独立集的无环令牌滑动重配置图札记

David Avis[1] Duc A. Hoang[2]

[1] 日本京都大学信息学研究生院；加拿大麦吉尔大学计算机科学学院avis@cs.mcgill.ca[2] 日本京都大学信息学研究生院hoang.duc.8r@kyoto-u.ac.jp

arXiv:2301.00317v1 [math.CO] 1 Jan 2023

摘要

我们继续研究独立集的令牌滑动重配置图；作者在早期的一篇论文（arXiv:2203.16861）中开启了这一研究。该论文的两个研究主题是：哪些图 G 是令牌滑动图，以及图的哪些性质会遗传到令牌滑动图中。本文继续这项研究，重点考察 G 和/或其令牌滑动图 $\mathsf{TS}_k(G)$ 为树或森林的情形，其中 k 表示所考虑的独立集的大小。我们研究两个问题。第一个问题是，找出使 $\mathsf{TS}_k(G)$ 成为森林的 G 所需的充要条件。第二个问题是，找出使树或森林成为令牌滑动图的充要条件。对于第一个问题，我们在 $k = 2$, 3 的情形下给出了禁子图刻画。对于第二个问题，我们证明，对于每棵 k叉树 T，都存在一个图 G，使得 $\mathsf{TS}_{k+1}(G)$ 与 T同构。我们还给出了其他若干结果，并提出一种连接操作，有助于构造 $\mathsf{TS}_k(G)$ 图。

1 引言

在计算问题的一种重配置变体中（例如， Satisfiability、 Independent Set、Vertex-Coloring 等），给定一条变换规则，用于描述该问题可行解（例如，满足性真值赋值、独立集、正常顶点着色等）之间的邻接关系。其中一个主要目标是判断是否存在一系列彼此相邻的可行解，能够将一个给定解“重配置”为另一个解。理解这类重配置问题的另一种方式，是通过所谓的重配置图——其节点为可行解，且当一个节点可以通过恰好应用一次给定规则从另一个节点得到时，这两个节点便相邻。于是，前述问题就转化为判断重配置图中两个给定节点之间是否存在一条路径。近年来，研究者从不同角度对重配置问题进行了深入研究 [2, 6–8]。

Independent Set的一种研究最为广泛的重配置变体是所谓的 TokenSliding 问题，该问题最早由 Hearn 和 Demaine 于 2005 年提出 [4] 。有关详情，请参阅 [2, 7, 8] 及其中的参考文献。令人惊讶的是，尽管 Token Sliding 已得到广泛研究，但其对应重配置图的可实现性和结构性质——我们将其称为 TS_k-图（即令牌滑动（重配置）图）——直到最近才开始受到研究 [1]。另一方面，若将一般顶点子集、支配集或图的正常顶点着色视为“输入可行解”，那么它们对应的重配置图早已得到了充分刻画 [5, 6]。

对于此处未定义的任何图论术语和记号，我们请读者参阅 [3]。给定一个图 $G = (V, E)$ 和一个整数 $k \geq 2$。对于两个集合 X、Y，我们有时使用 $X + Y$和 $X - Y$来表示 $X \cup Y$和 $X \setminus Y$。我们将 $X \cup \{u\}$（分别为 $X \setminus \{u\}$）缩写为 $X + u$（分别为 $X - u$）。我们使用$N_G(u)$，或者当图 G 在上下文中明确时，简写为 $N(u)$，来表示 u的（开）邻点，即 G 中与 u相邻的所有顶点组成的集合。 u的闭邻点记为 $N_G[u]$ 或简写为 $N[u]$，是集合 $N_G(u) + u$。 u的度记为 $\deg_G(u)$，就是$N_G(u)$的大小。 G 的独立集（或稳定集）是满足以下条件的顶点子集 I：对于任意 u、$v \in I$，都有 $uv \notin E(G)$。 G的 TS_k-图记为 $\mathsf{TS}_k(G)$，其节点是 G 的所有大小为-k 的独立集，作为其

节点；在令牌滑动（TS）下，若存在两个顶点 u、$v \in V(G)$ 使得 $I - J = \{u\}$、$J - I = \{v\}$，且 $uv \in E(G)$，则两个节点 I、J 相邻。若存在双射 $f: V(G) \to V(H)$，使得当且仅当 $f(u)f(v) \in E(H)$ 时 $uv \in E(G)$，则称两个图 G 和 H 同构，记为 $G \simeq H$。若存在图 H 使得 $G \simeq \mathrm{TS}_k(H)$，则称图 G 为 TS_k-图。森林是一个不含环的图（即无环图），而连通森林是树。TS_k-树/森林是同时也是树/森林的 TS_k-图。图1展示了一个具有六个顶点的 TS_2-树（右侧）。在 [1],

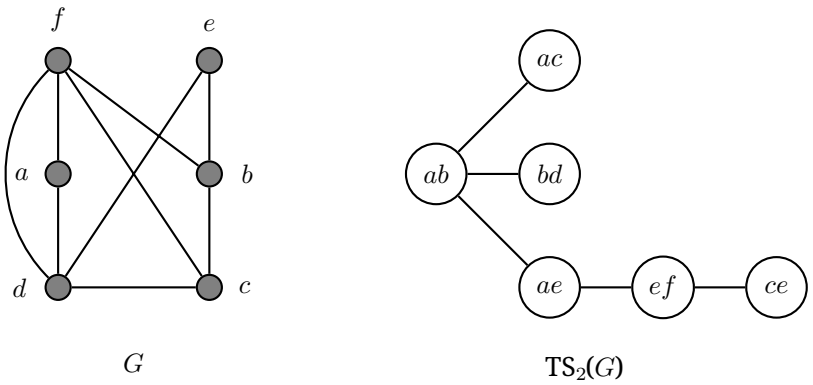


图1：一个具有 $\mathrm{TS}_2(G) = D_{1,3,2}$ 的图 G。每个节点 ab 代表 G 的一个大小为 2 的稳定集。

作者研究了 TS_k-图族的各种性质。对于图 G，他们研究的两个问题是：

（Q1）对于 G，$\mathrm{TS}_k(G)$ 是森林的充要条件是什么?

（Q2）G 成为 TS_k-图的充要条件是什么?

本文针对 G 为树或森林的情况，研究这两个问题。

两个（带标签的）图 $G \cup H$ 和 G 的并 H 是指满足 $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ 且 $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ 的图。当我们不考虑标签、将 G 和 H 的顶点与边视为彼此不同，我们称 $G \cup H$ 是 G 与 H 的不交并，并用 $G + H$ 代替 $G \cup H$，以区别于它们的并。我们分别用 K_n、P_n 和 C_n 表示有 n 个顶点的完全图、路径和环。$K_{m,\ n}$ $(m \le n)$ 是一个完全二部图，其两个部集的大小分别为 m 和 n。$K_{1,\ n}$ 也称为星——一种通过在中心顶点上连接 n 个叶节点得到的树。我们接下来将使用的一类图是星和路径的推广。固定整数 n、r、$s \ge 1$，令 $D_{r,\ n,\ s}$ 为从 P_n 出发，在一端添加 r 个叶节点、另一端添加 s 个叶节点所得到的树。注意，$D_{1,\ n,\ 1}$ 是星 $K_{1,\ s+1}$，而 $D_{1,\ n,\ 1}$ 是路径 P_{n+2}。图1展示了 $D_{1,\ 3,\ 2}$（右侧）。n叉树是指每个节点至多有 n 个子节点的有根树。任何最大度至多为 $n+1$ 的树，都可以在一个度至多为 n 的顶点（例如叶节点）处选作根，从而得到一棵 n叉树。特别地，2叉树就是著名的二叉树。

在下一节中，我们首先针对 G 是树/森林且 $k \in \{2,3\}$ 的情形，部分回答（Q1），并以对 $k \ge 4$ 提出猜想作为本节的结尾。接着，在讨论某些树/森林（尤其是 k 叉树和 $D_{r,\ n,\ s}$）的（Q2）之前，我们定义一种重要的图运算。在满足特定条件时，该运算可通过取并来组合两个 TS_k-图，从而得到一个新图。本文最后一节给出一些结论。

2 关于（Q1）的结果

本节中，我们证明关于树/森林 G 的充要条件，使得对于 $k \in \{2,3\}$，$\mathrm{TS}_k(G)$ 无环，从而部分回答（Q1）。

我们先给出一些定义和观察。图 G 的补图 $\overline{G}$ 是指满足以下条件的图：$V(\overline{G}) = V(G)$ 且 $E(G) = \{uv : uv \notin E(G)\}$。大小为 m 的匹配记作 mK_2，它是由 m 个 K_2 的副本作不交并得到的图。注意，$\mathrm{TS}_2(2K_2) \simeq C_4$。我们按如下方式标记 $D_{r,n,s}$ $(r, s \ge 1)$ 中的顶点：P_n 的顶点标记为 $p_1, \ldots, p_n$。与 p_1 相连的 r 个叶节点为 $u_1, \ldots, u_r$，与 p_n 相连的 s 个叶节点为 $v_1, \ldots, v_n$。$D_{2,2,2}$ 的形状像一个

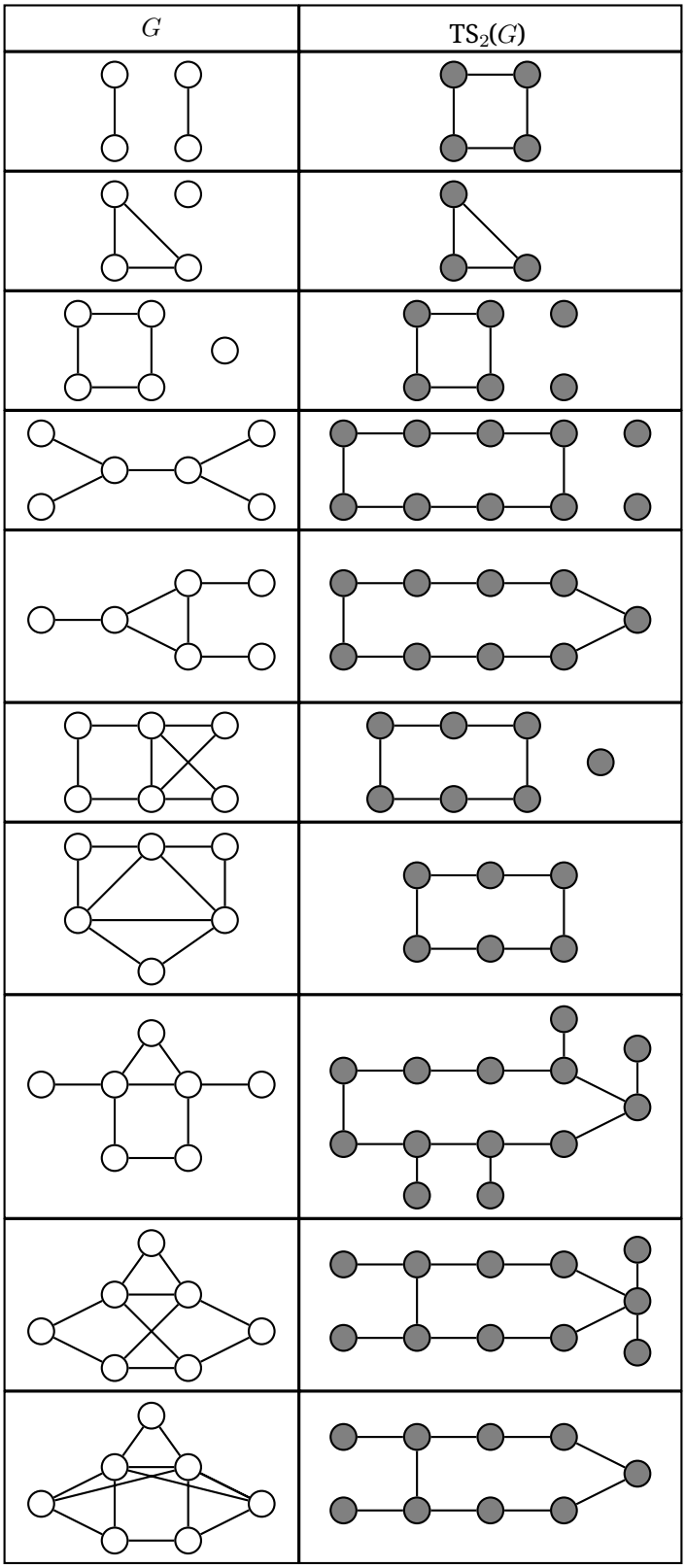


图 2：一组 $\mathcal{G}$ n 顶点图 G ($4 \leq n \leq 7$)，排除了 C_n ($n \geq 5$)；若 $\overline{\mathrm{TS}_2}(G')$ 不含环，则 G' 不包含 $\mathcal{G}$ 中的任何成员 G 作为诱导子图。

H 和 $\mathsf{TS}_2(D_{2,2,2})$ 包含一个环 C_8，其顶点集为 $\{u_1v_1, u_1p_2, u_1v_2, p_1v_2, u_2v_2, u_2p_2, u_2v_1, \overline{p_1v_1}\}$。事实上，根据 [1] 的引理 1 和图 2，如果一个 n 顶点图 G 是 C_n ($n \geq 5$)，或是图 2 所述列表 $\mathcal{G}$ 中的图（其中包括 $2K_2$ 和 $D_{2,2,2}$），则图 $\mathsf{TS}_2(G)$ 包含一个环。此外，我们有：

引理 1 . *(a)* 对于 $k \geq 2$，$\mathsf{TS}_k(2K_2 + nK_1)$，若 C_4，则包含一个环；否则它是无环的 .

(b) 对于 $k \in \{2, 3\}$、$s \geq 1$，$\mathsf{TS}_k(D_{1,n,s})$，若 C_4，则包含一个环；否则它是无环的 .

(c) 对于 $k \in \{2, 3\}$ 和 $r, s \geq 2$，$\mathsf{TS}_k(D_{r,n,s})$ 包含一个环 C_8；若 $n \geq 2k - 2$，否则它是无环的。

证明。(a) 若 $n < k - 2$，则 $2K_2 + nK_1$中不存在大小为 k 的独立集，因此其 TS_k-图显然是无环的。否则，设 $I \subseteq V(nK_1)$ 为一个任意的、大小为 $k-2$的独立集，并令$E(2K_2) = \{ab, cd\}$。那么，$\{I+a+c, I+a+d, I+b+c, I+b+d\}$ 在 $\mathsf{TS}_k(2K_2+nK_1)$ 中导出一个 C_4。

(b) 注意，若 $n \geq 2k - 1$, $D_{1,\ n,\ s}$ 包含一个诱导的 $2K_2 +(k-2)K_1$，它可以通过取 u_1p_1 和 p_nv_1 作为 $2K_2$ 的边，并从具有 $n-4$ 个顶点的路径 $D_{1,\ n,\ s} - \{u_1, p_1, p_2, p_{n-1}, p_n, v_1, \ldots, v_s\}$ 中取剩余的 $k-2$ 个独立顶点得到。（由于 $n \geq 2k-1$，这条路径有一个大小至少为 $\lceil (n-4)/2 \rceil \geq \lceil (2k-5)/2 \rceil = k-2$的独立集。）然后，使用与 (a) 中类似的论证，我们得到 $\mathsf{TS}_k(D_{1,\ n,\ s})$ 包含一个 C_4。

另一方面，对于 $n \leq 2k-2$ $k \in \{2, 3\}$，由于对于 $n \geq 2$，$D_{1、\ n-1、\ s}$ 始终是 $D_{1、\ n、\ s}$ 的诱导子图，因此如果 $\mathsf{TS}_2(D_{1、\ n-1、\ s})$ 含有环，则 $\mathsf{TS}_2(D_{1、\ n、\ s})$ 也含有环。因此，只需证明对于 $k \in \{2, 3\}$, $\mathsf{TS}_k(D_{1、\ 2k-2、\ s})$ 是无环的。事实上，根据放置在路径 $u_1p_1 \ldots p_n$ 上的标记数（至多为三个），可以验证 $\mathsf{TS}_k(D_{1、\ 2k-2、\ s})$ 的每个连通分支要么是孤立顶点，要么是路径，要么是星。

(c) 注意，如果 $n \geq 2k-2$、$D_{r、\ n、\ s}$ 包含独立集 $I+u_1+v_1$、$I+u_1+p_n$、$I+u_1+v_s$、$I+p_1+v_1$、$I+p_1+v_s$、$I+u_r+v_1$、$I+u_r+p_n$和 $I+u_r+v_s$，其中当 $n=2$ 时 $I=\emptyset$，否则 I 是路径 $p_2 \ldots p_{n-1}$ 的一个大小为 $k-2$ 的独立集。（注意，$p_2 \ldots p_{n-1}$ 的独立集大小至多为 $\lceil (n-2)/2 \rceil \geq k-2$。）它们确实在 $\mathsf{TS}_k(D_{r、\ n、\ s})$ 中诱导出一个 C_8。

另一方面，若 $n \leq 2k-3$ 对于 $k \in \{2, 3\}$，采用与 (b) 中类似的分类讨论，可以验证 $\mathsf{TS}_k(D_{r,\ n,\ s})$ 的每个连通分支都是孤立顶点、路径或星，因此它是无环的。

□

现在我们可以给出树/森林 G 满足 $\mathsf{TS}_k(G)$ 无环的充要条件，其中 $k \in \{2, 3\}$。

命题2. 设 T 是一棵树。那么 $\mathsf{TS}_2(T)$ 无环，当且仅当 T 不含 $\{2K_2, D_{2,2,2}\}$。

证明。($\Rightarrow$) 反设 $2K_2$ 或 $D_{2,\ 2,\ 2}$ 是 T 的诱导子图。第一种情形下，根据上述讨论可知 $\mathsf{TS}_2(T)$ 含有一个 C_4；第二种情形下，它含有一个 C_8。

($\Leftarrow$) 我们假设 $\mathsf{TS}_2(T)$ 包含一个环，并证明它必定包含两个禁子图之一。首先，假设 T 是一条路径 P_n。由于 $\mathsf{TS}_2(T)$ 包含一个环，由引理1(b)可知 $n \geq 5$，因此 T 包含一个诱导的 $2K_2$。

现在假设 T 有一个度至少为 3 的顶点。我们将构造 T 的一个副本 T'：首先选择 T 中度最大的顶点 a，并令 $T' = N[a]$。注意，$\mathsf{TS}_2(T')$ 是无环的。我们从 T 向 T' 添加边，并在每次添加后证明：要么 T' 包含一个禁子图，这样我们就完成了证明；要么 $\mathsf{TS}_2(T')$ 仍然无环，因此 $T \neq T'$。

令 b 为 a 中度最大的子节点，c 为度次大的子节点，d 为任意其他子节点。由于 $\mathsf{TS}_2(T')$ 是无环的，$T \neq T'$ 和 b 必须有 $r \geq 1$ 个子节点。令 e 为 b 中度最大的子节点。我们将 $N[b]$ 添加到 T'，得到 $D_{r,\ 2,\ s}$的一个副本，其中 $s = \deg_T(a) - 1 \geq 2$。如果 $r \geq 2$，则得到所需的禁用诱导子图。如果 $r = 1$，那么根据引理1(b)，$\mathsf{TS}_2(T')$ 是无环的，因此必须向 T' 添加额外的边。如果 c 有一个子节点 y，那么 $\{b, c, e, y\}$ 诱导出一个 $2K_2$。否则，e 必须至少有一个子节点 g。将 eg 添加到 T'，我们得到 $2K_2$，它是 $\{a, d, e, g\}$ 上的一个诱导子图。证明至此完成。

□

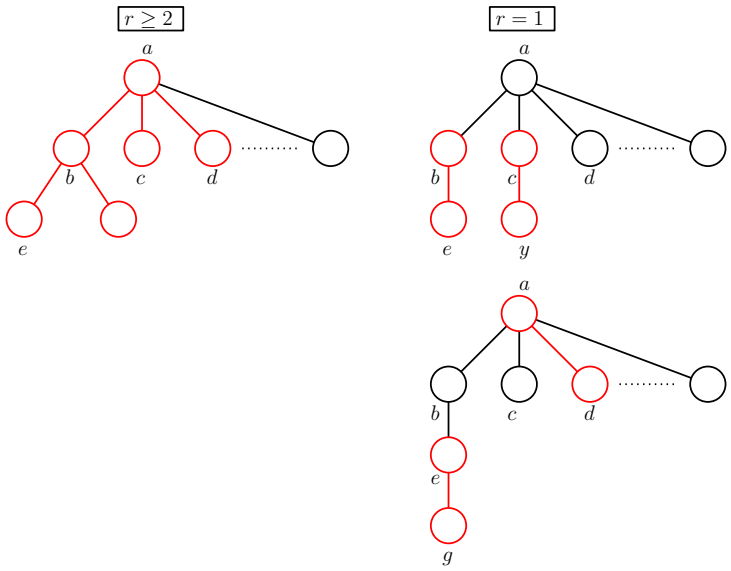


图3：命题2的示意图：一些包含 $N[b]$ 的树 T'，其 TS_2-图含有一个环。这里，r 是 b 的子节点数。$2K_2$ 和 $D_{2,2,2}$ 的副本以红色标出。

推论3。令 T 为一棵树。当且仅当 T 为 $K_{1,\ s}$ 或 $D_{1,\ 2,\ s}$（其中 s为某个正整数）时，$\mathsf{TS}_2(T)$ 是无环的。

证明。命题2的证明可以视为一种算法：输入一棵树 T，算法要么终止，并且 $T = T'$ 是推论中列出的某棵树；要么在 T 中找到一个禁诱导图。 □

推论4。设 F 是一个森林。那么，当且仅当 F 是 $\{2K_2, D_{2,2,2}\}$-自由的，$\mathsf{TS}_2(F)$ 才是无环的。

证明。我们证明，$\mathsf{TS}_2(F)$ 含有一个环，当且仅当 F 含有 $\{2K_2, D_{2,2,2}\}$ 中某个图作为诱导子图。

假设 $\mathsf{TS}_2(F)$ 含有一个环。由于独立集的大小为二，每个独立集的两个顶点都必须位于 F 的同一个连通分支 T 中。根据命题2，树 T 必须含有 $2K_2$ 或 $D_{2,2,2}$ 作为诱导子图。

反之，若 F 包含 $2K_2$ 或 $D_{2,2,2}$ 作为诱导子图，则 $\mathsf{TS}_2(F)$分别包含一个C_4 或一个 C_8。 □

转向 大小为三的稳定集这一情形时，树和森林的条件略有不同。
我们先讨论树。

命题 命题 5. 设 T是一棵树。当且仅当 T是 $\{2K_2 + K_1, D_{2,4,2}\}$-自由时，$\mathsf{TS}_3(T)$ 无环 $e.$

证明。证明的结构与命题2相同。 不过，需要考虑更多情况
。

($\Rightarrow$) 反设 $2K_2 + K_1$ 或 $D_{2,4,2}$ 是 T的一个诱导子图。第一种情况下，可推出 $\mathsf{TS}_3(T)$ 含有一个 C_4；第二种情况下，可推出它含有一个 C_8。

($\Leftarrow$) 我们假设 $\mathsf{TS}_3(T)$ 含有一个环，并证明它必定含有两个禁子图之一。证明的第一部分与命题2的证明基本相同，只需稍作修改。首先，假设 T 是一条路径 P_n。由于 $\mathsf{TS}_3(T)$ 含有一个环，根据引理1(b)，可知 $n \geq 7$，因此 T 含有一个诱导的 $2K_2 + K_1$。

现在假设 T 有一个度至少为 3 的顶点。我们将构造 T' 的一个副本 T：首先选取 T中度最大的顶点 a，并令 $T' = N[a]$。注意，$\mathsf{TS}_3(T')$ 是无环的。我们从 T向 T'添加边，并在每次添加后证明：要么 T'包含一个禁子图，此时我们便完成了；要么 $\mathsf{TS}_3(T')$仍然无环，因此 $T \neq T'$。

令 b 为 a 中度最高的子节点，c 为度次高的子节点，d 为任意其他子节点。由于 $\mathsf{TS}_3(T')$ 无环，$T \neq T'$ 和 b 必须有 $r \geq 1$ 个子节点。令 e 为 b 中度最大的子节点。如果 c 有一个子节点 y，那么 $\{b, c, d, e, y\}$ 会诱导出一个 $2K_2 + K_1$，问题便解决了。否则我们

将 $N[b]$ 添加到 T'，从而得到 $D_{r,\,2,\,s}$ 的一个副本，其中 $s = \deg_T(a) - 1 \geq 2$。根据引理1(c)，$\mathrm{TS}_3(T')$ 无环，因此 $T \neq T'$。分两种情况：

($r \geq 2$) 令 f 为 b 的另一个子节点，并令 g 为 e 的一个子节点。将 eg 添加到 T'，得到一个以 $\{a, d, e, f, g\}$ 为顶点集的诱导子图 $2K_2 + K_1$。

($r = 1$) 由于 e 是 b 的唯一子节点，它必定有子节点。令 $t \geq 1$ 表示 e 的子节点数，并令 h 为 e 中度最大的子节点。将 $N[e]$ 添加到 T'，得到 D_t 的一个副本，$_{3,\,s}$，根据引理1(c)，$\mathrm{TS}_3(T')$ 是无环的。分为以下两种子情况：

($t \geq 2$) 令 i 为 e 的任意另一个子节点。由于 $\mathrm{TS}_3(T')$ 是无环的，h 必定至少有一个子节点 j。现在我们构造出了一个以 $\{a, d, h, i, j\}$ 为顶点集的诱导子图 $2K_2 + K_1$。($t = 1$) 如果 h 只有一个子节点 k，则将 hk 添加到 T'，它是 D_1 的一个副本，$_{4,\,s}$；同样根据引理1(c)，$\mathrm{TS}_3(T')$ 是无环的。因此，k 有一个子节点 l。将 kl 添加到 T' 后，其中包含一个诱导子图 P_7，于是我们在顶点 $\{a, d, e, k, l\}$ 上找到禁子图 $2K_2 + K_1$。否则，h 至少有两个子节点，其中包括顶点 k 和 m。将边 hk 和 hm 添加到 T'，得到禁子图 $D_{2,\,4,\,2}$。证明至此完成。

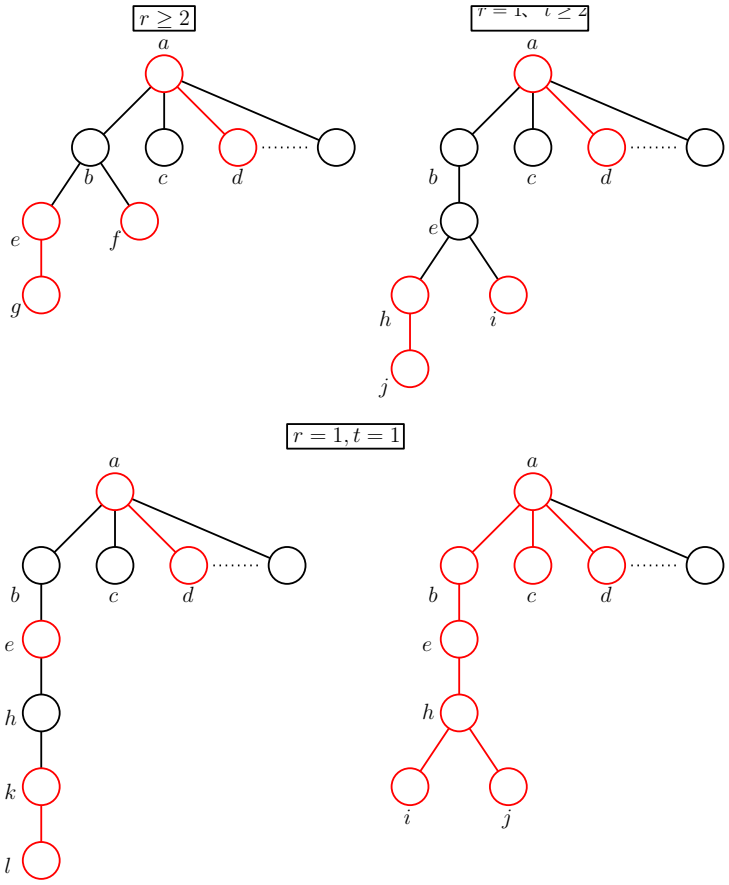


图4：命题5的示意图：一些包含 $N[b]$ 的树 T'，其 TS_3-图含有一个环。这里，r 和 t 分别是 b 及其子节点 e的子节点数。$2K_2 + K_1$ 和$D_{2,4,2}$的副本以红色标出。

□

推论6. 设 T 是一棵树。那么，$\mathrm{TS}_3(T)$ 是无环的，当且仅当对于某个正整数 s，T 要么是$K_{1,s}$, $D_{1,n,s}$，其中 $n \leq 4$；要么是$D_{r,n,s}$，其中 $r \geq 2$ 且 $n \leq 3$。

证明。 命题5的证明可以看作一种算法：它以一棵树 T为输入，要么终止并得出 $T = T'$ 是推论中列出的某棵树，要么在 T中找到一个禁诱导图，从而表明 $\mathrm{TS}_3(T)$ 有一个环。

□

推论 7。 设 F是一个森林。当且仅当 F是 $\{2K_2 + K_1, D_{2,2,2} + K_1, D_{2,\ 4,\ 2}\}$-自由时，$\mathsf{TS}_3(F)$ 是一个森林。

证明。 我们证明，$\mathsf{TS}_3(F)$ 含有一个环，当且仅当 F 包含 $\{2K_2 + K_1、D_{2、2、2} + K_1、D_{2、4、2}\}$ 中的一个作为诱导子图。

假设 $\mathsf{TS}_3(F)$ 含有一个环 C。由于独立集的大小为三，因此需要考虑三种情况。首先，若 C 中每个独立集的三个顶点都位于 F的同一个连通分支 T中，根据命题5，树 T必须以 $2K_2 + K_1$ 或 $D_{2、4、2}$ 为诱导子图。其次，假设每个稳定集中的两个顶点位于 F的同一个连通分支T中，而 F必须至少有两个连通分支。因此， C在 $\mathsf{TS}_2(T)$ 中诱导出一个环。于是根据命题2，树 T 必须以 $2K_2$ 或 $D_{2、2、2}$ 为诱导子图。由于 F 至少有两个连通分支， F包含 $2K_2 + K_1$ 或 $D_{2、2、2} + K_1$。最后，假设每个稳定集中的每个顶点都位于 F的不同连通分支中，因此它至少有三个连通分支。其中至少两个连通分支必须是非平凡的，即包含一条边。因此， F包含一个诱导 $2K_2 + K_1$。

反过来，假设 F包含 $2K_2 + K_1$, $D_{2,2,2} + K_1$ 或 $D_{2,4,2}$ 作为诱导子图。那么，在第一种情况下，$\mathsf{TS}_3(F)$包含一个 C_4 ；在另外两种情况下，则包含一个 C_8 。 □

对于 $k \geq 4$，有如下命题。

命题 8。 设 F是一个森林。对于 $k \geq 4$，如果 F包含 $2K_2 + (k-2)K_1$、$D_{2,2,2} + (k-2)K_1$或 $D_{2,4,2} + (k-3)K_1$ 作为诱导子图，那么 $\mathsf{TS}_k(F)$ 含有一个环。

证明。 可以验证，$\mathsf{TS}_2(2K_2)$包含一个 C_4，而 $\mathsf{TS}_2(D_{2,2,2})$ 和 $\mathsf{TS}_3(D_{2,4,2})$ 各自都包含一个C_8。因此，$\mathsf{TS}_k(2K_2 + (k-2)K_1)$、$\mathsf{TS}_k(D_{2,2,2} + (k-2)K_1)$ 和 $\mathsf{TS}_k(D_{2,4,2} + (k-3)K_1)$ 也分别如此。因此，$\mathsf{TS}_k(F)$含有一个环，证毕。 □

我们以关于 $k \geq 4$ 的以下猜想结束本节。

猜想 9. 设 F 是一片森林。对于 $k \geq 4$，若 $\mathsf{TS}_k(F)$ 是一片森林，则 F 是 $\{2K_2 + (k-2)K_1、D_{2、2、2} + (k-2)K_1、D_{2、4、2} + (k-3)K_1\}$-自由的。

3 H-联接与 H-分解

在讨论（Q2）之前，本节将介绍一种组合 TS_k-图以生成新图的操作。我们首先定义如下的一族基图 。设 V 是一个包含两个带标签的顶点 u 和 v的顶点集合。则 $B_k(V, uv)$是顶点集为 V 且含有单边 uv的图。我们有 $\mathsf{TS}_k(B_k(V, uv)) = K_2$ ，其两个顶点分别标记为独立集 $V - u$ 和 $V - v$。接下来，我们定义 H-联接 操作及其逆操作。

定义 10. 若顶点标记图 G_1 和 G_2 的顶点集合的交集（可以为空）定义了相同的（可以为空的）公共诱导子图 H，则称它们是 H-一致的。 H-连接是指将 H-一致的图 G_1 和 G_2 组合成图 $H(G_1, G_2)$，其中 $V(H(G_1, G_2)) = V(G_1) \cup V(G_2)$。边$E(H(G_1, G_2))$由 $E(G_1) \cup E(G_2)$以及所有满足 vw 且 $v \in V(G_1) \setminus V(H)$ 和 $w \in V(G_2) \setminus V(H)$ 的边组成。

回顾一下，在连通图 G 中，（顶点）割集是一个顶点集合 W，使得 $G-W$ 不连通。我们将此定义扩展到 G 不连通的情形，允许 $W = \emptyset$。我们称 W将 G 分解为两个（不一定连通的）诱导子图 G_1 和 G_2 ，其中 $V(G_1) \cap V(G_2) = W$ 且 $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$。如果 $G - W$ 有两个以上的（连通）连通分支，则这种分解并不唯一。

定义 11. 设 G 是一个顶点标记图。设 $W \subset V(G) = V(G)$ 将补图G 分解为 G_1 和 G_2。设 H 是由 W 诱导的 G 的子图。我们称 G 可以被 H-分解为 G_1 和 G_2。

根据定义可知，若 $G = H(G_1, G_2)$，则 G 可以被 H-分解为 G_1 和 G_2，反之亦然。容易验证，$H(G_1, G_2)$的大小为k 的独立集是 G_1 的独立集与 G_2的独立集的并。

例如，考虑两个 4顶点图 G_1 和 G_2 ，它们是路径，其边集分别为 $E(G_1) =\{ad, bc, cd\}$ 和 $E(G_2) = \{ad, ae, eb\}$。它们共享一个公共诱导子图 H，该子图具有 $V(H) = \{a, b, d\}$ 和 $E(H) = \{ad\}$。我们有 $V(H(G_1, G_2)) = \{a, b, c, d, e\}$ 和 $E(H(G_1, G_2)) = \{ad, ae, bc, cd, ce, be\}$。注意，$\mathsf{TS}_2(G_1)$ 是具有边 $\{ac - ab, ab - bd\}$ 的路径，而 $\mathsf{TS}_2(G_2)$ 是具有边

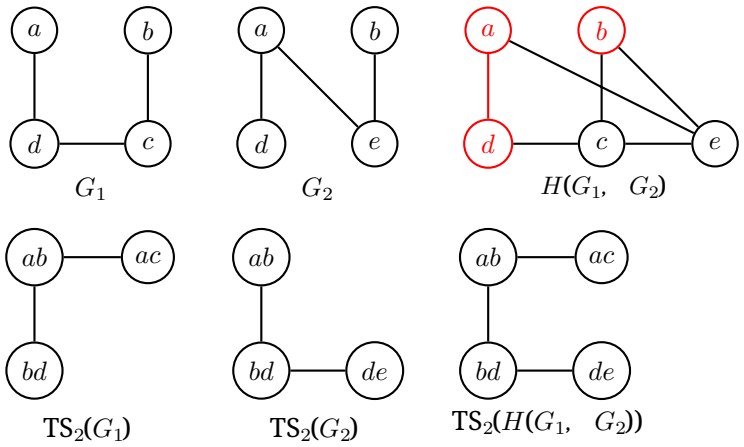


图 5：图 G_1、G_2、$H(G_1,\ G_2)$，以及它们对应的 TS_2-图。这里 $\mathrm{TS}_2(H(G_1,\ G_2))$ $=\mathrm{TS}_2(G_1)\cup\mathrm{TS}_2(G_2)$。

$\{ab-bd, bd-de\}$。可以验证，$\mathrm{TS}_2(H(G_1,\ G_2))$ 是具有边 $\{ac-ab, ab-bd, bd-de\}$ 的路径，它是两条路径 $\mathrm{TS}_2(G_1)$ 和 $\mathrm{TS}_2(G_2)$ 的并。（见图 5。）

现在考虑图 G_3，它是边为 $\{ad, cd, ce\}$ 的路径。 G_1 和 G_3 共有一个诱导子图 H，该子图与 $V(H)$ $=\{a, c, d\}$ 和 $E(H)$ $=\{ad, cd\}$ 相同。我们有 $E(H(G_1,\ G_3))$ $=\{ad, bc, be, cd, ce\}$。注意，$\mathrm{TS}_2(G_3)$ 是边为 $\{ac-ae, ae-de\}$ 的路径。在这种情况下，$\mathrm{TS}_2(H(G_1,\ G_3))$ 是边为 $\{ab-ac, ac-ae, ae-de, de-bd, bd-ab, ab-ae\}$ 的图，它是 $\mathrm{TS}_2(G_1)$、$\mathrm{TS}_2(G_3)$ 与另外两条边 $de-bd$，$ab-ae$ 的并。（参见图 6。）

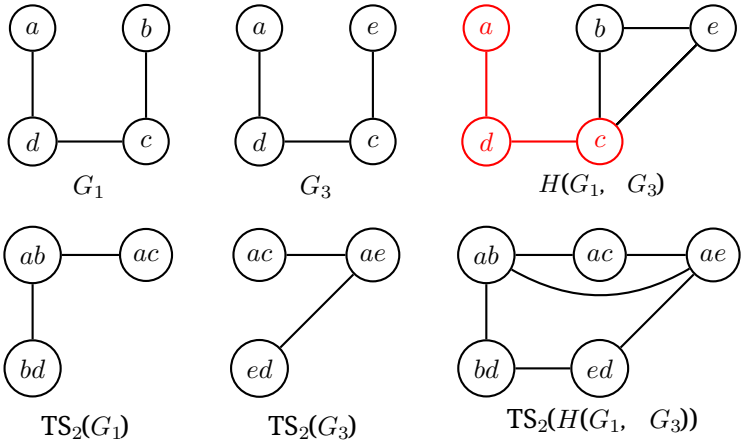


图 6：　图 G_1、G_3、$H(G_1,\ G_3)$及其对应的 TS_2-图。此处 $\mathrm{TS}_2(H(G_1,\ G_3))$ $\neq$ $\mathrm{TS}_2(G_1)\cup\mathrm{TS}_2(G_3)$。

作为本节的最后一个例子，考虑如下图 G_4 and G_5。 G_4 是边集为 $\{ae, eb, bc, cd, ad\}$ 的环，而 G_5 是边集为 $\{ae, eb, bc, ag, eg, bg\}$ 的图。 G_4和 G_5与 $V(H)$ $=\{a, e, b, c\}$ 及 $E(H)$ $=\{ae, eb, bc\}$ 共有一个公共诱导子图 H。我们有 $E(H(G_4, G_5))$ $=\{ae, eb, bc, cd, ad, ag, eg, bg, dg\}$。在这种情况下，$\mathrm{TS}_2(H(G_4, G_5))$ 是边集为 $\{ab-ac, ac-ce, ce-de, de-bd, ab-bd, ac-cg, ce-cg\}$ 的（非无环）图，它是 $\mathrm{TS}_2(G_4)$ 和 $\mathrm{TS}_2(G_5)$ 的并。（见图 7。）

在下一个命题中，我们说明如何计算 H-join 的 TS_k-图，从而推广上面给出的例子。

命题 12. 设 $k\geq 2$，并设 G_1 和 G_2 是两个 H-一致图。$\mathrm{TS}_k(H(G_1, G_2))$ 是$\mathrm{TS}_k(G_1)$、$\mathrm{TS}_k(G_2)$ 以及对于满足以下条件的每一对 k 元独立集 S_1（属于 G_1）和 S_2（属于 G_2）的并

$$|S_1\cap V(H)| = |S_2\cap V(H)| = |S_1\cap S_2| = k-1, \tag{1}$$

S_1 与 S_2之间的边。

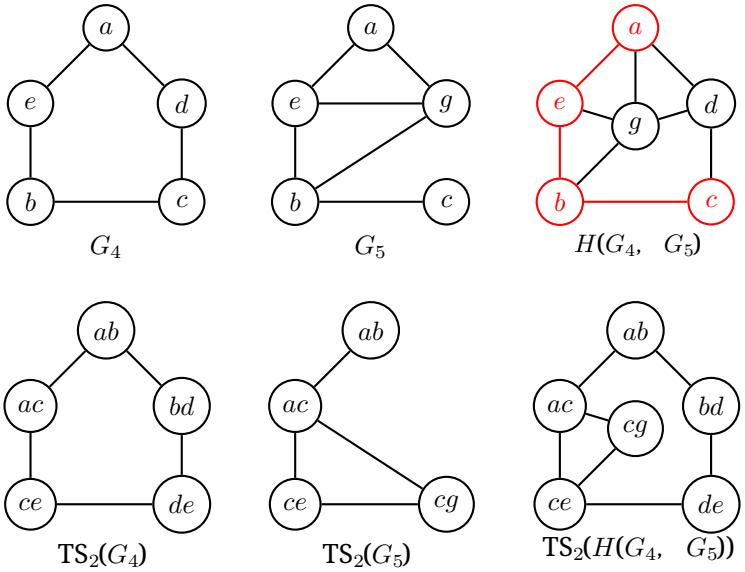


图 7：图 G_4、 G_5、 $H(G_4,\ G_5)$ 及其对应的（非无环）TS_2-图。这里，$\mathsf{TS}_2(G_4,\ G_5) = \mathsf{TS}_2(G_4) \cup \mathsf{TS}_2(G_5)$。

证明。如前所述， $H(G_1, G_2)$的 k元素独立集与 G_1 和 G_2的独立集的并相同。因此， $V(\mathsf{TS}_k(H(G_1, G_2))) = V(\mathsf{TS}_k(G_1)) \cup V(\mathsf{TS}_k(G_2))$。接下来，考虑$E(\mathsf{TS}_k(G_1))$（分别为 $E(\mathsf{TS}_k(G_2))$）中的一条边。它是 S_1 和 S_2 这两个独立集之间的令牌滑动，其中 S_1 和 S_2 属于 G_1（分别属于 G_2）。在 $H(G_1, G_2)$中，这仍然是一次令牌滑动。因此， $E(\mathsf{TS}_k(G_1)) \cup E(\mathsf{TS}_k(G_2)) \subseteq E(\mathsf{TS}_k(H(G_1, G_2)))$。现在，考虑 $E(\mathsf{TS}_k(H(G_1, G_2)))$中连接两个独立集 S_1 和 S_2的一条边。如果这两个独立集都属于 G_1 （分别属于 G_2），那么该边也存在于 $E(\mathsf{TS}_k(G_1))$（分别存在于 $E(\mathsf{TS}_k(G_2))$）中。否则，不妨设 $E(\mathsf{TS}_k(H(G_1, G_2)))$中的这条边的端点是：一个属于 G_1 （但不属于 G_2）的独立集 S_1 ，以及一个属于 G_2 （但不属于G_1）的独立集 S_2 。我们有 $S_1 \cap S_2 \subset V(H)$，并且由于 S_1 和 S_2 相邻， $|S_1 \cap S_2| = k - 1$。由此可得$|S_1 \cap V(H)| = |S_2 \cap V(H)| = k - 1$，因此条件 (1) 得到满足。我们已经证明，$E(\mathsf{TS}_k(H(G_1, G_2)))$中的每条边要么属于$\mathsf{TS}_k(G_1)$、$\mathsf{TS}_k(G_2)$，要么满足条件 (1)，从而证明了该命题。□

对于两个 H-一致图 G_1 和 G_2，若不存在满足命题 12 的条件 (1) 的k-元独立集，我们就称 $H(G_1, G_2)$是 k-无交叉的 。例如，可以验证图 5 中的图 $H(G_1,\ G_2)$ 和图 7 中的图 $H(G_4,\ G_5)$ 都是 k-无交叉的，而图 6 中的图$H(G_1,\ G_3)$则不是。以下结果将用于构造 TS_k-树/森林。

推论 13. 设 $k \geq 2$，且 G_1 和 G_2 是两个 H-一致图。 $H(G_1,\ G_2)$ 无 k-交叉，当且仅当

$$\mathsf{TS}_k(H(G_1, G_2)) = \mathsf{TS}_k(G_1) \cup \mathsf{TS}_k(G_2). \tag{2}$$

证明。 如果 $H(G_1,\ G_2)$ 无 k-交叉，则由命题 12 可得 (2)。否则，存在 k 元独立集 S_1 属于 G_1，以及 S_2 属于 G_2，满足 (1)。这意味着 $\mathsf{TS}_k(H(G_1,\ G_2))$ 在 S_1 和 S_2 之间包含一条额外的边。□

因此，如果 $H(G_1,\ G_2)$ 无 k-交叉，且 $\mathsf{TS}_k(G_1)$ 和 $\mathsf{TS}_k(G_2)$ 均无环，那么 $\mathsf{TS}_k(H(G_1,\ G_2))$ 也无环。定义 H-join 时允许 H 为空的原因是，这样该推论便适用于顶点不相交图 G_1 和 G_2，因为此时 $H(G_1,\ G_2)$ 显然无 k-交叉。因此，我们可以由树（或森林）的重配置图构造森林的重配置图。

以下结果由上文讨论的 H-join 与 H-decomposition 之间的关系得出。

推论 14。 如果 G 可以分解为 H、 G_1 、 G_2 和 H，并且 $(G_1$、$G_2)$ 是 k-无交叉的，那么 $\mathsf{TS}_k(G)$可以分解为 $\mathsf{TS}_k(G_1)$ ∪$\mathsf{TS}_k(G_2)$。

4 关于（Q2）的结果

目前，我们还没有关于森林 F 何时为 TS_k-图的一般充要条件，但本节将介绍一些部分结果。首先，我们回顾一下：在 [1] 中证明了，对于所有 $n \geq 1$ 和 $k \geq 2$ 以及 $K_{1,\ n}$ 是 TS_k-图，当且仅当 $n \leq k$。本节将利用第 3 节中介绍的连接操作，从具有单边的图构造无环 TS_k-图。我们证明了，该操作为构造作为路径和星的 TS_k-图提供了另一种方法。此外，该操作还可用于构造更一般的 TS_k树/森林，尤其是 k-元树类和 $D_{r、\ n、\ s}$的成员。

4.1 再探路径与星

仅使用第 3 节定义的基图和 H-连接操作，我们就能得到大量 TS_k 树/森林。我们先从路径开始。对于任意 $k \geq 2$, 令 $J_k = \{b_1, \ldots, b_k\}$ 为一个大小为 k 的独立集，并定义基图 $B_k^i = B_k(J_{k-2} \cup \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\},\ a_i a_{i+2})$，再令 $G_2 = B_k^i$。

命题 15。 </style}对于，和 与 一致，其中 为独立集 。定义： $= H(G_i, B_k^i)$。那么

$$\mathsf{TS}_k(G_{i+1}) = \mathsf{TS}_k(G_i) \cup \mathsf{TS}_k(B_k^i) \simeq P_{i+1}.$$

证明。 我们将通过归纳法证明，对于 $i \geq 2$, $\mathsf{TS}_k(G_i)$ 是路径 P_i，其顶点标记为 $J_{k-2} \cup \{a_j, a_{j+1}\},\ j = 1,\ \ldots,\ i$。对于基本情形 $i = 2$，我们注意到 $\mathsf{TS}_k(B_k^i)$ 确实是一条路径，其顶点标记为 $J_{k-2} \cup \{a_1, a_2\}$ 和 $J_{k-2} \cup \{a_2, a_3\}$。

对于归纳步骤，我们注意到，对于 $i \geq 2$、G_i 和 B_k^i，它们与 H 中的独立集 $J_{k-2} \cup \{a_i, a_{i+1}\}$ 是 H-一致的。为了验证 $H(G_i, B_k^i)$ 是 k-无交叉的，注意到在 B_k^i 中我们只需考虑独立集 $J_{k-2} \cup \{a_{i+1}, a_{i+2}\}$。在路径 P_i（即 $\mathsf{TS}_k(G_i)$）中，候选独立集为 $J_{k-2} \cup \{a_j, a_{j+1}\}$、$j = 1$、.....、$i$。它们与 B_k^i 的交集为 J_{k-2}，其基数为 $k-2$。因此，命题 12 的条件 (1) 不满足，这确实证明了 $H(G_i, B_k^i)$ 是 k-无交叉的。我们定义 $G_{i+1} := H(G_i, B_k^i)$。根据推论 13，$\mathsf{TS}_k(G_{i+1})$ 是上述带标记的 P_i 与一个端点为 $J_{k-2} \cup \{a_i, a_{i+1}\}$ 和 $J_{k-2} \cup \{a_{i+1}, a_{i+2}\}$ 的 P_2 的并。这就是所需的 P_{i+1}。 □

根据命题中的 H-联接可作一个简单的归纳论证，证明对于 $i \geq 2$, G_i 同构于 $P_{n+1} \cup J_{k-2}$；这一结果已在 [1] 的推论 5(a) 中证明。（注意，在 G_i 中，顶点 a_{i+1} 与每个 a_j 都相邻，其中 $1 \leq j \leq i-1$。）

接下来，我们考虑图 G_i，使得 $\mathsf{TS}_k(G_i)$ 是星 $K_{1,\ i}$。对于 $k \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq k$，令 $I_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ 为大小为 k 的独立集，定义基图 $C_k^i = B_k(I_k + b_i,\ a_i b_i)$，并令 $G_1 = C_k^1$。

命题 16。 对于 $k \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq k$，G_i 与 C_k^{i+1} 关于 H（即独立集 I_k）是 H-一致的。定义 $G_{i+1} := H(G_i, C_k^{i+1})$。那么

$$\mathsf{TS}_k(G_{i+1}) = \mathsf{TS}_k(G_i) \cup \mathsf{TS}_k(C_k^{i+1}) \simeq K_{1,i+1}.$$

证明。 我们将对 $i \geq 1$进行归纳证明：$\mathsf{TS}_k(G_i)$ 是星 $K_{1,\ i}$ 其中心标记为 I_k，叶节点标记为 $I_k + b_j - a_j,\ j = 1,\ \ldots..,\ i$。对于基本情形 $i = 1$，我们确实观察到 $\mathsf{TS}_k(C_k^i)$ 是一个$K_{1,\ 1}$ 其中心标记为 I_k，叶节点标记为 $I_k + b_1 - a_1$。

对于归纳步骤，我们注意到，对于 $i \geq 1$、G_i 和 C_k^{i+1}，它们与 H 中的独立集 I_k 是 H-一致的。为验证 $H(G_i, C_k^{i+1})$ 是无 k-交叉的，注意到在 C_k^{i+1} 中我们需要考虑的唯一独立集是 $I_k + b_{i+1} - a_{i+1}$。在上面标记为 K_1 的$_i$ 中，即 $\mathsf{TS}_k(G_i)$，条件 (1) 的候选独立集为 $I_k + b_j - a_j$、$j = 1$、.....、i。它们与 $I_k + b_{i+1} - a_{i+1}$ 的交集基数为 $k-2$。因此，条件 (1) 不满足。我们定义$G_{i+1} := H(G_i, C_k^{i+1})$。根据推论 13，$\mathsf{TS}_k(G_{i+1})$ 是上面标记为 K_1、$_i$ 的并集，以及一个 K_1、1；其中心同样标记为 I_k，叶节点标记为 $I_k + b_{i+1} - a_{i+1}$。这就是所需的 K_1、$_{i+1}$。 □

4.2 k 叉树

在本节中，我们证明，对于每个 $k \geq 2$，每棵 k 叉树都是 TS_{k+1}-图（命题 19）。接下来，我们证明任意树 T 都是某个 TS_2-森林 的诱导子图（命题 22）。此外，我们陈述并证明了 T 是某个 TS_2-树的诱导子图的充要条件

（命题 23）。此外，当 $T = K_{1,\ n}$时，我们给出了 T 是某个 TS$_k$-树的诱导子图的一个充分条件（命题 24）。

我们首先定义规范顶点标记。在本小节中，对于任意整数 n，定义$I_n := \{a_1, \ldots, a_n\}$ 以及 $J_n := \{b_1, \ldots, b_n\}$。

定义 17. 设 $k \geq 2$ 和 G 是一个图，其中 $T :=$TS$_{k+1}(G)$是一棵 k叉树。若 G和 T 满足以下条件，则称它们是规范标记的：

(a) T 的根标记为 I_{k+1},

(b) 根的 $d \leq k$ 个子节点标记为 $I_{k+1} - a_i + b_i$、 $i = 1$、.....、 d,

(c) 不使用标签 b_j、 $j = d + 1$、.....、 k（如果有），并且

(d) T中的所有其他节点均赋予标签 S，使得 $|I_{k+1} \cap S| \leq k - 1$。

显然，根据 (a) 和 (b) 进行标记，并以星的中心作为根，是一种规范标记。在本小节中，我们将证明每棵 k元树都有规范标记，从而证明它是一个 TS$_{k+1}$图。首先，我们给出一个引理，说明如何将带有规范标记的k元树组合成一棵更大的、带有规范标记的 k元树。

引理 18。 对于整数 $k \geq 2$ 和 $1 \leq i \leq d \leq k$, 设 G_i 是一个图，使得 TS$_{k+1}(G_i)$ 是一棵带有规范标记的 k元树。我们可以构造一棵带有规范标记的 k元树 T，它同构于通过选取一个新根并将其连接到每个 T_i的根所形成的树。

证明。 证明包括：在进行适当的重新标记后，在带有规范标记的 $K_{1,\ d}$的叶节点与带有规范标记的树 T_i、$i = 1$、.....、 d的根之间进行一系列 H-连接。假设 T_i 的根有 $n_i \leq k$ 个子节点。我们按如下方式重新标记底层图中的顶点：

(i) 将 G_i 中不属于 $I_{k+1} \cup J_k$ 的顶点重新标记为互不相同，即对于 $1 \leq i \leq j \leq d$，我们有 $V(G_i) \cap V(G_j) \subseteq I_{k+1} \cup J_k$,

(ii) 对于 $i = 1, \ldots d, \quad j = 1, \ldots, \ n_i$，设置 $b_j \leftarrow b_j^i$，其中这些 b_j^i此前尚未使用，并且

(iii) 对于 $i = 1, \ \ldots d$，设置 $a_i \leftarrow a_{k+1}$和 $a_{k+1} \leftarrow b_i$。

为简化起见，我们滥用记号，令对于 $i = 1, \ldots, \ d$， G_i和 T_i分别表示重新标记后的图和树。条目 (i) 确保两棵树之间共享的标签仅位于 $I_{k+1} \cup J_k$中，(ii) 确保 T_i 中来自 J_k 的所有标签都被赋予唯一标签以避免冲突，而 (iii) 则为 T_i 的根赋予正确的标签，使其成为一个带有标签 I_k的新根的子节点。我们注意到，重新标记后， b_i 仅出现在T_i中， a_i 不出现在 T_i 中，并且 T_i 之间共享的标签仅位于 I_k中。此外，所有树顶点都具有唯一标签。

接下来取一个规范标记图 G^0，使得 TS$_{k+1}(G^0) \simeq K_{1,d}$，且星的中心标记为 I_{k+1}。对于 $i = 1, \ldots, d$，我们声称， H-连接 $G^i := H(G^{i-1}, G_i)$ 定义良好、无 k-交叉，并且 TS$_{k+1}(G^i)$ 是规范标记的。为此，注意在该次迭代中， i, $V(G^{i-1}) \cap V(G_i) = I_{k+1} - a_i + b_i$，它是 T_i 的根的标记，也是 TS$_{k+1}(G^{i-1})$ 的叶节点。由定义 17(d) 可知，命题 12 的条件 (1) 不满足。因此，根据推论 13，TS$_{k+1}(G^i)$ 是通过将 T_i 附加到 TS$_{k+1}(G^{i-1})$ 中对应的叶节点而从 TS$_{k+1}(G^{i-1})$ 得到的。定义 17 的条件均满足，因此 TS$_{k+1}(G^i)$ 是规范标记的。在迭代 d, $T :=$ 结束时，TS$_{k+1}(G^d)$ 就是所需的树。 □

证明中描述的构造如图 8 所示。现在我们可以证明本节的主要结果。

命题 19. 对于每棵 k 叉树 T，都存在一个规范标记图 G，使得 $T \simeq$ TS$_{k+1}$（G ）.

证明。 假设 r T的根有 $d \leq k$ 个子节点。我们对 T的高度 t 使用归纳法来证明该命题，其中高度是从根到叶节点的最长路径长度。若 $t = 1$，则 $T \simeq K_{1,\ d}$，因此具有如定义 17 之后所述的规范表示。否则，删除 r后可得到 d 个子树 T_i, $i = 1$、.....、 d，它们也是 k叉树，且高度小于 t。因此，根据归纳法，每个 T_i 都可以表示为规范标记图 G_i。由命题 18 可知，我们可以进行 d H-连接，从而得到规范标记图 G，使得 $T \simeq$TS$_{k+1}(G)$。 □

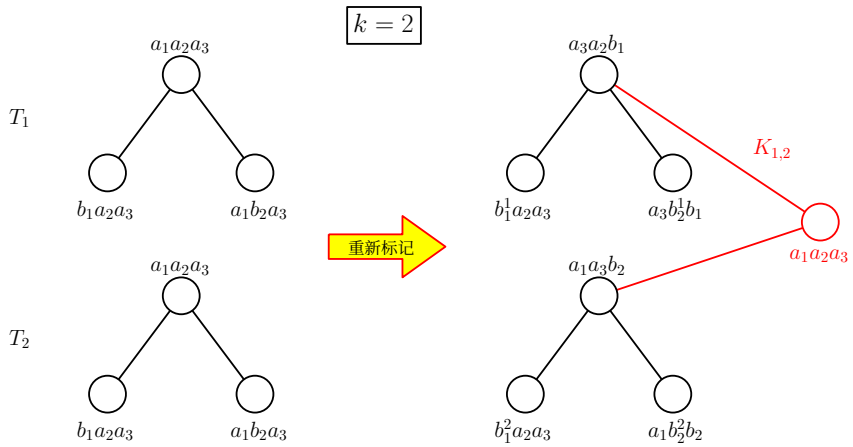


图 8：由两个 $K_{1,2}$构造 $D_{2,3,2}$ 。

如第4节所述， [1]、 $K_{1,\ k+1}$ 是一个并非 TS_k-图的 k叉树，因此该命题是紧的。尽管如此，如果我们向 $K_{1,\ t}$中添加足够多的孤立顶点，对于 $t > k$，它就会成为 TS_2-图——我们现在将一般性地证明这一结果。接下来，我们需要一种特殊的树标记方式。

定义 20. 树 T 是良标记的， 当且仅当

(a) T 的根 r 标记为 ab；(b) r的 d 个子节点的根分别标记为 $r_i = bc_i, i = 1, \ldots, d-1$ 和 $r_d = ac_d$；(c) 仅有的包含 a 和 b 的标签是 $ab, ac_d, bc_i, 1 \le i \le d-1$；(d) 对于 $i = 1, \ldots, d$，标签 c_i 只出现在以 r_i为根的子树中。

注意， r的子树顺序并无特别之处。以 r_i 为根的子树可以通过交换 $a \leftrightarrow b$ 和 $c_i \leftrightarrow c_d$来重新标记这两个子树，从而扮演 r_d 的角色；这样仍能使 T 保持良标记。例如，对于 $d \ge 1$ ，只需使用 (a) 和 (b)，就可以对 $K_{1,d}$ 进行良标记。考虑由 $V(G) = \{a, b\} \cup \{c_i : 1 \le i \le d\}$ 和 $E(G) = \{ac_i, c_ic_d : 1 \le i \le d-1\} \cup \{bc_d\}$定义的图 G。此外，令 $J = \{c_ic_j : 1 \le i < j \le d-1\}$。不难验证，$\mathsf{TS}_2(G) \simeq K_{1,d} + (d-1)(d-2)K_1$，其中 $K_{1,d}$ 是良标记的，而 K_1 由集合 J中的标签标记。这启发了下面的定义。

定义 21. 如果存在一个整数 n ，使得 $\mathsf{TS}_2(G) \simeq T + nK_1$ ，且 T 是良好标记的，那么树 T 就称为被标记图 良好标记。

现在我们给出以下一般性结果。

命题 22. 对于每棵树 T ，都存在一个图 G 和一个整数 n ，使得 T 被 G良好标记，且 $\mathsf{TS}_2(G) \simeq T + nK_1$。

证明。对 N（给定树 T中的节点数）使用归纳法。正如上文所述，该命题对所有星 $K_{1,t}$ 均成立，因此它们构成基本情形。在归纳步骤中，假设该命题对所有含 N 个节点的树均成立，并考虑一棵含 $N+1$ 个节点的树 T。若 T 是星，则结论成立。否则，令 r 为 T 的根，并假设 r 的度为 d ，其子节点 r_i 分别是子树 $T_i, 1, \ldots, d$ 的根。我们还可以假设 T_d 是 T 的一棵高度至少为一的子树。现在我们从 T 构造两棵树。第一棵 T^1 由 T 删除子树 T_d，并在其根 r 处添加一个悬挂顶点得到。第二棵 T^2 由 T_d 在其根r_d处添加一个悬挂顶点得到。根据归纳法，存在整数 n_1, n_2 和图 G^1, G^2，它们分别良好标记 T^1 和 T^2，且满足 $\mathsf{TS}_2(G^1) \simeq T^1 + n_1K_1$ 以及 $\mathsf{TS}_2(G^2) \simeq T^2 + n_2K_1$。除定义 20 中使用的顶点标签外，我们可以假设 G^1 和 G^2 中的顶点标签互不相同。

我们将证明 G^1 与重新标记后的 G^2 可以通过 H 相连，而这将确定添加到 T^1 和 T^2 上的悬挂边，从而还原出 T。在 T^1 中，我们注意到根 r 标记为 ab；如有必要，通过重新标记子树根，可以使添加的悬挂顶点标记为 ac_d。在 T^2 中，根 r_d 也

标记为 ab，并且我们同样可以假设添加的悬挂顶点标记为 ac_d。在 T^2 中，我们交换标签 $b \leftrightarrow c_d$，并将集合 $c_i \leftarrow c'_i$、$i = 1$、……、$d-1$ 重新标记为标签 c'_i，这些标签在 T^1 和 T^2 中均未使用。令 G^3 和 T^3 分别表示重新标记后的 G^2 和 T^2。设 $H = \{a, b, c_d\}$，则有 $V(G^1) \cap V(G^3) = H$。H 在 G^1 和 G^3 中诱导出相同的子图，其中包含单边 bc_d。G^1 和 G^3 是 H-一致的，并且由于 $k = 2$ 及其顶点集其余部分互不相交，命题 12 的条件 (1) 不满足。令 $G^4 = H(G^1, G^3)$。应用推论 13，可得

$$T^4 := \mathsf{TS}_2(G^4) \simeq \mathsf{TS}_2(G^1) \cup \mathsf{TS}_2(G^3) \simeq \{T^1 + n_1 K_1\} \cup \{T^3 + n_2 K_1\} \simeq T + (n_1 + n_2)K_1.$$

由 G^4 正确标记。这就证明了该命题。 □

该命题的证明见图 9。该命题告诉我们，对于每棵树

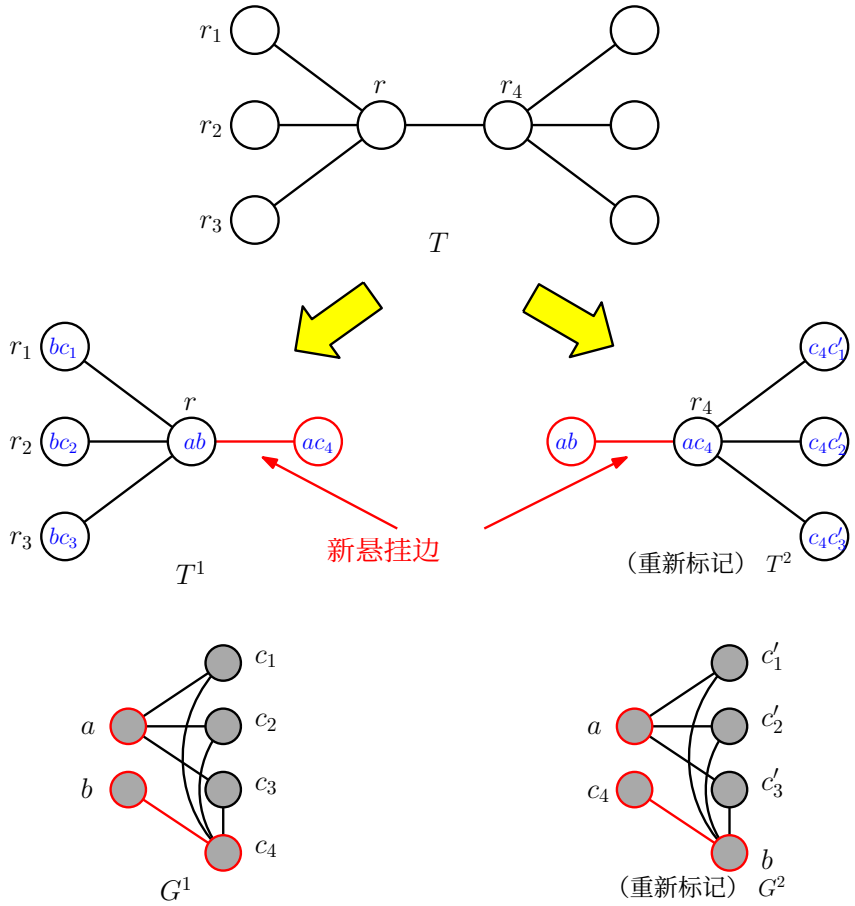


图 9：命题 22 的示意图。

T 存在一个图 G，使得 $\mathsf{TS}_2(G)$ 是一个包含 T 作为诱导子图的森林。因此，不存在以森林为 TS_2-图的禁诱导子图刻画。然而，这并不意味着不存在以树为 TS_2-图的禁诱导子图刻画。事实上，在接下来的命题中，我们将给出一些这样的刻画。

命题 23。设 T 是一棵树。当且仅当 T 是一棵3叉树时，存在一棵包含 T 的TS_2-树。

证明。($\Leftarrow$) 在命题 22 的证明中，我们看到，只有当星的基本情形作为子问题出现时，才会添加孤立顶点。因此，只需考虑 $T = K_{1,t}, 1 \leq t \leq 4$ 的情形。正如我们所指出的，$K_{1,3}$ 和 $K_{1,4}$ 都不是 TS_2-图。不难看出，存在一个 G^1，使得 $\mathsf{TS}_2(G^1) \simeq K_{1,3} + K_1$。然而，通过向 G^1 添加一个额外顶点，我们可以构造一个图 G^2，使得 $\mathsf{TS}_2(G^2) \simeq D_{1,3,2}$。此外，我们还可以将$H$-join应用于两个 G^2 的副本，这两个副本具有略有不同的顶点标记，从而构造出一个图 G^3，使得 $\mathsf{TS}_2(G^3)$ 同构于一个 P_7，其路径的中点上连接着两个悬挂顶点。（见图 10。）因此可知，当 $T = K_{1,t}, 1 \leq t \leq 4$ 时，对于某个图 G，我们可以将其嵌入为树$T' = \mathsf{TS}_2(G)$ 的诱导子图（见图 10）。if 方向的证明完成。

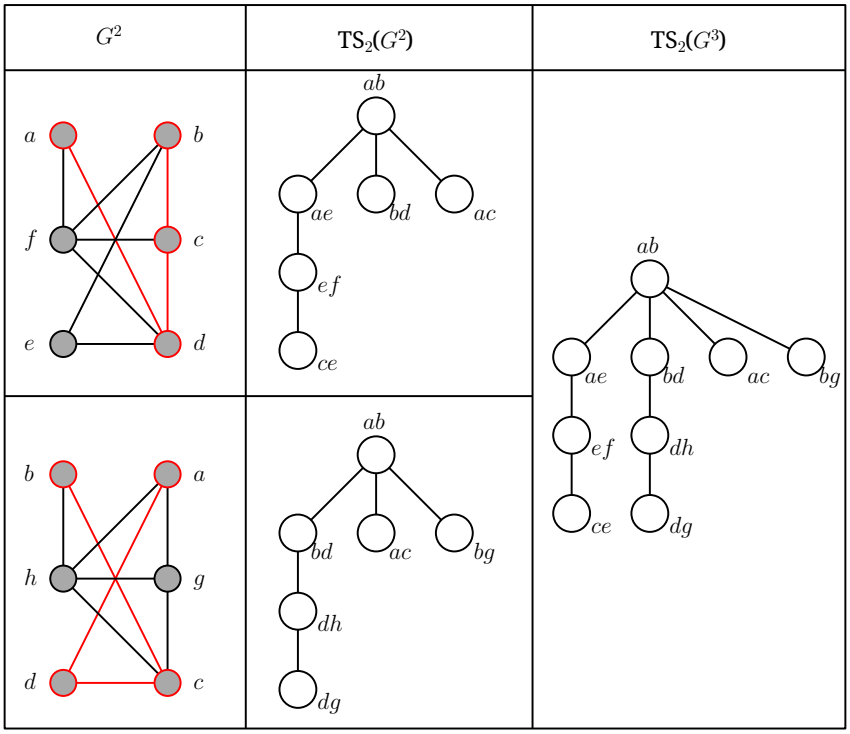


图 10: 对两份 G^2 取 H-联结，其中 H 是路径 $adcb$，得到图 G^3，使得 $TS_2(G^3)$ 同构于一条路径，其中点上连有两个悬挂顶点。

(⇒) 我们证明，如果 T 是一个 k叉树，但对于 $k \geq 4$ 而言不是 3叉树，那么不存在任何包含 T（作为诱导子图）的 TS_2-树 T'。（根据定义，任何 k叉树对于 $\ell \geq k$ 而言也是一个 ℓ叉树。）设 x 是 T 的一个顶点，其度至少为五。（由于 T 是一个 k叉树，但不是 3叉树，因此这样的顶点 x 存在。）

反设 T' 存在，即存在一个图 G'，使得 $T' \simeq TS_2(G')$ 包含T。不失一般性，假设 x 标记为 ab，其中 $\{a, b\}$ 是 G'的一个大小为 2 的稳定集。根据鸽巢原理，我们还可以假设 x 的三个邻点 x_1、x_2和 x_3分别标记为 ac、ad和 ae。由于 T' 是一棵树，因此 cd、ce和 de 分别是 y_1、y_2和 y_3的标签，其中 y_i与$1 \leq i, j \leq 3$中的任何一个都不相邻。由此可知，T'包含标记图 $F \simeq K_{1,3} + 3K_1$，因此 G'必须

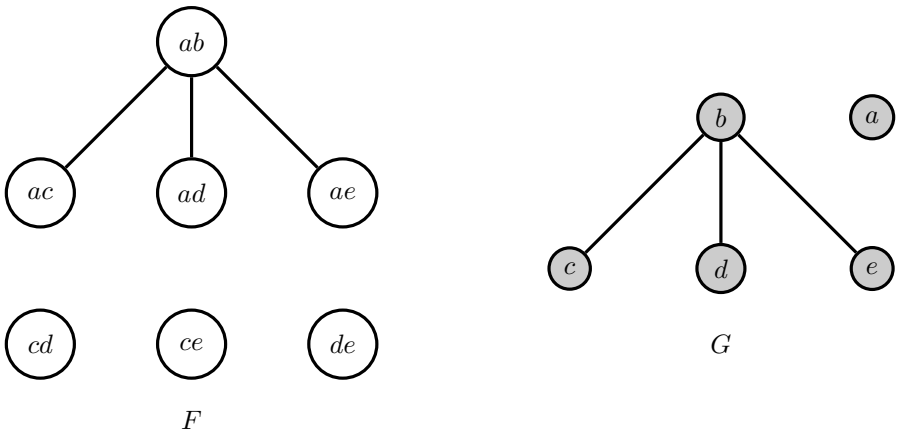


图11：命题 23 证明中的图 F 和 G。

包含标记图 $G \simeq K_{1,3} + K_1$ 作为诱导子图，二者均如图11所示。由于 $T' \simeq TS_2(G')$ 是一棵树，且 G' 包含 G，因此 G' 恰有一个非平凡连通分支 C（含有两个以上顶点），并且 C 包含 G；否则，G' 必定包含一个

由 $2K_2$ 诱导而成，且根据命题2，其 TS_2-图不是一棵树，矛盾。

– 情形 1： $a \in V(C)$。根据定义，在 G' 中， a 到 b、c、d、e 中任意一个顶点的距离至少为二。若 a 与 c、d、e 中某个顶点之间存在一条长度至少为二且不经过 b 的路径，则图 G' 包含一个 $2K_2$，矛盾。因此， a 与 c、d、e 中任意一个顶点之间的路径都必须经过 b。此外，若 a 与 b 之间存在一条长度至少为三且不经过 c、d、e 中任何顶点的路径，则图 G' 同样包含一个 $2K_2$，矛盾。由于 $a \in V(C)$，可知 a 和 b 在 G' 中必有一个公共邻点，记为 f。注意，对于每个 $y \in V(C) - \{a, b, c, d, e, f\}$， y 必须在 G' 中与 b 相邻；否则， G' 或包含 $2K_2$，或包含 $D_2$2,2，并且根据命题2，其 TS_2-图不是一棵树，矛盾。然而，这意味着 $\mathsf{TS}_2(C)$ 必须是森林；又由于 G' 恰有一个非平凡连通分支 C，因此 $\mathsf{TS}_2(G')$ 也是森林，矛盾。

– **情形 2：** $a \notin V(C)$。在这种情形下， G' 的大小为 2 的稳定集分为两类：包含 a 的稳定集，以及不包含 a 的稳定集。由于 G' 包含 G，每一类至少有一个成员。此外，由于 a 是孤立的（唯一的非平凡连通分支是 C，而 a 不在其中），两类中的任一成员在 $\mathsf{TS}_2(G')$ 中都不与另一类的成员相邻，这意味着 $\mathsf{TS}_2(G')$ 确实是不连通的，矛盾。

在上述情形中，我们证明了必然会出现矛盾。我们的证明完成 e.

□

事实上，对于 $K_{1,\ n}$，一般而言，我们有

命题 24. *Th* 存在一棵 TS_k 叉树 T，其中包含 $K_{1,\ n}$ 若 $n \leq 2k$。

证明。 由 [1] 或命题 16可知，该命题对 $n \leq k$成立。（事实上，在此情况下，$T = K_{1,\ n}$。）
因此，只需考虑 $k+1 \leq n \leq 2k$。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-k\}$，令 $A_i = \{1, \ldots, k\} - i$。

令 $I_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$和 $B_n = \{b_1, \ldots, b_n\}$。我们构造一个图 G^0，使得 $\mathsf{TS}_k(G^0) \simeq K_{1,\ n} + (n-k)(k-1)K_1$。令 $I_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$和 $B_n = \{b_1, \ldots, b_n\}$。令 $V(G) = I_k + B_n$。B_n 中的顶点构成一个图 $K_n - M$，其中 M 是包含 $b_i b_{k+i}$的匹配，且 $1 \leq i \leq n-k$。此外，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，我们在 G^0 中添加一条边，使其连接 a_i 与 b_i 和 b_{k+i}。注意， $V(\mathsf{TS}_k(G^0))$由 I_k、集合 $I_k - a_i + b_i (1 \leq i \leq k)$、 $I_k - a_i + b_{k+i} (1 \leq i \leq n-k)$以及$(I_k - a_i + b_i) - a_j + b_{k+i} (1 \leq i \leq n-k$和 $j \in A_i)$组成。此外，可以验证，独立集$(I_k - a_i + b_i) - a_j + b_{k+i}$在 $\mathsf{TS}_k(G^0)$ 中是孤立的，其余独立集构成一个$K_{1,\ n}$，其中 I_k 与其他每个集合都相邻。简言之， G^0 确实是我们所需的图。

对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-k\}$，我们构造一个图 G^i，使其 TS_k-图是一个星 $K_{1,\ k-1}$如下。令 $V(G^i) = (I_k - a_i + b_i) + \bigcup_{j \in \{1, \ldots, k\} - i} \{c^i_j\}$。 $\bigcup_{j \in A_i} \{c^i_j\}$ 中的顶点在 G^i 中构成一个大小为 $k-1$ 的团。对于每个 $j \in A_i$，我们还在 G^i 中添加一条连接 a_j 和 c^i_j 的边。由 [1] 或命题 16 可验证，$\mathsf{TS}_k(G^i) \simeq K_{1,\ k-1}$ 符合要求。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-k\}$ 和 $j \in A_i$，我们构造一个图G^i_j，使其 TS_k-图是一个 K_2，如下所示。令 $V(G^i_j) = (I_k - a_i + b_i) - a_j + b_{k+i} + c^i_j$。$G^i_j$ 中唯一的边是连接 c^i_j 和 b_{k+i} 的边。由 [1] 或命题 15 可验证，$\mathsf{TS}_k(G^i_j) \simeq K_2$符合要求。

现在，我们构造一个图 G，其 TS_k-图是一棵包含 $K_{1,\ n}$ 的树，具体如下。为方便起见，我们假设对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-k\}$，集合 $A_i = \{1, \ldots, k\} - i$ 都可以枚举为 $\{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$。对于 $j_p \in A_i$，我们定义 $\mathcal{K}^i_{j_0} = G^i$ 和 $\mathcal{K}^i_{j_p} = H_{j_p}(\mathcal{K}^i_{j_{p-1}}, G^i_{j_p})$，其中 H_{j_p} 是稳定集 $(I_k - a_i + b_i) - a_{j_p} + c^i_{j_p}$，对应于 $p \in \{1, \ldots, k-1\}$。注意到，图 $\mathcal{K}^i_{j_{p-1}}$ 和 $G^i_{j_p}$ 是 H_{j_p}-一致的，这意味着 $\mathcal{K}^i_{j_p}$ 定义良好。此外，还可以直接验证，集合 $(I_k - a_i + b_i) - a_j + c^i_j$ 和 $(I_k - a_{i'} + b_{i'}) - a_{j'} + c^{i'}_{j'}$ 始终至少相差两个成员，这意味着命题 12 的条件 (1) 不满足。简言之，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-k\}$，我们得到图 $\mathcal{K}^i_{j_{k-1}}$，其 TS_k-图同构于由 $K_{1,\ k-1}$ 得到的图，其中每条边都被替换为一个 P_3。接下来，我们定义 $\mathcal{K}^0 = G^0$ 和 $\mathcal{K}^i = H^i(\mathcal{K}^{i-1}, G^i)$，其中 $i \in \{1, \ldots, n-k\}$，而 H^i 是由 $(I_k - a_i + b_i) + b_{k+i}$ 诱导的子图。注意到，图 $\mathcal{K}^i$ 定义良好，因为 $\mathcal{K}^{i-1}$ 和 G^i 是 H^i-一致的。此外，我们有 I_k，并且对于 $1 \leq i \leq n-k$ 和 $j \in A_i$，每个 $(I_k - a_i + b_i) - a_j + c^i_j$ 始终至少相差两个成员。因此，命题 12 的条件 (1) 不满足。简言之，我们最终得到图 $G = \mathcal{K}^{n-k}$，其 TS_k-图确实是一棵包含 $K_{1,\ n}$ 的树，正如所期望的那样。

□

遗憾的是，我们尚无法证明命题 24 的逆命题是否也成立。我们以以下开放问题结束本节：

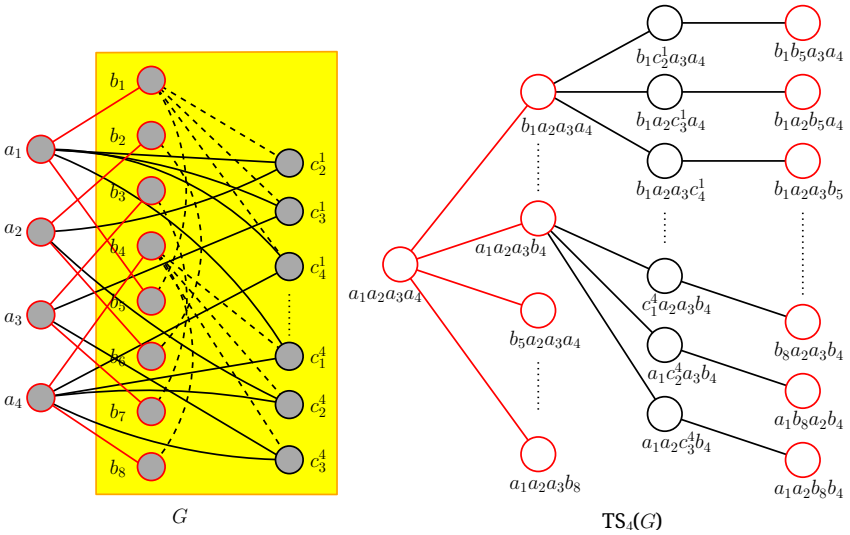


图1 2：构造一个图 G，使得 $\mathrm{TS}_4(G)$ 是一棵包含$K_{1,\ 8}$的树。黄色框中 G 的顶点构成一个团，其中所有虚线边均已移除。G 的红色诱导子图构成一个图G^0，其 $\mathrm{TS}_4(G^0) \simeq K_{1,\ 8} + 12K_1$。

问题25. 对于每个 $k \geq 3$ 和树 T，是否存在一个图 G，使得 $\mathrm{TS}_k(G)$ 是一个包含 T作为诱导子图的森林?

问题26。 对于每个 $k \geq 3$ 和（$k+1$）元树 T，是否存在一个图 G，使得 $\mathrm{TS}_k(G)$ 是一棵以 T 为诱导子图的树?

问题27。 是否存在一棵包含 $K_{1,\ n}$ 的 TS_k-树 T，其中 $n > 2k$?

4.3 $D_{r,n,s}$

现在我们考虑 $D_{r,n,s}$ 族中的图，其 TS_k-图是树，并说明如何通过 H-连接操作构造这些图。值得注意的是，当 $n = 1$, $D_{r,n,s}$ 时，它不过是一颗星$K_{1,r+s}$，这一情形已在 [1] 中讨论，并在命题 16 中重新审视。此外，由命题 19 可知，对于 $n, k \geq 2$ 和 $1 \leq r \leq s \leq k-1$, $D_{r,n,s}$ 是一棵 k 元树，因此根据命题 19，它是一个 TS_k-图。反向命题一般并不成立：即使在 $s \geq k$ 时，也存在一个 TS_k-图 $D_{r,n,s}$。例如，正如 [1], 中已经证明的，这类图之一是 $D_{1,3,2}$ ($r = 1$, $s = k = 2$, 和$n = 3$)。（另见图1。）事实上，正如我们将在命题29中看到的，对于 $n \geq 1$，在所有树 $D_{1,n,2}$ 中，它是唯一的 TS_2-图。此外，为了完整起见，我们还将在命题30中证明，当 $n = 2$ 时，反向命题确实成立。

现在我们刻画哪些 $D_{1,n,2}$-图是 TS_2-图，并证明对于这类简单的树，这一性质并非遗传性质。随后，我们考虑 $D_{r,2,s}$-图，并刻画其中哪些是 TS_k-图。

假设对于某个 G，$\mathrm{TS}_2(G)$是一个包含 $K_{1,3}$的森林。G 中有四个稳定集，分别对应于 $K_{1,3}$的顶点。标记 $K_{1,3}$ 有两种方式，但每种情况下都涉及 G 中的五个顶点，记为 $a, \ldots, e$。忽略标签的排列后，G 中对应的稳定集要么是 $\{ab, ac, bd, ae\}$，要么是 $\{ab, ac, ad, ae\}$。根据这些定义，我们得到以下引理。

引理28。 令 H 为 G 中由 $a, b, \ldots, e$诱导的子图。H 的边为

(a) ad, de, eb, bc, cd，如果 $K_{1,3}$ 被标记为 $\{ab, ac, bd, ae\}$，或者

(b) 如果 $K_{1,3}$ 被标记为 $\{ab, ac, ad, ae\}$，则 bc, bd, be。

证明。 (a) 对 $K_{1,3}$ 的这种标记立即确定了边 ad, bc, be 和非边 ab, ac, ae, bd。因此，H 还有三条边需要确定：

(i) ce 必须是非边，否则在 $K_{1,3}$中会有一条边 ae, ac。

(ii) cd 是边，否则 $\mathrm{TS}_2(G)$ 中存在一个环 ab, bd, cd, ad，因此它不是树。

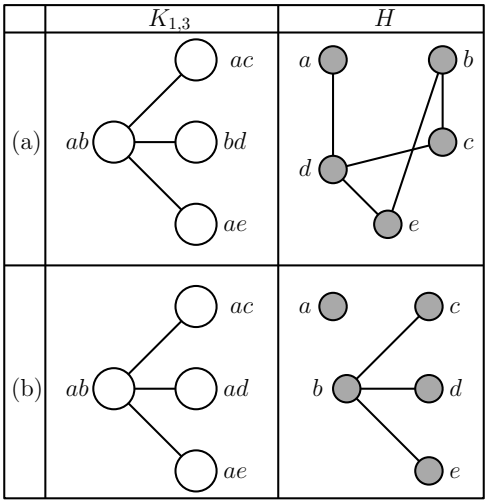


图13：如果 $\mathrm{TS}_2(G)$ 是一个包含 $K_{1,3}$ 的森林，那么 G 必须包含以下诱导子图之一： H。

(iii) de 是边，否则 $\mathrm{TS}_2(G)$ 中存在一个环 de, bd, ab, ae。

注意， ce 也必须是 $\mathrm{TS}_2(G)$ 中的一个顶点。

(b) 这种对 $K_{1,3}$ 的标记立即给出边 bc， bd， be 和非边 ab， ac， ad， ae。 H 中没有其他边，因为 c， d， e 构成一个稳定集。这意味着 $\mathrm{TS}_2(G)$ 中也必须包含顶点 cd， ce 和 de。

□

利用该引理，我们证明 $D_{1,n,2}$ 个图中恰有一个是 TS_2-图，并由此证明上述这一类图具有非遗传性质。

命题29。 $D_{1,n,2}$ 是一个 TS_2-图，当且仅当 $n = 3$。

证明。我们先考察 $1 \leq n \leq 3$，并证明 $D_{1,3,2}$ 是一个 TS_2-图，而 $D_{1,1,2} = K_{1,3}$ 和 $D_{1,2,2}$ 都不是。（我们注意到，前两个图的结果也已在 [1] 中得到证明。）根据引理28，如果某个图 G 的 $D_{1,n,2}$ 是一个 TS_2-图，那么 $D_{1,n,2}$ 中唯一的星 $K_{1,3}$ 可以用两种方式之一进行标记。然而，我们可以立即排除引理28(b) 中的标记方式。这是因为，正如证明中所指出的，在 $D_{1,n,2} = \mathrm{TS}_2(G)$ 中必须有额外的顶点，标记为 cd, ce 和 de；它们彼此不相邻，因为 c, d, e 在 G 中构成一个稳定集。这意味着 $n \geq 6$。因此，我们可以假设，如果 $D_{1,n,2}$ 是一个 TS_2-图，那么 $K_{1,3}$ 必须按照引理 28(a) 中的方式标记，并对应于 $D_{1,n,2}$ 的诱导子图 H。根据引理 28(a) 的证明，在 $D_{1,n,2}$ 中还必须有一个额外的顶点 ce；然而，它不能与其余四个顶点中的任何一个相邻。这意味着 $n \geq 3$，所以 $D_{1,1,2}$ 和 $D_{1,2,2}$ 都不是 TS_2-图。不过，我们可以通过添加一个与除 e 之外的所有顶点相邻的顶点 f，将 H 扩展为 G，如图1所示。由此产生的新稳定集 ef 与 ae 和 ce 都相邻。因此，$D_{1,3,2}$ 与 $\mathrm{TS}_2(G)$ 同构。我们注意到， G 是满足这一性质的唯一图（在标号置换意义下），这是因为 $K_{1,3}$ 的标记是唯一的。

接下来考虑 $n \geq 4$，并证明 $D_{1,n,2}$ 不是 TS_2-图。反设存在一个图 G，使得 $D_{1,n,2} = \mathrm{TS}_2(G)$。同样，$D_{1,n,2}$ 必须包含 $K_{1,3}$ 的一个副本，且该副本恰好有两种由 G 的大小为 2 的独立集进行标记的方式（忽略标号置换）。

- **情形 1：** $K_{1,3}$ **标记为** $\{ab, ac, bd, ae\}$。 由于 ac 和 ae 不相邻， ce 必须是 $D_{1,n,2} = \mathrm{TS}_2(G)$ 的一个顶点。我们考虑以下情形：

  – **情形1.1：** ce **与** $\{ac, bd, ae\}$ **中任意顶点的距离至少为**三。由于 c 和 e 的作用相同，不失一般性，我们假设 ce 与某个顶点 cf相邻。注意，在 G中， a 和 f 不相邻；否则， ac 和 cf 相邻，这意味着 ac 和 ce 之间的距离为二，矛盾。由于 ce 和cf 相邻，因此 ae 和 af也相邻。此外， bf 必须是一个顶点；否则，在$D_{1,n,2} = \mathrm{TS}_2(G)$中， ab和 af之间存在一条边，由此会产生一个以 $\{ab, ae, af\}$ 为顶点集的 C_3，矛盾。由于 ab 和 ac 相邻，因此 cf 和 bf也相邻。现在， df 必须是一个顶点，

否则， bd 和 bf 相邻，这与$D_{1,\ n,\ 2}$ =TS$_2$(G)矛盾。由于 ab 和 bd 相邻，因此 af 和 df也相邻。由引理 28(a)(ii)的证明可知， c 和 d 在 G中相邻，因此df 和 cf 相邻，这再次与$D_{1,\ n,\ 2}$ =TS$_2$(G)矛盾。

– 情形 1.2： ce **与** $\{ac, bd, ae\}$ **其中一个顶点的距离恰好为 2**。注意， bd 和 ce 没有公共邻点，否则该邻点必定标记为$\{bc, be, dc, de\}$之一：前两个可以忽略，因为 ab和 ac（分别是 ab和 ae）相邻；后两个可以忽略，因为 ab 和 bd 相邻。同样，由于 c 和e 的作用相同，不失一般性，假设 ae 和 ce 有一个公共邻点 ef。由于 $n \geq 4$、 ce 必须有另一个与 ef不同的邻点，该邻点可以是cg 或 eg ，其中 g 是 G的一个顶点。

∗ 如果是 cg ，那么 ag 必定是一个顶点；否则 cg 和 ac 必定相邻，这会产生一个C_6，其顶点集为 $\{ac, ab, ae, ef, ce, cg\}$，矛盾。由于 ce和 cg相邻，因此 ae 和 ag也相邻，这与$D_{1,\ n,\ 2}$ =TS$_2$(G)矛盾。

∗ 若 eg ，则 ag 必为一个顶点；否则 eg 和 ae 必定相邻，由此得到一个 C_4，其顶点集为 $\{ae, ef, ce, eg\}$，这与假设矛盾。由于 ce和 eg相邻，因此 ag 和 ac也相邻，这与$D_{1,\ n,\ 2}$ =TS$_2$(G)矛盾。

• 情形 2：K_1,3 被标记为 $\{ab, ac, ad, ae\}$。和之前一样， cd、 ce和 de必定是$D_{1,n,2}$中的顶点。不失一般性，由于 c、 d和 e的作用相同，我们可以假设只有 ae与$D_{1,n,2}$中的另一个顶点相邻。正如引理 28(b)的证明所示，$D_{1,n,2}$也必须包含顶点 cd、 ce、 de。令 P为 ae和 cd之间的路径。由于 c和 d的作用相同，我们可以不失一般性地假设 cd 与 P中的一个顶点 cf 相邻。注意，若 af 不是一个顶点，则 ac 和 cf 相邻，这与 ae的选取矛盾。因此， af 是一个顶点；又由于 cd 和 cf 相邻， ad 和 af也相邻，这与$D_{1,n,2}$ = TS2(G)矛盾。

□

我们注意到，如果在图1中向 G 添加一个顶点 g ，并将它连接到除 d 之外的所有顶点，那么对应的 TS$_2$-图可由在 TS$_2$(G) 中添加 bd 与 dg 之间的边得到。注意，这棵树不属于类 $D_{r,\ n,\ s}$。

在下一个命题中，我们考虑两个任意的星，它们的中心由一条边连接。

命题30. $D_{r,\ 2,\ s}$ ($1 \leq r \leq s$) 是一个 TS$_k$-图，当且仅当 $s \leq k - 1$。

证明。 (⇐) 由命题 19 可直接得出。

(⇒) 假设 $D_{r,2,s}$ ($r \leq s$) 是通过在 p_1处连接 r 个叶节点 $u_1, \ldots, u_r$，并在 p_2 处连接 s 个叶节点 $v_1, \ldots, v_s$，从 $P_2 = p_1p_2$ 得到的，其中 $s \geq k$。我们证明，对任意固定的 $k \geq 2$，该图都不是 TS$_k$- 图。反设存在一个图 G ，使得$D_{r,2,s} \simeq$ TS$_k$(G)，也就是说，存在一个双射 f： $V(D_{r,2,s}) \to V$(TS$_k$(G))，满足 $uv \in E(D_{r,2,s})$当且仅当 $f(u)f(v) \in E$(TS$_k$(G))。不失一般性，设 $f(p_2) = I = \{a_1, \ldots, a_k\}$，其中 I 是 G的一个大小为k 的独立集。由于 p_2 有 $s + 1$ 个邻点，根据鸽巢原理，必存在某个 $i \in \{1, \ldots, k\}$ ，使得 $f(u) = I - a_i + x$ 且 $f(v) = I - a_i + y$，其中 $u, v \in N(p_2)$。注意， $J = (I - a_i - a_j) + x + y \notin \{f(p_2)\ f(u)\ f(v)\}$必定是 G的一个大小为k的独立集，其中 $j \in \{1, \ldots, k\} - i$ ，因此存在 $z \in V(D_{r,2,s}) - \{p_2, u, v\}$使得 $f(z) = J$。我们考虑以下几种情况：

– u 和 v 都不是 p_1。在这种情况下，我们必须有 $z \notin N(p_2)$，否则它必须与p_2相邻，但这样一来， $f(z) = J$ 和 $f(p_2) = I$ 必须在 TS$_k$(G) 中相邻，这就产生了矛盾。因此， $z \in N(p_1) - p_2$，从而 $f(p_1)$ 必须属于 $\{I - a_i + x, I - a_i + y, I - a_j + x, I - a_j + y\}$。由于 u 和 v 都不是 p_1，前两个可以忽略。现在，如果 $f(p_1) = I - a_j + x$，则顶点 x 和 a_j 必须在 G中相邻，这与 $f(u) \in$ TS$_k$(G)的事实相矛盾。对于 $f(p_1) = I - a_j + y$的情况，也可以导出类似的矛盾。因此，无法定义 $f(p_1)$。

– u**是** p_1。同样， $z \notin N(p_2)$。因此， $z \in N(p_1) - p_2$，这意味着 y和 a_j必须在 G中相邻。这与 $f(v) \in$ TS$_k$(G)相矛盾。因此，无法定义 $f(z)$。

在这两种情况下，我们都证明了必然会出现矛盾。证明完毕。

□

5 结论

本文研究了树和森林上的两个令牌滑动问题。即使对于这类简单的图，所研究的两个问题似乎也异常复杂。对于第一个问题，即找出使 G 上的 $\mathrm{TS}_k(G)$ 成为森林的充要条件，我们只能在$k = 2,\ 3$ 时得到完整解答。对于第二个问题，即找出使树或森林成为令牌滑动图的充要条件，我们得到了更一般的结果。不过，正如第4节所指出的，仍有几个有趣且重要的问题尚待解决。我们预计，文中介绍的联接与分解操作将有助于研究更一般图上的类似问题。

致谢

Avis 的研究部分得到日本学术振兴会（JSPS）KAK- ENHI Grants JP18H05291、JP20H00579 和 JP20H05965（AFSA）的资助；Hoang 的研究则得到 JP20H05964（AFSA）的资助。

参考文献

[1] David Avis 和 Duc A. Hoang。关于令牌滑动下独立集的重配置图。*arXiv* 预印本，2022。arXiv:2203.16861。[2] Nicolas Bousquet、Amer E. Mouawad、Naomi Nishimura 和 Sebastian Siebertz。独立集与（连通）支配集重配置问题参数化复杂性的综述。*arXiv* 预印本，2022。arXiv:2204.10526。[3] Reinhard Diestel。图论，数学研究生教材第 173 卷。施普林格，第 5 版，2017。[4] Robert A. Hearn 和 Erik D. Demaine。通过非确定性约束逻辑计算模型证明滑块谜题及其他问题的 PSPACE 完全性。理论计算机科学，343(1-2)：72–96，2005。[5] Ruy Fabila Monroy、David Flores-Pe˜naloza、Clemens Huemer、Ferran Hurtado、Jorge Urrutia 和 David R. Wood。令牌图。图与组合学，28(3)：365–380，2012。[6] C.M. Mynhardt 和 S. Nasserasr。图中的着色与支配集重配置。载于 Fan Chung、Ron Graham、Frederick Hoffman、Ronald C. Mullin、Leslie Hogben 和 Douglas B. West 编，组合学、图论与计算 *50* 年，第 171–191 页。CRC Press，第 1 版，2019。[7] Naomi Nishimura。重配置导论。算法，11(4)：52，2018。[8] Jan van den Heuvel。变化的复杂性。载于组合学综述，伦敦数学学会讲义丛书第 409 卷，第 127–160 页。剑桥大学出版社，2013。