三角形也可交换。拉回引理保证左侧方形是拉回，因此对于每个锚定丛，一般提升对于 $\mathrm{L}(A)$ 都是泛的。现在与对合复合：

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{\hat{\nu}}{\frown} & \\ A_2 & \xrightarrow[\hat{\mu}]{} & \mathscr{L}(A) & \xrightarrow[\sigma]{} & \mathscr{L}(A) \\ {\scriptstyle \pi\circ\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle p\pi_1} \\ M & \xrightarrow{\xi} & A & \xrightarrow{id} & A \end{array}$$

只需检验上方三角形可交换，因此 $\sigma \circ \hat{\mu} = \nu$：

$$\sigma \circ \hat{\mu} \circ (a, b) = \sigma \circ ((\xi \circ \pi, 0) \circ a +_{\pi_0} (\xi \circ \pi, \lambda) \circ b) = (id, T.\xi \circ \varrho \circ a) +_{p\pi_1} (\xi \circ \pi, \lambda) \circ b.$$

因此，提升后的 $(\xi\pi, \lambda)$ 对合代数丛是 $\mathrm{L}\ (A)$ 的泛对象。

□

例 3.2.7。

(i) 对于 $T\ (M\ ) = T\ (M\ )$，延拓空间为 $T\ (M\ )_{id} \times_{Tp} T^{\ 2}M\ = T^{\ 2}M$，且二阶延拓由 $T^{\ 2}M$ 给出。

(ii) 在具有切显示系统的切范畴中，如果 $\pi \in \mathscr{D}$ 那么 $(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$的延拓自动存在。特别地，对于光滑流形范畴中的每个锚定丛，所有延拓都存在，因为投影是浸没（参见第 1.5节）。

(iii) 对于任意锚映射为 $0 \circ \pi$ 的微分丛，可得 $\mathscr{L}(A) \cong A_\pi \times_{\pi \circ \pi_i} (A_2) \cong A_3$。垂直提升的泛性质将 b 分解为 (a_1, a_2)，如下图是一个拉回：

$$\begin{array}{ccccc} A_3 & \overset{(\pi_1,\pi_2)}{\cdots\cdots\cdots

证明。 给定一个锚定丛 $(q\colon A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$，微分丛$(Tq, T\xi, c \circ T\lambda)$上存在一个锚，由$c \circ T\varrho$给出；根据自然性以及$c$上的相干性，$\ell$，该图表可交换。

$$\begin{array}{ccccc}
T^2A & \xrightarrow{T^2\varrho} & T^3M & \xrightarrow{Tc} & T^3M \\
{\scriptstyle c\circ T\lambda}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle c\circ T\ell} & & \uparrow{\scriptstyle \ell} \\
TA & \xrightarrow[T\varrho]{} & T^2M & \xrightarrow[c]{} & T^2M \\
\downarrow{\scriptstyle Tq} & & \downarrow{\scriptstyle Tp} & & {\scriptstyle p}\downarrow \\
TM & = & TM & = & TM
\end{array}$$

切结构映射和泛性质均可由从锚定丛到微分丛的函子的遗忘性质推出，这是观察 3.2.8 的结果。

□

对于任意锚定丛 A，与 $\mathscr{L}(A)$ 相关联的微分丛有两个。第一个是通常的拉回微分丛，即沿 $T.\pi$ 拉回 ϱ，如引理 2.4.3 所示：

$$\begin{array}{ccc}
A_\varrho \times_{T\pi} TA & \xrightarrow{\pi_1} & TA \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle T\pi} \\
A & \xrightarrow{\varrho} & TM
\end{array}$$

这给出了微分丛结构

$$(A_\varrho \times_{T\pi} TA \xrightarrow{\pi_0} A, A \xrightarrow{(id, T.\xi\circ\varrho)} A_\varrho \times_{T\pi} TA, A_\varrho \times_{T\pi} TA \xrightarrow{(0, c\circ T.\lambda)} T(A_\varrho \times_{T\pi} TA)).$$

按照观察 3.2.8 在锚定丛范畴中取纤维积，可得到第二个微分丛结构：

$$(A, \pi, \xi, \lambda) \xrightarrow{(\varrho, id)} (TM, p, 0, \ell) \xleftarrow{(T\pi, \pi)} (TA, p, 0, \ell).$$

这两个提升的行为类似于二阶切丛上的一对 $(T.\ell, \ell.T)$，以及预微分丛的切丛上的 (ℓ, λ_T)。

引理 3.2.10。 设 $\mathbb{C}$ 为一个切范畴，$\mathsf{Anc}(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 中的锚定丛范畴。若 $T\text{-}p \circ \pi_0, \pi_1 : A\varrho^{\times_{T\pi}} TA \to A$ 的拉回幂存在，则 $\mathscr{L}(A)$ 上有两个微分丛，其提升诱导如下：

$$\begin{array}{ccc}
(\mathscr{L}(A), \lambda\times\ell) & \longrightarrow & (TA, \ell) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T.\pi} \\
(A, \lambda) & \xrightarrow[\varrho]{} & (TM, \ell)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
(\mathscr{L}(A), 0\times(c\circ T.\lambda)) & \longrightarrow & (TA, c\circ T.\lambda) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T.\pi} \\
(A, 0) & \xrightarrow{\varrho} & (TM, 0)
\end{array}$$

带有结构映射

1. $(\mathscr{L}(A) \xrightarrow{p\circ\pi_1} A, A \xrightarrow{(\xi\pi, 0)} \mathscr{L}(A), \mathscr{L}(A) \xrightarrow{\lambda\times\ell} T\circ\mathscr{L}(A))$,
2. $(\mathscr{L}(A) \xrightarrow{\pi_0} A, A \xrightarrow{(id, T.\xi\circ\varrho)} \mathscr{L}(A), \mathscr{L}(A) \xrightarrow{0\times c\circ T.\lambda} T.\mathscr{L}(A))$.

此外，两个提升 $\lambda_{\mathscr{L}}$ 和 λ_ϱ 可交换：

$$c \circ T.(\lambda\times\ell)\circ(0\times c\circ T.\lambda) = T.(0\times c\circ T.\lambda)\circ(\lambda\times\ell).$$

证明。 根据观察 2.4.2 和引理 2.4.3，这两个微分丛分别存在。极限的交换性可通过后复合得出，因为 $c\circ T.\lambda$，ℓ 和 $\lambda,0$ 根据微分丛公理可交换。

□

上述引理确定了一个函子，我们将其记为 $\mathscr{L}$，它将 $\mathbb{C}$中的锚定丛映射到 Lift($\mathbb{C}$) 中的锚定丛（配备来自命题 2.2.7 的切结构）。

命题 3.2.11。 存在一个函子 $\mathscr{L}$，它将 $\mathbb{C}$ 中的锚定丛映射到提升范畴 Lift($\mathbb{C}$) 中的锚定丛，该函子将锚定丛 $(\pi:\ A\ \to M,\ \xi,\ \lambda,\ \varrho)$ 映射到 Lift($\mathbb{C}$) 中的元组

$$\begin{aligned}
\pi^{\mathscr{L}} &:= (\mathscr{L}(A), 0\times c\circ T.\lambda)\xrightarrow{p\circ\pi_1}(A,0),\\
\xi^{\mathscr{L}} &:= (A,0)\xrightarrow{(\xi\circ\pi,0)}(\mathscr{L}(A), 0\times c\circ T.\lambda)\\
\lambda^{\mathscr{L}} &:= (\mathscr{L}(A), 0\times c\circ T.\lambda)\xrightarrow{(\lambda\times\ell)}(T(\mathscr{L}(A)), c\circ T(0\times c\circ T.\lambda),\\
\varrho^{\mathscr{L}} &:= (\mathscr{L}(A), 0\times c\circ T.\lambda)\xrightarrow{\pi_1}(TA, c\circ T.\lambda)
\end{aligned}$$

（注意，该函子的像落在由非奇异 提升组成的 锚定丛中；见定义*2.3.1*）。锚定丛态射

$$(f,m):(\pi:A\to M,\xi,\lambda,\varrho)\to(q:E\to N,\zeta,l,\delta)$$

被映射为

$$\mathscr{L}(f,m):=f_{Tm}\times_{Tm}Tf:A_{\varrho}\times_{T\pi}TA\to E_{\delta}\times_{Tq}TE$$

证明。 首先，注意元组

$$(\pi^{\mathscr{L}}:\mathscr{L}(A)\to A,\xi^{\mathscr{L}},\lambda^{\mathscr{L}},\varrho^{\mathscr{L}})$$

是一个锚定丛，并且每个态射都是提升态射：

- $\pi^{\mathscr{L}}:(\mathscr{L}(A),0\times c\circ T.\lambda)\to(A,0)$ follows because

$$T.p\circ T.\pi_1\circ(\lambda\times\ell)=T.p\circ\ell\circ\pi_1=0\circ p\circ\pi_1$$

- $\xi_{\mathscr{L}}$: $(A,\ 0)\to(\mathrm{L}\ (A),0\times c\circ\ T.\lambda)$由此可得

$$(T.\xi\circ T.\pi, T.0)\circ 0=(0\circ\xi\circ\pi, T.0\circ 0)=(0\circ\xi\circ\pi, c\circ T.\lambda\circ 0)=(0\times c\circ T.\lambda)\circ(\xi\circ\pi,0)$$

- $\lambda_{\mathscr{L}}$: $(\mathrm{L}\ (A),0\times c\circ\ T.\lambda)\to(T.\mathrm{L}\ (A),0\times c\circ\ T.(c\circ\ T.\lambda))$由 $0\times c\circ\ T.\lambda$与 $\lambda\times\ell$ 的交换性可得，并且

- $\varrho_{\mathscr{L}}$: $(\mathrm{L}\ (A),0\times c\circ\ T.\lambda)\to(TA,\ c\circ\ T.\lambda)$根据定义是 $\varrho_{\mathscr{L}}=\pi_1$ 的一个提升。

这给出了 C 中非奇异提升范畴里的一个锚定丛。

接下来，验证这个映射具有函子性。要证明 $\mathrm{L}\ (f,\ m)$保留提升，注意到 $(f,\ m)$为 Lift(C) 中定义这两个提升的每个拉回都给出了图表的一个态射，因此诱导映射 $\mathrm{L}\ (f,\ m)$保留每个提升。要证明 $\mathrm{L}\ (f,\ m)$保留锚，验证

$$\varrho^{\mathscr{L}B}\circ\mathscr{L}(f,m)=\pi_1\circ(f\times T.f)=T.f\circ\pi_1=T.f\circ\varrho^{\mathscr{L}A}.$$

□

推论 3.2.12. 在一个切范畴 $\mathbb{C}$ 中，若沿微分丛投影的拉回存在，例如配备了真收缩显示系统（定义 *1.5.3*）的切范畴，如光滑流形范畴，则 $\mathbb{C}$ 中的锚定丛范畴上存在一个自函子，

$$\mathscr{L}' : \mathsf{Anc}(\mathbb{C}) \to \mathsf{Anc}(\mathbb{C}) = U^{\mathsf{Lift}}.\mathscr{L}.$$

观察 3.2.13. T-极限在 Anc(提升($\mathbb{C}$)) 是通过在 $\mathbb{C}$ 中逐点计算的极限，依据观察*3.2.8*和 *2.4.2*，并且 $\mathscr{L}$ 是作为极限构造的，因此 $\mathscr{L}$ 保留 T-极限。

命题 3.2.14. 延拓自函子 $\mathscr{L}' : \mathsf{Anc}(\mathbb{C}) \to \mathsf{Anc}(\mathbb{C})$ 具有自然变换

- $p' : \mathscr{L}' \Rightarrow id$
- $0' : id \Rightarrow \mathrm{L}'$
- $+' : \mathscr{L}'_{p'} \times_{p'} \mathscr{L}' \Rightarrow \mathscr{L}'$
- $\ell' : \mathrm{L}' \Rightarrow \mathrm{L}'.\mathrm{L}'$

满足所有 不涉及典范翻转的切范畴公理（定义 *1.3.2*） .

（图式）。注意，完整论证见第 4.3 节，不过在这里勾勒一下并不困难。对于投影、零映射和加法，使用推论3.2.11 所诱导的微分丛结构。要验证提升公理，注意到在选定一个拉回后，我们有：

$$\mathscr{L}'.\mathscr{L}'(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho) = \begin{cases} (p \circ \pi_1, p \circ \pi_2) : & \mathscr{L}^2(A) \to \mathscr{L}(A) \\ (\xi \circ \pi \circ \pi_0, 0 \circ \pi_1, 0 \circ \pi_2) : & \mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}^2(A) \\ (\lambda \times \ell \times \ell) : & \mathscr{L}^2(A) \to T.\mathscr{L}^2(A) \\ (\pi_1, \pi_2) : & \mathscr{L}^2(A) \to T.\mathscr{L}(A) \end{cases}$$

于是，“提升映射”为

$$\ell' : \mathscr{L}' \Rightarrow \mathscr{L}'.\mathscr{L}'; \ \mathscr{L}(A) \xrightarrow{A \times T.\hat{\lambda}} \mathscr{L}^2(A)$$

（这里回顾一下，$\hat{} \lambda = (\xi \circ \pi, \lambda) : A \to \mathrm{L}\ (A)$）。 □

注 3.2.15。命题 *3.2.11* 中描述的结构引出了双向量丛理论，该理论由 *MacKenzie* 及其合作者*F.* 和 *Mackenzie*（*2019*年）；*Mackenzie*（*1992*）发展。双向量丛是一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{q_B^D} & B \\ \downarrow{\scriptstyle q_A^D} & & \downarrow{\scriptstyle q^B} \\ A & \xrightarrow{q^A} & M \end{array}$$

其中每个投影都是向量丛投影，而方形的“垂直”和“水平”方向分别是向量丛同态。*Grabowski* 和 *Rotkiewicz (2009)* 指出，这等价于全空间 E 上一对可交换的 $\mathbb{R}^+$-作用；根据第 *2*章中的论述，这是一对作用于 E 上的可交换的非奇异提升。

$$\lambda^A, \lambda^B : E \to TE, \ T.\lambda^B \circ \lambda^A = c \circ T.\lambda^A \circ \lambda^B.$$

要对李理论中的结构所涉及的所谓“*Ehresmann* 双”（*Mackenzie*（*2011*））作出恰当阐述，将大幅扩展本论文的范围，因此这里只在边缘处略作提及。

最后请注意，锚定丛底层微分丛上的联络（见第2.6节）表现得与仿射联络类似。

引理 3.2.16。 设 $(\pi:\ A\ \to M,\ \xi,\ \lambda,\ \varrho)$ 是一个锚定丛，且 $\mathscr{L}(A)$ 存在于切范畴$\mathbb{C}$中。若 (π,ξ,λ) 具有联络，则定义

$$\hat{\kappa}:=\kappa\pi_1,\quad \hat{\nabla}:=\nabla(\pi_0,\varrho\pi_1)$$

并注意到

(i) $\hat{}\kappa:\mathscr{L}(A)\to A\ i$ 是 $(\xi\pi,\lambda)$ 的收缩，并且 $\hat{}\kappa:\ (\mathscr{L}(A),\ l\ )\to(A,\ \lambda)$对于 $l\ =(\lambda\times\ell),\ (0\times c\circ T_{\circ}\lambda)$均为线性的。 ;

(ii) $\hat{}\nabla:\ A_2\to\mathscr{L}(A)$ 是 $(\pi_0,p\circ\pi_1)$ 的截面，并且是双线性的;

(iii) 存在一个同构 $\mathscr{L}(A)\cong A_3$:

$$\nabla(p\circ\pi_1,\varrho\circ\pi_0)+_{(\pi,T.\pi)}\hat{\mu}(p\circ\pi_1,\hat{\kappa})=id.$$

例 3.2.17。 光滑流形范畴中的每个向量丛都有联络；由此可知，引理 *3.2.16* 对光滑流形范畴中的每个锚定丛都成立。

注 3.2.18。 切范畴中的锚定丛范畴几乎是一个切范畴，只是缺少一个对称映射。这种范畴中的“微分对象”将表现得像一个笛卡尔微分范畴，但混合偏导数的对称性不成立。对于可微编程的一些设置，人们已经对混合偏导数的对称性不必成立的情形产生了兴趣（参见定义 *3.4*，以及 *Cruttwell* 等人 （*2021*）中第 *6* 节末尾的讨论）；切范畴中的锚定丛范畴似乎正是这类例子的来源。

3.3 对合代数丛

对合代数丛是李代数丛的切范畴公理化。回顾一下，李代数丛具有操作切丛的几乎全部结构，尤其是在截面上有一个满足莱布尼茨法则的李括号，从而给出一个方向导数。在命题 3.2.14中，我们证明了锚定丛范畴具有与切丛几乎相同的所有映射，唯一缺少的结构映射是典范翻转

$$c:T^2M\Rightarrow T^2M$$

我们可以回想起章节引言中提到的这一点（以及 Cockett 和 Cruttwell (2015)、Mackenzie(2013））：它用于在具有负元的切范畴中构造向量场的李括号。因此，自然的下一步是在锚定丛上添加一个对合映射，并要求它满足与切丛中的 c 相同的相干性。

定义 3.3.1。对合代数丛是一个锚定丛 $(A,\pi,\xi,\lambda,\varrho)$，其配备了一个映射$\sigma:\mathscr{L}(A)\to\mathscr{L}(A)$，满足以下公理:

(i) 对合:

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(A) & \xrightarrow{\sigma} & \mathscr{L}(A)\\ & \searrow & \downarrow\sigma\\ & & \mathscr{L}(A)\end{array}$$

(ii) 双重线性：

$$\begin{array}{ccc} T.\mathscr{L}(A) & \xrightarrow{T.\sigma} & T.\mathscr{L}(A) \\ {\scriptstyle \lambda\times\ell}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 0\times c\circ T.\lambda} \\ \mathscr{L}(A) & \xrightarrow{\sigma} & \mathscr{L}(A) \end{array}$$

(iii) 提升的对称性：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{\lambda}=(\xi\circ\pi,\lambda)} & \mathscr{L}(A) \\ & {\scriptstyle \hat{\lambda}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ & & \mathscr{L}(A) \end{array}$$

(iv) 目标：

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{L}(A) & \xrightarrow{\pi_1} & TA & \xrightarrow{T.\varrho} & T^2M \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \mathscr{L}(A) & \xrightarrow{\pi_1} & TA & \xrightarrow{T.\varrho} & T^2M \end{array}$$

(v) 杨–巴克斯特：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathscr{L}^2(A) & \xrightarrow{A\times T.\sigma} & \mathscr{L}^2(A) & & \\ & {\scriptstyle \sigma\times c}\nearrow & & & & \searrow{\scriptstyle \sigma\times c} & \\ \mathscr{L}^2(A) & & & & & & \mathscr{L}^2(A) \\ & {\scriptstyle A\times T.\sigma}\searrow & & & & \nearrow{\scriptstyle A\times T.\sigma} & \\ & & \mathscr{L}^2(A) & \xrightarrow[\sigma\times c]{} & \mathscr{L}^2(A) & & \end{array}$$

若对合不满足杨–巴克斯特方程，则 A 是一个几乎对合代数丛。对合代数丛态射是锚定丛态射，因此 $\mathscr{L}(f)\circ\sigma_A=\sigma_B\circ\mathscr{L}(f)$。（注意，由于 σ 是一个同构且 $\sigma=\sigma^{-1}$，

$$\sigma:(\mathscr{L}(A),0\times c\circ T.\lambda)\to(\mathscr{L}(A),\lambda\times\ell)$$

也具有线性。）将范畴$\mathbb{C}$中的对合代数丛及对合代数丛态射范畴记作$\mathsf{Inv}(\mathbb{C})$。

观察 3.3.2。 杨–巴克斯特方程是否类型正确，并非一目了然。这可由目标公理 *(iv)* 和双重线性公理 *(ii)* 得出。从 $(u,\ v,\ w)$： $A\varrho\times_{T}\pi T\,A_{T.\varrho}\times_{T^2\circ}\,\pi T^{\,2}A$ 出发，我们看到 $\sigma\times c$ 类型正确，当且仅当

$$T.\varrho\circ\pi_1\circ\sigma(u,v)=T^2.\pi\circ c\circ w=c\circ T^2.\pi\circ w=c\circ T.\varrho\circ v.$$

同样，$1\times T.\sigma$ 类型正确，若 $T.\varrho\circ u\ =T.\pi\circ\pi_0\circ T\,.\sigma(v,w\ )$；然后使用双重线性公理计算

$$\begin{aligned} T.\pi\circ\pi_0\circ T.\sigma(v,w)&=T.\pi\circ T.p\circ T.\pi_1(v,w)=T.\pi\circ T.p\circ w\\ &=T.p\circ T^2.\pi\circ w=T.p\circ T.\varrho\circ v=T.\pi\circ v. \end{aligned}$$

关于李代数丛的这一观点，已经出现在 Martinez 及其合作者的研究中，见 de León 等人 （2005），他们利用以下公式在李代数丛的延拓空间上导出了一个“典范对合”

$$\sigma:\mathscr{L}(A)\to\mathscr{L}(A);\sigma(x,y,z)=\sigma(y,x,z+\langle x,y\rangle).$$

这种映射的结构在很大程度上尚未得到探索；值得庆幸的是，对合代数丛成功地反向推导出对合映射的公理，而该映射将在投影映射的截面上诱导出李括号。原李代数丛中的括号是用与切丛上向量场的括号相同的公式诱导出来的：

$$\lambda\circ[X,Y]^*=\big((\pi_1\circ\sigma\circ(id,T.X\circ\varrho)\circ Y-_p T.Y\circ X\circ\varrho)-_{T.\pi}0Y\big).$$

此外，锚定丛态射是李代数丛态射，当且仅当它保持导出的对合映射。

例 3.3.3。

(i) 对任意 $\mathbb{C}$ 中的 $(TM,\ p、0、\ id,$ 以及 $c)$，它们都是对合代数丛。此外，对于任意锚定在 M 上的对合代数丛，(ϱ,id) 是对合代数丛态射（根据目标公理）。这定义了一个全忠实函子 $\mathbb{C}\ \to$Inv($\mathbb{C}$)。与例 3.2.4*(i)* 中锚定丛情形相同的构造表明，$\mathbb{C}$ 是Inv($\mathbb{C}$) 的反射子范畴。

（*ii*）对于任意微分丛，平凡锚定丛 $(\pi:\ A\ \to M,\ \xi,\ \lambda,\ 0\circ\pi)$ 可利用同构 $\mathscr{L}(A)\cong A_3$，给出的 $\sigma:=(\pi_1,\pi_0,\pi_2)$ 获得一个对合（证明该映射满足对合代数丛公理只是组合学上的练习）。由此，每个微分丛态射都会产生这些平凡对合代数丛之间的一个态射。从锚定丛情形（例3.2.4（*ii*））得到的相同构造表明，Diff($\mathbb{C}$) 是对合代数丛范畴的一个余反射子范畴。

（*iii*）考虑一个群胚

$$s,t:G\to M,\ e:M\to G,\ (-)^{-1}:G\to G,\ m:G_2\to G.$$

底层自反图具有一个相关的锚定丛，该丛在例 3.2.4 中构造，而该锚定丛的延拓空间包含于 $(T^2。G_2)$。注意，存在一个定义良好的对合映射：

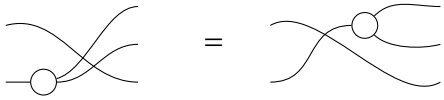
$$\sigma(u,v)=c\circ((0\circ p\circ v)^{-1};(T.0\circ u);v)$$

这个命题的直接证明涉及一种更具概念性的构造，这正是截面 5.5 的重点。

对合代数丛类似于广义切丛，因此提升 $(\xi\circ\pi,\ \lambda):\ A\to\mathscr{L}(A)$满足与 $\ell:\ T\ \Rightarrow T^{\,2}$相同的泛性质条件。双线性条件等价于定义 c，ℓ 中的自然性条件，见定义 1.3.2：

$$\begin{array}{ccccc}\mathscr{L}(A) & & \xrightarrow{\quad\sigma\quad} & & \mathscr{L}(A)\\ \downarrow{\scriptstyle id\times T.\hat{\lambda}} & & & & \uparrow{\scriptstyle \hat{\lambda}\times\ell}\\ \mathscr{L}^2(A) & \xrightarrow[\sigma\times c]{} & \mathscr{L}^2(A) & \xrightarrow[id\times T.\sigma]{} & \mathscr{L}^2(A)\end{array}\qquad\begin{array}{ccccc}T^2 & & \xrightarrow{\quad c\quad} & & T^2\\ \downarrow{\scriptstyle T.\ell} & & & & \downarrow{\scriptstyle \ell.T}\\ T^3 & \xrightarrow[c.T]{} & T^3 & \xrightarrow[T.c]{} & T^3\end{array}\tag{3.4}$$

使用幺半范畴的字符串图（Selinger (2010)）可将其表示为方程



其中圆表示提升，c 是两条直线的交点。

命题 3.3.4. 设 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$ 是一个锚定丛，并假设

$$\sigma : \mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}(A)$$

满足对合公理 *(i)* 和提升对称公理 *(iii)*，并且对合会“交换”与两个提升 $(\lambda \times \ell)$ 和 $(0 \times c \circ T.\lambda)$ 在 $\mathscr{L}(A)$（命题 *2.2.8*）相关联的幂等元

$$\sigma \circ ((p \circ \lambda) \times (p \circ \ell)) = (p \circ 0) \times (p \circ c \circ T.\lambda) = id \times (T.p \circ T.\lambda)$$

那么，双重线性公理等价于图表 *3.4* 中左侧的交换图：

$$(\hat{\lambda} \times \ell) \circ \sigma = (id \times T.\sigma) \circ (\sigma \times c) \circ (id \times T.\hat{\lambda}).$$

证明。 从等式左侧开始，

$$\begin{aligned}
&(id \times T.\sigma) \circ (\sigma \times c) \circ (id \times T.\hat{\lambda}) \circ (u, v) \\
&= (id \times T.\sigma) \circ (\sigma \times c) \circ (u, T.\xi \circ T.\pi \circ v, T.\lambda v) \\
&= (id \times T.\sigma) \circ (\sigma \circ (u, T.\xi \circ \varrho \circ u), T.\lambda v) \\
&= (id \times T.\sigma) \circ (\xi \circ \pi \circ u, 0 \circ \varrho \circ u, T.\lambda v) \\
&= (id \times T.\sigma) \circ (\xi \circ \pi \circ u, 0 \circ T.\pi \circ v, T.\lambda v) \\
&= (\xi \circ \pi \circ u, T.\sigma \circ \hat{\lambda} \circ v).
\end{aligned}$$

对于右侧：

$$\begin{aligned}
&(\hat{\lambda}, \ell) \circ \sigma \circ (u, v) \\
&= (\xi \circ \pi \circ \pi_0 \circ \sigma \circ (u, v), (\lambda \times \ell) \circ \sigma \circ (u, v)) \\
&= (\xi \circ \pi \circ p \circ v, (\lambda \times \ell) \circ \sigma \circ (u, v)) \\
&= (\xi \circ p \circ T.\pi \circ v, (\lambda \times \ell) \circ \sigma \circ (u, v)) \\
&= (\xi \circ p \circ \varrho \circ u, (\lambda \times \ell) \circ \sigma \circ (u, v)) \\
&= (\xi \circ \pi \circ u, (\lambda \times \ell) \circ \sigma \circ (u, v)) \\
&= (\xi \circ \pi \circ u, T.\sigma \circ (0 \times c \circ T.\lambda) \circ (u, v)).
\end{aligned}$$

因此，自然性方程 3.4 等价于

$$T.\sigma \circ (0 \times c \circ T.\lambda) = (\lambda \times \ell) \circ \sigma.$$

□

对合代数丛范畴相对于锚定丛范畴是“切丛单子性的”，这与锚定丛相对于微分丛范畴是切丛单子性的情形相同；范畴中的内范畴相对于自反图也是如此。“切丛单子性”还引出了一个类似的观察，讨论对合代数丛的T-极限，见观察 3.2.8。

观察 3.3.5。 从对合代数丛到锚定丛的遗忘函子保持极限；也就是说，底层锚定丛的 T-极限给出了对合代数丛的极限。回顾观察 *3.2.13*，锚定丛范畴中的极限 $\mathscr{L}(\lim A_i) = \lim \mathscr{L}(A_i)$ 属于对象 $\mathbb{C}$

$$\lim \sigma_i : \lim \mathscr{L}(A_i) \to \lim \mathscr{L}(A_i).$$

对合代数丛的公理由泛性质导出。

注意，可以仿照引理3.2.9中的锚定丛示例来定义逐点切结构：

命题 3.3.6。 对于切范畴 $\mathbb{C}$，对合代数丛范畴具有一种“逐点”切结构，它对对象的映射如下：

$$(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho, \sigma) \mapsto (T.\pi, T.\xi, c \circ T.\lambda, T.\varrho, \sigma_T)$$

其中，σ_T 定义为

$$\sigma_T := (1 \times_c c) \circ T.\sigma \circ (1 \times_c c) : \mathscr{L}(A_T) \to \mathscr{L}(A_T). \tag{3.5}$$

证明。 对合代数丛上的切结构继承自函子 $\mathsf{Inv}(\mathsf{C}) \to \mathsf{Anc}(\mathsf{C})$。因此，只需给出切对合代数丛的对合映射。

注意，$\mathfrak{g}^{\text{给定 } (\pi:\, A \to M,\ \xi,\ \lambda, \varrho,\ \sigma)}$，延拓的空间 $\mathfrak{g}$ 定义在 $(T.\pi,\ T.\xi$ 上，$c \circ T.\lambda,\ c \circ T.\varrho)$ 是 $TA^{c\circ T.\varrho} \times_{T^2\pi} T^2 A$。我们可以在 C 中构造对象 $\mathrm{L}(TA)$ 和 $T(\mathrm{L}(A))$ 之间的同构，利用余跨度同构

$$\begin{array}{ccccc} TA & \xrightarrow{c\circ T.\varrho} & T^2M & \xleftarrow{T^2.\pi} & T^2A \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ TA & \xrightarrow[T.\varrho]{} & T^2M & \xleftarrow[T^2.\pi]{} & T^2A \end{array}$$

从而诱导出一个映射

$$TA_{c\circ T.\varrho} \times_{T^2\pi} T^2 A \xrightarrow{id\times c} T(A_\varrho \times_{T\pi} TA) \xrightarrow{T.\sigma} T(A_\varrho \times_{T\pi} TA) \xrightarrow{id\times c} TA_{c\circ T.\varrho} \times_{T^2\pi} T^2 A$$

我们称之为 σ_T。线性公理和对合公理由构造可得。

现在检查其余的公理。对于单位：

$$\begin{aligned} &(1 \times_c c) \circ T.\sigma \circ (1 \times_c c) \circ (T.(\xi \circ \pi), c \circ T.\lambda) \\ =&(1 \times_c c) \circ T.\sigma \circ (T(\xi\pi), T\lambda) = (1 \times_c c) \circ (T.(\xi \circ \pi), T.\lambda) = (T.(\xi \circ \pi), c \circ T.\lambda). \end{aligned}$$

对于锚：

$$\begin{aligned} &T.\varrho_T \circ \pi_1 \circ \sigma_T = T(c \circ T\varrho) \circ \pi_1 \circ (1 \times_c c) \circ T.\sigma \circ (1 \times_c c) \\ =&\, T.c \circ c \circ T^2.\varrho \circ T.\pi_1 \circ T.\sigma \circ (1 \times_c c) = T.c \circ c \circ T.c \circ T^2.\varrho \circ T.\pi_1 \circ (1 \times_c c) \\ =&\, c \circ T.c \circ c \circ T^2\varrho \circ c \circ \pi_1 = c \circ Tc \circ T^2.\varrho \circ \pi_1 = c \circ T.\varrho_T \circ \pi_1. \end{aligned}$$

杨–巴克斯特方程很容易验证。 □

在切范畴中的每个对象上，切丛都是一个典范对合代数丛，而锚会诱导一个从对合代数丛到其底空间上的切对合代数丛的态射。锚充当从 C 中的对合代数丛到 C 本身的反射函子。

命题3.3.7. 任意切范畴 $\mathbb{C}$ 都是 $\mathbb{C}$ 中对合代数丛范畴的反射子范畴。

证明。首先注意，C 到 Inv(C) 的包含（定义 3.3.1）是全忠实的，因为切对合代数丛上的锚是 i d : T M $\to$ T M。这意味着，T A $\to$ T B 之间唯一的对合代数丛态射是形如 (T f , f) 的对，其中 f : A $\to$ B。现在考虑函子 Inv(C) $\to$ C，它将 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho, \sigma)$ 映到 M：这给出了自函子 S : Inv(C) $\to$ Inv(C)，以及自然变换 ϱ : i d $\Rightarrow$ S，使得 $S.\varrho = \varrho.S = id$，由锚映射给出。因此，范畴 C 是 Inv(C) 上一个幂等单子的代数范畴。 □

推论 3.3.8. 设

$$\widehat{A} = (\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho, \sigma)$$

是切范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个对合代数丛。

(i) 该态射

$$(T.\pi, \pi) : TA \to TM$$

是从 A 上的切对合代数丛到 M 上的切对合代数丛的对合代数丛态射。

(ii) 该态射

$$(\varrho, id) : \widehat{A} \to TM$$

是一个对合代数丛态射。

若 $p \circ \pi_1 : \mathscr{L}(A) \to A$ 的拉回幂存在，则

$$(p \circ \pi_1 : \mathscr{L}(A) \to A, (\xi \circ \pi, 0), (\lambda \times \ell))$$

是一个微分丛；注意，π_0 起锚的作用。若延拓存在，则

$$(p \circ \pi_1 : \mathscr{L}(A) \to A, (\xi \circ \pi, 0), (\lambda \times \ell), \pi_0, \sigma')$$

是一个对合代数丛；这是通过在对合代数丛范畴中计算拉回得出的（σ' 如观察*3.2.8*中所述，它由.....诱导）。

上述推论在微分丛 (L (A), $\lambda \times \ell$) 上赋予了对合代数丛结构。注意，映射 σ 给出了一个微分丛同构

$$(\mathscr{L}(A), \lambda \times \ell) \to (\mathscr{L}(A), 0 \times c \circ T.\lambda).$$

Martinez 注意到，典范对合 σ 在 $(\mathscr{L}(A), 0 \times c \circ T.\lambda)$, 上赋予唯一的李代数丛结构，并且 σ 是一个唯一确定的对合代数丛同构（见 de León 等人 (2005)）：

推论 3.3.9。 对于一个对合代数丛 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho, \sigma)$，微分丛同构

$$\sigma : (\mathscr{L}(A), 0 \times c \circ T.\lambda) \to (\mathscr{L}(A), \lambda \times \ell)$$

在 $\mathscr{L}(A)$ 上诱导出第二种对合代数丛结构。

回顾一下，命题 3.2.14 概述了一个证明：在 $\mathbb{C}$ 中的锚定丛范畴具有一个自函子 $\mathscr{L}\prime$和自然变换 $p\prime$、$0'$、$+'$、ℓ'，它们满足切结构的公理；这个自函子及这些自然变换都可以提升到 $\mathsf{Inv}(\mathbb{C})$。对合映射 σ 是缺失的一环，它为 $\mathsf{Inv}(\mathbb{C})$赋予切结构。这里可以从宏观层面阐述这一构造，但实际证明会遇到棘手的相容性问题，这些问题构成了第 4章的大部分内容。

命题3.3.10. 切范畴$\mathbb{C}$ 中对合代数丛的范畴具有第二切结构，其中切函子定义为

$$\mathscr{L}' : \mathsf{Inv}(\mathbb{C}) \to \mathsf{Inv}(\mathbb{C})$$

而切　　自然变换的定义如命题 *3.2.14*所示，其中典范的翻转　　p

$$\sigma' : \mathscr{L}'.\mathscr{L}' \to \mathscr{L}'.\mathscr{L}' := \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{1\times T.\sigma} \mathscr{L}^2(A).$$

从一个对合代数丛出发，$\mathscr{L}\prime\,(A)$和$\mathscr{L}\prime.\mathscr{L}'(A)$定义为

$$\mathscr{L}'(A)\begin{cases} \pi' : & \mathscr{L}(A) \xrightarrow{p\circ\pi_1} A \\ \xi' : & A \xrightarrow{(\xi\circ\pi,0)} \mathscr{L}(A) \\ \lambda' : & \mathscr{L}(A) \xrightarrow{\lambda\times\ell} T.\mathscr{L}(A) \\ \varrho' : & \mathscr{L}(A) \xrightarrow{\pi_1} TA \\ \sigma' : & \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{\sigma\times c} \mathscr{L}^2(A) \end{cases} \quad \mathscr{L}'.\mathscr{L}'(A)\begin{cases} \pi'' & \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{(p\circ\pi_1,p\circ\pi_2):} \mathscr{L}(A) \\ \xi'' : & \mathscr{L}(A) \xrightarrow{(\xi\circ\pi\circ\pi_0,0\circ\pi_1,0\circ\pi_2)} \mathscr{L}^2(A) \\ \lambda'' : & \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{(\lambda\times\ell\times\ell)} T.\mathscr{L}^2(A) \\ \varrho'' : & \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{(\pi_1,\pi_2)} T.\mathscr{L}(A) \\ \sigma'' : & \mathscr{L}^3(A) \xrightarrow{(\sigma\times c\times c)} \mathscr{L}^3(A) \end{cases}$$

（其中$\mathscr{L}^3(A) = A\varrho \times_{T\pi} TA_{T.\varrho\times_{T^2\circ}\pi T\circ}(A\varrho\times_{T\pi}TA)$）。切自然变换定义为

- $p : \mathscr{L}' \Rightarrow id;\ \mathscr{L}(A) \xrightarrow{\pi_0} A$
- $0 : id \Rightarrow \mathscr{L}';\ A \xrightarrow{(id,T.\xi\circ T.\pi)} \mathscr{L}'(A)$
- $+ : \mathscr{L}'_2 \Rightarrow \mathscr{L}';\ A_\varrho \times_{T.\pi\circ\pi_i} T_2A \xrightarrow{id\times+} \mathscr{L}(A)$
- $\ell : \mathscr{L}'(A) \Rightarrow \mathscr{L}'.\mathscr{L}';\ \mathscr{L}(A) \xrightarrow{1\times T.(\xi\circ\pi,\lambda)} \mathscr{L}^2(A)$
- $\varrho' : \mathscr{L}' \Rightarrow T$
- $c : \mathscr{L}'.\mathscr{L}'(A) \Rightarrow \mathscr{L}'.\mathscr{L}';\ \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{1\times T.\sigma} \mathscr{L}^2(A).$

证明。 详见第 4.5节。 □

3.4 对合代数丛上的联络

本节中，我们在一个对合代数丛底层的锚丛上选取一个线性联络（定义 3.3.1、2.6.1），并重新推导 Martinez 关于李代数丛的结构方程（命题 3.1.5）。

在具有负元的切范畴 C 中，存在一个自然变换

$$n : T \Rightarrow T$$

使每个纤维化交换幺半群 $(p\colon TM \Rightarrow M, 0, +, n)$成为纤维化阿贝尔群。由于微分丛上的加法丛结构是通过泛性质（命题 2.4.4）诱导得到的，因此，在具有负元的切范畴中，微分丛的加法丛结构同样具有负元。本节采用以下记号表示所用的“纤维化线性代数”，因为我们会对具有多种加法丛结构的丛进行大量计算（例如，微分丛的二阶切丛具有三种加法丛结构）。

记号 3.4.1。 设 E 是一个对象，带有多个微分丛结构 $(\pi^i\colon\ E\ \to M\, i\,,\ \ \xi^i,\ \ \lambda^i)$，位于一个带有负元的切范畴中。对于特定微分丛上的加法，使用中缀记号表示，并在表示该微分丛投影的符号上添加下标。设 $x,\ y\colon\ X\ \to E$ 是一对广义元，且 π^i-加法运算有定义；令

$$x +_{\pi[i]} y = X \xrightarrow{(x,y)} E_{\pi[i]}\times_{\pi[i]} E \xrightarrow{+^i} E.$$

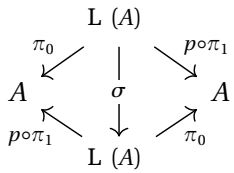
减法也使用类似的记号：

$$x -_{\pi[i]} y = X \xrightarrow{(x,y)} E_{\pi[i]}\times_{\pi[i]} E \xrightarrow{id\times n[i]} E_{\pi[i]}\times_{\pi[i]} E \xrightarrow{+^i} E.$$

本节中，我们在一个带有负元的切范畴 C 中工作，并选取一个锚定丛 $(\pi\colon A \to M,\ \xi, \lambda, \varrho)$，其带有联络 (κ, ∇)；其基对象带有无挠联络 (κ', ∇') 以及一个态射

$$\sigma : \mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}(A)$$

该态射交换两个投影映射 $p\circ\ \pi_1, \pi_0$，也就是说，以下图表可交换：



以下记号在使用局部坐标时会很有用。

记号3.4.2. 首先，回顾微分丛态射的 ∇-记号，其中每个态射都选取了一个联络，见方程 3.3：

$$\frac{f : A \to B \quad (\kappa^A, \nabla^A, A, \lambda^A) \quad (\kappa^B, \nabla^B, B, \lambda^B)}{\nabla[f] := \kappa^B \circ T.f \circ \nabla^A : A_2 \to B}$$

Let

$$(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho), (q : B \to N, \zeta, l, \rho)$$

设这是一对配备了联络的锚定丛。对映射 $f\colon\ \mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}(B)$ 进行“加帽”指的是映射：

$$\widehat{f} : A_3 \xrightarrow{\hat{\nu}(\pi_0,\pi_2)+\hat{\nabla}(\pi_0,\pi_1)} \mathscr{L}(A) \xrightarrow{f} \mathscr{L}(B) \xrightarrow{(\pi_0, p\circ\pi_1, \kappa\circ\pi_1)} B_3.$$

同样地，对于 $f\colon\ TA\ \to TB$，

$$\widehat{f} : TM_p \times_\pi A_\pi \times_\pi A \xrightarrow{\nu(\pi_0,\pi_2)+\nabla(\pi_0,\pi_1)} TA \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{(\pi_0, p\circ\pi_1, \kappa\circ\pi_1)} TM_p \times_q B_\pi \times_q B$$

显然，$f\circ g = f\circ \hat{g}$。同样地，映射 $A_3\to B_3$ 可以加上“横线”，形成映射 $\mathscr{L}(A)\to\mathscr{L}(B)$:

$$\overline{g}:\mathscr{L}(A)\xrightarrow{(\pi_0,p\circ\pi_1,\kappa\circ\pi_1)}A_3\xrightarrow{g}B_3\xrightarrow{\hat{\nu}(\pi_0,\pi_2)+\hat{\nabla}(\pi_0,\pi_1)}\mathscr{L}(B).$$

显然，$f = f$，$g = \overline{g}$。

引理 3.4.3。 σ： $\mathscr{L}(A)\to\mathscr{L}(A)$ 在 $\Gamma(\pi)$ 上诱导一个括号:

$$\lambda\circ[X,Y]=(\sigma\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{T\pi}(id,TY\circ\varrho)\circ X)-0\circ Y.$$

证明。 设 X、$Y\in\Gamma(\pi)$ 并计算:

$$\begin{aligned}
&p\circ\pi_1\circ(\sigma\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{\pi_0}(id,TY\circ\varrho)\circ X)\\
&=p\circ(\pi_1\circ\sigma\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{T\pi}TY\circ\varrho\circ X)\\
&=p\circ\pi_1\circ\sigma\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{\pi}p\circ TY\circ\varrho\circ X\\
&=\pi_0\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-Y\circ p\circ\varrho\circ X\\
&=Y-Y=\xi,\\
&\pi_0\circ(\sigma\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{\pi_0}(id,TY\circ\varrho)\circ X)\\
&=\pi_0\circ\sigma\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{\pi}\pi_0\circ(id,TY\circ\varrho)\circ X\\
&=p\circ\pi_1\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{\pi}X\\
&=p\circ TX\circ\varrho\circ Y-_{\pi}X=X-_{\pi}X=\xi.
\end{aligned}$$

提升的泛性质诱导出一个新的截面 $[X、Y]$，使得

$$\lambda\circ[X,Y]=(\sigma\circ(id,TX\circ\varrho)\circ Y-_{T\pi}(id,TY\circ\varrho)\circ X)-0Y.$$

□

定义 3.4.4。 映射 σ： $\mathscr{L}(A)\to\mathscr{L}(A)$ 是线性的，当且仅当这两个丛态射

$$\sigma:(\mathscr{L}(A),\lambda\times\ell)\to(\mathscr{L}(A),0\times c\circ T\lambda)\quad \sigma:(\mathscr{L}(A),0\times c\circ T\lambda)\to(\mathscr{L}(A),\lambda\times\ell)$$

是线性的；若满足余对称 条件，则

$$\sigma\circ\widehat{\lambda}=\widehat{\lambda}=(\xi\pi,\lambda).$$

注意，每当 σ 是线性且余对称的， $\sigma\circ\hat{\mu}(u,v)=\hat{\nu}(u,v)$。

线性与单位公理，以及微分丛上的联络，迫使双线性括号的存在 $\langle -,-\rangle$ ，如命题 3.1.13中李代数丛的定义所述。

命题 3.4.5. 对于一个带有联络 (κ,∇) 的锚定丛 $(\pi:A\to M,\xi,\lambda,\varrho)$，余对称双线性 σ 等价于一个双线性映射 $\langle -,-\rangle:A_2\to A$，其对应关系由下式给出

$$\frac{\langle -,-\rangle:\kappa\circ\sigma\circ\nabla-_{\pi}\kappa\circ\nabla}{\sigma:\mathscr{L}(A)\xrightarrow[\overline{(\pi_1,\pi_0,\pi_2+\langle\pi_0,\pi_1\rangle)}]{}\mathscr{L}(A)}$$

证明。推导

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}\circ(x,y,z)&=(y,x,\kappa\circ\sigma\circ(\nabla(\varrho x,y)+_{p\circ\pi_1}\mu(y,z)))\\&=(y,x,\kappa\circ\sigma\circ\nabla(\varrho x,y)+_{\pi}\kappa\circ\sigma\circ\mu(y,z))\\&=(y,x,\kappa\circ\sigma\circ\nabla(\varrho x,y)+_{\pi}\kappa\circ\nu\circ(y,z))\\&=(y,x,\kappa\circ\sigma\circ\nabla(\varrho x,y)+_{\pi}z)\\&=:(y,x,\langle x,y\rangle+_{\pi}z)\end{aligned}$$

其中〈–,–〉显然是双线性的。逆命题显然成立：取

$$\widehat{\sigma}(u,v,w):=(v,u,w+\langle u,v\rangle).$$

容易看出， σ 是线性且余对称的。 □

要使双线性括号交替，线性括号必须是对合的。

命题 3.4.6. 若 σ 是余对称且线性的，则双线性括号〈–,–〉是交替的，当且仅当 $\sigma\circ\sigma=id$ 。

证明。 首先，注意到 $\sigma\circ\sigma=id$ 当且仅当 $\widehat{\sigma}\circ\widehat{\sigma}=id$。接着验证

$$\widehat{\sigma}\circ\widehat{\sigma}(u,v,w)=\widehat{\sigma}(v,u,w+\langle u,v\rangle)=(u,v,w+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle).$$

由A上的加法消去律,

$$w=w+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle\iff 0=\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle.$$

□

观察 3.4.7。 锚定丛上的双线性〈–,–〉与一个联络一起诱导出映射

$$\{v,x\}_{(\kappa,\nabla)}:=\kappa'\circ T.\varrho\circ\nabla(v,x),\quad \{v,x,y\}_{(\kappa,\nabla)}:=\kappa\circ T(\langle-,-\rangle_{(\kappa,\nabla)})\circ\nabla^{A_2}\circ(v,x,y)$$

根据命题 (3.2) 中的方程 *3.1.13*。

命题 3.4.8。 设 σ 余对称且双线性，并具有相应的括号〈–,–〉。则

$$T\varrho\circ\pi_1\circ\sigma=c\circ T\varrho\circ\pi_1$$

当且仅当满足莱布尼茨方程时:

$$\varrho\circ\langle u,v\rangle+\{\varrho v,u\}=\{\varrho u,v.\}\tag{3.6}$$

证明。 沿用给定的记号，并利用联络在M上无挠这一假设,

$$\widehat{T\varrho\circ\pi_1}(u,v,w)=(\varrho u,\varrho v,w+\{u,v\})\qquad \widehat{c}(x,y,z)=(y,x,z).$$

分别计算两边,

$$\begin{aligned}\widehat{T\varrho}\circ\widehat{\pi_1}\circ\widehat{\sigma}\circ(u,v,w)&=\widehat{T\varrho}\circ\widehat{\pi_1}\circ(v,u,w+\langle u,v\rangle)\\&=\widehat{T\varrho}\circ(\varrho v,u,w+\langle u,v\rangle)\\&=(\varrho v,\varrho u,\varrho w+\varrho\langle u,v\rangle+D[\varrho](\varrho v,u))\\&=(\varrho v,\varrho u,\varrho w+\varrho\langle u,v\rangle+\{v,u\}),\\\widehat{c}\circ\widehat{T\varrho}\circ\widehat{\pi_1}(u,v,w)&=\widehat{c}(\varrho u,\varrho v,\varrho w+\{u,v\})\\&=(\varrho v,\varrho u,\varrho w+\{u,v\}),\end{aligned}$$

因此，两个项相等当且仅当所需的等式成立。 . □

引理 3.4.9。 设 σ 为线性且余对称。则

(i) T ($\langle -,-\rangle$) : $TA_2 \to TA$ 满足

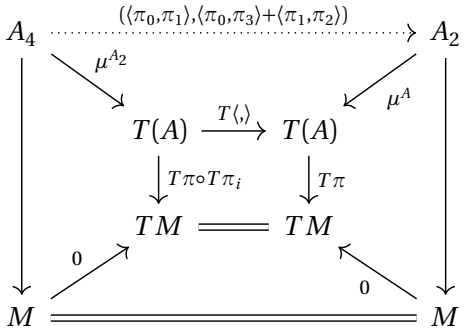
$$\begin{aligned}&\widehat{T(\langle -,-\rangle)}(a_x,u_y,u_z,u_{xy},u_{xz})\\&=(a_x,\langle u_y,u_z\rangle,\{a_x,u_y,y_z\}+\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle);\end{aligned}$$

(ii) $T.\sigma$ 满足

$$\begin{aligned}&(\widehat{id\times T(\sigma)})(u_x,u_y,u_{xy},u_z,u_{xz},u_{yz},u_{xyz})\\&=(u_x,u_z,u_{xz},u_y,u_{xy},u_{yz}+\langle u_y,u_z\rangle,\\&\quad u_{xyz}+\{a_x,u_y,y_z\}+\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle).\end{aligned}$$

证明。

(i) 由垂直提升的泛性质以及 $\langle -,-\rangle$ 的双线性，下面的外侧方块是拉回:



因此

$$T(\langle,\rangle)(0,u_y,u_z,u_{xy},u_{xz})=\mu^A(\langle u_y,u_z\rangle,\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle).$$

现在我们计算

$$\begin{aligned}&T(\langle,\rangle)(\mu^{A_2}((u_y,y_z),(u_{xy},u_{xz}))+_p\nabla^{A_2}(a_x,(u_y,u_z)))\\&=T(\langle,\rangle)\mu^{A_2}((u_y,u_z),(u_{xy},u_{xz}))+_p T(\langle,\rangle)\circ\nabla(a_x,(u_y,u_z))\\&=\mu^A(\langle u_y,u_z\rangle,\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle)+_p T(\langle,\rangle)\circ\nabla(a_x,(u_y,u_z))\end{aligned}$$

然后将其与 $(T\pi$、p、$\kappa)$复合，得到

$$\begin{aligned}&(0,\langle u_y,u_z\rangle,\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle)+_p(a_x,\langle u_y,u_z\rangle,\{a_x,u_y,y_z\})\\&=(a_x,\langle u_y,u_z\rangle,\{a_x,u_y,y_z\}+\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle).\end{aligned}$$

(ii) 考虑以下图表:

$$\begin{array}{ccc}TM_p\times_\pi A_{3\pi}\times_\pi A_3 & \xrightarrow{\widehat{T\sigma}} & TM_p\times_\pi A_{3\pi}\times_\pi A_3\\ \downarrow{\scriptstyle \nabla^{A^3}+_p\mu^{A^3}} & & \uparrow{\scriptstyle (T(\pi^3),p,\kappa^{A_3})}\\ T(A_3) & \xrightarrow[T(\pi_1,\pi_0,\pi_2+\langle\pi_0,\pi_1\rangle)]{T\widehat{\sigma}} & T(A_3)\\ \downarrow{\scriptstyle T(\nabla'+_{\pi_0}\mu')} & & \uparrow{\scriptstyle T(\pi_0,p\circ\pi_1,\kappa\circ\pi_1)}\\ T\circ\mathscr{L}(A) & \xrightarrow{T\sigma} & T\circ\mathscr{L}(A)\end{array}$$

我们想要找到 $T\widehat{\sigma}=T(\pi_1,\pi_0,\pi_2+\langle\pi_0,\pi_1\rangle)$。注意，

$$T(\pi_1,\pi_0,\pi_2+_\pi\langle\pi_0,\pi_1\rangle)=T(\pi_1,\pi_0,\pi_2)+_{T\pi}T(\xi\pi\pi_i,\pi_0,\langle\pi_0,\pi_1\rangle).$$

左侧的项显然:

$$\begin{aligned}&\widehat{T(\pi_0,\pi_1,\pi_2)}(a_x,(u_y,u_{xy}),(u_z,u_{xz}),(u_{yz},u_{xyz}))\\&=(a_x,(u_z,u_{xz}),(u_y,u_{xy}),(u_{yz},u_{xyz}))\end{aligned}$$

右侧的项则使用本引理的 (i) 部分:

$$\begin{aligned}&\widehat{T\langle-,-\rangle}\circ\widehat{T(\pi_0,\pi_1)})(a_x,(u_y,u_{xy}),(u_z,u_{xz}),(u_{yz},u_{xyz}))\\&=\widehat{T\langle-,-\rangle}(a_x,u_y,u_{xy},u_z,u_{xyz})\\&=(a_x,\langle u_y,u_z\rangle,\{a_x,u_y,y_z\}+\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle)\end{aligned}$$

然后计算

$$\begin{aligned}&\widehat{T\widehat{\sigma}}(a_x,u_y,u_{xy},u_z,u_{xz},u_{yz},u_{xyz})\\&=(a_x,u_z,u_{xz},u_y,u_{xy},u_{yz}+\langle u_y,u_z\rangle,u_{xyz}+q)\end{aligned}$$

其中 $q=\{a_x,u_y,y_z\}+\langle w,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle$，从而得到所需的等式。

□

命题 3.4.10. 设 σ 是余对称、双线性且对合的，并满足目标公理。那么，σ 满足杨–巴克斯特方程，当且仅当 $\langle-,-\rangle$ 和 $\{-,-,-\}$ 满足 *Bianchi* 恒等式:

$$0=\sum_{\gamma\in\mathsf{Cy}(3)}\langle x_{\gamma_0},\langle x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}\rangle\rangle+\sum_{\gamma\in\mathsf{Cy}(3)}\{\varrho\, x_{\gamma_0},x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}.\}\tag{3.7}$$

证明。我们展开 $id\times T\sigma$ 和 $\widehat{\sigma\times}\,c$。先看 $T(id\times\sigma)$，它是在引理 3.4.9中推导出的:

$$\begin{aligned}\sigma_1(u)&=(\widehat{id\times T(\widehat{\sigma})})(u_x,u_y,u_{xy},u_z,u_{xz},u_{yz},u_{xyz})\\&=(u_x,u_z,u_{xz},u_y,u_{xy},u_{yz}+\langle u_y,u_z\rangle,\\&\quad u_{xyz}+\langle u_y,u_{xz}\rangle+\langle u_{xy},u_z\rangle+\{\varrho\circ u_x,u_y,u_z\}).\end{aligned}$$

利用 κ' 无挠这一事实，可得 $\hat{}c(u_{xz}、u_{yz}、u_{xzy})=(u_{yz}、u_{xz}、u_{xyz})$，因此

$$\sigma_2(u_x,u_y,u_{xy},u_z,u_{xz},u_{yz},u_{xyz})=(u_y,u_x,u_{xy}+\langle u_x,u_y\rangle,u_z,u_{yz},u_{xz},u_{xyz}).$$

然后计算

$$\begin{aligned}&\sigma_2\sigma_1\sigma_2(u)\\&=\big(u_z,u_y,u_{yz}+\langle u_y,u_z\rangle,u_x,u_{xz}+\langle u_x,u_z\rangle,u_{xy}+\langle u_x,u_y\rangle,z_1\big),\\&\sigma_1\sigma_2\sigma_1(u)\\&=\big(u_z,u_y,u_{yz}+\langle u_y,u_z\rangle,u_x,u_{xz}+\langle u_x,u_z\rangle,u_{xy}+\langle u_x,u_y\rangle,z_2\big).\end{aligned}$$

注意到前五项相等，因此只需检验$z_1 = z_2$，其中$z_1 = \pi_6\sigma_1\sigma_2\sigma_1(u), z_2 = \pi_6\sigma_2\sigma_1\sigma_2(u)$。

$$\begin{aligned}
z_1 &= u_{xyz} + \langle u_y, u_{xz}\rangle + \langle u_{xy}, u_z\rangle + \{\varrho\circ u_x, u_y, u_z\} + \{\varrho\circ u_z, u_x, u_y\} \\
&\quad + \langle u_x, u_{yz} + \langle u_y, u_z\rangle\rangle + \langle u_{xz} + \langle u_x, u_z\rangle, u_y\rangle \\
&= u_{xyz} + \langle u_y, u_{xz}\rangle + \langle u_{xy}, u_z\rangle + \{\varrho\circ u_x, u_y, u_z\} + \{\varrho\circ u_z, u_x, u_y\} \\
&\quad + \langle u_x, u_{yz}\rangle + \langle u_x, \langle u_y, u_z\rangle\rangle + \langle u_{xz}, u_y\rangle + \langle\langle u_x, u_z\rangle, u_y\rangle \\
&= u_{xyz} + \langle u_{xy}, u_z\rangle + \{\varrho\circ u_x, u_y, u_z\} + \{\varrho\circ u_z, u_x, u_y\} \\
&\quad + \langle u_x, u_{yz}\rangle + \langle u_x, \langle u_y, u_z\rangle\rangle + \langle\langle u_x, u_z\rangle, u_y\rangle, \\
z_2 &= u_{xyz} + \langle u_x, u_{yz}\rangle + \{\varrho\circ u_y, u_x, u_z\} + \langle u_{xy} + \langle u_x, u_y\rangle, u_z\rangle \\
&= u_{xyz} + \langle u_x, u_{yz}\rangle + \{\varrho\circ u_y, u_x, u_z\} + \langle u_{xy}, u_z\rangle + \langle\langle u_x, u_y\rangle, u_z\rangle.
\end{aligned}$$

因此，$z_1 = z_2$ 等价于要求

$$\begin{aligned}
&u_{xyz} + \langle u_{xy}, u_z\rangle + \{\varrho\circ u_x, u_y, u_z\} + \{\varrho\circ u_z, u_x, u_y\} \\
&\quad + \langle u_x, u_{yz}\rangle + \langle u_x, \langle u_y, u_z\rangle\rangle + \langle\langle u_x, u_z\rangle, u_y\rangle \\
&= u_{xyz} + \langle u_x, u_{yz}\rangle + \{\varrho\circ u_y, u_x, u_z\} + \langle u_{xy}, u_z\rangle + \langle\langle u_x, u_y\rangle, u_z\rangle;
\end{aligned}$$

消去相同项后，这等价于

$$\begin{aligned}
&\langle u_x, \langle u_y, u_z\rangle\rangle + \langle\langle u_x, u_z\rangle, u_y\rangle + \{\varrho\circ u_x, u_y, u_z\} + \{\varrho\circ u_z, u_x, u_y\} \\
&= \{\varrho\circ u_y, u_x, u_z\} + \langle\langle u_x, u_y\rangle, u_z\rangle.
\end{aligned}$$

利用〈–,–〉和{–,–,–}关于最后两个自变量是交替的这一事实，这等价于

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u_x, \langle u_y, u_z\rangle\rangle + \langle\langle u_x, u_z\rangle, u_y\rangle + \langle u_z, \langle u_x, u_y\rangle\rangle \\
&\quad + \{\varrho\circ u_x, u_y, u_z\} + \{\varrho\circ u_z, u_x, u_y\} + \{\varrho\circ u_y, u_z, u_x\} \\
&= \langle u_x, \langle u_y, u_z\rangle\rangle + \langle u_y, \langle u_z, u_x\rangle\rangle + \langle u_z, \langle u_x, u_y\rangle\rangle \\
&\quad + \{\varrho\circ u_x, u_y, u_z\} + \{\varrho\circ u_z, u_x, u_y\} + \{\varrho\circ u_y, u_z, u_x\}
\end{aligned}$$

从而得到所需的恒等式。 □

推论 3.4.11。设 $(\pi: A \to M,\ \xi,\ \lambda,\ \varrho)$ 是切范畴中带负元的一个锚定丛，在 A 上带有锚定联络 (∇, κ)，在 M 上带有无挠仿射联络 (∇', κ')。A 上的对合代数丛结构等价于一个双线性映射

$$\langle -,-\rangle : A_2 \to A$$

其导出映射为

$$\begin{gathered}
\{-,-\} : A_\pi \times_p TM \to TM := \kappa' \circ T\varrho \circ (\pi_0, \pi_1), \\
\{-,-,-\} : TM_p \times_{\pi\circ\pi_i} A_2 \to A; \{a, u_1, u_2\} := \kappa \circ T(\langle -,-\rangle) \circ (\nabla(a, u_1), \nabla(a, u_2))
\end{gathered}$$

满足

(i) 〈–, –〉 是线性且余对称的，

(ii) 〈–,–〉 是交替的，

(iii) $\langle -,-\rangle$ 和 $\{-,-\}$ 满足莱布尼茨方程，即方程 3.6。

(iv) $\langle -,-\rangle$，$\{-,-\}$，以及 $\{-,-,-\}$ 满足 *Bianchi* 恒等式，即方程 (3.7)。

态射　　对合代数丛也可以通过保持张量来刻画　　.

命题 3.4.12. 设 A,B 是一对对合代数丛，它们在一个具有负元的切范畴中选定了联络。那么，锚定丛态射 $f\colon A \to B$ 是对合代数丛态射，当且仅当（回顾方程3.3中的记号）

$$\nabla[f](x,y)+\langle f\circ x, f\circ y\rangle = \nabla[f](y,x)+f\circ\langle x,y\rangle.$$

证明。 注意到

$$\begin{aligned}&(\sigma\circ\mathscr{L}(f)=\mathscr{L}(f)\circ\sigma)\\ \Longleftrightarrow\ &(\pi_1,\pi_0,\pi_2+\langle\pi_0,\pi_1\rangle)\circ(f\circ x, f\circ y, f\circ z+\nabla[f](x,y))\\ &=(f,f,f\circ\pi_2+\nabla[f](\pi_0,\pi_1))\circ(y,x,z+\langle x,y\rangle)\end{aligned}$$

而第二个条件可化简为

$$\nabla[f](x,y)+\langle f\circ x, f\circ y\rangle = \nabla[f](y,x)+f\circ\langle x,y\rangle.$$

□

3.5 李代数丛与对合代数丛范畴的同构

第 3.1 节和 3.4 节阐明了对合代数丛与李代数丛之间的关系。值得注意的是，虽然证明中使用联络作为工具，以确定对合代数丛和李代数丛所满足的局部相干性，但从对合代数丛构造李代数丛（反之亦然）并不依赖于联络的选择。

定理 3.5.1。 在光滑流形中，李代数丛与对合代数丛之间存在范畴同构。

证明。 对于范畴等价，注意到根据命题 3.1.13 和 3.1.14、推论 3.4.11以及命题 3.4.12 ，带有联络选择的对合代数丛与带有联络选择的李代数丛之间存在范畴同构（态射不限于保持联络的态射）。这使我们能够将同构串接起来

$$\mathsf{Inv}(\mathsf{SMan})\cong\mathsf{Inv}(\mathsf{SMan})_{\mathsf{ChosenConn}}\cong\mathsf{LieAlgd}_{\mathsf{ChosenConn}}\cong\mathsf{LieAlgd}.$$

为了完成证明，我们必须证明，将对合代数丛映射为李代数丛的这一对应关系，其括号由下式给出：

$$\lambda\circ[X,Y]^*=\big((\pi_1\circ\sigma\circ(id,T.X\circ\varrho)\circ Y-_p T.Y\circ\varrho\circ)-_{T.\pi}0\circ Y\big),\tag{3.8}$$

是对象上的一个双射，这带来了一些微妙之处。首先，尽管对合映射

$$\sigma : A_\varrho\times_{T\pi}TA\to A_\varrho\times_{T\pi}TA$$

是相对于特定的拉回选择 $A_\varrho \times_{T\pi} TA$定义的，但对合代数丛的范畴 并不 区分这一拉回的不同选择（因此也不区分映射 σ的不同表示），而且对合代数丛的数据中并不包含这项选择。由泛性质可立即得出，方程 3.8 左边的表达式与拉回的选择 $A_\varrho \times_{T\pi} TA$无关。

现在，回顾一下，根据de León 等人(2005）的推论 3.3.9中也提到的定理 4.7，李代数丛的典范对合是唯一确定的。一旦我们选择了延拓$A_\varrho \times_{T\pi} TA$，就选择了李锚丛范畴中的拉回 $\mathrm{L}(A)$，从而唯一确定了典范对合

$$\sigma : A_\varrho \times_{T\pi} TA \to A_\varrho \times_{T\pi} TA.$$

虽然具体的映射 σ 取决于拉回 $A_\varrho \times_{T\pi} TA$的选择，但它们都确定同一个对合代数丛，从而证明了对象之间的双射对应。 □

第4章

代数丛的 Weil 神经

本文前三章表明，切范畴通过公理化切丛的行为，能够以本质代数的方式描述李代数丛；并且证明了流形M 上的李代数丛是一个“广义切丛”，即一个对合代数丛。本章将明确说明对合代数丛作为广义切丛的确切含义：我们将证明，切范畴 C 中的对合代数丛范畴等价于从单个对象上的自由切范畴到 C 的某个切函子范畴；更一般地说，存在一个全忠实函子

$$\mathsf{Inv}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathsf{Tang}_{\mathsf{Lax}}(\mathsf{FreeTangCat}(*), \mathbb{C}).$$

这个函子，即*Weil* 神经，将单个对象上的自由切范畴通过跨度构造映射到$\mathbb{C}$，从而构造出一个函子。本章主要基于两项工作：Leung 构造自由切范畴Weil1 (Leung(2017))，以及 Grothendieck 最初的神经构造（首次发表于Segal (1974年)）。

为了理解 Leung 对自由切范畴的构造，以及更一般地，他对切范畴的 actegory 理论表述（第4.2节），我们先来考察 Weil 最初的洞见：它揭示了SMan中切丛的运动学描述与操作性描述之间的联系。流形M上的切向量定义为曲线的等价类（定义1.2.8），由此建立了切向量与从光滑函数环$\mathbb{R}$-代数同态之间的一一对应$C^\infty(M)$，其目标为对偶数环：

$$C^\infty(M) \to \mathbb{R}[x]/x^2.$$

同态集$\mathbb{R}$代数$(C^\infty(M), \mathbb{R}[x]/x^2)$恰好是定义在导子之上的集合$C^\infty(M)$，它定义了定义 1.2.16 中讨论的操作切丛：该集合上存在自然的光滑流形结构。Weil 函子形式体系（最著名的成果由Kolár 等人（1993年(1993年)), 将这一观察推广到 SMan 上的一般自函子类。例如，纤维积T_2M对应于 R-代数态射，

$$C^\infty(M) \to R[x,y]/(x^2, y^2, xy),$$

而第二　　个切丛则对应于映入张量积的 R-代数态射，

$$C^\infty(M) \to R[x]/(x^2) \otimes R[y]/(y^2) = R[x,y]/(x^2, y^2).$$

应用 Milnor 的练习（问题 1-C Milnor 和 Stasheff (1974年）指出，C^∞ 函子

$$\mathsf{SMan} \to \mathbb{R}\mathsf{Alg}^{\mathrm{op}};\ M \mapsto C^\infty(M) = \mathsf{SMan}(M, \mathbb{R})$$

是全忠实的，因此结构映射表现为自然变换。例如，切丛投影由以下态射诱导：

$$p : \mathbb{R}[x]/x^2 \xrightarrow{a+bx\mapsto a} \mathbb{R},$$

从而

$$TM \xrightarrow{p} M = [C^\infty(M), \mathbb{R}[x]/x^2] \xrightarrow{(p)_*} [C^\infty(M), \mathbb{R}].$$

零映射和加法同样由……诱导

$$0 : \mathbb{R} \xrightarrow{a\mapsto a+0x} R[x]/x^2 \text{ and } + : R[x,y]/(x^2,y^2,xy) \xrightarrow[\mapsto a+(b+c)x]{a+bx+cy} R[x]/x^2,$$

而提升和翻转则分别由态射……诱导

$$\ell : \mathbb{R}[x]/x^2 \xrightarrow[\mapsto a+bxy]{a+bx} \mathbb{R}[x,y]/(x^2,y^2)$$

and

$$c : \mathbb{R}[x,y]/(x^2,y^2) \xrightarrow[\mapsto a+cx+by+dxy]{a+bx+cy+dxy} \mathbb{R}[x,y]/(x^2,y^2).$$

更一般地，存在一个*Weil* 代数（定义4.1.1）的幺半范畴，它在光滑流形范畴上具有幺半作用。因此，Weil 函子形式体系从由这一作用诱导的自函子和自然变换的角度研究微分几何结构。Leung 的洞见是，存在一个类似的交换半环范畴[1]，通过将 R[x]/x^2 替换为自然数集[x]/$x2$ 构造而成，称为 Weil$_1$（定义4.1.3）；切结构恰好是一个满足某些泛性质的 Weil$_1$ 幺半作用。特别地，范畴 Weil$_1$ 恰好是点上的自由切范畴 FreeTang(∗)，因此切范畴 C 中的每个对象 A 都确定一个严格切丛函子

$$T^{(-)}A : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}; V \mapsto T^V A$$

而态射 f: $A \to B$与切自然变换$T^{(-)}A \Rightarrow T^{(-)}(B)$之间存在一一对应关系。

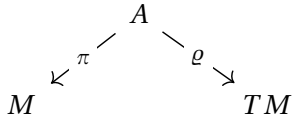
切范畴 C 中对合代数丛的公理与切丛的公理一一对应——这表明，对合代数丛应当确定一个从 Weil$_1$ 到 C 的切函子。初步猜想会让人认为，p: 自然数集[x]/x^2 → 自然数集被映射到 $\pi : A \to M$，0 被映射到ξ，而 + 被映射到 $+_A$。由于延拓空间 L $(A) = A\varrho \times_{T\pi} TA$起着二阶切丛的作用，我们可以看出

$$\ell : N[x]/x^2 \to N[x,y]/(x^2,y^2) \mapsto (\xi \circ \pi, \lambda) : A \to \mathscr{L}(A),$$

and

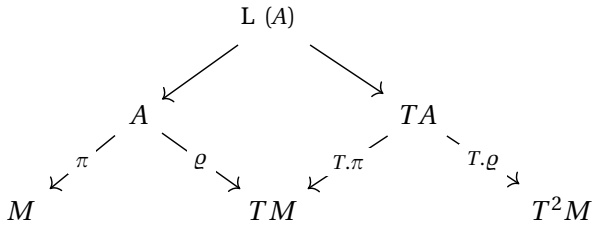
$$c : N[x,y]/(x^2,y^2) \to N[x,y]/(x^2,y^2) \mapsto \sigma\mathscr{L}(A) \to \mathscr{L}(A).$$

这种模式可以用跨度复合简洁地概括——我们将构造一个函子，将自然数集[x]/x^2 映射到这个 Span



[1]rig（无负元环）是没有负元的 ri*n*g，即配备了双线性乘法的交换幺半群 n.

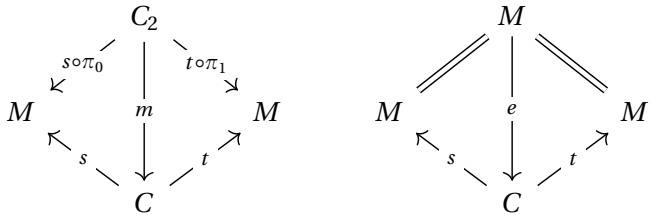
并将张量积自然数集$[x]/x^2 \otimes$自然数集$[x]/x^2$映射到跨度复合（例如拉回）



它就是延拓空间。这引出了本章的首个重要结果，*Weil* 神经（定理 4.3.9），该定理指出存在一个全忠实嵌入

$$N_{\mathsf{Weil}} : \mathsf{Inv}(\mathbb{C}) \hookrightarrow [\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}].$$

这与 Grothendieck 原始神经定理十分相似。该定理以一个内范畴 s、t: $C \to M$为起点，并构造一个函子 $\Delta^{op} \to$C（其中 Δ^{op}是内幺半群的幺半范畴）：将张量映为跨度复合，并将复合映射和单位映射表示为跨度态射



而范畴的单位公理和结合公理，恰好就是这一设定下幺半群的单位律和结合律。Segal 条件恰好刻画出哪些函子 C： $\Delta^{op} \to$ C 属于神经函子 N 的像：其中 $[n]^{th}$对象被映为宽拉回 C ([n]) =C $[2]_t \times_s$C $[2]\ldots$ t $\times_s$C [2]。对合代数丛的相应结果见定理 4.4.8：切函子 $(A, \alpha) : \mathsf{Weil}_1 \to$ C 是某个对合代数丛的神经，当且仅当 A 保持切极限，且 α 是一个 T-笛卡尔自然变换（这迫使 A.(W $^{\otimes}$n)=A$_{\varrho} \times_{T.\pi}$T A . . . T n$_{-1\varrho} \times_T$ n $_{\pi}$T n A）。Weil 神经与 Grothendieck/Segal 的神经之间的相似性根深蒂固；在第5章中，我们将展示切范畴的富化视角如何将二者纳入同一个形式框架。

节4.1 和 4.2详细介绍了魏尔函子形式体系（Kolár 等人 (1993年）、Bertram 和 Souvay (2014年）以及 Leung 将魏尔函子与切范畴统一起来的工作 Leung(2017）。本章其余部分包含作者提出的新成果。第 4.3 节证明了魏尔神经定理中的嵌入部分，即对合代数丛范畴嵌入到切范畴中的切函子与切自然变换范畴 $[\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}]$。第 4.4 节精确刻画了那些切函子 $(A, \alpha) : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$，它们是某个对合代数丛的神经，从而完成魏尔神经定理的证明。第 4.5 节利用魏尔神经，在切范畴中的对合代数丛范畴上构造一种新颖的切结构（特别地，李代数丛范畴将具有这种新颖的切结构）。

4.1 Weil代数与切结构

本节将更全面地介绍 Kolár 等人 (1993年提出的 Weil 函子形式体系，尤其说明如何从中提炼出切范畴的结构映射。我们首先

介绍 Weil 代数，以及通过 Weil 代数对光滑流形进行的 延拓 。（我们将在第3.2.1节的定义中说明，这与对合代数丛的延拓之间的关系。）

定义 4.1.1. $\mathbb{R}$-*Weil* 代数[2] 是一个有限维$\mathbb{R}$-代数 V，使得 $V = \mathbb{R} \oplus \dot{V}$ 作为$\mathbb{R}$-模，且 $\dot{V}$ 是一个幂零理想。范畴$\mathbb{R}$Weil 是$\mathbb{R}$Alg 中由$\mathbb{R}$-*Weil* 代数构成的全子范畴。流形被 *Weil* 代数 V 延拓后得到的流形为

$$T^V M := \mathbb{R}\mathrm{Alg}(C^\infty(M,\mathbb{R}), V).$$

Eck (1986)证明，光滑流形范畴上的每个保积自函子，都可以由某个 Weil 代数的 Weil 延拓构造得到。因此，$\mathbb{R}$-代数同态会在光滑流形范畴上的这些保积自函子之间诱导出自然变换。

例 4.1.2. 考虑以下$\mathbb{R}$-*Weil* 代数及其对应的延拓函子。

(i) 通过$\mathbb{R}$ 进行延拓会得到恒等函子，而切丛由$\mathbb{R}[x]/x^2$给出。因此，切丛投影等价于以下$\mathbb{R}$-代数态射

$$p : \mathbb{R}[x]/x^2 \to \mathbb{R};\ \ p(a+bx) = a$$

而 *0*-映射诱导零向量场：

$$0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}[x]/x^2;\ \ 0(a) = a + 0x.$$

(ii) 代数 $\mathbb{R}[x_i]_{1\le i\le n}/(x_i x_j)_{1\le i\le j\le n} = (\mathbb{R}[x]/x^2)^n$是宽拉回 $T_n M = TM \times_p TM \ldots \times_p TM$。特别地，通过 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2, y^2, xy)$的延拓给出丛 $T_2 M = TM \times_p TM$。$\mathbb{R}$-代数态射

$$+ : \mathbb{R}[x,y]/(x^2, y^2, xy) \to R[x]/x^2;\ \ +(a_0 + a_1 x + a_2 y) = a_0 + (a_1 + a_2)x$$

对应于切向量的加法。

(iii) 代数 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2, y^2) = (\mathbb{R}[x]/x^2) \otimes (\mathbb{R}[x]/x^2)$是二阶切丛 $T^2 M = TTM$。垂直提升 $T \to T^2$ 由态射诱导

$$\ell : \mathbb{R}[x]/x^2 \to \mathbb{R}[x,y]/(x^2, y^2);\ \ \ell(a+bx) = a + bxy.$$

(iv) 幺半群对称映射按如下方式诱导 $c : T^2 \Rightarrow T^2$：

$$c : (\mathbb{R}[x]/x^2) \otimes (\mathbb{R}[y]/y^2) \to (\mathbb{R}[y]/y^2) \otimes (\mathbb{R}[x]/x^2);$$
$$c(a + b_1 x + b_2 y + b_3 xy) = a + b_2 x + b_1 y + b_3 xy.$$

（*v*）对于 $n \ge 2$，代数 $\mathbb{R}[x]/x^n$ 给出 n 阶喷射丛。注意，这是由 S_n 的对称群作用所确定的 $\otimes^n \mathbb{R}[x]/x^2$ 的等化子。

[2]请勿将其与李理论中“Weil代数”的通常用法混淆，例如 Meinrenken 和 Pike (2021)。

更多示例可见专著 Kolár 等人 (1993年)。切范畴在研究光滑流形微分几何的 Weil 函子方法与通过幂零无穷小量公理化切丛的合成微分几何方法之间架起了桥梁。这里公理化的主要结构是对称幺半范畴在范畴 上的幺半群作用 M $\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，或者等价地，从一个范畴到复形范畴的提升$\mathbb{C} \to [M, \mathbb{C}]$, 这需要将一些经典范畴论内容转换到 2-范畴框架中。

示例4.1.2 导出了经典定理：光滑流形范畴受 $\mathbb{R}$-Weil 代数范畴的作用，且该作用保留所有存在的连通极限。这些“自然的”泛性质（依照 Kolár 等人(1993年的意义）是合成微分几何的基础；例如参见 Lavendhomme(1996）的第二章。遗憾的是，Weil 代数并非理想的句法表示：它们不构成有限呈示范畴，而且何时一个图表是连通极限也并不显而易见。[3] 从 $\mathbb{R}$-代数转向交换半环，并限制到适当的子范畴，就能解决这个问题。

定义 4.1.3(定义 3.1 Leung (2017))**.** 范畴 Weil_1 定义为交换半环 CRig 的全子范畴，由对偶数构成的 *rig* $W :=$ 自然数集$[x]/x^2$生成，构造如下：

1. 从在 CRig 中以 W 的有限乘积幂开始，并严格选择一个表示 n:

$$W_0 = \mathbb{N},\ W_n := \mathbb{N}[x_i]/(x_i x_j)_{i\le j}, 0 \le i < n.$$

2. 接着取 W_n 在交换半环余积下的闭包，记作 $\otimes$。同样，严格选择一个表示：

$$W_{n(0)} \otimes \ldots \otimes W_{n(m-1)} := \mathbb{N}[x_{i,j}]/(x_{ij}x_{ik})_{j\le k}, 0 < i < m, 0 < j < n(i).$$

注意，我们通常会省略张量积 $\otimes$，直接写作

$$UV := U \otimes V.$$

命题 4.1.4 (定义 3.3 Leung (2017))。

(i) 范畴Weil_1 是一个对称严格幺半范畴，其单位为 自然数集 ，余积为 $\otimes$。

(ii) 自然数集 是 Weil_1中的终对象。

请注意，存在一个遗忘函子

$$\mathrm{Weil}_1 \to (\mathrm{CMon}/\mathbb{N}) \to \mathrm{CMon}$$

它反映连通极限。这给出了以下一类极限，见 Leung(2017)。

定义 4.1.5。 我们称 Weil_1 中的以下拉回图为横截的：

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{id} & W \\ {\scriptstyle id}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle id} \\ W & \xrightarrow[id]{} & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W^2 & \xrightarrow{\pi_1} & W \\ {\scriptstyle \pi_0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p\,p\circ\pi_i} \\ W & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{N} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W^2 & \xrightarrow{\mu} & WW \\ & & \downarrow{\scriptstyle pW} \\ \mathbb{N} & \xrightarrow[0]{} & W \end{array}$$

其中 μ(一个 $+$一个$_1x +$一个$_2y$)$=$一个 $+$一个$_1x +$一个$_2xy$。由这三个拉回构成的 $\otimes$闭包是由以下对象组成的：横截方块，根据 *Leung (2017)*，它们也是拉回方块。

[3]应当指出，Nishimura 和 Osoekawa (2007) 在将计算机代数技术应用于后一个问题方面取得了进展。

要证明 ⊗-闭包中的每个横截方块都是拉回图表，取两个非恒等方块，并将它们在交换幺半群范畴中重写：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) & \xrightarrow{\mathbb{N}\times\pi_1} & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ {\scriptstyle \mathbb{N}\times\pi_0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \xrightarrow[\pi_0]{} & \mathbb{N} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) & \xrightarrow{\mathbb{N}\times(\pi_0,0\circ!,\pi_1)} & \mathbb{N}\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \\ {\scriptstyle \pi_0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{N}\times\pi_1} \\ \mathbb{N} & \xrightarrow[(id,0\circ!)]{} & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \end{array}$$

Weil代数的余积是底层交换幺半群的张量积，这些幺半群是有限维且自由的，因此这些极限在 ⊗ 下封闭。

命题 4.1.6 (Leung (2017）命题 4.1）。 范畴 Weil_1 是一个切范畴，其切函子为

$$T := W \otimes (\_) : \mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{Weil}_1$$

自然变换由下式给出

$$p : W \otimes (\_) \xrightarrow{p\otimes(\_)} (\_),\quad 0 : (\_) \xrightarrow{0\otimes(\_)} W \otimes (\_),\quad + : W_2 \otimes (\_) \xrightarrow{+\otimes(\_)} W \otimes (\_),$$
$$\ell : W \otimes (\_) \xrightarrow{\ell\otimes(\_)} W \otimes W \otimes (\_),\quad c : W \otimes W \otimes (\_) \xrightarrow{p\otimes(\_)} W \otimes W \otimes (\_)).$$

范畴 Weil_1 在某种意义上是一个有限呈示理论。它恰好是以单个对象为生成元的自由切范畴：

命题 4.1.7 (推论 9.5，Leung (2017））。 范畴 Weil_1 由例 $\{p$、0、+、ℓ、 $c\}$中的映射生成，并且在复合、张量以及由横截极限诱导的映射下封闭。

推论 4.1.8。 范畴 Weil_1 是以单个对象为基底的自由切范畴：切范畴 $\mathbb{C}$ 中的每个对象 C 都确定一个严格切丛函子 $T\_\circ C : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$，映射

$$V = W^{n1} \otimes \ldots \otimes W^{n(k)} \mapsto T_{n(1)}.(\ldots).T_{n(k)}.C = T^V C$$

因此，$\mathbb{C}$ 与由严格切函子$\mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$ 构成的范畴之间存在范畴同构，其中态射为切自然变换。

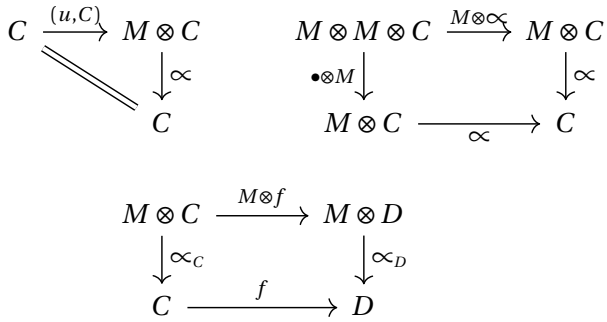
记号 4.1.9。 在本节中，记号 $T^V C$ 表示 *Weil* 代数 V 在切范畴中的对象 C 上的作用。特别地，我们将使用同构 T^U。$T\,V\,C \;= T\,U\,V\,C$。

4.2 切结构作为幺半作用

将 Weil_1 表述为自由切范畴，使切范畴的形式理论成为更一般的范畴论工具——即幺半作用——的一个实例。回顾一下，在对称幺半范畴 $(\mathbb{C}, \otimes, I)$中，内幺半群 $(C, \bullet, i)$确定了一个单子：

$$(C \otimes \_ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mu : \mathbb{C} \otimes (\mathbb{C} \otimes \_) \xrightarrow{\bullet\otimes\_} \mathbb{C} \otimes \_, \eta : \_ \xrightarrow{\rho} I \otimes \_ \xrightarrow{e\otimes\_} C \otimes \_).$$

这个单子的代数范畴恰好是C-模，也就是带有C的结合且含单位作用的对象。态射是保持该作用的基对象映射：



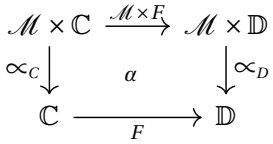
严格作用范畴是幺半群上的模的 2-范畴推广。2-单子的相干性来自范畴的 2-范畴中严格幺半范畴的相干性。以下命题依赖于富化范畴论中的一些事实（将笛卡尔闭范畴 Cat视为 Cat-富化范畴，参见 Kelly (2005)），但关于非严格作用范畴的更一般处理可见 Janelidze 和 Kelly(2001)：

- 2-函子和 2-自然变换，恰好是满足额外相干性条件的函子和自然变换。通过构造单子与余单子 $M \times \_, [M, \_]$，这些相干性便自动成立。
- 底层 1-单子的代数，恰好就是 2-单子的代数（余单子的情形也有相同结论）。

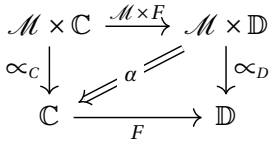
处理 2-单子的代数时，可能会涉及四种不同的态射概念（Lack 和 Power (2009)）。这些概念源于利用 2-范畴数据弱化态射的概念：

(i) 严格：这恰好是底层代数之间的态射。将严格 M-作用范畴的 2-范畴记作。

(ii) 强：这些态射将作用保持到一个同构：



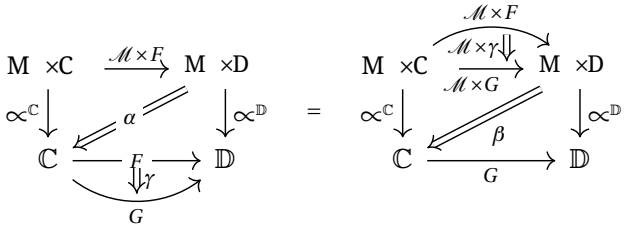
(iii) 松：2-胞腔不再是同构：



(iv) 反松：2-胞腔的方向相反（本文不会涉及这些）。

作用范畴态射之间的 2-胞腔必须满足作用范畴态射的自然变换部分之间的相容性。

定义4.2.1。 对于严格、强和松切函子，适用相同的 *2*-胞腔概念：一个自然变换 $\gamma : F \Rightarrow G$，满足与自然变换α 和 β之间的以下相容性：



我们称这些为作用范畴自然变换。

注意，对于严格作用范畴态射，这个条件对任意自然变换 $\gamma : F \Rightarrow G$ 都成立。现在考虑以下三个 2-范畴。

定义 4.2.2。 设 $(\mathscr{M}, \otimes, I)$ 是一个严格幺半范畴。定义以下三个 *2*-范畴 .

1. $\mathscr{M}\mathsf{Act}_{\mathsf{strict}}$：由严格的 $\mathscr{M}$-作用范畴、严格作用范畴态射和自然变换构成的 *2*-范畴。*2.* $\mathscr{M}\mathsf{Act}^{\mathsf{strong}}$：由严格的 $\mathscr{M}$-作用范畴、强作用范畴态射和作用范畴自然变换构成的 *2*-范畴。*3.* $\mathscr{M}\mathsf{Act}_{\mathsf{lax}}$：由严格的 $\mathscr{M}$-作用范畴、松弛作用范畴态射和作用范畴自然变换构成的 *2*-范畴。

注意，这些 *2*-范畴的包含在局部上是全忠实的，因此只有 *1*-胞不同。

作用在幺半范畴中保某些极限的情形尤为重要。配备了一类指定极限的小范畴称为图式。在这种情况下，前述对应关系限制在保极限作用这一类上。

定义 4.2.3. 图式是一个带有一类指定极限的小范畴，而图式态射是一个将指定极限映至定义域中的指定极限的函子（相差一个同构）。范畴 $\mathbb{C}$中图式$\mathscr{C}$的模型范畴 $\mathsf{Mod}(\mathscr{C}, \mathbb{C})$，是由保指定极限的函子组成的全子范畴 $[\mathscr{C}, \mathbb{C}]$。因此，幺半图式是一个图式 $(\mathscr{C}, \mathscr{L})$，它带有对称幺半范畴结构，且该结构定义在 $\mathscr{C}$上，使得 $\_ \otimes \_$ 在每个变元中都保极限。

现在利用这样一个事实：范畴 Weil_1 是一个幺半图式，因为它是一个带有一类在张量积下封闭的极限的小型严格幺半范畴。

定理 4.2.4（定理 14.1，Leung （2017））。设 $\mathbb{C}$ 是一个范畴。以下条件等价：

（*i*）$\mathbb{C}$上的一个切结构，

（*ii*）一个图式作用 $\propto$：$\mathsf{Weil}_1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。

观察 4.2.5. 切范畴存在一种余代数 视角，它源于 *2*-单子 $(\mathsf{Weil}_1 \times (\_), \otimes, I : 1 \to \mathsf{Weil}_1)$ 的代数与 *2*-余单子 $([\mathsf{Weil}_1, _], [\otimes, _], [I, _])$之间的等价关系。对于任意范畴 $\mathbb{C}$，都有一个自由切范畴，其定义为

$$\mathsf{Weil}_1 \times \mathbb{C}$$

这与自由 Weil_1-作用范畴一致。然而，对于余自由 切范畴，取

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}),$$

保横向极限函子的范畴 $\mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$。

当切结构由单个对象诱导时，我们可以利用 Leung 定理诱导出一个幺半函子 $\mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{C}$。

推论 4.2.6. 设 $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ 是一个严格幺半范畴。若一个加性丛 $(p : A \to I, + : A_2 \to A, 0 : I \to A)$ 配备了态射

$$A \otimes A \xrightarrow{c} A \otimes A \qquad A \xrightarrow{\ell} A \otimes A$$

利用自函子 $A \otimes (-)$ 在 $\mathbb{C}$ 上确定一个切结构，则 A 确定一个严格、保横向极限的幺半函子

$$A(-) : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}; W_{n[1]} \otimes \ldots \otimes W_{n[k]} \mapsto A_{n[1]} \otimes \ldots \otimes A_{n[k]} = T_{n[1]} \ldots T_{n[k]}.I$$

请注意，这使得我们能够以更具概念性的方式描述可表切结构。

命题 4.2.7. 在对称幺半闭范畴中，无穷小对象恰好是一个严格对称幺半函子 $D : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$。

无穷小对象的呈现 使得 C^{op} 具有切结构这一点成为显而易见的事实。

推论 4.2.8. 给定一个严格对称幺半函子

$$D : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}^{op}$$

存在一个 Weil_1 在 $\mathbb{C}^{op}$ 上的严格作用，由下式给出

$$\mathsf{Weil}_1 \times \mathbb{C}^{op} \xrightarrow{D^{op} \otimes \mathbb{C}} \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}^{op} \xrightarrow{\otimes} \mathbb{C}^{op}.$$

（严格、强、松）切函子的概念与（严格、强、松）作用范畴态射的概念之间存在明显的对应关系。这个命题可推广为以下 2-范畴之间的等价。

推论 4.2. **9**（定理 14.1 Leung （2017））。 以下每对 *2*-范畴均等价。

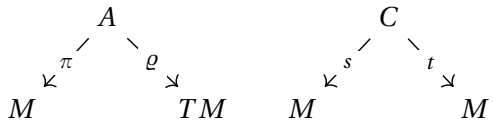
（*i*）切范畴与严格切函子构成的 *2*-范畴，是 $\mathsf{Weil}_1\mathsf{Act}_{\mathsf{Strict}}$中由图式作用张成的满子 *2*-范畴。（*ii*）切范畴与强切函子构成的 *2*-范畴，是 $\mathsf{Weil}_1\mathsf{Act}_{\mathsf{stron}}$

g

由图式作用张成。*(iii)* 切范畴与松切函子的*2*-范畴是$\mathsf{Weil}_1\mathsf{Act}_{\mathsf{Lax}}$的满子*2*-范畴，由图式作用张成。

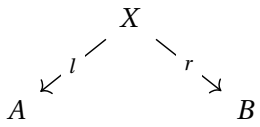
4.3 对合代数丛的 Weil 神经

本节中的构造类似于内范畴的神经——因此称为“Weil 神经”构造——并涉及类似的技术问题。特别是，本节中的构造将仿照内范畴的神经构造，用定义域范畴中的跨度复合替换Weilı 的张量积。回想一下，每个锚定丛或内范畴都有一个与之关联的典范跨度：

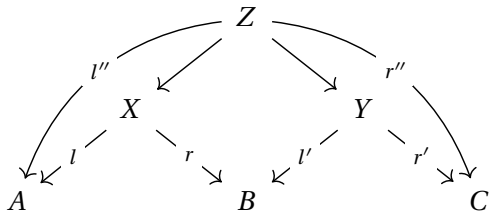


在任意范畴 C 中，都有一个由 C 中的跨度构成的范畴，以及跨度复合 .

定义 4.3.1. 从 A到 B 的范畴 $\mathbb{C}$ 中的跨度是如下形式的图表



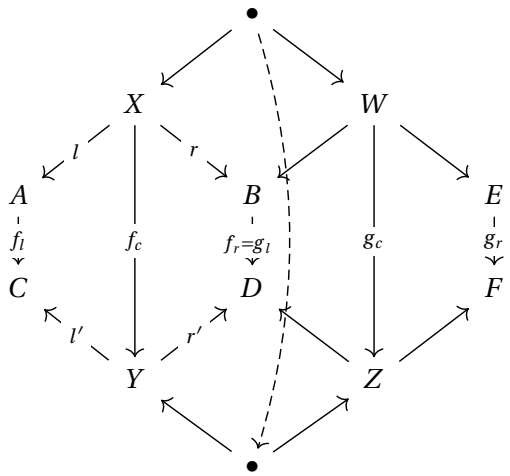
存在一种跨度复合的概念，因此，给定跨度 $X : A \to B$ 和 $Y : B \to C$，则 X 与 Y 的复合是拉回（如果存在）：



跨度态射是如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{l} & X & \xrightarrow{r} & B \\ \downarrow{\scriptstyle f_l} & & \downarrow{\scriptstyle f_c} & & \downarrow{\scriptstyle f_r} \\ C & \xleftarrow{l'} & Y & \xrightarrow{r'} & D \end{array}$$

注意，如果 f 和 g 是跨度态射，且 $f_r = g_l$，那么只要各自的跨度复合存在，就可以构造水平复合：



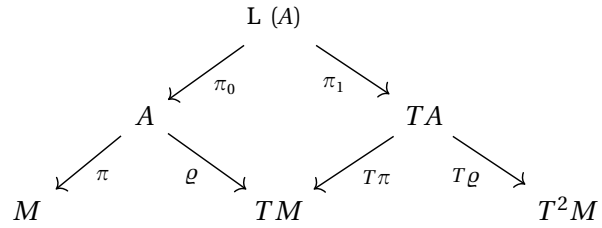
讨论切范畴中的跨度复合时，假定拉回是 T-拉回。

观察4.3.2. 请注意，$\mathbb{C}$ 中的跨度范畴是一个函子范畴，因此极限是在$\mathbb{C}$中逐点计算的。这也意味着，只要水平复合运算存在，它就会在任一自变量上保持极限。

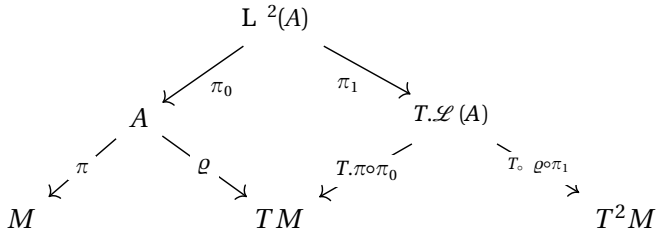
这些跨度构造有助于构造从幺半范畴到非幺半范畴 C 的函子：利用跨度从 C 构造一个幺半范畴。对于M上的内范畴，取切片范畴 $\mathsf{C}/(M \times M)$，其中张量积就是跨度复合。内范畴s、$t\colon C \to M$是M上这个跨度范畴中的幺半群，因此它确定了一个幺半函子

$$C : \Delta^{op} \to \mathbb{C}/(M \times M),$$

请记住，Δ^{op} 是幺半群的幺半理论（幺半范畴 C 中的每个幺半群都确定一个幺半函子 $\Delta \to \mathsf{C}$）。跨度对应的幺半范畴构造更为微妙，因为范畴Weil_1 并非 N-指标化。注意，锚定丛的延拓是通过跨度复合构造的：



第三次延拓也可以通过跨度复合给出：

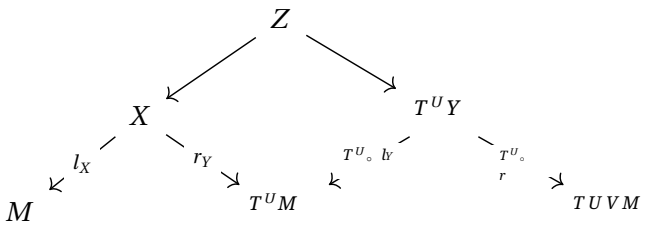


此水平复合将发挥与 $\mathsf{C}/(M \times M)$ 中张量积相同的作用。

定义4.3.3. 在切范畴$\mathbb{C}$中，考虑一对跨度

$$X : M \to T^U M, \quad Y : M \to T^V M.$$

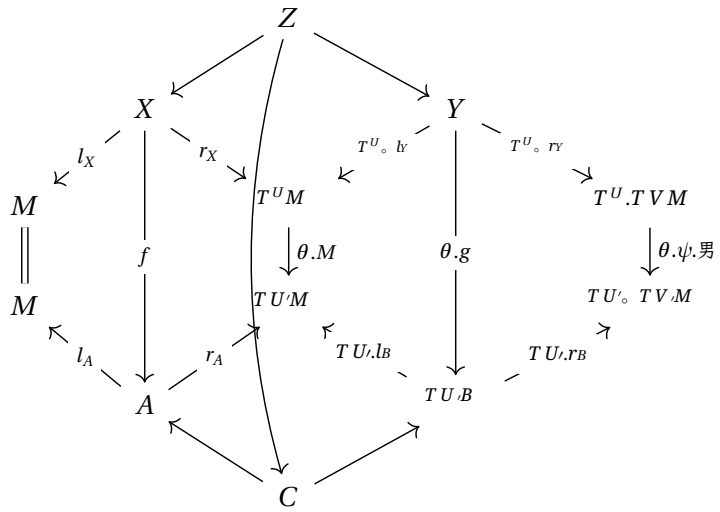
定义 $X \boxtimes Y$ 为水平复合（若其存在）：



（回想一下，为了节省空间，我们通常会省略 $\otimes$ *in* Weil_1 。）因此，跨度复合为

$$
\begin{array}{ccccc}
M & \xleftarrow{l_X} & X & \xrightarrow{r_X} & T^U M \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \theta.M} \\
M & \xleftarrow[l_Y]{} & Y & \xrightarrow[r_Y]{} & T^U M
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
M & \xleftarrow{l_A} & A & \xrightarrow{r_A} & T^V \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \psi.M} \\
M & \xleftarrow[l_B]{} & B & \xrightarrow[r_B]{} & T^{V'}
\end{array}
\tag{4.1}
$$

水平复合 $f \boxtimes g$ 定义为 $f \times_{\theta.M} \theta.g$:



在任意具有切显示系统（定义 1.5.3）的切范畴中，M 上的跨度范畴，其映射具有方程 4.1 所给出的形式，且 $l \in \mathscr{D}$，是一个幺半范畴。切范畴中的任何锚定丛，在严格选取 T-拉回（假设这些 T-拉回存在）后，都会导出一个幺半范畴。

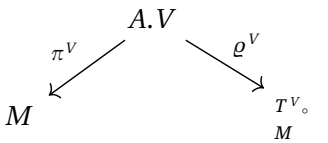
定义 4.3.4。*L*　　设 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$ 是切范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个锚定丛。记该 *Span* 为

$$\widehat{A}.W_n := (M \xleftarrow{\pi\circ\pi_i} A_n \xrightarrow{\varrho^n} T_n M), \qquad \widehat{A}.\mathbb{N} := (M = M = M).$$

对于 $(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$，延拓的选择是指对每个 $V \in \mathsf{Weil}_1$，严格选择一个水平复合：

$$\widehat{A}.V = \widehat{A}.(W_{n[1]} \dots W_{n[k]}) := \widehat{A}.W_{n[1]} \boxtimes \cdots \boxtimes \widehat{A}.W_{n[k]}.$$

我们将按如下方式表示该 *Span*：



（注意，顶点上没有帽子）。给定锚定丛 $(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 的一组选定延拓，范畴 $\mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 定义如下：

- 对象为 $\widehat{A}.V$，其中 $V \in \mathrm{Weil}_1$。
- 态射由一对

$$(f,\phi): \widehat{A}.V \to \widehat{A}.U$$

其中 $f: A.V \to A.U$ 和 $\phi: V \to U$ 确定了一个如下形式的跨度态射

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi^V} & A.V & \xrightarrow{\varrho^V} & T^V.M \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \phi.M} \\ M & \xleftarrow[\pi^V]{} & A.U & \xrightarrow[\varrho^U]{} & T^U.M \end{array}$$

如定义*4.3.1*中所述。

- 张量结构：张量积使用水平复合定义，$\boxtimes$ 如定义 *4.3.1*中所定义。

其思路是证明，锚定丛上的对合代数丛结构会在延拓的幺半范畴上诱导出切结构，然后应用 Leung 定理。以下两个引理将使证明简化。

引理 4.3.5. 设 $(\pi: A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$ 是切范畴 $\mathbb{C}$ 中带指定延拓的锚定丛，并将幺半范畴 $\mathrm{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 认作。

(i) 存在一个函子

$$U^{\varrho}: \mathrm{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho) \to \mathbb{C}$$

它将跨度态射映射为其顶点处对象之间的态射：

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi^V} & A.V & \xrightarrow{\varrho^V} & T^V.M \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \phi.M} \\ M & \xleftarrow[\pi^V]{} & A.U & \xrightarrow[\varrho^U]{} & T^U.M \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{c} A.V \\ \downarrow{\scriptstyle f} \\ A.U \end{array}$$

(ii) 假设有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}.U & \xrightarrow{(r,\beta)} & \widehat{A}.Y \\ {\scriptstyle (l,\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (g,\psi)} \\ \widehat{A}.X & \xrightarrow[(f,\phi)]{} & \widehat{A}.Z \end{array}$$

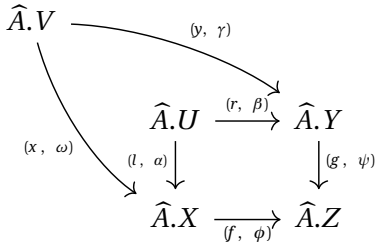
其在 U^{ϱ} 下的像是 $\mathbb{C}$ 中的一个 T-拉回，并且 Weil_1 中的方块是一个横截的 T-拉回：

$$\begin{array}{ccc} A.U & \xrightarrow{r} & A.Y \\ {\scriptstyle l}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A.X & \xrightarrow[f]{} & A.Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\beta} & Y \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ X & \xrightarrow[\phi]{} & Z \end{array}$$

*Th*则 U^{ϱ} 反映该极限；也就是说，$\mathrm{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 中原来的方块是一个 T-拉回 *k.*

(iii) (ii) 中所述形式的 T-拉回在 $\boxtimes$ 下封闭。

证明。 (i) 中的函子很容易构造，因为它只需忘掉跨度的左腿和右腿。对于 (ii)，请注意，由于图表中的 Weil$_1$ 部分是一个横截的 T-拉回，因此给定一对映射

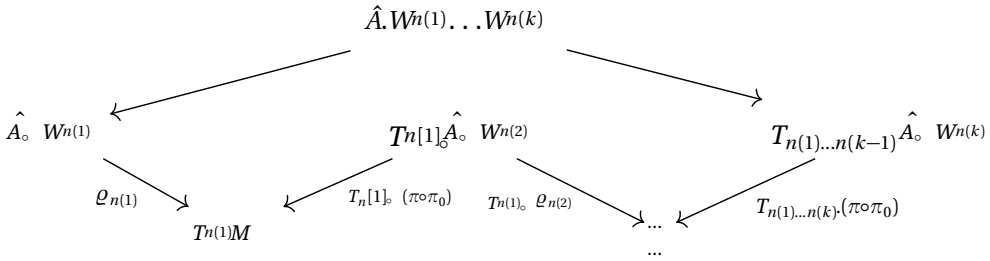


可利用来自 C 的顶点映射诱导出唯一的跨度态射 $\widehat{\ }A.V \to \widehat{\ }A.U$，并利用横截方块的泛性质，在 Weil$_1$ 中诱导出唯一映射（该方块在 C 中也具有泛性质），因此跨度态射图将由泛性质保证交换。

对于 (iii)，形如 (ii) 中所示的 T-拉回方块在 $\boxtimes$ 下封闭，正如 Weil$_1$ 中的横截方块在 $\otimes$ 下封闭一样，因此根据极限的交换性并应用此引理的 (ii) 部分，即可得到结论。

□

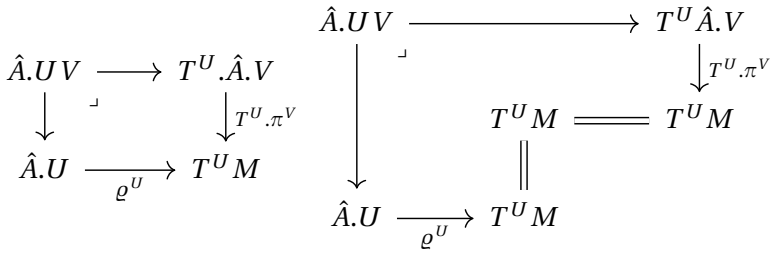
观察 4.3.6. 我们需要对延拓 $A.W^{n(1)}\ldots W^{n(k)}$ 给出一种“平坦”表示。锚定丛的高阶延拓可以具体描述为下方之字形图的 T-拉回：



因此，延拓 $A.W^{n[1]}\ldots W^{n[k]}$ 可具体写为

$$(u_1,\ldots,u_k): A_{n[1]\varrho'}\times_{T.\pi'} T_{n[1]}.A_{n[2]T.\varrho}\times_{T^2.\pi}\cdots\varrho'\times_{T.\pi'} T_{n[1]\ldots n[k-1]}A_{n[k]}.$$

此外，延拓的选择确定了以下极限：



因此

$$A.UV = A.U\boxtimes A.V = A.U\ \boxtimes id_M\boxtimes A.V$$

其中 id_M 是 $Span\ M\ = M\ = M$。

注意，ϱ 将对合代数丛结构映射发送到相应的切结构映射。因此，每个结构映射都给出一个跨度态射，其中 $\boxtimes$ 定义良好：

定义 4.3.7. 设 $(\pi : A \to M, \xi, +_q, \lambda, \varrho, \sigma)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个对合代数丛，并带有选定的延拓。则定义以下 Span$(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$中的映射：

- 投影 $p : \hat{} A.W \to \hat{} A.$自然数集，

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi} & A & \xrightarrow{\varrho} & TM \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \longleftarrow & M & = & M \end{array}$$

- 零映射 $0 : \hat{} A.$自然数集 $\to \hat{} A.W$，

$$\begin{array}{ccccc} M & = & M & = & M \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ M & \xleftarrow[\pi]{} & A & \xrightarrow[\varrho]{} & TM \end{array}$$

- 加法映射 $+ : \hat{} A.W_2 \to \hat{} A.W$，

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi\circ\pi_i} & A_2 & \xrightarrow{\varrho_2} & T_2M \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle +} & & \downarrow{\scriptstyle +.M} \\ M & \xleftarrow[\pi]{} & A & \xrightarrow[\varrho]{} & TM \end{array}$$

- 提升映射 $\ell : \hat{} A.W \to \hat{} A.W\,W$，

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi} & A & \xrightarrow{\varrho} & TM \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle (\xi\pi,\lambda)} & & \downarrow{\scriptstyle \ell.M} \\ M & \xleftarrow[\pi\circ\pi_0]{} & A_\varrho \times_{T\pi} TA & \xrightarrow[T.\varrho\circ\pi_1]{} & T^2M \end{array}$$

- 翻转映射 $c : \hat{} A.W\,W \to \hat{} A.W\,W$，

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi\circ\pi_0} & A_\varrho \times_{T\pi} TA & \xrightarrow{\varrho\circ\pi_1} & T^2M \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle c.M} \\ M & \xleftarrow[\pi\circ\pi_0]{} & A_\varrho \times_{T\pi} TA & \xrightarrow[\varrho\circ\pi_1]{} & T^2M \end{array}$$

我们的目标是证明，针对一个内-对合代数丛的选定延拓的幺半范畴 Span$(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 具有由定义 4.3.7 中的结构映射以及$\hat{}$自函子 $A.W \boxtimes (-)$生成的切结构。利用平坦表示，我们便可证明U^{ϱ}将确定范畴 $\mathbb{C}$中的一个切函子。以下关于 ϱ 的引理将有助于构造切函子的自然变换部分。

定义 4.3.8. 设 $(\pi : A \to M, \xi, \lambda, \varrho)$ 是一个带指定延拓的锚定丛。回忆一下，根据定义4.3.4，$A.U$ 的右边写作 ϱ，因此它诱导出一个 *Span* 映射：

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi^U} & A.U & \xrightarrow{\varrho^U} & T^UM \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \varrho^U} & & \| \\ M & \xleftarrow{p^U} & T^UM & = & T^UM \end{array}$$

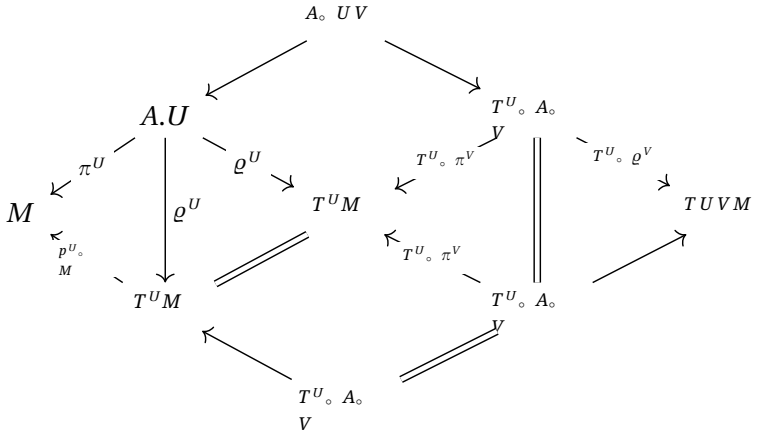
这个映射有如下平坦表示

$$\begin{array}{ccc} A.UV & = & A.U_{\varrho^U}\times_{T^U.\pi^V} T^U.A.V \\ \downarrow{\scriptstyle \varrho^U\boxtimes A.V} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^U\times T^U.A.V} \\ T^U.A.V & = & T^U M_{id}\times_{T^U.\pi^V} T^U.A.V \end{array}$$

我们将映射记为

$$\varrho^U.V := \varrho^U \boxtimes (\widehat{A}.V)$$

它对应于以下跨度态射：



定理 4.3.9（Weil 神经）。 存在一个全忠实函子

$$\mathsf{N}_{\mathsf{Weil}} : \mathsf{Inv}(\mathbb{C}) \to [\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}]$$

that 将对合代数丛映射为保横向极限的切函子：

$$(\widehat{A}, \alpha) : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$$

证明。 对于证明的第一步，我们证明锚定丛 (π 上的对合代数丛结构：$A \to M, \xi, \lambda, \varrho$) 确定了幺半范畴 $\mathsf{Span}(\pi : A \to M,\ \xi, \lambda, \varrho)$ 上的切范畴结构。

我们验证自函子 $\hat{}A \boxtimes (-)$ 确定了一个切结构，其结构映射由定义给出4.3.7：

[TC.1] 加性丛公理：

(i) 使用引理4.3.5 可知

$$\hat{A}.W_2 = \hat{A}.W_p \times_p \hat{A}.WA_\pi \times_\pi A;$$

这在 $\hat{}A.V \boxtimes (-)$ 作用下保持不变。

（ii）三元组 $(\hat{}A.+, \hat{}A.p, \hat{}A.0) = (+_q, \pi, \xi)$ 是由命题 2.4.4 诱导的加性丛，并且 $\boxtimes$ 保持拉回（因而也保持加性丛），所以加性丛公理成立。

[TC.2] 对称性公理：

(i) $\hat{}A.c \circ \hat{}A.c = id$由对合公理 $\sigma \circ \sigma = id$得出。

(ii) 对于杨–巴克斯特，注意到

$$(\hat{A} \boxtimes c) \circ (c \boxtimes \hat{A}) \circ (\hat{A} \boxtimes c) = (c \boxtimes \hat{A}) \circ (\hat{A} \boxtimes c) \circ (c \boxtimes \hat{A})$$

由对合代数丛上的杨–巴克斯特方程得出

$$(\sigma \times c) \circ (id \times T.\sigma) \circ (\sigma \times c) = (id \times T.\sigma) \circ (\sigma \times c) \circ (id \times T.\sigma),$$

因为

$$\sigma \times c.A = (\hat{A}.c) \boxtimes (\hat{A}.W) \text{ and } id \times T.\sigma = (\hat{A}.W) \boxtimes c.$$

(iii) 对于自然性条件：

(a) $+$、0、p之间的交换都由以下事实得出：

$$\sigma : (A.WW, \lambda \times \ell) \to (A.WW, id \times c \circ T.\lambda)$$

是线性的，因此也是加法丛态射。

(b) 公理

$$\ell.T \circ c = T.c \circ c.T \circ T.\ell$$

等价于方程

$$(\sigma \times c) \circ (1 \times T.\sigma) \circ (\hat{\lambda} \times \ell) = (1 \times T\hat{\lambda}) \circ \sigma$$

这等价于 σ 上的双重线性公理，依据命题 3.3.4。

[TC.3] 提升公理：

(i) 加性丛方程是由 λ 是提升，以及 $+$ 是由 λ 的非奇异性所诱导的加法这一事实推得的。

(ii) 余结合公理

$$\ell.T \circ \ell = T.\ell \circ \ell$$

等价于

$$(\hat{\lambda} \times \ell) \circ \hat{\lambda} = (id \times T.\hat{\lambda}) \circ \hat{\lambda}$$

由命题3.2.6的 (i) 部分证明。

(iii) 余乘法的对称性 $c \circ \ell = \ell$ 由对合代数丛的唯一方程给出，因此 $\sigma \circ (\xi \circ \pi, \lambda) = (\xi \circ \pi, \lambda)$。

(iv) 提升的泛性质由命题 3.2.6 的 (ii) 部分得出；引理 4.3.5 保证，对于任意 $V \in \mathsf{Weil1}$, $\hat{}A.V \boxtimes \mu$ 和 $\mu \boxtimes \hat{}A.V$ 都是泛的。

这个引理在 $\mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 上赋予一个切结构。现在考虑将跨度映射到顶点映射的函子，

$$U^{\varrho} : \mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho) \to \mathbb{C}.$$

这族映射

$$\{\varrho^U.V : \varrho^U \boxtimes \hat{A}.V | U, V \in \mathsf{Weil}_1\}$$

给出一族自然变换

$$\varrho^U : A.T^U \Rightarrow T^U.A,$$

使得以下这对构成一个切函子

$$(U^{\varrho}, \varrho) : \mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho) \to \mathbb{C}.$$

由于 $\mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 中的泛性质条件以及反射极限$\mathbb{C}$ 利用引理4.3.5，可知 (U^{ϱ}, ϱ) 将保留 $\mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 中对应于 Weil_1 中横截极限的切自然极限。

根据 Leung 定理 4.1.7（通过推论 4.2.6），$\mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$ 上的切结构诱导出一个严格、幺半、保横截极限的函子

$$\bar{A} : \mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{Span}(\pi, \xi, \lambda, \varrho)$$

它将张量积 $\otimes$ 映为跨度复合 $\boxtimes$。将严格切函子$_(A,id)$ 与 (U^{ϱ}, ϱ) 复合后，我们得到一个松的、保横截极限的切函子：

$$(A, \varrho) : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}; V \mapsto A.V$$

现在，检查态射上的双射。从一个对合代数丛态射 $(f,\ m) : \hat{}A \to B$ 出发，注意这给出了一个跨度态射 f：

$$\begin{array}{ccccc} M & \longleftarrow & A & \longrightarrow & TM \\ \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle T.m} \\ N & \longleftarrow & B & \longrightarrow & TN \end{array}$$

$\hat{}$ 这给出了 $f.V$ 的一个自然定义，它使用了跨度态射的水平复合，因此

$$\hat{f}.(UV) = \hat{f}.U \boxtimes \hat{f}.V \text{ and } \hat{f}.\mathbb{N} = m, \tag{4.2}$$

给出一族映射 $\{\hat{}f_U : U \in \text{对象}(\mathsf{Weil}_1)\}$。由于 f 将与结构映射 $\hat{}\{\pi, \xi, +, (\xi \circ \pi, \lambda), \sigma\}$ 复合，因此立即可得 f 是一个自然变换，因为对于每个 θ，以下计算成立：$X \to Y \in \{p, 0, +, \ell, c\}$：

$$\begin{aligned} & \hat{f}.UYV \circ (\hat{A}.U \boxtimes \theta \boxtimes \hat{A}.V) \\ = & (\hat{f}.U \boxtimes \hat{f}.Y \boxtimes \hat{f}.V) \circ (\hat{A}.U \boxtimes \theta \boxtimes \hat{A}.V) \\ = & \hat{f}.U \boxtimes (\hat{f}.Y \circ \theta) \boxtimes \hat{f}.V \\ = & \hat{f}.U \boxtimes (\theta \circ \hat{f}.X) \boxtimes \hat{f}.V \\ = & (\hat{A}.U \boxtimes \theta \boxtimes \hat{A}.V) \circ \hat{f}.UXV \end{aligned}$$

切自然性将由f对锚映射的保持性推出。对于任意 Weil代数U，图表的相等性

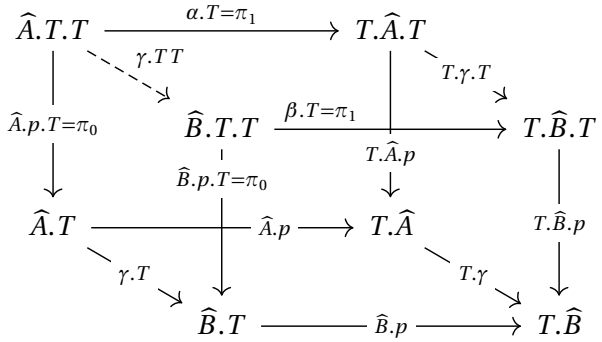
$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi^U} & A.U & \xrightarrow{\varrho^U} & T^U M \\ \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{f}.U} & & \downarrow{\scriptstyle T^U.m} \\ N & \longleftarrow & B.U & \xrightarrow{\varrho^U} & T^U N \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \varrho^U} & & \| \\ N & \xleftarrow[p^U]{} & T^U N & = & T^U N \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi^U} & A.U & \xrightarrow[\varrho^U]{} & T^U M \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \varrho^U} & & \| \\ M & \xleftarrow{p^U} & T^U M & = & T^U M \\ m \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^U.m} & & \downarrow{\scriptstyle T^U.m} \\ N & \xleftarrow[p^U]{} & T^V N & = & T^V N \end{array}$$

恰好是定义 1.3.12、4.2.1 中的切向自然性条件。

对于该映 射的逆，考虑一个切丛自然变换（定义 1.3.12 ）

$$\gamma:(A,\alpha)\to(B,\beta),\qquad \begin{array}{ccc} A\circ T(A) & \xrightarrow{\gamma_{TA}} & B\circ T(A)\\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_A} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{TA}}\\ T\circ A(A) & \xrightarrow{T\gamma_A} & T\circ B(A) \end{array}$$

其中 $(A、\ \alpha)$和 $(B、\ \beta)$是由带有选定延拓的对合代数丛构造出的切函子 $\mathsf{Weil}_1\to\mathsf{C}$。对于任意 $U、V$，映射 $\gamma.UV$可分解为 $\gamma.U\boxtimes\gamma.V$：



归纳应用这一关系可知，基映射 $\gamma.W$和 $\gamma.\mathrm{N}$ 决定了整个态射 $\gamma.V$：

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi^U} & A.U & \xrightarrow{\varrho^U} & T^UM\\ {\scriptstyle\gamma.\mathbb{N}}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma.U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^U.\gamma.\mathbb{N}}\\ N & \xleftarrow[\pi^U]{} & B.U & \xrightarrow[\varrho^U]{} & T^UN \end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{ccccccccc} M & \xleftarrow{\pi\circ\pi_i} & A_{n[1]} & \xrightarrow{\varrho_{n[1]}} & T_{n[1]}.M & \xleftarrow{T_{n[1]}.(\pi\circ\pi_i)} & \cdots & \longrightarrow & T_{n[1]}\ldots T_{n[k]}.M\\ {\scriptstyle\gamma.\mathbb{N}}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma.W_{n[1]}}\downarrow & & {\scriptstyle T_{n[1]}.\gamma.\mathbb{N}}\downarrow & & \ldots & & \downarrow{\scriptstyle T_{n[1]}\ldots T_{n[k]}.\gamma.\mathbb{N}}\\ N & \xleftarrow[\pi\circ\pi_i]{} & B_{n[1]} & \xrightarrow[\varrho_{n[1]}]{} & T_{n[1]}.M & \xleftarrow[T_{n[1]}.(\pi\circ\pi_i)]{} & \cdots & \longrightarrow & T_{n[1]}\ldots T_{n[k]}.N \end{array}$$

因此，每个切丛自然变换都由一对

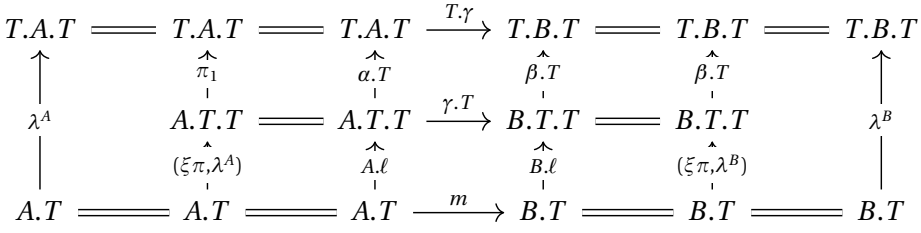
$$(\gamma.\mathbb{N}:M\to N,\gamma.W:A\to B)$$

构造而成，采用 $\boxtimes$ 公式中的构造 4.2。剩下要证明的只有这一对是对合代数丛态射。

切自然性给出以下两个相干性：

$$\varrho^B\circ\gamma.W=T.\gamma.\mathbb{N}\circ\varrho^A\text{ and }\sigma^B\circ\gamma.WW=\gamma.WW\circ\sigma^A$$

根据构造，$\varrho^B=\beta.W、\ \varrho^A=\alpha.W、\ \sigma^B=B.c$和 $\sigma^A=A.c$成立。下图证明了 $\gamma.W$保持提升，因此 $(\gamma.W、\ \gamma.\mathrm{N})$是一个对合代数丛态射：



因此，切丛自然变换 $(\widehat{\ }A、\ \alpha)\to(\widehat{\ }B、\ \beta)$恰好是一个对合代数丛态射$A\to B$，这就证明了定理。

□

现在，李代数丛的投影是浸没，因为我们可以为每个$U\in\mathsf{Weil}_1$选择延拓。这些延拓带来了关于李代数丛的一个新观察：它们嵌入到一个以光滑流形为对象的函子范畴中。

推论 4.3.10. 利用 *Weil* 神经构造，李代数丛范畴嵌入到切函子范畴中：

$$\mathsf{LieAlgd}\hookrightarrow[\mathsf{Weil}_1,\mathsf{SMan}].$$

4.4 识别对合代数丛

本节将识别出那些切函子

$$(A,\alpha):\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C}$$

恰好是对合代数丛的对象，即 A 保留横截极限，且 α 是一个 T-笛卡尔 自然变换（定义 4.4.1）。这些条件将迫使每个 A。V 成为底层带锚预微分丛的V-延拓：

$$(A.p:A.T\to A,\ A.0:A\to A.T,\ A.T\xrightarrow{A.\ell}A.T.T\xrightarrow{\alpha.T}T.A.T,\ \alpha:A.T\to T.A)$$

（这些条件还确保该元组是一个带锚微分丛。）

起初，只能确定 α 对于投影 p 是 T-笛卡尔的。事实上，回忆一下，延拓 $A.UV$被定义为以下余跨图的 T-拉回：

$$\widehat{A}.U\xrightarrow{\alpha^U}T^U.A.\mathbb{N}\xleftarrow{T^U.A.p^V}T^U.\widehat{A}.V$$

接下来考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{A}.UWV & \longrightarrow & T^U.\widehat{A}.T.T^V \\
{\scriptstyle \widehat{A}.T^U.p.T^V}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T^U.\hat{A}.p.V} \\
\widehat{A}.U.V & \longrightarrow & T^U.\widehat{A}.V \\
{\scriptstyle \widehat{A}.T^U.p^V}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T^U.\hat{A}.p^V} \\
\widehat{A}.T^U & \longrightarrow & T^U.\widehat{A}.\mathbb{N}
\end{array}$$

这意味着，对于 p，α 的每个自然性方块都是一个 T-拉回；对于定义域范畴中的每个映射都满足此性质的自然变换称为 T-笛卡尔的。

定义 4.4 .1. 自然变换 $\gamma:F\Rightarrow G$ 称为笛卡尔的，当且仅当每个自然性方块

$$\begin{array}{ccc}
FC & \xrightarrow{\gamma} & GC \\
{\scriptstyle F.f}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle G.f} \\
FD & \xrightarrow[\gamma]{} & GD
\end{array}$$

是一个拉回。切范畴中函子之间的自然变换称为 T-笛卡尔，当且仅当每个分量方块都是 T-拉回（当上下文清楚时，我们通常省略 T）。

现在回顾一下，由对合代数丛确定的 Weil 复形具有由以下$A.U.V$确定的 T-拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}.U.V & \longrightarrow & T^U.\widehat{A}.V \\ {\scriptstyle \widehat{A}.T^U.p^V}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T^U.\widehat{A}.p^V} \\ \widehat{A}.T^U & \longrightarrow & T^U.\widehat{A}.\mathbb{N} \end{array}$$

接下来不难证明，Weil 复形上的 T-笛卡尔条件会迫使它成为一个对合代数丛。我们首先需要：

定义 4.4.2。$\mathbb{C}$ 中的 T-笛卡尔 *Weil* 复形是一个切函子

$$(A,\alpha):\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C}$$

使 A 将横截极限映为 T-极限，且 α 是一个 T-笛卡尔自然变换。

首先要验证的是，一个 T-笛卡尔 Weil 复形给出一个自然的锚定丛 $\hat{}A$，其 Weil 延拓与函子在对象上的赋值一致。

命题 **n 4.4.3.** 设 (A,α) 是一个 T-笛卡尔 *Weil* 复形。则我们有一个带锚丛。 *le*

$$(M:=A.\mathbb{N},\ \hat{A}:=A.W,\ \pi:=A.\pi,\ \xi:=A.\xi,\ \lambda:=\alpha.T\circ A.\ell).$$

此外，

$$\mathscr{L}(\hat{A})=A.W\,W,\quad \mathscr{L}^2(\hat{A})=A.W\,W\,W.$$

证明。假设我们有一个切函子 $(F,\alpha):\mathsf{C}\to\mathsf{D}$，以及一个微分丛 $(\pi,\xi,\lambda)\,\mathrm{in}\,\mathsf{C}$。若 F保留 π 的 T-拉回，则它保留 $(\pi,\xi,+)$ 上的加性丛结构，因此要证明 $(F.\pi,F.\xi,\alpha\circ F.\lambda)$ 是泛的，只需证明下图是 D 中的一个 T-拉回：

$$\begin{array}{ccc} F.A_2 & \xrightarrow{\mu^{\alpha\circ F.\lambda}} & T.F.A \\ {\scriptstyle F.\pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F.T.\pi} \\ F.M & \xrightarrow[F.0]{} & T.F.M \end{array}$$

展开此项以

$$\begin{array}{ccccc} F.A_2 & \xrightarrow{F.\mu^\lambda} & F.T.A & \xrightarrow{\alpha.A} & T.F.A \\ {\scriptstyle F.\pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F.T.\pi} & & \downarrow{\scriptstyle T.F.\pi} \\ F.M & \xrightarrow[F.0]{} & F.T.M & \xrightarrow[\alpha.M]{} & T.F.M \end{array}$$

在这种情况下，它限制为该图表

$$\begin{array}{ccccc} A.T_2 & \xrightarrow{A.\mu} & A.T^2 & \xrightarrow{\alpha.T} & T.A.T \\ \downarrow & & {\scriptstyle A.T.p}\downarrow\ \lrcorner & & {\scriptstyle T.A.p}\downarrow \\ A & \xrightarrow[A.0]{} & A.T & \xrightarrow[\alpha]{} & T.A \end{array}$$

根据假设，每个方块都是一个T-拉回，因此提升的泛性质由T-拉回引理推出。由于该复形是T-笛卡尔的，赋值$A.V$通过T-拉回给出了延拓的一致选择

$$\begin{array}{ccc} A.U.V & \xrightarrow{\alpha^U} & T^U.A.V \\ {\scriptstyle A.U.p^V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^U.A.p^V} \\ A.U & \xrightarrow[\alpha^U]{} & T^U.A \end{array}$$

□

当然，对合映射有一个自然的候选。

推论 4.4.4。 设 $(\pi:\ A\ \to M,\ \xi,\ \lambda,\ \varrho)$ 是切范畴$\mathbb{C}$中由一个 T-笛卡尔 $Weil$ 复形诱导的锚定丛。则我们有一个对合映射

$$\sigma : \mathscr{L}(A) \xrightarrow{A.c} \mathscr{L}(A).$$

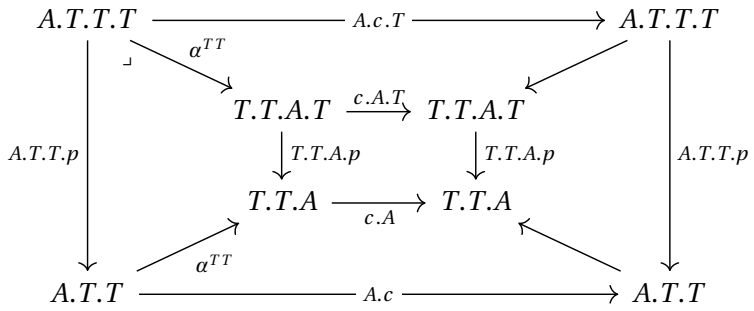
对合代数丛的方程应当由函子性立即得到；只需确保映射具有正确的形式。

引理 4.4.5。 设 A 是切范畴 $\mathbb{C}$中的一个 T-笛卡尔 $Weil$ 复形，且其底层锚定丛为 $(\pi:\ A\ \to M,\ \xi,\ \lambda,\ \sigma)$。则有：

(i) $A_{\circ}\ c\ _{\circ}\ T$
$=\sigma \times c$, *(ii)* $A_{\circ}\ T_{\circ}$
$c\ =1 \times T_{\circ}\ \sigma$,^*(iii)* $A_{\circ}$
$\ell_{\circ}\ T\ =\lambda \times \ell_{\circ}\ A$,^*(iv)*
$A_{\circ}\ T_{\circ}\ \ell = i\,d\ \times T_{\circ}\ \lambda$.

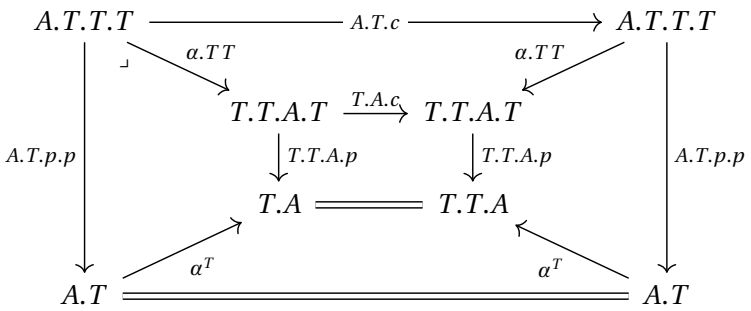
证明。

(i) 考虑该图表



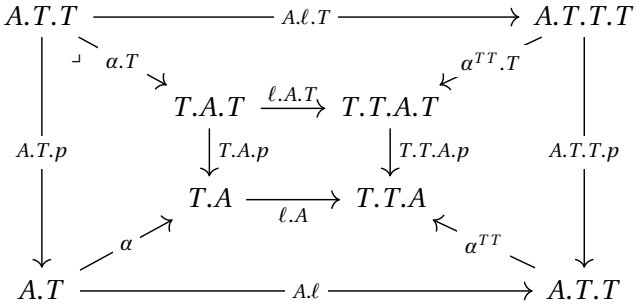
注意，这就迫使 $A.c.T\ =A.c\ \times c.A.T\ =\sigma \times c_{\circ}$

(ii) 同理，该图表



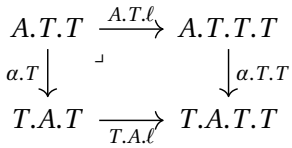
迫使 $A.T.c = id \times T.A.c = id \times T.\sigma$.

(iii) 该图表

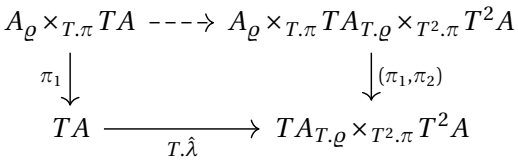


这迫使$A.\ell.T = A.\ell \times \ell.A = \hat{}\lambda \times \ell$。

(iv) 由于 α 是T-笛卡尔的，以下图表是一个T-拉回：



根据先前的结果，这意味着$A.\ell.T$ 是使以下图表交换的唯一映射：



$\hat{}$ 我们可以看出这是$id \times \lambda$。

□

Pu结合本引理与前一个命题，以下结论便显而易见：

命题 4.4.6. 一个 T-笛卡尔 *Weil* 复形决定一个对合代数丛 .

然而，我们尚未展示 Weil 神经函子的像与T-笛卡尔 Weil 复形之间的范畴同构。乍看之下，Weil 神经构造仅给出一个关于切丛投影 $p \in \mathrm{Weil}_1$ 为T-笛卡尔的 Weil 复形。而关于p 为T-笛卡尔，

然而，这已经足够：一个关于切丛投影为 T-笛卡尔的 Weil 复形，对于 $T\mathbf{Weil}_1$ 中的每个映射也都是 Weil-笛卡尔的（可微编程语言领域也出现过类似结果；参见 Cruttwell 等人（2019年））。

命题 4.4.7。 一个松弛横向极限保持切函子 $(F,\alpha):\mathbf{Weil}_1\to\mathbb{C}$，若 F 保持每个 $T^U.p$ 的拉回幂，则当且仅当每个

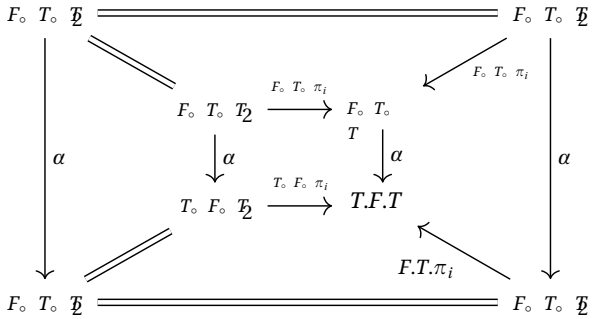
$$\begin{array}{ccc} F.T.T & \xrightarrow{\alpha_A} & T.F.T \\ {\scriptstyle F.T.p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T.F.p} \\ F.T & \xrightarrow{\alpha_B} & T.F \end{array}$$

都是一个 T-拉回。

证明。 我们只需验证逆命题，因为正向蕴含显然成立。我们将用到 T- 拉回引理。

(i) c 是一个同构，因此它的自然性方块是一个 T-拉回。

(ii) 对于投影 $T_2\to T$，T-拉回图的收缩也是一个 T-拉回，因此下图是泛的：



(iii) 对于0，注意到以下两个图表相等：

$$\begin{array}{ccccc} F.T & \xrightarrow{F.T.0} & F.T.T & \xrightarrow{F.T.p} & F.T \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ T.F & \xrightarrow[T.F.0]{} & T.F.T & \xrightarrow[T.F.p]{} & T.F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F.T & = & F.T \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ T.F & = & T.F \end{array}$$

右侧图表是一个T-拉回，而根据假设，左侧图表的右侧方块是一个T-拉回。根据T-拉回引理，左侧图表的左侧方块是一个T-拉回。

(iv) 对于 ℓ，注意到

$$\begin{array}{ccccc} F.T.T & \xrightarrow{F.T.\ell} & F.T.T.T & \xrightarrow{F.T.p.T} & F.T.T \\ {\scriptstyle\alpha.T}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha.T.T}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle\alpha.T} \\ T.F.T & \xrightarrow[T.F.\ell]{} & T.F.T.T & \xrightarrow[T.F.p.T]{} & T.F.T \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} F.T.T & \xrightarrow{F.T.p} & F.T & \xrightarrow{F.T.0} & F.T.T \\ {\scriptstyle\alpha.T}\downarrow & \lrcorner & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle\alpha.T} \\ T.F.T & \xrightarrow[T.F.p]{} & T.F & \xrightarrow[T.F.0]{} & T.F.T \end{array}$$

右侧图表的外周是一个T-拉回（根据假设，左方块是拉回；根据 (ii)，右方块是拉回），左侧图表的右方块也是如此（根据假设）。根据T-拉回引理，左侧图表的左方块是一个T-拉回。

(v) 对于 $+$，注意到

$$\begin{array}{ccccc} F.T.T_2 & \xrightarrow{F.T.+} & F.T.T & \xrightarrow{F.T.p} & F.T.T \\ {\scriptstyle \alpha.T}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha.T}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \alpha.T} \\ T.F.T_2 & \xrightarrow[T.F.+]{} & T.F.T & \xrightarrow[T.F.p]{} & T.F.T \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} F.T.T_2 & \xrightarrow{F.T.\pi_i} & F.T.T & \xrightarrow{F.T.p} & F.T \\ {\scriptstyle \alpha.T_2}\downarrow & \lrcorner & {\scriptstyle \alpha.T}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ T.F.T_2 & \xrightarrow[T.F.\pi_i]{} & T.F.T & \xrightarrow[T.F.p]{} & T.F \end{array}$$

右侧的外部图表通过复合是一个T-拉回，而左侧图表中的右方块根据假设是一个T-拉回，因此结论成立。

为验证自然性方块是 T-拉回，对于 $Weil_1$，中的每个映射，我们再次利用 Weil_1 中映射的 Leung 刻画，该刻画来自命题 4.1.7。归纳地，在 $\{p, 0, +, \ell, c\}$ 下由 $\otimes$ 和 $\circ$ 生成的映射集合也满足这一点，因为T-拉回方块在复合下封闭。对于由 Weil_1，中的横截极限诱导的映射，F保留横截极限，因此由极限的交换性可得。

□

定理 4.4.8。 对于任意切范畴$\mathbb{C}$，*Weil* 神经函子的充满像

$$\mathsf{Inv}(\mathbb{C}) \hookrightarrow [\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}]$$

恰好是 T-笛卡尔 *Weil* 复形的范畴。

推论 4.4.9。 *That* α: A。$T \Rightarrow T$。A 是 T-笛卡尔的，等价于要求切函 r

$$(A, \alpha) : \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$$

限制为一个锚定丛

$$(\pi : A.T \xrightarrow{A.p} A.\mathbb{N},\ \xi : A \xrightarrow{A.0} A.T,\ \lambda : A.T \xrightarrow{A.\ell} A.T\,T \xrightarrow{\alpha.T} T.A.T,\ \varrho : A.T \xrightarrow{\alpha} T.A)$$

并且每个 $A.T^V$ 都是该锚定丛的 V-延拓。

注 4.4.10。 推论 4.4.9 中的条件类似于用于识别哪些单纯复形

$$\Delta \to \mathbb{C}$$

是内范畴的 *Segal* 条件。请注意，每个单纯对象都有一个底层自反图

$$\mathsf{tr}_1(X) := (s, t : X([1]) \to X([0]), i : X([0]) \to X([1]))$$

其中 $X([n])$ 同构于该底层自反图的 n 个可复合箭头所成的对象。

注释 4.4.11。 值得注意的是，对 p 来说是 T-笛卡尔的这一条件，足以确保一个自然变换对于其他切结构自然变换也是 T-笛卡尔的。当使用偏映射将拓扑概念与切范畴结合时，这会带来一些影响。在此语境下，一个偏映射 $N \to X$，其定义域为 $M \to N$，是一个 *Span*

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & {\scriptstyle m}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f} & \\ N & & & & X \end{array}$$

其右腿是单态射。直观上，映射 f 定义在 N 的子对象 M 上，这就引出了一个新问题：在切范畴中，子对象的恰当概念是什么？这样的概念

应当给出一个稳定单态射类：它在水平跨度复合下封闭。一种答案是 *étale* 单态射的概念：若 p 的自然性方块是 T-拉回，则该态射是étale的：

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T.f} & TN \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \xrightarrow[T.f]{} & TN \end{array}$$

从几何上看，这意味着该态射是一个局部微分同胚；例如，在 $\mathbb{R}^n$ 中，*Dubuc* 拓扑斯的 *étale* 子对象恰好是通常意义上的开子集。只要自函子保留单态射类，它就可以提升到部分映射范畴。只要自然变换相对于单态射类是 T-笛卡尔的，它就可以提升为部分映射范畴上的自函子；同样的证明也表明，这一性质对 *étale* 单态射成立 *Cruttwell 等人 (2019年)*。

4.5 延拓切结构

Weil 神经定理 4.3.9 最重要的推论之一是，反演代数丛范畴（带有选定的延拓）可以赋予两种切结构。第一种切结构是命题 3.3.6中描述的逐点切结构。切函子将

$$(A,\alpha)\mapsto(T.A:\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C},c.A\circ T.\alpha:T.A.T\Rightarrow T.T.A)$$

（回顾示例 1.3.11 （ii）中给出的切函子复合）。结构态射将通过粘合给出，因此在本例中 θ。A，$\theta\in\{p,\ 0,\ +,\ \ell,\ c\}$。限制为保留横截极限的切函子，再加上自然部分 α 是 T-笛卡尔的这一事实，确保了与切函子进行前复合

$$(A,\alpha)\mapsto(A.T:\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C},T.\alpha\circ A.c:A.T.T\Rightarrow T.A.T)$$

返回一个对合代数丛。结构映射仍然由粘合给出，其复合前置切结构$A.\theta,\theta\in\{p,0,+,\ell,c\}$。横截极限的保持性保证了该切结构满足必要的泛性质条件。

命题 4.5.1(命题 3.3.10)**.** 切范畴$\mathbb{C}$ 中具有选定延拓的对合代数丛范畴具有第二切结构，其中由Weil_1 给出的作用为

$$(A,\alpha)\mapsto(A.T:\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C},\alpha.T\circ\hat{A}.c:\hat{A}.T.T\Rightarrow T.\hat{A}.T).$$

证明。 该命题的表述意味着，这个新的对合代数胚的结构态射为

$$(A.T,\alpha.T\circ A.c)\cong\begin{cases}\alpha.T\circ A.c=\varrho':& \mathscr{L}(A)\xrightarrow{\pi_1}TA\\ A.T.p=\pi':& \mathscr{L}(A)\xrightarrow{p\circ\pi_1}A\\ A.T.0=\xi':& A\xrightarrow{(\xi\circ\pi,0)}\mathscr{L}(A)\\ \varrho'\circ A.T.\ell=\lambda':& \mathscr{L}(A)\xrightarrow{\lambda\times\ell}T.\mathscr{L}(A)\\ A.T.c=\sigma':& \mathscr{L}^2(A)\xrightarrow{\sigma\times c}\mathscr{L}^2(A)\end{cases}$$

同理，我们可以看到

$$(A.T.T, \alpha.T.T \circ A.c.T \circ A.T.c)$$
$$= \begin{cases} \alpha.T.T \circ A.c.T \circ A.T.c = \varrho'' : & \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{(\pi_1,\pi_2)} T.\mathscr{L}(A) \\ A.T.p = \pi'' : & \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{(p\circ\pi_1, p\circ\pi_2):} \mathscr{L}(A) \\ A.T.0 = \xi'' : & \mathscr{L}(A) \xrightarrow{(\xi\circ\pi\circ\pi_0, 0\circ\pi_1, 0\circ\pi_2)} \mathscr{L}^2(A) \\ \varrho'' \circ A.T.\ell = \lambda'' : & \mathscr{L}^2(A) \xrightarrow{(\lambda\times\ell\times\ell)} T.\mathscr{L}^2(A) \\ A.T.T.c = \sigma'' : & \mathscr{L}^3(A) \xrightarrow{(\sigma\times c\times c)} \mathscr{L}^3(A) \end{cases}$$

这些与命题 $\mathscr{L}\prime\ (A), \mathscr{L}\prime.\mathscr{L}\prime\ (A)$ 3.3.10中的对合代数丛相同：第二个切结构源于这样一个事实，即其中切结构的自然变换由以下形式给出

$$A.\phi : A.U \Rightarrow A.V, \phi : U \to V \in \{p, 0, +, \ell, c\}.$$

该结果可由定理 4.3.9的推论得出。 □

对合代数丛的雅可比恒等式

传统上，李代数丛理论使用截面代数 $\Gamma(\pi)$。一个重要观察是，使用李切结构 (Inv(C), L)时， π 的截面与 $\chi_{\mathscr{L}}(A)$一一对应。这一观察使得可以将关于李代数丛的不同陈述转化为关于 (Inv(C), L)中切丛的形式化陈述。

命题4.5.2。 设 A 是 $\mathbb{C}$ 中的对合代数丛。$\mathbb{C}$ 中 π 的截面与$\mathbb{C}$ 中 A 上的Inv($\mathbb{C}$)向量场之间存在双射：

$$X \in \Gamma(\pi) \mapsto ((id, TX \circ \varrho), X) : A \to T_L(A); \quad \hat{X} \in \chi_{\mathscr{L}}(A) \mapsto \hat{X}_R : A.R \to A.T.$$

证明。 回顾切自然变换的相容性 $\gamma : (H, \phi) \Rightarrow (G, \psi)$ ：

$$\begin{array}{ccc} H.T & \xrightarrow{\gamma.T} & K.T \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ T.H & \xrightarrow{T.\gamma} & T.K \end{array}$$

我们将其具体化为一个态射 $\hat{}X$: $(A, \alpha) \Rightarrow T_L(A, \alpha) = (A.T, \alpha.T)$ 在自然数集 N 上， W:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{X.T} & A_\varrho \times_{T\pi} TA \\ \downarrow{\scriptstyle \varrho} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ TM & \xrightarrow{T.X} & TA \end{array}$$

因此可以推断，若令 $X := X_R$，则有 $\pi_1 \circ X.T = T(X) \circ \varrho$。此外，条件$p_L \circ X = id$迫使$id = \pi_0 \circ X.T$；因此，我们可以看到，$p_L$的每个截面$X$都由底层对合代数丛上的如下形式的态射给出：$((id, TX \circ \varrho), X))$，其中 $\pi \circ X = id$。

现在我们证明，每个 $X \in \Gamma(\pi)$ 都会产生 π_L 的一个截面。注意，下面是对合代数丛的一个态射：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(id, TX\circ\varrho)} & A_\varrho \times_{T\pi} TA \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle p\circ\pi_1} \\ M & \xrightarrow{X} & A \end{array}$$

注意它的类型是正确的，因为 $T.\pi \circ T.X \circ \varrho = \varrho \circ id$。请检查它是一个丛态射：

$$p \circ \pi_1 \circ (id, T.X \circ \varrho) = p \circ T.X \circ \varrho = X \circ p \circ \varrho = X \circ \pi$$

并且它是线性的：

$$(\lambda \circ \pi_0, \ell \circ \pi_1) \circ (id, T.X \circ \varrho) = (\lambda, \ell \circ T.X \circ \varrho)$$
$$= (\lambda, T^2.X \circ \ell \circ \varrho) = (\lambda, T^2.X \circ \lambda) = T(id, TX) \circ \lambda.$$

接着验证它保持锚：

$$\pi_1 \circ (id, TX \circ \varrho) = TX \circ \varrho$$

以及对合：

$$(\pi_0, \pi_1, T^2X \circ T\varrho\pi_1) \circ \sigma = (\sigma, T^2X \circ T\varrho \circ \pi_1\sigma)$$
$$= (\sigma, T^2X \circ cT\varrho \circ \pi_1) = (\sigma(\pi_0, \pi_1), c\pi_3) \circ (id, T^2X \circ T\varrho \circ \pi_1).$$

因此，$(id, TX \circ \varrho\pi_1)$是一个对合代数丛态射，并诱导出一个$T$-笛卡尔 Weil 复形态射。最后，我们验证它是$p_A^L$的一个截面，这显然成立，因为

$$\pi_0 \circ (id, TX \circ \varrho) = id;$$

由此得到所需的双射。 □

回忆一下，给定锚定丛上的一个对合，其截面集合上存在一个括号（参见第 3.4 节中的显式构造）。给定一个 X，$Y \in \Gamma(\pi)$，可按如下方式定义一个括号：

$$\hat{\lambda} \circ [X, Y]_A + _1 (\xi\pi, 0) \circ Y = ((\sigma \circ (id, TY \circ \varrho) \circ X - _2 (id, TX \circ \varrho) \circ Y)).$$

雅可比恒等式的直接证明需要进行详细计算（参见对合代数丛的原始预印本 Burke 和 MacAdam (2019年)），且仍依赖于 Cockett 和 Cruttwell 关于任意带负元的切范畴的结果。根据命题 4.5.2，我们可以直接使用 Cockett 和 Cruttwell 的结果：

推论4.5.3。 设 A 是带负元的切范畴 $\mathbb{C}$ 中的一个完全对合代数胚。在 $\Gamma(\pi)$, $[-,-]$ 上定义了一个由下式诱导的李括号

$$\hat{\lambda} \circ [X, Y]_A + _1 (\xi\pi, 0) \circ Y = ((\sigma \circ (id, TY \circ \varrho) \circ X - _2 (id, TX \circ \varrho) \circ Y)).$$

证明。 该括号由 Rosicky 的泛性质图表诱导，具体如下

$$0 = p \circ ((\sigma \circ (id, TY \circ \varrho) \circ X - (id, TX \circ \varrho) \circ Y)) - 0Y$$
$$= Tp \circ ((\sigma \circ (id, TY \circ \varrho) \circ X - (id, TX \circ \varrho) \circ Y)) - 0Y.$$

我们考察 对 $\mathsf{Inv}^*(A)$ 的李切结构；这恰好是由下式诱导的向量场

$$ev_R([\hat{X}, \hat{Y}]).$$

我们通过使用以下结果完成证明：对于带负元的切范畴中的任意 A，由下式定义的 $\chi(A)$ 上的括号

$$\ell \circ [X, Y] = (c \circ T.X \circ Y - T.Y \circ X) - 0X$$

满足雅可比恒等式。 □

识别对合代数丛的范畴

第 4.4 节在函子 $\mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$ 是对合代数丛时识别它，而本节则识别嵌入某个切范畴 $\mathbb{C}$中的对合代数丛范畴的切范畴 $\mathbb{C}$。我们称这种结构为对合代数丛的抽象范畴 。这一概念涉及一些2-范畴理论，并使用一种修订过的余下降 概念（参见 Bourke (2010)中关于余下降的论述）。

回顾一下，对于任意切范畴 C，对合代数丛范畴都以 C 作为反射子范畴。此外，由于对合代数丛的极限是逐点计算的，该反射函子是左正合的。这个左正合反射正是我们要公理化的主要结构。

定义 4.5.4。 对合代数丛的抽象范畴是一个切范畴$\mathbb{C}$，带有一个左正合的 T-笛卡尔切局部化 $(Z,\ \varrho) : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，其中 L 满足以下余下降条件：

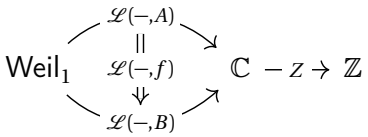
$$\mathsf{TangCat}_{\mathsf{Strict}}(\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathsf{TangCat}_{\mathsf{Lax}}(\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}) \xrightarrow{L_*} \mathsf{TangCat}_{\mathsf{Lax}}(\mathsf{Weil}_1, \mathbb{D})$$

（其中 L_* 表示通过 L 进行后复合）是全忠实的。

例 4.5.5。 任意切范畴$\mathbb{C}$ 中的对合代数丛范畴，利用 $(\mathsf{Inv}(C\ ),\ \mathscr{L}\ )$，都是对合代数丛的抽象范畴。反射函子将一个对合代数丛映射到其底空间；T-笛卡尔自然变换就是锚映射。任何包含$\mathsf{Inv}(\mathbb{C})$ 且将$\mathbb{C}$ 作为全子范畴的切子范畴，都会产生一个对合代数丛的抽象范畴。

命题 4.5.6。 设 $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 是对合代数丛的抽象范畴。则存在一个嵌入 $\mathbb{C} \to \mathsf{Inv}(\mathbb{Z})$。

证明。 证明方法是将 C 中的对象视为严格切函子 $\mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{C}$，并将态射视为切自然变换。



Z的自然部分是 T-笛卡尔的，且函子部分保持极限，因此 $Z.\mathrm{L}\ (-,A) =: Z\,[A]$ 确定了 Z 中的一个对合代数丛，而 f是一个对合代数丛态射。余下降条件保证了该嵌入，因此后复合函子是全忠实的。

□

推论 4.5.7。 对合代数丛的抽象范畴 $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 恰好是一个全子范畴 $\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathsf{Inv}(\mathbb{Z})$。

第5章

无穷小神经及其实现

第 2、3 和 4 章的核心要旨是，切范畴框架使李代数丛能够被视为切函子

$$\mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{SMan}$$

满足某些泛性质条件。本章比前四章更具探索性，所呈现的工作仍在进行中，旨在将李代数丛纳入富函子语义的框架。这种关于代数丛的新视角采用了 Garner 关于切范畴的富化视角（Garner (2018年)）以及 Bourke 和 Garner(2019年）提出的富化理论范式。李函子的函子语义表述将把 Cartan–Lie 定理（李代数范畴是李群范畴的余反射子范畴）推广为函子语义一般理论中的一个命题。

目标是证明，如例3.1.2所述，群胚的无穷小近似可以构造成一个神经，正如 Kan 最初对拓扑空间所作的单纯逼近一样。函子 $K{:}\mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 的神经通过A -预层来逼近C 中的对象和态射，因此它将$\mathbb{C}$ 中的一个对象映射为$\mathscr{A}$-预层

$$N_K : \mathscr{A} \to \mathbb{C}; C \mapsto \mathbb{C}(K-, C).$$

因此将有一个无穷小对象，

$$\partial : \mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$$

其中 $\mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$ 表示范畴 $\mathscr{W}$ 中的群胚（在第 5.1 节中作了形式化定义）。 ∂的神经有一个左伴随，即 李实现，它由左 Kan 延拓给出（正如 Kan 对单纯集合的几何逼近，在 Kan (1958) 中所述）：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Weil}_1^{op} & \xrightarrow{\partial} & \mathsf{Gpd}(\mathscr{W}) \\ {\scriptstyle \mathscr{Y}}\downarrow & \nearrow_{Lan_{\mathscr{Y}}\partial} & \\ [\mathsf{Weil}_1, \mathscr{W}] & & \end{array} \tag{5.1}$$

定理 5.5.13（李实现）。 对合代数丛范畴与$\mathscr{W}$中的群胚之间存在切丛伴随，其中每个函子都保持积和基空间。

$$\mathsf{Gpd}(\mathscr{W}) \underset{\vdash\!\dashv_\partial}{\overset{N_\partial}{\rightleftarrows}} \mathsf{Inv}(\mathscr{W})$$

不过请注意，方程 5.1 中的左 Kan 延拓并不能直接给出定理 5.5.13所需的伴随，因为无法保证神经函子 自然数集$_{\partial}$的值落在代数丛范畴中。为证明这一点，我们必须重新审视第 4.3 节的论述，该节将对合代数丛描述为满足以下条件的函子 $A\colon \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$：每个 $A(V)$ 都是其底层锚定丛的延拓；这自然引出了 Bourke 和 Garner （2019年）中提出的富集理论形式体系。

将代数丛表述为富化理论的模型，需要把微分丛范畴、锚定丛范畴和对合代数丛范畴置于 $\mathscr{W}$ 中，作为小型 $\mathscr{W}$-范畴上的 $\mathscr{W}$-预层范畴的满子范畴。第 5.1 节回顾了 Garner (2018年) 的工作，该工作将切范畴刻画为以 $\mathscr{W} = \mathsf{Mod}(\mathsf{Weil}_1$,集合范畴) （根据观察 集合范畴，这是 4.2.5 的余自由切范畴）。

第 5.2 节运用富化视角重新组织第 2章的内容，因此提升是从 $\mathscr{W}$到 $\mathscr{W}$-幺半群 $D+1$的函子，而微分丛则是由该幺半群的幂等分裂所导出的函子范畴的反射子范畴。类似地，锚定丛范畴是范畴 $[\mathsf{Weil}_1^1, \mathbb{C}]$, 的反射子范畴，其中 Weil_1^1 是 1-截断 Weil 代数的范畴（定义 5.2.8）。

第 5.3 节回顾富集神经逼近的基本思想/。一个特别重要的例子是自反图的线性近似，即例 3.2.7中引入的函子，它是某个函子的神经

$$\partial : (\mathsf{Weil}_1^1)^{op} \to \mathsf{Gph}(\mathscr{W}).$$

第 5.4 节应用了 Bourke 和 Garner(2019年) 引入的富集理论框架，其中局部可呈现 A 的稠密子范畴 $\mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 构成“元数”，而对象双射函子 $\mathscr{A} \to \mathscr{T}$则是理论。模型范畴是以下（富集）范畴的拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathscr{T}} & \longrightarrow & [\mathrm{T},\ \mathrm{V}\ ] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \hookrightarrow & [\mathrm{A}^{op},\ \mathrm{V}\ ] \end{array}$$

第一步是自由完备化截断 Weil 代数的 $\mathscr{W}$-范畴 Weil_1^1 （定义 5.2.8），使其基底锚定丛具有所有延拓；将此 $\mathscr{W}$-范畴记作 $\mathscr{L}$。那么，在每个切范畴 $\mathbb{C}$中，带有选定延拓的锚定丛范畴（定义 4.3.4）$\mathbb{C}$ 完全忠实地嵌入函子范畴：

$$\mathsf{Anc}^{\mathscr{L}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow [\mathscr{L}, \mathbb{C}]$$

（此处，$\mathsf{Anc}^{\mathscr{L}}(\mathrm{C})$ 表示带有选定延拓的锚定丛范畴）。特别地，Weil_1 中的自然数集 N 上的切丛确定了一个对象双射函子

$$\mathscr{L} \to \mathsf{Weil}_1$$

因此，任意切范畴 C 中的对合代数丛范畴是 W-范畴中的拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Inv}^*(\mathbb{C}) & \hookrightarrow & [\mathsf{Weil}_1, \mathbb{C}] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathsf{Anc}^*(\mathbb{C}) & \hookrightarrow & [\mathscr{L}^{op}, \mathbb{C}] \end{array}$$

这意味着，$\mathscr{W}$ 上的对合代数丛范畴相对于 $\mathscr{W}$ 上的锚定丛范畴是单子性的，这里用到了 Bourke 和 Garner (2019年)所给出的单子—理论对应。

最后一节考察 $\mathscr{W}$-群胚范畴。从本质上说，图的线性逼近上的自由群胚现在将给出一个无穷小对象 $\mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$。神经函子$\partial\colon\ \mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$——该 无穷小近似——通过定义 *5.3.5*中神经函子的实现而拥有一个右伴随。这被用于证明最终的定理 5.5.13。

本章中使用的各项范畴论工具本身并非新颖（切范畴的富化视角、富集神经构造、富集理论）。然而，所有关于将富集神经构造和富集理论应用于切范畴的结果，均为作者的原创工作。

5.1 通过富集研究切范畴

本节简要介绍 Garner 对切范畴的富化视角。切范畴的富化方法最早见于 Garner (2018)，其基础是 Leung(2017提出的切范畴范畴论视角。Garner 展示了合成微分几何中的一些主要结果如何作为富化范畴论的组成部分得以呈现；例如，Yoneda 引理蕴含存在一个合成微分几何的良适模型。

Weil 空间范畴是切范畴的富集基底，并且与 Dubuc 的*Weil* 拓扑斯 密切相关；该拓扑斯见于他最初关于合成微分几何模型的研究 Dubuc (1981年); 关于该拓扑斯的深入研究可见 Bertram (2014年)。回顾一下，范畴 Weil_1 是单个对象上的自由切范畴。Weil 空间范畴是关于 Set 的余自由切范畴；根据观察 $\mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{Set}$，它就是保横向极限函子的范畴 4.2.5。我们称之为*Weil* 空间范畴，并记作 W。正如单纯集合$S\colon\ \Delta \to \mathsf{Set}$ 是记录同伦数据的构造，Weil 空间记录的是无穷小 数据。

定义 5.1.1。一个Weil 空间是一个函子$\mathsf{Weil}_1 \to$集合范畴，它保持横截极限（定义 *4.1.5*）：也就是说，⊗极限集合的闭包

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T_{n+m} & \longrightarrow & T_m \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ T_n & \longrightarrow & \mathbb{N} \end{array} \ , \ \begin{array}{ccc} T_2 & -\mu\to & T^2 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{N} & -0\to & T \end{array} \ , \ \begin{array}{ccc} T_n & = & T_n \\ \| & & \| \\ T_n & = & T_n \end{array} \right\}$$

Weil 空间之间的态射是自然变换。将 *Weil* 空间范畴记作 $\mathscr{W}$。

例 5.1.2。

(i) 每个交换幺半群都可以典范地视为一个 *Weil* 空间。注意，对于每个 $V \in \mathsf{Weil}_1$ 和交换幺半群 M，M 上的自由 V-模结构由 $|V|^{\otimes_{\text{交换幺半群范畴}}} M$ 给出（这里 $|V|$ 是 V 的底层交换幺半群）。交换幺半群 $|V|$ 正是自然数集 $^{\dim}\mathsf{V}$，因此

$$|V| \otimes_{\mathsf{CMon}} M \cong \oplus^{\dim V} M.$$

这与具有双积的范畴上的通常切结构一致。

(ii) 根据 *(i)*，任何具体的切范畴 $\mathbb{C}$——也就是说，存在忠实函子 $U\colon\mathbb{C} \to$集合范畴——都将有一个指向 *Weil* 空间（ *Weil*$_1$ 上的余预层）的自然函子。每个对象 A 都有一个底层 *Weil* 空间 $V \mapsto U$ 集合范畴 $(T^V(A))$；并且只要 U 保持连通极限（例如从交换幺半群到集合的遗忘函子），每个底层余预层都是 *Weil* 空间。

(iii) 考虑一个带有无穷小对象的对称幺半范畴。根据命题 *4.2.7*，它是一个保横向余极限的对称幺半函子 $D\colon \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$。那么对于每个对象 X，神经（定义 *5.3.1*）$N_D(X)\colon \mathbb{C}(D -, X)\colon \mathsf{Weil}_1 \to$ 集合范畴是一个 *Weil* 空间。

(iv) 对于切范畴中的任意一对对象 A、B，由于 $\mathbb{C}(A, T^{(-)}B)\colon \mathsf{Weil}_1 \to$ 集合范畴具有连续性，因此它是一个 *Weil* 空间 $\mathbb{C}(B, -)\colon \mathbb{C} \to$ 集合范畴。

与单纯集范畴不同，Weil 空间范畴不是一个拓扑斯。不过，Weil 空间范畴确实继承了 Weil_1 上的余预层拓扑斯的一些良好性质，这是通过应用第5.3节的结果得到的，因为它是局部可表示的。局部可表示范畴的基础知识可见附录6.2。粗略地说，余完备范畴 C 有一个由有限可呈现对象组成的子范畴 $\mathbf{C}_{fp}$；这些对象满足 C，使得

$$\mathbb{C}(C, -)\colon \mathbb{C} \to \mathsf{Set}$$

保滤过余极限（即与集合范畴中的所有有限极限都可交换的余极限图表）。当 C 的每个对象都可由以下余端表示时，C 是局部有限可呈现的

$$C \cong \int^{X \in \mathbb{C}_{fp}} \mathbb{C}(X, C) \cdot X$$

其中 $S \cdot X$ 是（可能为无限的）积 $X \amalg$，其中 $|S|$ 是集合 S 的基数。这意味着 C $=$ 保有限极限 $(\mathbf{C}^{op}{}_{fp}$、集合范畴$)$，其中保有限极限 表示保有限极限函子的范畴。

推论的第三点 5.1.4 如下：$\mathscr{W}$ 作为笛卡尔幺半范畴是局部有限可呈现的，这意味着范畴 $\mathscr{W}fp$ 对积封闭。这意味着 $\mathscr{W}$ 作为 W-范畴是局部可呈现的 （这最终成为一个重要的技术条件，使局部可呈现的 $\mathscr{W}$-范畴具有意义）。每当我们讨论任意的 $\mathscr{V}$-范畴时，我们都假定 $\mathscr{V}$ 作为幺半范畴是局部可呈现的。

命题 5.1.3 (Garner (2018年))。 *Weil* 空间范畴是 [Weil_1，集合范畴] 的笛卡尔幺半反射子范畴。

推论 5.1.4。 *Weil* 空间范畴是

(i) 一个笛卡尔闭范畴；

(ii) 一个可表切范畴，其中无穷小对象由受限 *Yoneda* 嵌入 $\mathscr{Y}\colon \mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathscr{W}$ 给出；

(iii) 作为笛卡尔幺半范畴局部有限可呈现。

W 上的余自由切结构由前复合给出，即：

$$T^U.M.(V) = M.(U \otimes V) = M.T^U.V.$$

这个切结构与由 Yoneda 嵌入诱导的可表切结构一致。证明是 Yoneda 引理的一个应用。注意

$$[D, M](V) \cong [\mathsf{Weil}_1, \mathsf{Set}](D \times \mathscr{Y}(V), M) \cong [\mathsf{Weil}_1, \mathsf{Set}](\mathscr{Y}(WV), M) \cong M(WV)$$

其中 $D \times \mathrm{Y}(V) = \mathrm{Y}(WV)$ 成立，是因为 Weil_1 中的张量积是余笛卡尔的，而反射函子是笛卡尔幺半的。

记号 5.1.5。 切范畴 $\mathscr{W}$ 是一个可表切范畴，其中 $D = \mathscr{Y}W$（定义 1.3.7）。我们将 *Yoneda* 函子 $\mathscr{Y}$: $\mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathscr{W}$ 记作 $D(-)$，这样更接近可表切范畴或合成微分几何中通常使用的记号（单个 D 可以作为 $D(W)$、$D(n)$ 表示 $D(W_n)$ 等的简写）。请注意

$$D(V) = D(\otimes^k W_{n(i)}) = \prod^K D(n_i)$$

以及 $D(\ell) = \otimes, D(c) = (\pi_1, \pi_0), D(+) = \delta$，等等。

现在，我们可以转向切范畴的富化视角。富化范畴论的基础知识可参见附录 6.2，但有一个定义尤其重要，值得在此列出。

定义 5.1.6。 设 $\mathbb{C}$ 是一个以 $\mathscr{V}$ 为基底的 $\mathscr{V}$-范畴，其中 V 是一个闭对称幺半范畴。对于 $J \in \mathscr{V}$，对象 $C \in \mathbb{C}$ 关于 J 的幂 是一个对象 C^J，使得下式构成一个同构：

$$\forall D : \mathscr{V}(J, \mathbb{C}(D, C)) \cong \mathbb{C}(D, C^J)$$

而余幂 定义为

$$\forall D : \mathscr{V}(J, \mathbb{C}(C, D)) \cong \mathbb{C}(J \bullet C, D).$$

设 $\mathscr{J} \hookrightarrow \mathscr{V}$ 是 $\mathscr{V}$ 的一个满幺半子范畴。若存在一组 $\mathscr{J}$-幂的选取 $(-)^J$，使得 $\mathscr{V}$-范畴 $\mathbb{C}$ 具有相干选定的幂，则称其关于 $\mathscr{J}$ 具有相干选定的幂：

$$(C^J)^K = C^{J \otimes K}.$$

同样，相干选定的余幂 是对 $\mathscr{J}$-余幂的一种选取，使得

$$K \bullet (J \bullet C) = (K \otimes J) \bullet C.$$

配备了相干选定的幂与余幂的 $\mathscr{V}$-范畴所构成的子 2-范畴分别为 $\mathscr{V}\mathsf{Cat}^{\mathscr{J}}$ 和 $\mathscr{V}\mathsf{Cat}_{\mathscr{J}}$。

Wood (1978) 证明，关于幺半 $\mathbb{C}$ 的作用范畴所构成的 2-范畴，等价于由 $[\mathbb{C}, \mathsf{Set}]$-富范畴构成的 2-范畴，其中幂由可表函子给出（定义 5.1.6），并使用由 Day 卷积诱导的 $[\mathbb{C}, \mathsf{Set}]$ 上的幺半结构[1]。此外，Garner (2018) 证明，幺半反射子范畴 $\mathscr{V} \to \widehat{\ }_{\mathscr{A}}$ 使 $\mathscr{V}$-范畴所构成的 2-范畴成为 $\mathscr{A}$-范畴的一个反射子 2-范畴；这证明了切范畴等价于一类特定的富化范畴。

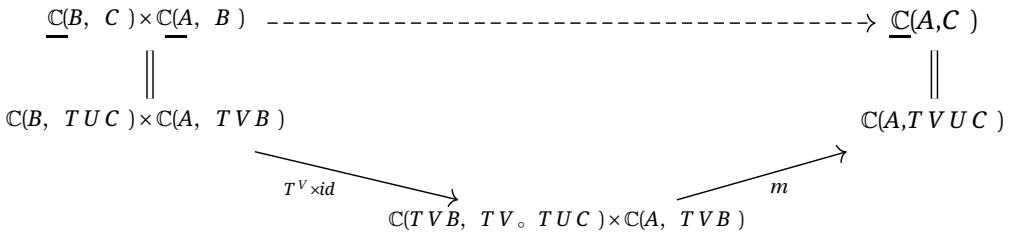
命题 5.1.7 (Garner (2018))。 切范畴恰好是一个具有可表函子所给幂的 $\mathscr{W}$-范畴。

证明。 对于每个 $A, B \in \mathbb{C}_0$，Weil 空间定义为

$$\underline{\mathbb{C}}(A, B) := U \mapsto \mathbb{C}(A, T^U B).$$

[1] 预层 $X, Y : C^{op} \to \mathsf{Set}$ 的 Day 卷积张量积定义为 $X \otimes Y := \mathrm{Lan}_{\otimes}(X \boxtimes Y)$，其中 $(X \times Y)(V) = X(V) \times Y(V)$ (Day（1970）)。

函子 $\mathbb{C}(A,-)$ 是连续的，而 $T^{-}B$ 是一个无穷小线性函子，因此这是一个 Weil 空间。下面的图表给出了复合映射：



注意，这对U和V是自然的。

根据 Yoneda 引理（因为 W 中的内 Hom 是Weil$_1$ 上余预层的内 Hom），

$$\mathbb{C}(A,T^{V}B)=(U\mapsto\mathbb{C}(A,B)(V\otimes U))=[D(V),\mathbb{C}(A,B)]$$

因此，这个范畴具有由可表函子相干选定的幂。 □

现在可以证明，原有的（松、强、严格）切函子概念对应于具有相干选定的幂的 W-范畴之间的 W-函子的幂保持性质：

定理 5.1.8 (Garner(2018年))。 我们有以下 *2*-范畴等价：

(i) 具有相干选定的幂的 $\mathscr{W}$-范畴的 *2*-范畴，以及 $\mathsf{TangCat}_{\mathsf{La}\ \ \ \

(iv) 若一个笛卡尔范畴 $\mathbb{C}$ 具有无穷小对象 D（定义 *1.3.7*），则它具有自然的 $\mathscr{W}$-范畴结构（具有由可表对象给出的协调余幂）

$$\mathbb{C}(A,B) : \mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{Set} := \underline{\mathbb{C}}(A \times D(-), B).$$

利用命题 1.3.8^{op} 中的 C 上的对偶切结构，$\mathbb{C}$ 上的富集恰好就是将$\mathbb{C}$ 视为切范畴 C的对偶 W^{op}-范畴时得到的富集。

最后再补充一　点，Yoneda 引理适用于 W-范畴，因此存在一个嵌入

$$\mathbb{C} \hookrightarrow [\mathbb{C}^{op}, \mathsf{Set}].$$

可表对象的幂和余幂在预层范畴中逐点计算，因此它们继承了相容的选择。由此得到以下结论：

推论 5.1.10 (Garner (2018年))。 每个切范畴都嵌入到一个 $\mathscr{W}$-余完备可表切范畴中。

(事实上，证明 Yoneda 嵌入适用于切范畴，正是Garner (2018年) 的主定理。)

5.2 微分丛与锚定丛作为富集结构

本节将以富化范畴的视角重新诠释第 2 章关于微分丛以及第 3 章和第 4 章关于锚定丛的研究。

微分丛作为富集结构

作为运用切范畴富化视角的首个案例研究，我们来考察微分丛。第 2 章的大部分工作都基于这样一种直觉：微分丛属于某种切范畴代数理论；本节将把这一直觉具体化。回顾一下，提升 (定义2.2.3)是一个映射 $\lambda : E \to TE$。采用富化视角，并将 TE 视为一个幂（回顾定义 5.1.6），便得到如下对应关系：

$$\frac{\lambda : 1 \to \mathbb{C}(E, E^D)}{\hat{\lambda} : D \to \mathbb{C}(E,E)}$$

ˆ 因此， λ 的交换条件可译为如下形式：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\lambda} & TE \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T.\lambda} \\ TE & \xrightarrow[\ell]{} & T^2E \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} D \times D & \xrightarrow{\hat{\lambda}\times\hat{\lambda}} & \mathbb{C}(E,E) \times \mathbb{C}(E,E) \\ \downarrow{\scriptstyle\odot} & & \downarrow{\scriptstyle m_{E,E,E}} \\ D & \xrightarrow[\hat{\lambda}]{} & \mathbb{C}(E,E) \end{array}$$

ˆ也就是说， λ 是一个半群态射 $D \to \mathbb{C}(E,E)$。在任何具有余积的笛卡尔闭范畴中，都可以借助函数式编程中的“异常单子” $(-)+1$ 将半群自由地提升为幺半群（例如参见Seal (2013)）。

定义 5.2.1。将以下幺半群视为单对象$\mathscr{W}$-范畴 Λ：

$$\frac{D \times D + D + D + 1 \xrightarrow{(\iota_L \circ m | \iota_L | \iota_L | \iota_R)} D + 1}{m : (D+1) \times (D+1) \to D + 1}$$

ˆ 因此，提升 λ 恰好是一个函子 $\lambda\colon \Lambda \to \mathbb{C}$。现在验证态射是切向自然变换。注意，半群 D 是交换的，因此 $\Lambda = \Lambda^{op}$；下一条引理中选择使用 Λ^{op}，是为了与第 5.3 节使用的约定保持一致。

引理 5.2.2. 切范畴 $\mathbb{C}$ 中的提升范畴与$\mathscr{W}$-函子和$\mathscr{W}$-自然变换 $\Lambda^{op} \to \mathbb{C}$所构成的范畴同构。

证明. 验证 W-自然变换恰好是提升的态射$f\colon\ \lambda \to \lambda'$。从 W-自然性方块开始：

$$\begin{array}{ccc} D+1 & \xrightarrow{(\lambda, f\circ !)} & \mathbb{C}(A,A)\times\mathbb{C}(A,B) \\ {\scriptstyle (f\circ !, l)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_{AAB}} \\ \mathbb{C}(A,B)\times\mathbb{C}(B,B) & \xrightarrow[m_{ABB}]{} & \mathbb{C}(A,B) \end{array}$$

现在，将$D+1 \to \mathbb{C}(A,B)$改写为半群映射$D \to \mathbb{C}(A,B)$，得到：

$$\frac{\dfrac{D \xrightarrow{(\lambda, f\circ !)} \mathbb{C}(A,A)\times\mathbb{C}(A,B) \xrightarrow{m_{AAB}} \mathbb{C}(A,B)}{1 \xrightarrow{(\lambda', f)} \mathbb{C}(A,TA)\times\mathbb{C}(A,B) \xrightarrow{1\times T} \mathbb{C}(A,TA)\times\mathbb{C}(TA,TB) \xrightarrow{m_{A,TA,TB}} \mathbb{C}(A,TB)}}{1 \xrightarrow{Tf\circ\lambda'} \mathbb{C}(A,TB)}$$

同理，另一条路径恰好是 $\lambda' \circ f$。因此，W-自然变换恰好是提升的态射。

□

合成微分几何中的一个经典结果是，对象D只有一个点。对于 W，这可由 Yoneda 引理推出（将 W 视为一个集合范畴）：

$$\mathscr{W}(1,D) = \mathsf{Weil}_1(\mathbb{N}[x]/x^2, \mathbb{N}) = \{!:\mathbb{N}[x]/x^2 \to \mathbb{N}\}$$

注意，命题 2.2.8 中的自然幂等元 $\mathrm{e}:\mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{id}$ 必定是点 $0:1 \to \mathrm{D}$。注意，这个幂等元是幺半群 $\mathrm{D}+1$ 的吸收元，因此对任意 $\mathrm{f}:\mathrm{X} \to \mathrm{D}+1$，可得 $\mathrm{m}(\mathrm{f}, 0\circ !) = \mathrm{m}(0\circ !, \mathrm{f}) = 0\circ !$。预微分丛恰好是带有自然幂等元 $\mathrm{p} \circ \lambda$ 的一个选定分裂的提升。

¯**引理 5.2.3.** 对于每个提升 $\lambda:\Lambda^{op} \to \mathbb{C}$，自然幂等元 $e = p\circ\lambda$ 恰好是

$$1 \xrightarrow{0} D \xrightarrow{\iota_L} D+1 \to \mathbb{C}(E,E).$$

现在，自然幂等元已被理解为 Λ 中的一个映射，该幂等元分裂后便得到预微分对象的理论。

定义 5.2.4. $\mathscr{W}$-范畴 Λ^+ 由对象集合 {0,1} 以及同态 *Weil* 空间给出。具体来说，

- 同态空间为 $\Lambda^+(1,1) = D+1$，否则为 $\Lambda^+(i,j) = 1$。
- 复合（将来自 Λ 的原始复合记为 m）定义如下

$$m_{111}:(D+1)\times(D+1) \xrightarrow{m} (D+1)$$
$$m_{101}:1\times 1 \xrightarrow{\iota_R} (D+1)$$
$$\textit{otherwise: } m_{ijk} = !$$

幂等元分裂是绝对（余）极限，并且被所有函子保留；由于这是一个极限完备化，我们有如下结论。

引理 5.2.5. 预微分丛范畴恰好是 $\mathscr{W}$-函子 $\Lambda^+ \to \mathbb{C}$ （即以$\mathbb{C}$为值的预层）。

显然，微分丛范畴是 $[\Lambda^+,\mathbf{C}]$ 中预微分丛范畴的一个反射子范畴（只要 $\mathbf{C}$ 有等化子）。

命题 5.2.6. 具有 T-等化子和 T-拉回的切范畴 $\mathbb{C}$ 中的微分丛范畴是 $[\Lambda^+,\mathbb{C}]$ 的一个反射子范畴。

证明。 $\mathbf{C}$ 中的预微分丛范畴 同构于 $[\Lambda^+,\mathbb{C}]$。根据推论 2.4.8，微分丛范畴是 $\mathbb{C}$ 中预微分丛范畴上的一个幂等单子的代数范畴。反射函子将预微分丛映射到以下 T-等化子：

$$A \dashrightarrow TE \underset{T.e}{\overset{e.E}{\rightrightarrows}} TE$$

如果 $\mathbf{C}$ 有等化子，这个等化子总是存在；如果 $\mathbf{C}$ 有拉回，投影的拉回也存在，因此该拉回是一个微分丛。这个反射给出 $[\Lambda^+,\mathbf{C}]$ 上的一个左正合幂等单子，其代数即为微分丛。

□

现在，若 $\mathbf{C}$ 是一个局部可呈现切范畴（例如 $\mathbf{W}$）， $[\Lambda^+,\mathbf{C}]$ 就是局部可呈现的，因此微分丛的反射子范畴也是如此；于是有如下结论。

推论 5.2.7。若$\mathbb{C}$ 是局部可呈现的，则$\mathsf{DBun}(\mathbb{C})$ 是一个局部可呈范畴。

锚定丛

理解锚定丛有两种方式：

(i) 锚定丛是一个带有锚$A \to TM$的微分丛，或者

(ii) 锚定丛是不带对合的对合代数丛。

这两种观点可以统一起来：将A视为加权极限TM的圆柱面，从而锚由唯一映射$A.T.0 \to T.A.0$诱导：

$$\Lambda^+ \underset{TM}{\overset{A}{\Downarrow \varrho}} \mathbb{C}$$

也就是说，锚定丛的句法范畴构造为Weil_1 的一个全 $\mathbf{W}$-范畴，其中不包含映射c。可以通过取Weil_1 的全子范畴得到该范畴，其对象由$W_n, n \in$自然数集构造而成。

定义5.2.8。 若一个 $Weil$ 代数可以写成如下形式，则称其宽度 为 k $\in$自然数集：

$$V = \otimes^{0\le i<k} W_{n(i)},\ n(i) \in \mathbb{N}$$

k-截断 $Weil$ 代数的范畴记为Weil_1^k，它是Weil_1 中宽度不超过 k 的 $Weil$ 代数所构成的全$\mathscr{W}$子范畴。

T其对象为 $\{$自然数集$, W\}$ 将用特殊记号表示为 Weil_1^* .

注意，对于 V属于 Weil_1^k 的每个情形，富集由以下方式给出：

$$\mathsf{Weil}_1^k(U,V) := (X \mapsto \underline{\mathsf{Weil}_1}(U, X \otimes V)).$$

Weil_1^1 中的映射——也就是说，Weil_1 的全子范畴，其对象为

$$\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$$

——具有一个有用的性质：它们可以不借助翻转 c 来表示。这使得 Weil_1^1 成为锚定丛句法范畴的自然候选。

引理 5.2.9。每个态射

$$W_n \to V \in \mathsf{Weil}_1$$

都可以不借助 c 来表示；也就是说，它由映射集合 $\{p,\ +,\ 0,\ \ell\}$ 生成，并且在张量、复合以及由横向极限诱导的映射下封闭。

证明。$W_n \to V$ 中的每个映射，在 Weil_1 中都是有限和

$$v \mapsto \sum_x (A_x v) \bullet x$$

其中 $x \in$ 属于(V)，且 $A_x \in$ 属于 $\mathbf{N}^n$，使得 Anv 为普通点积。每一项都可以不借助 c 来表示，而整个项则通过使用适当的 U 将各分量相加来构造。$+.V$-符号。[2]

□

因此，可以证明，C 中的锚定丛范畴是函子 $\mathsf{Weil}_1^1 \to \mathsf{C}$ 的满子切范畴；注意，W作为 $(-)^D$ 的锥，因此这会诱导出一个映射

$$\varrho : F(W) \to T.F(\mathbb{N}).$$

命题 5.2.10. C 中的每个带锚微分丛都确定一个函子 $\mathsf{Weil}_1^1 \to \mathbb{C}$；锚定丛态射恰好是富化自然变换。

证明。从以下内容开始 一个锚定丛 $(q\colon E \to M, \xi, \lambda, \varrho)$；那么，对于定义域为 $\mathbf{N}$ 的同态对象，

$$\mathsf{Weil}_1^1(\mathbb{N},\mathbb{N}) = 1 \mapsto id_M, \quad \mathsf{Weil}_1^1(\mathbb{N}, T) = 1 \mapsto \xi.$$

对于定义域为T的同态对象，问题稍微复杂一些，因为 $\mathsf{Weil}_1^1(T, \mathbf{N})(TV\ ) = \mathsf{Weil}_1(T, TV\ )$以及 $\mathsf{Weil}_1^1(T,T\ )(T\ ) = \mathsf{Weil}_1(T, T.TV\ )$。证明的这部分旨在构造映射

$$\mathsf{Weil}_1(T, T^V) \to \mathbb{C}(E, T^V.M), \quad \mathsf{Weil}_1(T, T^V.T) \to \mathbb{C}(E, T^V.E)/$$

第一个映射很直接：将 θ 发送到 $\theta.M \circ \varrho$。对于第二个映射，注意以下图表是可交换的：

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{T.\varrho} & T^2M \\ {\scriptstyle\lambda}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\ell} \\ A & \xrightarrow[\varrho]{} & TM \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varrho} & TM \\ {\scriptstyle\xi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 0} \\ M & = & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varrho} & TM \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & = & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{\varrho_2} & T_2M \\ {\scriptstyle +_q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle +.M} \\ A & \xrightarrow[\varrho]{} & TM \end{array}$$

[2]这也可以视为Weil_1 在Leung(2017)第308页表1中映射的图形记号所带来的结果。

其思路是将锚定丛态射f改写为一串不包含c的复合，并将每一处

$$T^V.\theta.M, \theta \in \{p, 0, +, \ell\}$$

并将其替换为 $TV.(\theta\prime)$，其中 $\theta\prime$是 $\{q, \xi, +_q, \lambda\}$ 中对应的映射。这诱导出一个映射

$$\mathsf{Weil}_1^1(W, W) \to \mathbb{C}(E, E) \in \mathscr{W}$$

并且 ϱ 恰好是由泛性质诱导的唯一 $\alpha\colon F.W \to T.F$。

对于态射，包含 $(\Lambda^+)^{op} \to$Weil$_1$ 确保任何切丛自然变换都是底层微分丛上的线性态射，而切丛自然变换的相干性确保切丛自然变换保持锚。反过来，锚定丛态射会保持每个构造出的态射 $E \to TV.E, E \to TV.M$（因为它保持 $\{q, +_q, \xi, \lambda\}$ 中的每一个），从而给出一个切丛自然变换。因此存在一个忠实嵌入 $\mathsf{Anc}(\mathsf{C}) \hookrightarrow [\mathsf{Weil}_1^1, \mathsf{C}]$。

□

逆命题，即　识别出决定锚定丛的那些函子 $\mathsf{Weil}_1^1 \to \mathsf{C}$，是显然的　.

推论 5.2.11. 锚定丛范畴恰由以下对象构成：$\mathscr{W}$-函子和 $\mathscr{W}$-自然变换 $A : \mathsf{Weil}_1^* \to \mathbb{C}$（定义5.2.8）使得前复合 $\Lambda^+ \to \mathsf{Weil}_1^* \to \mathbb{C}$ 确定一个微分丛。也就是说，$\mathbb{C}$ 中的锚定丛范畴是 $\mathscr{W}Cat$ 中以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Anc}(\mathbb{C}) & \hookrightarrow & [\mathsf{Weil}_1^1, \mathbb{C}] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathsf{DBun}(\mathbb{C}) & \hookrightarrow & [\Lambda^+, \mathbb{C}] \end{array}$$

5.3 富化神经构造

神经构造是 Yoneda 函子的强大推广，它将对象 $\mathsf{C} \in \mathsf{C}$ 映射到可表预层 $\mathsf{C}(-, \mathsf{C}) \in [\mathsf{C}^{op}, \mathsf{V}]$（有关神经构造及其实现的一般参考，请参见 Loregian（2021）的第3章）。Yoneda 引理指出，这个函子是一个嵌入（也就是说，它是全忠实的），因此将一个范畴嵌入其预层范畴时不会丢失任何信息。由此，神经构造将这一思路推进一步：用某个子范畴 $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$，或更一般地用某个函子 $\mathsf{K} : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$，来逼近原范畴 C。在第 5.5 节中，将展示如何通过一个 W-函子 $\partial\colon \mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathsf{Gpd}(\mathsf{W})$，将李群胚的“无穷小”逼近呈现为李代数丛。

我们考虑一个作为幺半范畴局部可呈现的 V，例如 W、集合范畴，或交换幺半群范畴。

定义 5.3.1。 V-函子 $K : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 的神经是函子

$$N_K : \mathbb{C} \to [\mathscr{A}^{op}, \mathscr{V}]; \quad C \mapsto \mathbb{C}(K-, C)$$

任何处于 N_K像中的预层 $A : \mathscr{A} \to \mathscr{V}$都是一个 K-神经。

注 5.3.2。 *"K-神经"*这一术语似乎源于 *Grothendieck*/对范畴神经构造的最初直觉[3] *(Segal (1974年))*，例如在 *Berger* 等人 *(2012)* 和 *Bourke* 和 *Garner (2019年)*的著作中也出现过。不过，最初用于拓扑学的、通过函子 K 对范畴进行"逼近"的说法： $\mathscr{A} \to \mathbb{C}$似乎更直观地描述了函子 N_K。

例 5.3.3。

(i) 恒等函子$\mathbb{C} = \mathbb{C}$ 的神经就是通常的 *Yoneda* 嵌入$\mathbb{C} \to [\mathbb{C}^{op}, \mathscr{W}]$。

(ii) 数学文献中最早的神经构造实例，是 *Kan*（*1958*）对拓扑空间所作的单纯逼近。回顾拓扑空间 X 的单纯神经的原始构造，其中 $X_n = \mathsf{Top}(\Delta_n, X)$。这恰好是如下函子的神经：该函子将 n 映到 n-单纯形 $\Delta \to \mathsf{Top}$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum x_i = 1\right\}.$$

(iii) 下例是 *Segal* 最初为范畴构造神经时所用的例子，并将在第5.4节再次讨论。将自反图定义为Cat的全子范畴上的一个预层，该全子范畴的对象是这两个预序

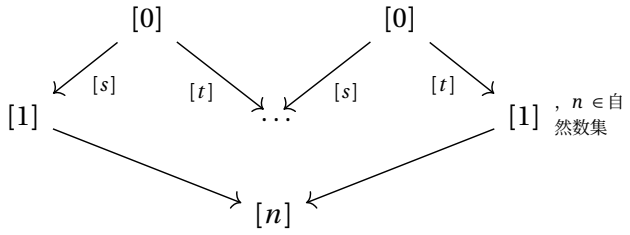
$$[0] = 0, \quad [1] = 0 < 1.$$

这等价于具有两个平行箭头和一个公共缩回的自由范畴，

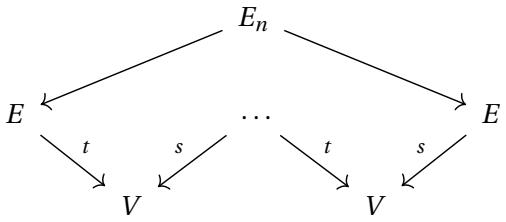
$$[1] \underset{s}{\overset{t}{\underset{e}{\rightleftarrows}}} [0]$$

因此，范畴中的图具有一个顶点对象 V 和一个边对象 E，以及源映射和靶映射 $s, t\colon E \to V$；图态射是满足与源映射和靶映射相交换的映射 (f_E, f_V)。

根据推论 5.4.3，任何包含可表对象的全子范畴都是稠密的。定义由以下对象生成的图的全子范畴——路径范畴 paths Pth：



这样，$\mathsf{Gph}([n], G)$ 便选出了图 G 中长度为 n 的路径集合。我们将这个子范畴称为 $P : \mathsf{Pth} \to \mathsf{Gph}$，并看到 N_P将一个图映射为其由可复合路径构成的 Pth-预层：



[3]Segal 发表了这一结果，但似乎将该定理归功于 Grothendieck。

推出 $[n]$ 恰好是这个图

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow (n-1) \longrightarrow n$$

其中，每个顶点处的自反映射 e 都被省略了。

回顾一下，将自反图映射到锚定丛的函子，见例3.2.7(iv)。这可以重新表述为一种神经构造。

命题 5.3.4。存在一个函子

$$\partial : \mathsf{Weil}_1^* \to \mathsf{Gph}(\mathscr{W})$$

使得 $N_\partial \colon \mathsf{Gpd}(\mathscr{W}) \to [\mathsf{Weil}_1^*, \mathscr{W}]$ 是如例 *3.2.7(iv)* 所述的自反图的线性近似。

证明。令 s、$t \colon C \to M$、$e \colon M \to C$为一个自反图，并回顾一下，锚定丛 $C^\partial \to C$由以下等化子诱导：

$$C^\partial \longrightarrow T.C \underset{T.e^s}{\overset{e.T_1}{\rightrightarrows}} T.C$$

范畴 Gph 是一个可表切范畴，其中 D 是离散图 $D = D$。根据 Yoneda 引理，我们有

$$[\mathsf{Gph}, \mathscr{W}](\mathscr{Y}1, G) = G_1, [\mathsf{Gph}, \mathscr{W}](\mathscr{Y}0, G) = G_0, [\mathsf{Gph}, \mathscr{W}](D \times \mathscr{Y}(i), G) = T.G_i,$$

因此，定义图的无穷小近似的极限图表变为

$$C^\partial \longrightarrow \mathsf{Gph}(D \times I, C) \underset{(D \times e^-)^*}{\overset{(e \times I)^*}{\rightrightarrows}} \mathsf{Gph}(D \times I, C).$$

现在注意到$\mathsf{Gph}(\mathscr{W})^{op}$由命题 1.3.8 所赋予的对偶切结构具有一个自反图对象

$$s, t : 1 \to I, ! : I \to 1.$$

按照例 3.2.7(iv) 构造其线性近似（例如，取 $\mathscr{W}$-图的余等化子）：

$$D \times I \underset{D \times e^s}{\overset{e \times I}{\rightrightarrows}} D \times I \longrightarrow \partial.$$

根据命题 5.2.10，这确定了一个函子

$$\partial : \mathsf{Weil}_1^1 \to \mathsf{Gph}(\mathscr{W})^{op}.$$

由同态函子的连续性，神经 $N_\partial \colon \mathsf{Gph}(\mathscr{W}) \to [\mathsf{Weil}_1^*, \mathscr{W}]$ 落在锚定丛范畴中。同态函子的连续性确保这确实是例 3.2.7 (iv) 中的线性近似。

□

Kan 单纯局部化 (1958) 有一个左伴随，即几何实现，它利用单纯集合的数据构造拓扑空间。此实现可以通过左 Kan 延拓构造。

定义 5.3.5。 设 $K:\mathscr{A}\to\mathbb{C}$ 是一个取值于余完备$\mathscr{V}$-范畴$\mathbb{C}$的函子。K 的实现 是左 *Kan* 延拓

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathscr{Y}} & \widehat{A} \\ {\scriptstyle K}\downarrow & \nearrow_{|-|:=Lan_K\mathscr{Y}} & \\ \mathbb{C} & & \end{array} \qquad |C|_K := \int^A \mathbb{C}(KA, C)\bullet KA$$

一个神经/实现背景是从小型 A 到余完备$\mathbb{C}$的一个$\mathscr{V}$-函子 $K\colon\ \mathscr{A}\to\mathbb{C}$。

单纯集与拓扑空间之间的伴随关系源于一般的范畴论工具，即神经/实现背景：

引理 5.3.6。 对于每个神经/实现背景 $K\colon\ \mathscr{A}\to\mathbb{C}$，$K$ 的实现是 K 的神经的左伴随。

5.4 神经单子与代数丛

将定理 4.3.9 中对代数丛的刻画转置到富化视角，引出了寻找适当框架以将代数丛描述为富集结构的挑战。Kelly 关于富化图式的理论（见 Kelly (2005) 的第 6 章），即配备了一类选定极限锥的小型 $\mathscr{V}$-范畴，似乎是一个自然的候选。然而，当将切函子视为一个 $\mathscr{W}$-函子时，自然部分

$$\alpha : F.T \Rightarrow T.F$$

是由 T 作为加权极限的泛性质所诱导的唯一态射，因此如何转换 α 是笛卡尔自然变换这一条件（定义 4.4.1）便变得不清楚。

关于如何继续的线索，或许可以在 Kapranov (2007) 中找到。该文证明了李代数丛在锚定丛之上是单子性的（允许无限维向量丛时）。Bourke 和 Garner (2019) 以及 Berger 等人 (2012) 的近期研究发展了相应的（富集）理论概念，这些理论对应于一般局部可呈现范畴上的单子。一个关键见解是，对于集合范畴 Set 上的保滤余极限单子 T，其 Lawvere 理论的对偶范畴恰好是 Kleisli 范畴中对象为 $[n]=\coprod_n 1$ 的全子范畴，而该包含的神经

$$\mathscr{T}^{op} \hookrightarrow \mathsf{Set}^{\mathbb{T}}$$

是全忠实的；也就是说，函子 K 是稠密的。形式上，当一个函子的神经表现得如同 Yoneda 嵌入时，该函子就是稠密的。关于稠密函子的理论见 Kelly(2005) 的第5章。我们继续假设，任意富集基底 $\mathscr{V}$ 作为一个 $\mathscr{V}$-范畴是局部可呈现的。

定义 5.4.1. 函子 $K\colon\ \mathscr{A}\to\mathbb{C}$ 当且仅当 K 的神经是全忠实的时，称为稠密；稠密的子范畴包含称为稠密子范畴。

稠密函子在复合下的性质不佳，但第 5.2 节中有一个有用的消去性结果，见 Kelly (2005)。

命题 5.4.2. 考虑一个$\mathscr{V}$-范畴图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{K} & Z \\ {\scriptstyle F}\downarrow & \overset{\alpha}{\searrow} & \nearrow_{J} \\ Y & & \end{array}$$

其中 α 是自然同构，且 K 是稠密的。如果该图表表明 (α, J) 是 K 沿 F 的左 Kan 延拓，那么 J 也是稠密的。

推论 5.4.3。 若 K 稠密，F 全忠实，且 J。$F = K$，则 F 是稠密子范畴。

一般来说，我们通常会提及稠密子范畴，而不是稠密函子。这可以通过将稠密函子分解为

$$K = \mathscr{A} \xrightarrow{K'} \mathrm{im}(K) \hookrightarrow \mathbb{C}$$

其中 $\mathrm{im}(K)$ 是一个 $\mathcal{V}$-范畴，其对象与 $\mathscr{A}$ 的对象相同，同态对象定义如下：$\mathrm{im}(K)(A, B) = \mathbb{C}(KA, KB)$，因此 $\mathrm{im}(K)$ 到 $\mathbb{C}$ 的包含是全忠实的，因此根据推论 5.4.3，它是稠密的。

例 5.4.4。

(i) 有限基数的范畴 Σ 是 集合范畴 的全子范畴，其对象是由终对象的有限余积给出的，$[n] = \coprod_n 1$。这是有限集范畴的一个骨架，也是 集合范畴 的稠密子范畴（例如参见 *Bourke 和 Garner (2019年)*）。

(ii) 回顾一下，A 上的 V-预层范畴 $[A^{op}, V]$ 是 A 的自由余极限完备化（例如参见 *Kelly (2005)*）。如果 C 是余完备的，且 $K : A \to C$ 是稠密的，那么实现 $|-|_K$ 将 C 表示为 $[A^{op}, V]$，的一个反射子范畴，因此它是一个局部可呈范畴[4]。反过来，如果 C 是 $[A^{op}, V]$ 的一个包含可表函子的反射子范畴，那么 A 是 C 的稠密子范畴。

(iii) 根据推论 *5.2.7*，$\mathscr{W}$ 中的微分丛范畴是 $[\Lambda^{+op}, \mathcal{V}]$，的一个反射子范畴，因此 $\mathscr{Y} : \Lambda^+ \hookrightarrow [\Lambda^{+op}, \mathcal{V}]$ 按照上例中的论证，是 $\mathscr{W}$ 中微分丛的一个稠密子范畴。

神经理论（Bourke 和 Garner (2019年)是 Lawvere 理论的推广，可扩展到任意局部有限可呈的 $\mathcal{V}$-范畴。回顾一下，经典 Lawvere 理论是一个对象上双射且保积的函子

$$t : \Sigma \to \mathscr{T}$$

其中 T 是一个笛卡尔范畴。神经理论将 Σ 替换为某个局部可呈现 V-范畴的稠密子范畴，并将积保持条件替换为关于理论映射之神经的条件。

定义 5.4.5. 设 $K : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 是局部有限可呈现$\mathbb{C}$的一个稠密$\mathcal{V}$-子范畴。我们称 N_K在 $[\mathscr{A}^{op}, \mathcal{V}]$ 中的充满像为 K-神经范畴。一个$\mathscr{A}$-理论 是一个对象上双射的$\mathcal{V}$-函子 $J : \mathscr{A} \to \mathscr{T}$，其中每个

$$\mathscr{T}(J-, a) : \mathscr{A} \to \mathcal{V}$$

都是一个 K-神经。一个$\mathscr{A}$-理论的模型范畴是$\mathcal{V}$CAT中的拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathscr{T}} & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{T}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle J^*} \\ \mathbb{C} & \xhookrightarrow{N_K} & \widehat{\mathscr{A}} \end{array}$$

(这些称为 具体 模型，见 Bourke 和 Garner (2019年)。)

[4]事实上，一个等价 局部可呈范畴的定义是：一个具有稠密子范畴的余完备范畴 .

注 5.4.6. 理论的模型范畴是单子性的。论证的核心源于 *Weber* 的神经定理，见 *Weber (2007)* ，但对该结果的阐述超出了本文的范围。

例 5.4.7。

(i) 函子 $t:\ \Sigma,\to\mathscr{T}$是一个 Σ-理论，当且仅当 $\mathscr{T}$是一个 *Lawvere* 理论；这里我们使用以下事实：Σ（例 5.4.4），有限集的一个骨架子范畴。在此情形下，神经条件刻画了 *Lawvere* 理论的模型，因为 Σ、$\to$集合范畴 s 将一个集合映射为严格积保持函子 $[n]\mapsto A^n$。

(ii) 如 *Berger* 等人 （*2012*年）和 *Bourke* 和 *Garner* （*2019*年）所示，*Segal* （*1974*年）最初的神经构造可以重新表述为：小范畴是某个 Pth-理论的模型（例 5.3.3）。集合 $\mathsf{Gph}([n],G)$ 是图 G 中具有 n 个非单位元的路径所成的集合，如

$$G_t\times_s G\cong G_t\times_{id}M_{id}\times_s G\cong G_t\times_{s\circ e\circ s}G_{t\circ e\circ t}\times_s G.$$

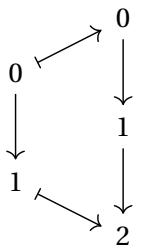
接下来，回顾一下，范畴 Δ 可以如下看待：

- 对象：严格序 $[n]=0<1<\cdots<n$，其中 $n\ \geq 0$，视为一个范畴。
- 映射：函子。

存在一个对象上双射的函子，从 $\mathsf{Pth}\to\Delta$ 出发，将图 $[n]$ 映到预序 $[n]$,，因为路径之间的每个图同态都保持序。现在注意到，一个模型恰好是一个单纯集合，其中

$$X([0])=M,X([1])=C,X([2])=C_t\times_s C,X([3])=C_t\times_s C_t\times_s C.$$

此外，映射



在 Δ 中变成一个复合映射：

$$\frac{X([2])\to X([1])}{C_t\times_s C\to C}$$

结合律和幺元性（对于截面 $e:M\ \to C$）由函子性得到。因此，$\mathsf{Pth}\to\Delta$ 的一个模型是一个小范畴，而一个态射恰好是一个函子。

推论 5.2.11因此给出了关于 $\mathscr{W}$-锚定丛在 $\mathscr{W}$-微分丛的单子性结果。

命题 5.4。 **8.** $\mathscr{W}$-锚定丛是理论 $(\Lambda^+)^{op}\to(\mathsf{Weil}_1^*)^{op}$（参见第 5.2).

证明。 注意到包含 $\Lambda^+ \to \mathrm{Weil}_1^!$ 是一个微分丛，因此它是一个神经。接下来的图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Anc}(\mathscr{W}) & \longrightarrow & [\mathrm{Weil}_1^*, \mathscr{W}] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathrm{DBun}(\mathscr{W}) & \hookrightarrow & [\Lambda^+, \mathscr{W}] \end{array}$$

将 W-锚定丛表述为某个 $(\Lambda)^{op}$-理论的模型。 □

作为推论，我们看到锚定丛范畴是局部可呈现的 .

推论 5.4.9. 锚定丛范畴是局部可呈现的，并且 $(\mathrm{Weil}_1^*)^{op}, \to \mathrm{Anc}(\mathscr{W})$ 是稠密的。

在 Bourke 和 Garner (2019年) 中，作者准确地刻画了局部可呈现的$\mathscr{V}$-范畴上与某个理论的模型相对应的那些单子。回顾一下记号：单子代数范畴记作 $\mathbb{C}^T$，自由余代数范畴记作 $\mathbb{C}_T$。对于稠密子范畴 $\mathscr{A} \to \mathbb{C}$，用 $\mathscr{A}_T$表示以 $\mathscr{A}$ 中对象为基础的自由代数范畴。回顾一下 Lawvere 理论

$$K : \mathrm{FinSet} \to \mathscr{T}$$

对于 Set 上保滤余极限的单子 T，可将其重新推导为有限集上的自由代数构成的全子范畴，K_T:$\mathrm{FinSet}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{Set}_{\mathbb{T}} \hookrightarrow \mathrm{Set}^{\mathbb{T}}$。神经单子将这一性质抽象化。

定义 5.4.10。 设 $\mathbb{C}$ 是一个局部可呈现的 $\mathscr{V}$-范畴，且 $K : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 是一个稠密子$\mathscr{V}$-范畴。若一个关于$\mathbb{C}$ 的 $\mathscr{V}$-单子 $\mathbb{T}$ 满足以下条件，则称其为 K-神经的：

1. 包含 K_T:$\mathscr{A}_T, \to \mathbb{C}^T$是稠密的；

2. 下图在 $\mathscr{V}CAT$ 中是一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^T & \longrightarrow & [\mathscr{A}_T^{op}, \mathscr{V}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \hookrightarrow & [\mathscr{A}^{op}, \mathscr{V}] \end{array}$$

定理 5.4.11 (Bourke 和 Garner (2019年))。 设 $K : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 是一个余完备$\mathscr{V}$-范畴中的稠密子$\mathscr{V}$-范畴 $\mathbb{C}$。存在一个范畴等价，将 $\mathscr{A}$-理论与 $\mathscr{A}$-神经单子对应起来，其中这些单子定义在 $\mathbb{C}$ 上。

证明代数丛在锚定丛之上是单子性的，第一步是构造一个稠密子范畴 $\mathrm{Anc}(\mathscr{W})$，它扮演定义 4.3.4 中的 V-延拓的角色。富化框架使这一过程变得简单：延拓是加权极限，借此我们可以自由地完备化 Weil_1^*。

定义 5.4.12. 将范畴 $\mathrm{Anc}(\mathscr{W})$ 视为可表切范畴，并在 $\mathrm{Anc}(\mathscr{W})^{op}$上取对偶切结构。范畴 $\mathscr{L}$定义为 $\mathrm{Anc}(\mathscr{W})^{op}$ 的全子范畴，其对象由 *Yoneda* 嵌入 $\mathscr{Y}$: $\mathrm{Weil}_1^* \to \mathrm{Anc}(\mathscr{W})$的延拓生成。

对于任意小的 W-范畴 C，C 的自由完备化是 C 上余预层范畴的对偶 W-范畴。[5] 因此，L 是带有延拓的$\mathrm{Weil}_1^!$ 的自由完备化。由此，一种选择

[5]这是经典定理的对偶表述：预层范畴是小范畴 C 的自由余完备化。

锚定丛上的延拓A 确定了一个唯一的函子 $\mathscr{L} \to \mathbb{C}$，该函子由右 Kan 延拓给出（例如参见 Kelly (1982)）。连续性

$$\mathsf{Anc}(\mathscr{W})(-,A):\mathsf{Anc}(\mathscr{W})^{op}\to\mathscr{W}$$

确保锚(W)(L_V, A)是A_V。

根据定理4.3.9，C 中的对合代数丛范畴是 $[\mathsf{Weil}_1,\mathbb{C}]$ 的一个全子 W-范畴，并且存在一个遗忘函子将其映至锚定丛范畴。定理4.4.8 的一个推论是，函子$\mathsf{Weil}_1 \to$C 是对合代数丛，当且仅当前复合

$$\mathsf{Weil}_1^* \hookrightarrow \mathsf{Weil}_1 \to \mathbb{C}$$

限制为一个锚定丛，其中每个 V都映至V-该锚定丛的延拓。换句话说，代数丛是以下富化定理的模型（如定义 5.4.5中所述）。

定义 5.4.13。将代数丛的$\mathscr{L}op$-理论定义为函子

$$a:\mathscr{L}\to\mathsf{Weil}_1.$$

根据定义，此函子在对象上是双射，并且满足神经条件，因为切丛的 V-延拓是 T^V，因此每个预层

$$\mathsf{Weil}_1(a-,V):\mathscr{L}\to\mathscr{W}$$

是一个$\mathscr{L}$-神经。

因此，Weil 神经将对合代数丛在切范畴 C 中的范畴刻画如下。

定理 5.4.14. 切范畴$\mathbb{C}$ 中带有选定延拓的对合代数丛范畴，恰好是$\mathscr{W}$CAT中的拉回：

$$\begin{array}{ccc} Inv^*(\mathbb{C}) & \hookrightarrow & [\mathsf{Weil}_1,\mathbb{C}] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Anc^*(\mathbb{C}) & \hookrightarrow & [\mathscr{L},\mathbb{C}] \end{array} \tag{5.2}$$

因此，在$\mathscr{W}$ 中，对合代数丛在锚定丛之上是单子性的。

证明。 回顾对应关系

$$\frac{\bar{A}:\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C}\in\mathscr{W}\mathsf{Cat}}{(\hat{A},\alpha):\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C}\in\mathsf{TangCat}_{lax}}$$

If

$$\mathsf{Weil}_1^*\to\mathscr{L}\to\mathsf{Weil}_1\to\mathbb{C}$$

确定了一个锚定丛 $(\pi:A\to M,\xi,\lambda,\varrho)$其 V-余延拓为 $\hat{}A$。V，因此 $\hat{}A$是推论 4.4.9所述对合代数丛的神经。 □

因此，我们可以将 W-对合代数丛刻画为 W-锚定丛范畴上一个 L-神经单子所对应的代数。

推论 5.4.15。 W 中的对合代数丛范畴等价于由该理论生成的 $\mathscr{L}$-神经单子在 $\mathsf{Anc}(\mathscr{W})$ 上的代数范畴

$$a : \mathscr{L} \to \mathsf{Weil}_1$$

根据定义 *5.4.13*，利用 *Bourke 和 Garner （1974年）*。

注 5.4.16。 将对合代数丛构造为 $\mathscr{L}$-理论的模型范畴，这与 *Segal （1974年*中最初用于范畴的神经构造极为相似，只不过用群胚的对称神经构造取代了 Δ 有限集范畴 Σ （参见 *Bourke 和 Garner （2019年*）中的例 *44*（*iv*））。每种构造都会将原范畴截断为仅含两个对象，并通过向这个二对象截断自由添加极限，构造出一个对象集为双射集的新范畴。

5.5 群胚的无穷小逼近

本节　　包含本章的主定理，即存在一个伴随

$$\mathsf{Gpd}(\mathscr{W}) \rightleftarrows \mathsf{Inv}(\mathscr{W})$$

这个伴随可通过在 W 中的群胚范畴上诱导一个神经/实现语境得到：

$$\partial : \mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W}).$$

这个函子的一个简化版本出现在命题 5.3.4中，即自反图的线性近似。事实上， ∂恰好是命题 ∂5.3.4中的图上的自由群胚（如果我们是在配备对合的自反图范畴中进行研究的话）。回想一下，群胚和 Weil 空间都是某个图式的模型（回顾第 5.1 节）。这些理论的对称性给出了 $\mathscr{W}$ 中群胚的两种等价表述：

定义 5.5.1。$\mathscr{W}$-群胚的切范畴等价于

(i) $\mathscr{W}$ 中内部群胚的切范畴，其中切结构是逐点计算的；

(ii) 保横向极限函子 $\mathsf{Weil}_1 \to$Gpd(集合范畴)，配备观察 *4.2.5* 中的余自由切结构。

需要注意的是，$\mathscr{W}$-群胚上的切结构是可表示的，因为它是一个笛卡尔闭范畴，其无穷小对象为 Weil_1，$\to \mathscr{W} \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$（关于在具有足够极限的笛卡尔闭范畴 $\mathsf{Gpd}(\mathbb{C})$ 上 $\mathbb{C}$ 为笛卡尔闭范畴的证明，可见 Johnstone (2002) 的第 B2.3 节）。

有两类“平凡”的 W-群胚将会很有用。

例 5.5.2。

(i) 每个小群胚 G 都可以视为 $\mathscr{W}$ 中的一个群胚，因为常值函子 $\mathsf{Weil}_1 \to$Gpd(Set) 将 V 映射到群胚 G，并保留横截极限，因此我们可以应用理论的对称性，得到 *Weil* 空间范畴中的一个群胚。

(ii) 范畴中的每个对象 M 都有一个余自由群胚，其定义为 $s,\ t:\ M\ =M$；这是一个离散群胚，其唯一的态射是恒等映射。因此，每个 *Weil* 空间 $M\ \in\mathscr{W}$ 都有一个对应的离散群胚（通常记作 $M\ =M$，表示 M 上的离散群胚）。

利用 W 的笛卡尔闭性以及平凡群胚和离散群胚的全子范畴，我们得到如下结论：

观察 5.5.3。 $\mathscr{W}$-群胚的范畴同时是

(i) 一个具有 $\mathscr{W}$ 上的幂的 $\mathscr{W}$-范畴。一个 $\mathscr{W}$-群胚 $\mathscr{G}=s,\ t:\ G\ \to M$ 关于 *Weil* 空间 E 的幂由以下 $\mathscr{W}$-群胚给出

$$[E,\mathscr{G}]=\{[E,s],[E,t]:[E,G]\to[E,M],\ [E,e]:[E,M]\to[E,G]\};$$

(ii) 一个具有小群胚上的幂的 Gpd-富化范畴。一个 $\mathscr{W}$-群胚 $\mathscr{G}:\ \mathsf{Gpd}\to\mathscr{W}$ 关于群胚 $\mathscr{H}$ 的幂是以下 $\mathscr{W}$-群胚

$$[\mathscr{H},\mathscr{G}](V)=[\mathscr{H},\mathscr{G}(V)]_{\mathsf{Gpd}}.$$

以下两个 W -群胚构成主要结果的基本构件。

例 5.5.4。

(i) 在 $\mathscr{W}$ 中定义 $D:=\mathscr{Y}W$。离散群胚 $D\ =D$ 在内部表示切函子，而余预层 $\mathsf{Gpd}(D,-):\mathsf{Gpd}(\mathscr{W})\to\mathscr{W}$ 将群胚 $s,t:G\ \to M$ 映射为 TM。

(ii) 箭头群胚是由以下图生成的自由群胚：

$$\bullet\to\bullet$$

将此群胚上的平凡 $\mathscr{W}$-群胚记为 I。注意，按 I 取幂会将群胚映射为它的“箭头群胚”$\mathscr{G}^{\to}$，其对象是 $\mathscr{G}$ 中的箭头，而映射 $u\ \to v$ 是一个交换方块。由此可得，$\mathsf{Gpd}(I,\mathscr{G})$ 是该群胚的箭头空间，$\mathsf{Gpd}(I\ \times I,\mathscr{G})$ 是交换方块的空间，依此类推。

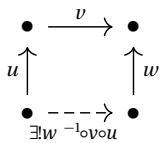
下一个命题给出了构造李导数所需的 I 的性质。

引理 5.5.5.

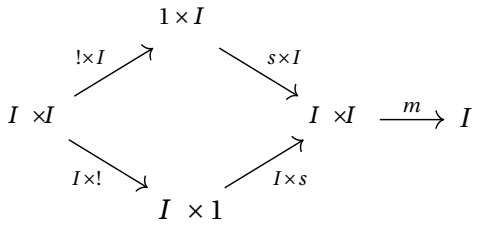
(i) 对每个群胚 $\mathscr{G}=s,t:G\ \to M$，都存在一个同构

$$G_t\times_t G_s\times_t G\cong\mathsf{Gpd}(\mathscr{W})(I\times I,\mathscr{G});$$

这对应于该图表的唯一填充者



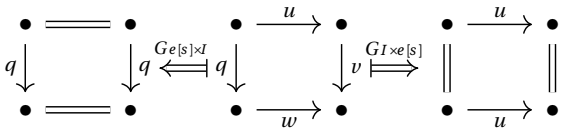
（ii）箭头群胚具有一个带零结构的半群（类似无穷小对象 D），且乘法是余等化子



第（部分ii）的对偶结果比较容易看出，因为对于群胚 G，下面的叉总是 W 中的等化子：

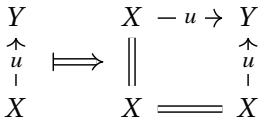
$$G \xrightarrow{G^m} G^{\square} \underset{G^{I\times e[s]}}{\overset{G^{e[s]\times I}}{\rightrightarrows}} G^{\square}$$

（这里我们将 G写作箭头对象，将 Gpd(W)($I \times I$,G)写作 $G\square$）。注意，$G_{e[s]\times I}$和 $G_{I\times e[s]}$对应于$G^{\square}$上的幂等元：



还要注意，当且仅当 $u = q = id$ 时，这两个映射使交换方块成为等化子；这迫使 $w = v$。这些交换方块恰好是 Gm 的像。

I上的半群结构表示将.....映射到.....的映射



现在来看 ∂在命题 5.3.4 中定义的对象，并在 Gpd(W) 中取相同的余极限。群胚在带有对合的自反图上是单子性的，因此这本质上就是该图上的自由群胚（因为自由函子是左伴随，所以保持余极限）。

定义 5.5.6。 定义一个 $\mathscr{W}$-群胚 ∂，使其成为 $\mathscr{W}$-余等化子

$$D \times I \underset{D\times e[s]}{\overset{e\times I}{\rightrightarrows}} D \times I \longrightarrow \partial$$

其中 $e = 0\circ !$，$e[s] = i\circ s$。注意，正如命题 5.3.4，∂是一个锚定丛。

箭头群胚的性质使得证明以下定理成为可能。

定理 5.5.7。 对象 ∂确定了一个笛卡尔 $\mathscr{W}$-函子

$$\partial(-) : \mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$$

它既是$\mathscr{W}$群胚中的无穷小对象，也是Gpd($\mathscr{W}$)^{op}中的对合代数丛。

证明。 将 ξ的推出幂 $1 \to \partial$记作 $\partial(n)$；对于任意Weil代数$V = W_{n(1)} \otimes \ldots\ldots \otimes W^{n(k)}$，将 $\partial(V) = \partial(n_1) \times \ldots \ldots \times \partial(n_k)$记作。内范畴的复合将按图表顺序书写，用中缀分号“;”表示复合，以便与W中态射的复合区分。

证明分为两个主要步骤:

1. 对每个Weil代数 V，都存在一个同构

$$\partial_V \cong \partial(V)$$

其中 ∂_V是锚定丛在Gpd(W)^{op}中的V-延拓。

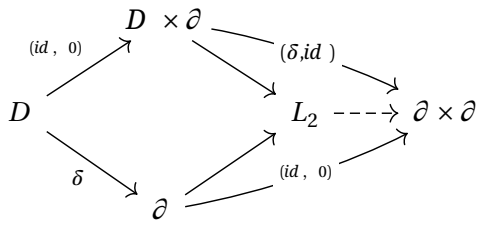
2. 锚定丛的泛提升可表示为一个余等化子

$$\partial \times \partial \underset{e^{\partial} \times \partial}{\overset{e^{\partial} \times \partial}{\rightrightarrows}} \partial \times \partial \xrightarrow{\boxdot} \partial$$

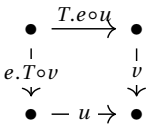
它是一个半群。

由 (1) 和 (2) 可推知，对象 ∂是一个无穷小对象。根据 (2)，半群映射 $\boxdot$ 是交换的且有一个零元；根据 (1)，它满足所有余泛性质公理。

1. 此步骤的证明通过对 Weil代数 5.2.8V 的宽度（定义）进行归纳得出，其中情形 0、1 均由定义成立。在情形 $n = 2$ 下，我们只需验证对于$\partial \times \partial \cong \partial_{W\,W}$:



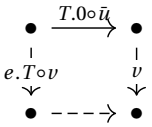
对于一个 ny G，一个映射 X: $\partial \times \partial \to G$对应于 T^2G中的一个交换方块，其形式为



从而 T .e ◦ v = i d 且 e .T ◦ u = i d 。由此可知，u = (e .T ◦ v)$^{-1}$; (T.e ◦ u); v（引理 5.5.5 (i)），并且与唯一诱导映射进行前复合确定了 (¯u , v): X → G L$^{(2)}$，其中

$$T.0 \circ \bar{u} = u.$$

注意，任意一对 (¯u、 v): $X \to GL^{(2)}$都确定一个正方形



其中 $T.e \circ v = id$ 且 $T.e \circ \bar{} u = id$。注意，$T.0 \circ T.p \circ T.0 \circ \bar{} u = T.0 \circ \bar{} u$，并且底角是 $u = (e.T \circ v)^{-1}; (T.0 \circ \bar{} u); v$；现在验证

$$\begin{aligned} T.e \circ u &= (T.e \circ e.T \circ v)^{-1}; (T.e \circ T.0 \circ \bar{u}); (T.e \circ v) \\ &= id; T.0 \circ \bar{u}; T.e \circ v = T.0 \circ \bar{u} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} e.T \circ u &= e.T \circ (e.T \circ v)^{-1}; (T.0 \circ \bar{u}); v \\ &= (e.T \circ e.T \circ v)^{-1}; (e.T \circ T.0 \circ \bar{u}); (e.T \circ v) \\ &= (e.T \circ v)^{-1}; id; (e.T \circ v) = id \end{aligned}$$

从而确定了一个映射 $X \to G^{\partial \times \partial}$。这两个映射互为逆映射，因此构成一个同构。

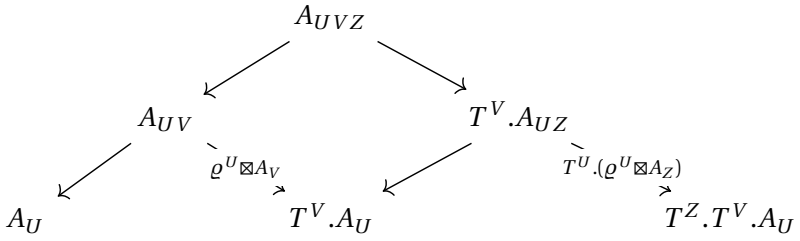
Fo对于归纳情形，考察锚定丛的延拓，并回忆

$$A_{UV} \boxtimes_M A_Z = A_{UV} \boxtimes_{\mathcal{L}(U,A)} A_{UZ}$$

其中，A_{UV}和A_{UZ}被视为以A_U为底的跨度，因此

$$\begin{aligned} A_U &\xleftarrow{id \boxtimes \pi^V} A_{UV} \xrightarrow{anc^U \boxtimes A_V} T^U.A_V \\ A_U &\xleftarrow{id \boxtimes \pi^Z} A_{UZ} \xrightarrow{anc^U \boxtimes A_Z} T^U.A_Z \end{aligned}$$

并注意到它们的跨度复合为



因此，现在只需证明图表

$$\begin{array}{ccc} \partial_U \times D_V & \longrightarrow & \partial_U \times (D_V \times \partial_Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_U \times \partial_V & \longrightarrow & \partial_U \times (\partial_V \times \partial_Z) \end{array}$$

是一个推出。但根据归纳假设，

$$\begin{array}{ccc} D_V & \longrightarrow & D_V \times \partial_Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_V & \longrightarrow & \partial_V \times \partial_Z \end{array}$$

因此，由于 $\partial_U \times (-)$ 的余连续性，结论得证；而 $\mathsf{Gpd}(\mathbb{W})$ 是一个笛卡尔闭范畴（因此 $X \times (-)$ 是余连续的）。

2. 回顾一下，叉

$$I \times I \underset{I\times e[s]}{\overset{e[s]\times I}{\rightrightarrows}} I \times I \xrightarrow{m} I$$

是一个余等化子。另请注意，e^{∂}是e、$e[s]$的余等化子。余极限的交换性保证存在一个由下图诱导的乘法映射：

$$\begin{array}{ccccc}
(D\times I)^2 & \rightrightarrows & (D\times I)^2 & \longrightarrow & \partial^2 \\
\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\
(D\times I)^2 & \rightrightarrows & (D\times I)^2 & \longrightarrow & \partial^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \vdots \\
D\times I & \rightrightarrows & D\times I & \longrightarrow & \partial
\end{array}$$

因此 th 乘法是结合的、交换的，并且有一个零元，由 $1 \xrightarrow{0\times} s \longrightarrow D \times I$ 给出 .

□

定理 5.5.7 的一个直接推论是，∂决定了一个神经/实现，其中神经经过对合代数丛范畴。这使李函子处于神经/实现的语境中（回顾定义5.3.5）。

定义 5.5.8. 李实现 是左 *Kan* 延拓

$$|-|_{\partial} = Lan_{\partial} : \mathsf{Inv}(\mathscr{W}) \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W}).$$

这个函子性质良好。首先，注意到它保持积：

引理 5.5.9. 实现函子保持积。

证明. 积保持是以下事实的结果：$|-|_{\partial}$它是沿着一个笛卡尔函子的笛卡尔函子的左 Kan 延拓（Day 和 Street (1995)）。注意，这意味着 $\int^{v} \partial(v) = 1$。 □

Next，我们看到，对合代数丛的实现具有相同的底空间。

引理 5.5.10. 群胚 ∂的底空间是 Dv 。

证明. 构造群胚的余极限时，其底空间就是底空间图表的普通余极限。从单纯对象到群胚的反射函子保持积，因此只需验证 $\partial(n)$ 的底空间是 $D(n)$。

I的底空间是 $1+1$，而映射 $e_s 0$ 由 $\delta^{-} \circ !$ 给出。由于 D是离散立方对象，其底空间是 $D \times 1$。因此，定义 ∂的余等化子为

$$D + D \underset{id+0\circ!}{\overset{0\circ!+0\circ!}{\rightrightarrows}} D + D \longrightarrow \partial_0 \ .$$

映射 $\gamma : D + D \to M$是一对映射 $\gamma_0, \gamma_1 : D \to M$。我们可以看到，$\gamma_0$和 γ_1 在 0 处相等（它们都是 $\gamma_0(0)$），而 $\gamma(0)$是一个常切向量。因此，$\gamma_1 \circ (id\,|id\,) = \gamma$。 □

现在回忆一下余 Yoneda 引理：对于任意 V-预层$A\colon \mathbb{C}^{op}\to \mathbb{V}$,

$$F(C)=\int^{C'\in\mathbb{C}} \mathbb{C}(C,C')\otimes F(C').$$

特别地，对于 W 中的对合代数丛（或 Weil_1^{op} 上的任意 W-预层），

$$A(U)=\int^{V\in\mathsf{Weil}_1} \mathsf{Weil}_1^{op}(U,V)\times A(V)=\int^{V\in\mathsf{Weil}_1} \mathsf{Weil}_1(V,U)\times A(V).$$

引理 5.5.11。 对于任意对合代数丛 A,

$$A(R)=\int^{V\in\mathsf{Weil}_1} A(V)\times D^V.$$

证明。 利用 Weil_1 上的切结构，将其视为一个 W-富化范畴 :

$$\begin{aligned} D^V=\mathscr{Y}(V)&=\mathsf{Weil}_1(V,-)=(U\mapsto \mathsf{Weil}_1(V,U))\\ &=(U\mapsto \mathsf{Weil}_1(V,U\otimes R))=\mathsf{Weil}_1(V,R).\end{aligned}$$

下面的计算给出所需结果:

$$A(R)=\int^{V} \mathsf{Weil}_1(V,R)\times A(V)=\int^{V} D^V\times A(V).$$

□

现在可以看出，对合代数丛的底空间与其实现的底空间同构。也就是说，实现将 Weil 空间 M 上的对合代数丛映为 Weil 空间 M 上的群胚（在同构意义下）。

命题 5.5.12。 设 A 是 $\mathscr{W}$ 中的一个对合代数丛。那么 $|A|([0])=A(R)$。

证明。 利用 Yoneda 引理，以及以下事实：$\mathscr{Y}[0]=1$ 是一个小投射对象，因此$\mathsf{Gpd}(1,-)$ 是 $\mathscr{W}$-余连续。现在应用引理 5.5.10 和引理5.5.11:

$$\begin{aligned} |A|([0])&=\mathsf{Gpd}(1,|A|)\\ &=\mathsf{Gpd}\left(1,\int^{v\in\mathsf{Weil}_1} A(v)\bullet \partial v\right)\\ &=\int^{v} A(v)\times \mathsf{Gpd}(1,\partial v)\\ &=\int^{v} A(v)\times D^v=A(R).\end{aligned}$$

□

因此，作为最终结果，我们在 W 中的对合代数丛范畴与群胚之间建立了一个保积且在基空间上稳定的伴随。

定理 5.5.13(李实现)。 在 $\mathscr{W}$ 中的对合代数丛范畴与群胚之间存在一个切丛伴随，其中每个函子都保积并保持底空间不变。

$$\mathsf{Gpd}(\mathscr{W}) \underset{|-|_\partial}{\overset{N_\partial}{\rightleftarrows}} \mathsf{Inv}(\mathscr{W})$$

注 5.5.14。 正如本论文的引言以 *Charles Ehresmann* 的工作开篇一样，我们也应花些时间了解李实现与他最初对图式理论的研究之间的关系。我们不使用概形，而是使用与之密切相关的近亲——本质代数理论；在本例中，它们是小的、具有有限极限的 $\mathscr{W}$-范畴。我们可以将 $\mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$ 和 $\mathsf{Inv}(\mathscr{W})$ 视为 $\mathscr{W}$-函子范畴

$$\mathsf{Lex}(\mathscr{T}_{\mathsf{Gpd}}, \mathscr{W}), \quad \mathsf{Inv}(\mathscr{T}_{\mathsf{Gpd}}, \mathscr{W}),$$

，分别如此（其中，保有限极限 表示保有限极限的 $\mathscr{W}$-函子）。函子 $\partial\colon \mathsf{Weil}_1^{op} \to \mathsf{Gpd}(\mathscr{W})$诱导出一个左正合的 $\mathscr{W}$-函子

$$\hat{\partial} : \mathscr{T}_{\mathsf{Inv}} \to \mathscr{T}_{\mathsf{Gpd}}.$$

这意味着从李群胚到李代数丛的函子是由本质代数理论的态射诱导的，因此可以表示为图式的态射。

第6章

结论与未来工作

6.1 结论

现在，我们来总结一下这篇论文所取得的成果。

几何结构的富化本质代数表示 本文研究了光滑流形中向量丛与李代数丛的范畴。尽管这些范畴并非光滑流形范畴中某个极限图式的模型，但 Serre–Swann 定理或 Vaintrob 对李代数丛的表示等经典结果表明，这些范畴确实具有某种代数描述。结合第 2 章和第 3章的结果可知，向量丛与李代数丛由切范畴结构——微分丛（定理 2.5.1）和对合代数丛（定理 3.5.1）——刻画。将这些观察与切范畴的富化视角结合起来，第 5.2 节的结果表明，向量丛与李代数丛是富化图式的模型 （命题 5.2.6 和定理 5.4.14），Kelly（2005）的第6章中也有类似论述。需要注意的是，从这一视角看，构造对合代数丛的 Weil 神经主要只是一个中间步骤。

李代数丛和群胚的新切结构 众所周知，李代数丛范畴和李群胚范畴都具有由与切函子作后复合所诱导的切结构，分别得到切代数锚丛和切群胚。第4 章节的关键结果表明，李代数丛范畴可以表示为保横向极限的笛卡尔切函子$\mathsf{Weil}_1 \to \mathsf{SMan}$，从而为李代数丛范畴赋予了第二种切结构，该结构对应于Martinez的延拓 李代数丛。类似地，局部群胚的无穷小神经的构造限制为李群胚范畴上的一种新切结构；在此情形下，底空间是群胚G的李代数丛，而全空间是箭头群胚G的李代数丛[2]。

虽然这看起来像是一段形式范畴论，但它与利用李理论对经典力学中的对称性进行约化密切相关。这可以追溯到庞加莱著名的札记 庞加莱(1901年)，其中提出了欧拉-庞加莱公式，用于描述具有李群作用的流形上的拉格朗日力学，并以李代数作用取代切丛（现代阐述见Marle(2013)）。庞加莱的形式体系在Weinstein (1996)和Martínez (2001)中被推广到李群胚和李代数丛，而论文Fusca (2018年)则从这一视角研究流体力学。这项工作可被理解为运用了第4章和第5章中提出的李群胚与李代数丛上的新型切结构，值得进一步研究。

李理论的函子语义 第5.5 节的工作为李导数奠定了新的形式基础：

(i) 在丰化范畴 W 中，李导数函子现在出现在神经/实现的语境中。这保证了左伴随的存在——即实现，它从代数丛构造李群胚。该实现保积，并且在底空间上稳定。

(ii) 只需对第 5.5 节的工作稍作扩展，即可说明切范畴中群胚的李导数通常可视为加权极限，其中 $A_V = \{\partial(V), G\}$ 对应于该群胚的对合代数丛的每一种 Weil 延拓。

这些似乎是新的结果，不过在神经/实现方法中，它们此前已以 Sullivan 构造的形式出现在李理论中（Sullivan (1977年)），该构造将李代数丛的微分分次代数转化为单纯集合：

$$\mathsf{DGA}^{op}(\Omega(\Delta_n), A)$$

其中 $\Omega(\Delta_n)$ 是笛卡尔空间中n-单纯形的德拉姆上同调。

6.2 未来工作

本节概述了若干研究方向：这些方向要么因时间和/或篇幅限制，在撰写论文时被删去；要么是论文写作过程所启发、但尚未开展的新研究方向。

富化图式与 Mackenzie 理论 根据 Voronov （2012），Mackenzie 理论指 Kirill Mackenzie 及其合作者在李理论领域开展的一系列研究，尤其是双李代数丛（Mackenzie（1992））、VB-李锚丛（Bursztyn 等人 （2016））、双李群胚等结构。直观而言，双李代数丛是李代数丛范畴中的李代数丛，而 VB-李锚丛是李代数丛范畴中的向量丛。这些结构与图式的张量积之间存在直观联系；也就是说，对于极限图式 A、B，存在一串范畴同构：

$$\mathsf{Mod}(A, \mathsf{Mod}(B, \mathsf{Set})) \cong \mathsf{Mod}(A \otimes B, \mathsf{Set}) \cong \mathsf{Mod}(B, \mathsf{Mod}(A, \mathsf{Set})).$$

我们已经证明，李代数丛和向量丛是$\mathscr{W}$-可图式化的，因此自然而然的下一步便是借助这一视角重新审视 Mackenzie 理论。诸如Mackenzie(1992)所述的偏李导数的对称性等结果（给定一个双李群胚，应用李函子的顺序无关紧要）应当是显而易见的。

力学的切范畴形式化 合成微分几何领域的若干论文，已将拉格朗日力学和哈密顿力学的某些方面转化到合成框架中（Bunge 和 Heggie(1984)； Nishimura (1997)），这在一定程度上使人们难以对力学的切范畴表述产生兴趣。这些方法通常强调构造函数空间的能力，或使用拓扑斯理论内部语言。然而，本文提出的李代数丛和群胚的新颖切结构提供了新的研究方向：在切范畴中为拉格朗日力学或哈密顿力学建立统一框架，并使之与力学的代数丛和群胚方法相契合。

附录：局部可呈现$\mathscr{V}$-范畴背景

合成微分几何采用拓扑斯理论框架，例如 Lavendhomme(1996）末尾章节中所述的框架。拓扑斯的内语言是一项关键工具，而合成微分几何的模型则通过层构造建立。切范畴也有类似的工具箱，借助 富局部可呈现范畴。我们从局部可呈现范畴开始；关于这些范畴的基础内容可参见 Adámek 和 Rosický (1994年），关于富范畴的内容可参见 Kelly (2005）。以下这类余极限是局部可呈现范畴理论的基础。

定义 .0.1. 若$\mathbb{C}$ 中的任意有限图表都有余锥，则称范畴为滤过的。图表范畴为滤过范畴的余极限称为滤过余极限。注意，范畴$\mathscr{D}$ 是滤过的，当且仅当每个余极限图表$\mathscr{D}$ $\to$Set 都与Set中的每个有限极限交换。

例 .0.2.

(i) 任何具有终对象的有限范畴$\mathscr{C}$ 都是滤过的：对于任意图表 $D\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$，自然变换$!: id \Rightarrow K_1$ 通过粘合构成一个余锥。

$$\mathscr{D} \xrightarrow{D} \mathscr{C} \underset{K_1}{\overset{!}{\Downarrow}} \mathscr{C}$$

(ii) 任何具有有限余极限的范畴都是滤过的，因为每个图表都有余极限（因而都有余锥）。

定义 .0.3. 余完备范畴$\mathbb{C}$ 中的对象若$\mathbb{C}(C, -)$ 保持滤过余极限，则称为有限可呈现。余完备范畴$\mathbb{C}$ 若具有一个由有限可呈现对象构成的小子范畴$\mathbb{C}_{fp}$，使得$\mathbb{C}$ 中的每个对象都可表示为余端

$$C \cong \int^{X \in \mathbb{C}_{fp}} \mathbb{C}(X, C) \cdot X.$$

例 0.4. 在范畴 集合范畴 中，有限可呈现对象构成的子范畴恰好是有限集范畴。每个集合都是有限集的一个滤过余极限，因此 集合范畴 是局部有限可呈现的。

直观地说，这意味着 C 中的每个对象都以一种典范的方式，通过粘合有限可呈现对象生成；这就是“局部有限可呈现范畴”这一名称的由来。

余完备范畴中有限可呈现对象构成的子范畴本身是有限余完备的。这是因为 $\mathsf{C}(-, X)\colon \mathsf{C}^{op} \to$ 集合范畴 是一个连续函子（它将 C 中的余极限

映射为集合范畴中的极限），而且滤过余极限与集合范畴中的有限极限可交换。因此，对于任意可表对象的滤过余极限，

$$\mathbb{C}(\mathrm{colim} D, \lim F) \cong \lim_X \lim_Y \mathbb{C}(D(X), F(Y)) \cong \lim_Y \lim_X \mathbb{C}(D(X), F(Y)).$$

局部有限可呈现范畴有多种刻画方式；可参见Adámek andRosický (1994年)。

命题 .0.5. 对于一个范畴$\mathbb{C}$，以下条件等价：

(i) $\mathbb{C}$ 是局部有限可呈现范畴。*(ii)* 对于一个小的余完备范畴$\mathscr{C}$，$\mathbb{C} =$保有限极限($\mathscr{C}$,集合范畴)*(*其中保有限极限表示保有限极限*)*，并且$\mathscr{C} = \mathbb{C}^{op}$有限可呈现。*(iii)* $\mathbb{C}$ 是某个极限图式的模型范畴（例如，一个配备了一类锥$\mathscr{C}$的有限小范畴$\mathscr{L}$，其中模型是一个将锥映为极限图表的函子，取值于集合范畴）。*(iv)* $\mathbb{C}$ 是某个小范畴$\mathscr{C}$的预层拓扑斯中的反射子范畴（对于预层拓扑斯，这一结论显然成立）。

(v) $\mathbb{C}$ 是局部可呈范畴的一个全子范畴，并且对极限封闭（这依赖于一个称为Vopenka'sprinciple的大基数公理）。

局部有限可呈现范畴理论的一个显著特点是，其结果可以推广到在幺半范畴 V 中的富集，而无须做任何实质性改动。

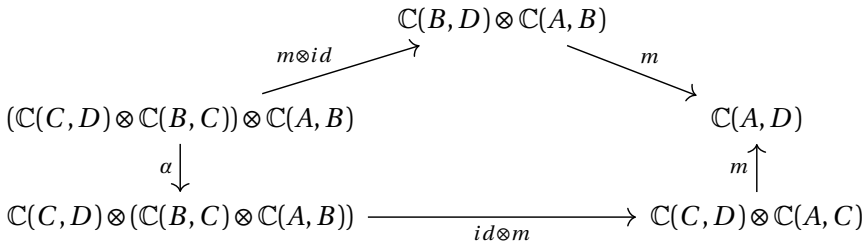
定义 .0.6. 设 $\mathscr{V}$是一个幺半范畴。一个$\mathscr{V}$-图$\mathbb{C}$ 由一个（大）对象集合$\mathbb{C}_0$，和一个映射给出

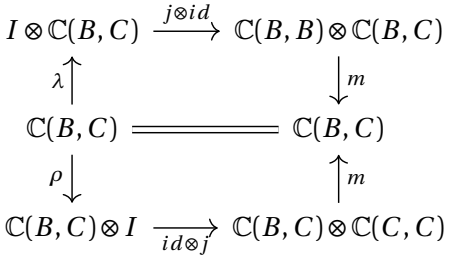
$$\mathbb{C} : \mathbb{C}_0 \times \mathbb{C}_0 \to \mathscr{V}.$$

给定一组映射

$$m_{ABC} : \mathbb{C}(B,C) \times \mathbb{C}(A,B) \to \mathbb{C}(A,C), \quad j_A : I \to \mathbb{C}(A,A)$$

我们称$\mathbb{C}$ 是 当以下结合律和幺元性图表满足交换时的一个 $\mathscr{V}$-范畴 *e:*





范畴论中有许多富集的例子。

例 .0.7.

(i) 任何具有双积的范畴都富集于交换幺半群范畴中 *s.*

(ii) 对称幺半闭范畴使用内 *Hom* $[-,-]$自富集 .

(iii) *2*-范畴是富集于 Cat 的范畴。

(iv) 单位 $\mathscr{V}$范畴是具有 *1* 个对象的 $\mathscr{V}$范畴，其 *Hom* 对象为 I。

(v) 当 $\mathscr{V}$是对称幺半时，我们可以构造 $\mathscr{C}$ 的相反 $\mathscr{V}$-范畴，其中 $\mathbb{C}^{op}(A,B)=\mathbb{C}(B,A)$。新的复合定义为

$$m^{op}:\mathbb{C}^{op}(B,C)\otimes\mathbb{C}^{op}(A,B)\xrightarrow{\sigma}\mathbb{C}(B,A)\otimes\mathbb{C}(C,B)\xrightarrow{m}\mathbb{C}(C,A)=\mathbb{C}^{op}(A,C)$$

对于任意 V，都存在一个 V-范畴的 2-范畴。

定义 .0.8。 一个 $\mathscr{V}$-函子 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ 是在对象上的赋值 $F_0:\mathbb{C}_0\to\mathbb{D}_0$ 以及一族映射 $F_{A,B}:\mathbb{C}(A,B)\to\mathbb{D}(F_0A,F_0B)$，使得下列图表成立：

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}(B,C)\otimes\mathbb{C}(A,B) & \xrightarrow{F\otimes F} & \mathbb{D}(F_0B,F_0C)\otimes\mathbb{D}(F_0A,F_0B)\\ \downarrow{\scriptstyle m^C} & & \downarrow{\scriptstyle m^D}\\ \mathbb{C}(A,C) & \xrightarrow[F]{} & \mathbb{D}(F_0A,F_0C)\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}I & \xrightarrow{j_A^C} & \mathbb{C}(A,A)\\ & {\scriptstyle j^D_{F_0A}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle F}\\ & & \mathbb{D}(F_0A,F_0A)\end{array}$$

一个 $\mathscr{V}$-自然变换 $F\Rightarrow G$ 是一族映射 $\gamma_A:I\to\mathbb{D}(F_0A,G_0A)$，使得下列图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{D}(F_0B,F_0C) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{D}(F_0B,F_0C)\otimes I & \xrightarrow{id\otimes\gamma.B} & \mathbb{D}(F_0B,F_0C)\otimes\mathbb{D}(G_0B,F_0B)\\ \uparrow{\scriptstyle G} & & & & \downarrow{\scriptstyle m}\\ \mathbb{C}(B,C) & & & & \mathbb{D}(G_0B,F_0C)\\ \downarrow{\scriptstyle F} & & & & \uparrow{\scriptstyle m}\\ \mathbb{D}(G_0B,G_0C) & \xrightarrow[\lambda]{} & I\otimes\mathbb{D}(G_0B,G_0C) & \xrightarrow[\gamma.C\otimes id]{} & \mathbb{D}(G_0B,F_0B)\otimes\mathbb{D}(G_0B,G_0C)\end{array}$$

$\mathscr{V}$Cat是由 $\mathscr{V}$-范畴、$\mathscr{V}$-函子和 $\mathscr{V}$-自然变换组成的 *2*-范畴 .

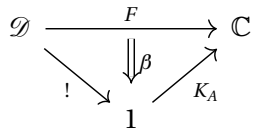
富范畴比普通范畴具有更丰富的（余）极限概念。函子的极限定义为一个泛锥；也就是说，是沿着 ! 的右 Kan 延拓：

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & {\scriptstyle !}\nearrow\ \beta\Downarrow\ \searrow{\scriptstyle K_A} & \\ \mathscr{D} & \xrightarrow[F]{} & \mathbb{C}\end{array}$$

从而满足泛性质

$$\forall C:\ \mathbb{C}(C,\lim F)\cong[\mathbb{C},\mathsf{Set}](K_C,F-)$$

对偶地，余极限是一个泛余锥，因此也是一种左 Kan 延拓：



其中余泛性质

$$\forall C:\ [\mathbb{C}^{op},\mathsf{Set}](F-,K_C)\cong\mathbb{C}(\mathsf{colim}F,C)$$

得以满足。这无法直接推广到 V-范畴，原因有几个。显而易见的一点是，V 不一定是笛卡尔幺半的，因此没有理由认为一个 V-范畴应当具有函子 $\mathbf{C}\to 1$。加权余极限的概念更为恰当：

定义 .0.9。设$\mathscr{D}$为一个$\mathscr{V}$-范畴，并称 $W:\mathscr{D}\to\mathscr{V}$为权，称 $D:\mathscr{D}\to\mathbb{C}$ 为图表。由 W 加权的 D 的极限，或加权极限$\{W,\mathscr{D}\}$，是满足以下泛性质的对象：

$$\forall C:\ \mathscr{V}(W,[\mathbb{C},\mathscr{V}](F-,K_C))\cong\mathbb{C}(F,W,C).$$

对偶地，给定图表 $P:\mathscr{D}^{op}\to\mathbb{C}$，由 W 加权的 P 的余极限，即 $W\ *P$，是$\mathbb{C}$ 中的一个满足以下泛性质的对象

$$\forall C:\ \mathscr{V}(W,[\mathbb{C},\mathscr{V}](K_C,F-))\cong\mathbb{C}(C,F*W).$$

例 .0.10。

(i) 锥形（余）极限由取值于单位 I 的常值函子加权，$K_I:\mathscr{D}\to\mathscr{W}$。这与普通（余）极限的定义一致。

(ii) 对象 $V\ \in\mathscr{V}$对 C 的幂是满足以下泛性质的对象 C^V：

$$\mathbb{C}(B,C^V)\cong\mathscr{V}(V,\mathbb{C}(B,C)).$$

对偶地，V 的余幂由下式给出

$$\mathbb{C}(B\bullet V,C)\cong\mathscr{V}(V,\mathbb{C}(B,C)).$$

(iii) 在普通范畴中，对象 C 关于 V 的幂由以 V 为指标的（可能是无穷）余积给出：

$$C^V\cong\coprod_{v\in V}C$$

而余幂则是以 V 为指标的 C 的（可能是无穷）积：

$$V\bullet C\cong\prod_{v\in V}C.$$

(iv) 在对称幺半闭范畴 $\mathscr{V}$中，关于 $\mathscr{V}$的幂由 $[V,-]$给出，而 V 的余幂由 $\otimes$._给出

根据 Kelly 的研究，我们注意到每个有限加权极限都由幂和典范极限构成。

命题 .0.1 **1.** 每个加权（余）极限都是锥形（余）极限与（余）幂的复合。

推论 .0.12. 加权极限恰好是普通范畴中的锥形/普通极限。

前一个定 与局部可表示范畴相关的定义大多可以原样迁移 .

定义 .0.13.

(i) 若幺半闭$\mathscr{V}$可呈现为闭范畴，则$\mathscr{V}_{fp}$是一个幺半子范畴。⁀*(ii)* 给定 *(i)* 中的$\mathscr{V}$，若权 $W:\mathscr{D}\to\mathscr{V}$保持有限极限，则 $W\star(-):\mathscr{D}\to\mathscr{V}$是滤过的。*(iii)* 余完备$\mathscr{V}$范畴中的对象有限可呈现，当$\mathbb{C}(C,-)$保持滤过加权余极限时即为如此。*(iv)* 若每个对象 C 都是余端，则余完备$\mathscr{V}$-范畴$\mathscr{C}$是局部有限可呈现的。

$$C\cong\int^{X\in\mathbb{C}_{fp}}\mathbb{C}(X,C)\cdot X.$$

命题 .0.14 (Freyd 和 Kelly (1972); Kelly (2005))。 关于局部可呈现范畴的所有先前结果，都可以提升到局部可呈现的 $\mathscr{V}$-范畴中，前提是 $\mathscr{V}$作为闭范畴是可呈现的。

参考文献

J. Adámek 和 J. Rosický。 局部可呈现范畴与可及范畴，第 189 卷。剑桥：剑桥大学出版社，1994年。ISBN 0-521-42261-2/平装本。J. Adámek、F. Borceux、S. Lack 和 J. Rosický。可及范畴的分类。 纯粹与应用代数杂志，175(1):7–30，2002。ISSN 0022-4049。doi: https://doi.org/10。1016/S0022-4049(02)00126-3。
URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404902001263。纪念 Max Kelly 教授 70 岁生日的特刊。J. Adámek、H. P. Gumm 和 V. Trnková。集合函子的表示：余代数视角。 《逻辑与计算杂志》，20(5):991–1015，2010。ISSN 0955-792X。doi: 10.1093/logcom/exn090。M. Barr。无环模型，第 17 卷。美国数学会（AMS），罗得岛州普罗维登斯，2002。ISBN 0-8218-2877-0/精装本。K. Bauer、B. Johnson、C. Osborne、E. Riehl 和 A. Tebbe。阿贝尔函子演算中的方向导数与高阶链式法则。《应用拓扑学》，235，2018。C. Berger、P.-A. Melliès 和 M. Weber。带元数的单子及其相关理论。纯粹与应用代数杂志，216(8-9):2029–2048，2012。ISSN 0022-4049。doi: 10.1016/j.jpaa.2012.02.039。W. Bertram。Weil 空间与 Weil-Lie 群，2014。URL https://arxiv.org/abs/1402.2619v1。[math.GR](未发表的预印本)。W. Bertram 和 A. Souvay。Weil 函子的一般构造。《拓扑与微分几何范畴论笔记》，55(4):267–313，2014。ISSN 1245-530X。R. F. Blute、J. R. B. Cockett 和 R. A. G. Seely。微分范畴。《数学结构与计算机科学》，16 (6):1049–1083，2006。R. F. Blute、J. R. B. Cockett 和 R. A. G. Seely。笛卡尔微分范畴。《范畴论与应用》，22: 622–672，2009。M. Bojowald、A. Kotov 和 T. Strobl。李代数丛态射、泊松σ模型与壳外闭合规范对称性。《几何与物理杂志》，54(4):400–426，2005。ISSN 0393-0440。doi: 10.1016/j. geomphys.2004.11.002。F. Borceux 和 D. Dejean。范畴论中的柯西完备化。《拓扑与微分几何范畴论笔记》，27(2):133–146，1986。ISSN 0008-0004。J. Bourke。二维泛代数中的余下降对象。博士论文，悉尼大学，2010。J. Bourke 和 R. Garner。单子与理论。《数学进展》，351:1024–1071，2019。ISSN 0001-8708。doi: 10.1016/j.aim.2019.05.016。

H. Brandt. 关于群概念的一种推广。《数学年刊》，96(1):360–366，1927年。M. Bunge 和 M. Heggie。合成变分演算。数学及其应用中的范畴论，1983年美国数学学会第89届年会专题会议论文集，科罗拉多州丹佛，当代数学30:30–62，1984年。M. Bunge、F. Gago 和 A.M. San Luis Fernández。合成微分拓扑，第448卷。剑桥：剑桥大学出版社，2018年。ISBN 978-1-108-44723-2/pbk; 978-1-108-55349-0/电子版。M. Burke 和 B. A. MacAdam。对合代数丛：切范畴中李代数丛的一种推广，2019年。网址：https://arxiv.org/abs/1904.06594v3。 [数学.Categorical theory]（未发表的预印本）。H. Bursztyn、A. Cabrera 和 M. del Hoyo。李群胚和李代数丛上的向量丛。《数学进展》，290:163–207，2016年。ISSN 0001-8708。J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell。微分结构、切结构与合成微分几何。《应用范畴结构》，22(2):331–417，2014年。ISSN 0927-2852。doi: 10.1007/s10485-013-9312-0。J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell。切范畴中的雅可比恒等式。《拓扑、几何与微分范畴论笔记》，56(4):301–316，2015年。J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell。切范畴中的联络。《范畴论与应用》，32(26):835–888，2017年。J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell。切范畴的微分丛与纤维化。《拓扑、几何与微分范畴论笔记》，59(1):10–92，2018年。J. R. B. Cockett 和 J. D. Gallagher。微分 λ演算的范畴模型。《数学结构与计算机科学》，29(10):1513–1555，2019年。ISSN 0960-1295。doi: 10.1017/s0960129519000070。J. R. B. Cockett 和 R. A G Seely。Faà di Bruno 构造。《范畴论与应用》，25(15):394–425，2011年。J. R. B. Cockett、G. S. H. Cruttwell 和 J. D. Gallagher。微分限制范畴。《范畴论与应用》，25(21):537–613，2011年。J. R. B. Cockett、G. S. H. Cruttwell、J. D. Gallagher、J.-S.P. Lemay、B. A. MacAdam、G. Plotkin 和 D. Pronk。反向导数范畴。载于 Maribel Fernández 和 Anca Muscholl 编，第*28*届*EACSL*计算机科学逻辑年会（*CSL 2020*），莱布尼茨国际信息学会议论文集（LIPIcs）第152卷，第18:1–18:16页，德国达格施图尔，2020年。Schloss Dagstuhl–莱布尼茨信息学中心。ISBN 978-3-95977-132-0。doi: 10.4230/LIPIcs.CSL.2020.18。网址https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2020/11661。L. A. Cordero、C. T. J. Dodson 和 M. de León。标架丛的微分几何，数学及其应用第47卷。克吕维尔学术出版社集团，多德雷赫特，1989年。ISBN 0-7923-0012-2。doi: 10.1007/978-94-009-1265-6。T. Courant。切李代数丛。《物理学杂志*A*辑》，27(13):4527–4536，1994年。ISSN 0305-4470。M. Crainic 和 R.L. Fernandes。李括号的可积性。《数学年刊》，157(2):575–620，2003年。ISSN 0003-486X；1939-8980/e。G. S. H. Cruttwell、J. D. Gallagher 和 B. A. MacAdam。运用切范畴，朝着微分编程的形式化及其扩展迈进。*ACT*论文集，2019年。

G. S. H. Cruttwell、J. D. Gallagher 和 D. Pronk。简单微分编程语言的范畴语义。电子版理论计算机科学论文集 *EPTCS*，333:289–310，2021年2月。doi: 10.4204/eptcs.333.20。网址 https://doi.org/10.4204%2Feptcs.333.20。R. H. Cushman 和 Larry M. Bates。经典可积系统的整体方面。Birkhäuser/施普林格，巴塞尔，第2版，2015年。ISBN 978-3-0348-0917-7；978-3-0348-0918-4。doi: 10.1007/978-3-0348-0918-4。B. Day。关于函子的闭范畴。载于美国中西部范畴论研讨会报告 *IV*，第1–38页。施普林格，1970年。B. Day 和 R. Street。沿预幺半函子的 Kan 延拓。《范畴论与应用》，1(4):72–77，1995年。M. de León、J. C. Marrero 和 E. Martínez。李代数丛上的拉格朗日子流形与动力学。《物理学杂志*A*辑》，38(24):R241–R308，2005年。ISSN 0305-4470。doi: 10.1088/0305-4470/38/24/R01。M. de León、J. C. Marrero 和 E. Martínez。李代数丛上的拉格朗日子流形与动力学。《物理学杂志*A*辑·数学》，38(24):R241，2005年。M. P. do Carmo。黎曼几何。数学：理论与应用。马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser Boston, Inc.，1992年。ISBN 0-8176-3490-8。doi: 10.1007/978-1-4757-2201-7。网址https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2201-7。由 Francis Flaherty 从葡萄牙语第二版译出。E. J. Dubuc。C^∞-概形。《美国数学杂志》，103(4):683–690，1981年。ISSN 0002-9327。doi: 10.2307/2374046。D. J. Eck。光滑流形上的保积函子。纯粹与应用代数杂志，42(2):133–140，1986年。ISSN 0022-4049。doi: 10.1016/0022-4049(86)90076-9。C. Ehresmann。拓扑范畴与可微范畴。大学书店，1959年。T. Ehrhard。关于Köthe序列空间与线性逻辑。《数学结构与计算机科学》，12(5):579–623，2002年。ISSN 0960-1295。doi: 10.1017/S0960129502003729。T. Ehrhard 和 L. Regnier。微分 λ 演算。《理论计算机科学》，309(1–3):1–41，2003年。S. Eilenberg 和 S. MacLane。自然等价的一般理论。《美国数学会汇刊》，58(2):231–294，1945年。Magdalini K. F. 和 K. Mackenzie。双向量丛的扭曲与对偶，2019年。（未发表的预印本）。P. J. Freyd 和 G. M. Kelly。连续函子的范畴 I。纯粹与应用代数杂志，2:169–191，1972年。ISSN 0022-4049。D. Fusca。几何力学的群胚方法。博士论文，多伦多大学，2018年，116页，2018年。P. Gabriel 和 F. Ulmer。局部可呈范畴，第221卷。施普林格出版社，2006年。R. Garner。切范畴的嵌入定理。《数学进展》，323:668–687，2018年。ISSN 0001-8708。doi: 10.1016/j.aim.2017.10.039。

J.-Y. Girard ．线性逻辑 ．理论・计算 ．*Sci.*, 50(1):1 101 1987

–，。J. Grabowski 和 M. Rotkiewicz。高阶向量丛与多重分次辛流形。《几何与物理杂志》，59(9)：1285–1305，2009年。ISSN 0393-0440。doi：10.1016/j.geomphys.2009.06.009。P. J. Higgins 和 K. Mackenzie。李代数丛范畴中的代数构造。《代数学杂志》，129 (1)：194–230，1990年。ISSN 0021-8693。doi：10.1016/0021-8693(90)90246-K。P. H. W. Hoffmann。自动微分指南。《数值算法》，72(3)：775–811，2016年。G. Janelidze 和 G. M. Kelly。关于幺半范畴的作用。《范畴论与应用》，9(61–91)：02，2001年。B. Johnson 和 R. McCarthy。线性化、Dold–Puppe 稳定化与 MacLane 的*Q*-构造。《美国数学会汇刊》，350(4)：1555–1593，1998。ISSN 0002-9947。doi：10.1090/S0002-9947-98-02067-4。P. T. Johnstone。《大象素描：托扑斯理论概要。第*1*卷》，《牛津逻辑指南丛书》第43卷。纽约：克拉伦登出版社、牛津大学出版社，2002。ISBN 0-19-853425-6。D. M. Kan。涉及余单纯复形的函子。《美国数学会汇刊》，87：330–346，1958年。ISSN 0002-9947；1088-6850/e。M. Kapranov。自由李代数丛与路径空间。《精选数学（新辑）》，13(2)：277–319，2007年。ISSN 1022-1824；1420-9020/e。G. M. Kelly。由一个图式生成的本质代数理论。《澳大利亚数学会通报》，26(1)：45–56，1982年。G. M. Kelly。富化范畴论的基本概念。《范畴论的表示理论与应用》，2005(10)：1–136，2005。A. Kock。合成微分几何，伦敦数学会讲义系列第333卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2006年。ISBN 978-0-521-68738-6；0-521-68738-1。doi：10.1017/CBO9780511550812。I. Kolár。李群胚的函子性延拓。《巴拿赫中心出版物》，76：177，2007年。I. Kolár、P. W. Michor 和 J. Slovák。微分几何中的自然运算。柏林：施普林格出版社，1993年。ISBN 3-540-56235-4。doi：10.1007/978-3-662-02950-3。A. Kriegl 和 P. W. Michor。整体分析的便利框架，数学调查与专著第53卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。ISBN 0-8218-0780-3。doi：10.1090/surv/053。S. Lack 和 J. Power。Gabriel–Ulmer 对偶与在一般底范畴上富化的 Lawvere 理论。《函数式编程杂志》，19(3–4)：265–286，2009年。ISSN 0956-7968。doi：10.1017/S0956796809007254。R. Lavendhomme。合成微分几何的基本概念，第13卷。多德雷赫特：克吕维尔学术出版社，1996年。ISBN 0-7923-3941-X。F. W. Lawvere。范畴动力学。载于几何学中的托扑斯理论方法，《各类出版物系列》第30卷，第1–28页。奥胡斯：奥胡斯大学，1979年。

F. W. Lawvere。广义图的若干拓扑斯之间的定性区别。载于《计算机科学与逻辑中的范畴》（科罗拉多州博尔德，1987年），《当代数学》丛书第92卷，第261–299页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1989年。doi：10.1090/conm/092/1003203。P. Leung。使用 Weil 代数对切结构进行分类。《范畴论与应用》，32(9)：286–337，2017。S. Lie。变换群理论……：章节。I. 直线与平面上的有限连续群。II. 通常空间中的有限连续群。III. 通常空间中的射影群。IV. 关于 n 重扩展空间中各种群的研究。V. 关于几何基础的研究。VI. 关于有限连续群的一般考察。1893，第3卷。BG Teubner，1893年。Fosco Loregian。（余）端演算。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2021。doi：10.1017/9781108778657。R. B. B. Lucyshyn-Wright。关于联络的几何概念及其在切范畴中的表达。《范畴论与应用》，33(28)：832–866，2018年。B. A. MacAdam。光滑流形范畴中的向量丛与微分丛。《范畴结构及其应用》，第1–26页，2021。K. C. H. Mackenzie。双李代数丛与二阶几何。I。《数学进展》，94(2)：180–239，1992。ISSN 0001-8708。K. C. H. Mackenzie。李群胚与李代数丛的一般理论，伦敦数学会讲义系列第213卷。剑桥大学出版社，剑桥，2005。ISBN 978-0-521-49928-3；0-521-49928-3。doi：10.1017/CBO9781107325883。K. C. H. Mackenzie。李代数丛与李双代数丛的 Ehresmann 双与 Drinfel’d双体。《纯粹与应用数学杂志》，658：193–245，2011。ISSN 0075-4102。doi：10.1515/CRELLE.2011.092。K. C. H. Mackenzie 和 P. Xu。李双代数丛的积分。《拓扑学》，39(3)：445–467，2000。ISSN 0040-9383。doi：https://doi.org/10.1016/S0040-9383(98)00069-X。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004093839800069X。K.C.H. Mackenzie。艰难地证明雅可比恒等式。载于《物理学中的几何方法》。第30届研讨会，波兰，2011年6月26日至7月2日。基于研讨会报告的精选论文，第357–366页。巴塞尔：Birkhauser，2013年。ISBN 978-3-0348-0447-9；978-3-0348-0448-6。doi：10.1007/978-3-0348-0448-6 32._S. MacLane。工作数学家的范畴论。第4次校订印刷，第5卷。纽约：施普林格出版社，1988年。ISBN 3-540-90035-7。C.-M. Marle。关于 Henri Poincaré 的“论力学方程的一种新形式”一文。《几何与对称性物理学杂志》，29：1–38，2013年。E. Martínez。李代数丛上力学的几何表述。载于第八届几何与物理秋季研讨会论文集（西班牙语）（Medina del Campo，1999年），《西班牙皇家数学学会出版物》第2卷，第209–222页。西班牙皇家数学学会，马德里，2001年。E. Martínez。李代数丛上的经典场论：多辛形式主义。《几何与力学杂志》，10 (1)：93–138，2018年。ISSN 1941-4889；1941-4897/e。

E. Meinrenken 和 J. Pike。《双李代数丛的 Weil 代数》。《国际数学研究通知》，2021(11): 8550–8622，2021。ISSN 1073-7928。doi: 10.1093/imrn/rnz361。P. W. Michor。《Jacobi流》。《都灵数学研讨会纪要》，54(4):365–372，1996。ISSN 0373-1243。J. W. Milnor 和 J. D. Stasheff。《特征类》，第76卷。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，1974年。doi: 10.1515/9781400881826。I. Moerdijk 和 J. Mrˇcun。《无穷小作用的可积性》。《美国应用数学杂志》，124(3):567–593，2002。I. Moerdijk 和 G.E. Reyes。《光滑无穷小分析模型》。纽约：施普林格出版社，1991。ISBN 0-387-97489-X。J. Nestruev。《光滑流形与可观测量》，第220卷。纽约：施普林格，2003年。ISBN 0-387- 95543-7/hbk。H. Nishimura。《合成哈密顿力学》。《国际理论物理学杂志》，36(1):259–279，1997。ISSN 0020-7748。doi: 10.1007/BF02435785。H. Nishimura 和 T. Osoekawa。《重新探讨一般雅可比恒等式》。《国际理论物理学杂志》，46 (11):2843–2862，2007。ISSN 0020-7748。doi: 10.1007/s10773-007-9397-z。V. Nistor。《群胚与李代数丛的积分》。《日本数学会杂志》，52(4):847–868，2000。H. Poincaré。《力学方程的一种新形式》。《科学院报告》，132:369–371，1901。J. Pradines。《可微群胚的李理论。无穷小群胚范畴中的微分计算》。《巴黎科学院报告 *A-B*辑》，264:A245–A248，1967。ISSN 0151-0509。J. Rosický。《抽象切丛函子》。《图表》，12:JR1–JR11，1984。ISSN 0224-3911。G. J. Seal。《张量、单子与作用》。《范畴论与应用》，28:403–434，2013。ISSN 1201-561X。G. Segal。《范畴与上同调理论》。《拓扑学》，13:293–312，1974年。ISSN 0040-9383。P. Selinger。《幺半范畴图形语言综述》。载于《物理学的新结构》，第289–355页。施普林格，2010年。D Sullivan。《拓扑学中的无穷小计算》。《数学出版物》，47:269–331，1977年。ISSN 0073-8301; 1618-1913/e。R. Thom。《可微流形的若干整体性质》。《海尔维提数学评论》，28(1):17–86，1954年。L. W. Tu。《流形导论》。Universitext。纽约：施普林格，第二版，2011年。ISBN 978-1-4419-7399-3。doi: 10.1007/978-1-4419-7400-6。T. Th. Voronov。《Q-流形与 Mackenzie 理论》。《数学物理通讯》，315(2):279–310，2012年。ISSN 0010-3616。doi: 10.1007/s00220-012-1568-y。M. Weber。《族式2-函子与参数化右伴随》。《范畴论与应用》，18(22):665–732，2007年。

A. Weil。《可微流形上的近点理论》。载于《微分几何》。法国国家科学研究中心国际研讨会，斯特拉斯堡，*1953*年，第111–117页。法国国家科学研究中心，巴黎，1953年。A. Weinstein。《拉格朗日力学与群胚》。载于《力学日：研讨会论文集，*1992*年*6*月*12*日》，第207–231页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1996年。ISBN 0-8218- 0261-5/hbk。P. Wilson 和 F. Zanasi。《反向导数上升：学习布尔电路的范畴方法》。载于《*2020*年第三届国际应用范畴论年会论文集，*ACT 2020*，美国剑桥，*2020*年*7*月*6*日至*10*日》，第247–260页。滑铁卢：开放出版协会（OPA），2021年。网址：eptcs.web.cse.unsw.edu.au/paper.cgi?ACT2020.17。R. Wisbauer。《函子的正则配对与弱（余）单子》。《代数与离散数学》，15(1):127–154，2013年。ISSN 1726-3255。R. J. Wood。《B*V*-指标范畴》。载于《指标范畴及其应用》，《数学讲义》第661卷，第126–140页。施普林格，柏林，1978年。

arXiv:2301.00305v1 [math.CT] 31 Dec 2022

卡尔加里大学

...

by

...

论文

提交至研究生院，作为满足.....学位要求的部分条件。

...

阿尔伯塔省卡尔加里

.....,
.....

© ....

摘要

...

目录

摘要.ii 目录.ii

...

....