arXiv:2301.00324v1 [math-ph] 1 Jan 2023

含点电荷的二次场中的平面平衡测度问题

SUNG-SOO BYUN

摘要。在存在带点电荷的二次势时，我们研究二维平衡测度问题，并推导出相应液滴的显式形状。特别是，这表明液滴的拓扑结构揭示了一种相变：(i) 在后临界情形下，液滴是双连通区域；(ii) 在临界情形下，液滴包含两个相互合并型的奇异边界点；(iii) 在前临界情形下，液滴由两个非连通分支组成。从随机矩阵理论的角度来看，我们的结果给出了条件为具有零特征值的复椭圆 Ginibre 系综和辛椭圆 Ginibre 系综的极限谱分布，这也可视为 Marchenko-Pastur 定律的非厄米推广。

1. 引言与主要结果

本文研究在带点电荷的二次势作用下，具有对数相互作用的平面平衡问题。这个问题纯属确定性问题，但其动机源于随机世界，更具体地说，源于随机矩阵理论或一般意义上的二维库仑气体理论。更具体而言，对于给定的构型点 $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$，我们考虑哈密顿量

$$\mathbf{H}_N^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\zeta}) := \sum_{1\le j<k\le N} \log \frac{1}{|\zeta_j-\zeta_k|^2} + N\sum_{j=1}^N W(\zeta_j), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{H}_N^{\mathbb{H}}(\boldsymbol{\zeta}) := \sum_{1\le j<k\le N} \log \frac{1}{|\zeta_j-\zeta_k|^2} + \sum_{1\le j\le k\le N} \log \frac{1}{|\zeta_j-\bar{\zeta}_k|^2} + 2N\sum_{j=1}^N W(\zeta_j). \tag{1.2}$$

这里，$W:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 是一个适当的函数，称为外势。它们是定义联合概率分布的基本要素

$$d\mathbb{P}_{N,\beta}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\zeta}) \propto e^{-\frac{\beta}{2}\mathbf{H}_N^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\zeta})}\prod_{j=1}^N dA(\zeta_j), \qquad d\mathbb{P}_{N,\beta}^{\mathbb{H}}(\boldsymbol{\zeta}) \propto e^{-\frac{\beta}{2}\mathbf{H}_N^{\mathbb{H}}(\boldsymbol{\zeta})}\prod_{j=1}^N dA(\zeta_j), \tag{1.3}$$

其中 $dA(\zeta) = d^2\zeta/\pi$ 是面积测度，$\beta>0$ 是逆温度。点过程 $\mathbb{P}_{N,\beta}^{\mathbb{C}}$ 和 $\mathbb{P}_{N,\beta}^{\mathbb{H}}$ 表示二维库仑气体系综 [38, 55, 62]。特别地，当 $\beta=2$ 时，由于其特殊的可积结构，它们也分别称为行列式库仑气体和 Pfaffian 库仑气体；关于这一主题的最新综述，参见 [26, 28]。此外，它们还可解释为具有酉对称性和辛对称性的非厄米随机矩阵的特征值。例如，当 $W(\zeta) = |\zeta|^2$ 时，系综 (1.3) 对应于复 Ginibre 矩阵和辛 Ginibre 矩阵的特征值 [40]。

关于这类点过程，一个基本问题是它们的宏观／全局行为，即 $N\to\infty$. 对于 $\beta=2$ 的情形，这可以视为确定给定随机矩阵的极限谱分布的问题。这一方向的经典结果包括 Ginibre 系综的圆定律。

日期：2023年1月3日。关键词和短语。平面平衡测度问题、二维库仑气体、椭圆 Ginibre 系综、条件点过程、共形映射方法、Marchenko–Pastur 定律的非厄米扩展。Sung-Soo Byun 得到了三星科学技术基金会（SSTF-BA1401-51）、韩国国家研究基金会（NRF-2019R1A5A1028324）以及韩国高等研究院数学挑战中心的 KIAS个人资助（SP083201）的部分资助。

正如哈密顿量 (1.1) 和 (1.2) 的结构所预期的那样，该系统的宏观行为可以通过对数势理论得到有效描述 [59]。

为此，我们简要回顾对数势理论中的一些基本概念。给定一个支撑集紧致的概率测度 μ on $\mathbb{C}$，与势 W 相关联的加权对数能量 $I_W[\mu]$ 定义为

$$I_W[\mu] := \int_{\mathbb{C}^2} \log \frac{1}{|z-w|}\, d\mu(z)\, d\mu(w) + \int_{\mathbb{C}} W\, d\mu. \tag{1.4}$$

对于满足适当条件的一般势 W，存在唯一的概率测度 μ_W，使 $I_W[\mu]$ 达到极小。这样的极小化子 μ_W 称为与 W 相关联的**平衡测度**，其支撑集$S_W := \mathrm{supp}(\mu_W)$ 称为**液滴**。此外，若 W 在 S_W 的某个邻域内具有 C^2 阶光滑性，则由弗罗斯特曼定理可知，μ_W 关于 dA 绝对连续，且可表示为

$$d\mu_W(z) = \Delta W(z) \cdot \mathbb{1}_{\{z\in S_W\}}\, dA(z), \tag{1.5}$$

¯其中 $\Delta := \partial\partial$ 是通常拉普拉斯算子的四分之一。
关于点过程 (1.3)，众所周知 [31, 15, 41]

$$\mu_{N,W} := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{\zeta_j} \to \mu_W \tag{1.6}$$

在测度的弱星意义下。从统计物理的观点来看，这种收敛相当自然，因为 (1.4) 中的加权能量 I_W 对应于离散哈密顿量 (1.1) 和 (1.2) 经适当重整化后的连续极限¯。（对于 (1.2)，还需进一步假设 $W(\zeta) = W(\zeta$。）

与测度 μ_W 的密度 (1.5) 不同，目前尚无关于如何确定其支撑集 S_W 的一般理论。（不过，参见 [60]，其中讨论了正则性的一般理论；另见 [49]，其中研究了与赫勒-肖型势相关的液滴的连通性。）由此引出了以下自然问题。

给定势 W，与之对应的液滴的精确形状是什么 t?

鉴于能量泛函 (1.4)，这是势理论中一种典型的逆问题，称为平衡测度问题。除了 W 为径向对称的情形（参见 [59, 第 IV.6] 节）之外，即使对于形式简单的一些显式势，这个问题也极具挑战性；近期的一些研究见 [3, 12, 44, 14, 21, 35, 54, 36] 。还要强调的是，这类问题之所以重要，不仅因为它揭示了点过程 (1.3) 的内在宏观行为，还因为它是开展黎曼-希尔伯特分析的第一步，而后者能够提供点过程更详细的统计信息（k 点函数）；关于这一方向的深入研究，参见 [12, 13, 17, 18, 44, 45, 46, 47, 51, 53, 56]。本文旨在研究与下文势 (1.7) 和 (1.14) 相关的平衡问题；这些问题在非厄米随机矩阵理论的背景下尤为重要。

1.1. **主要结果**。

对于给定的参数 $\tau \in [0,1)$ 和 $c \geq 0$，我们考虑势

$$Q(\zeta) := \frac{1}{1-\tau^2}\left(|\zeta|^2 - \tau\,\mathrm{Re}\,\zeta^2\right) - 2c\log|\zeta|. \tag{1.7}$$

当 $\beta = 2$ 时，与 Q 相关的系综 (1.3) 对应于大小为 $(c+1)N$ 的椭圆 Ginibre 矩阵的随机特征值分布，并且该矩阵的零特征值的重数为 cN。我们提到，这种具有 $c > 0$ 的模型也曾在量子色动力学 [1] 的背景下得到研究。

在 (1.7) 中，对数项可解释为引入一个点电荷；有关这一情形下模型 (1.3) 的近期研究，参见 [4, 33, 23, 22, 27]。在平面正交多项式理论中也研究过这种点电荷的引入 [12, 13, 17, 51, 52, 53, 16]。另一方面，参数 $\tau \in [0,1)$ 刻画了模型的非厄米性。更确切地说，与 Q 相关的模型 (1.3) 在复/辛 Ginibre 系综（$\tau = 0$）与条件为具有零特征值的高斯酉/辛系综（$\tau = 1$）之间进行插值；关于这与我们主要结果的关系，进一步讨论见注 1.6。

对于 $c = 0$ 的情形，“椭圆的”这一术语源于极限谱 $S_{\tau,\,0}$ 由椭圆给出

$$S_{\tau,0} := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{x}{1+\tau}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{1-\tau}\Big)^2 \le 1\Big\}, \tag{1.8}$$

这被称为椭圆律，参见例如 [34, 37]。关于复椭圆 Ginibre 系综的最新进展及其辛对应物，参见 [50, 5, 8, 57, 20, 19] 及其中的参考文献。对于旋转不变情形，当 $\tau = 0$，很容易证明，相应的液滴 $S_{0,\,c}$由下式给出

$$S_{0,c} := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le x^2 + y^2 \le 1 + c\Big\}, \tag{1.9}$$

参见例如 [59, 第 IV 节6] 和 [26, 第 5 节2]。

本文的主要目标是确定一般情况下与势（1.7）相关的液滴的精确形状，其中 $\tau \in [0,1)$ 且 $c \ge 0$。为此，我们先引入一些记号。记

$$\tau_c := \frac{1}{1+2c} \tag{1.10}$$

对于临界非厄米性参数。当 $\tau \in (\tau_c, 1)$ 时，我们定义

$$f(z) \equiv f_\tau(z) := \frac{(1+\tau)(1+2c)}{2}\,\frac{(1-az)(z-a\tau)^2}{z(z-a)}, \qquad a = -\frac{1}{\sqrt{\tau(1+2c)}}. \tag{1.11}$$

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 1.1。 设 Q 由 (1.7)给出。那么，平衡测度的液滴 $S \equiv S_{\tau,c} = S_Q$

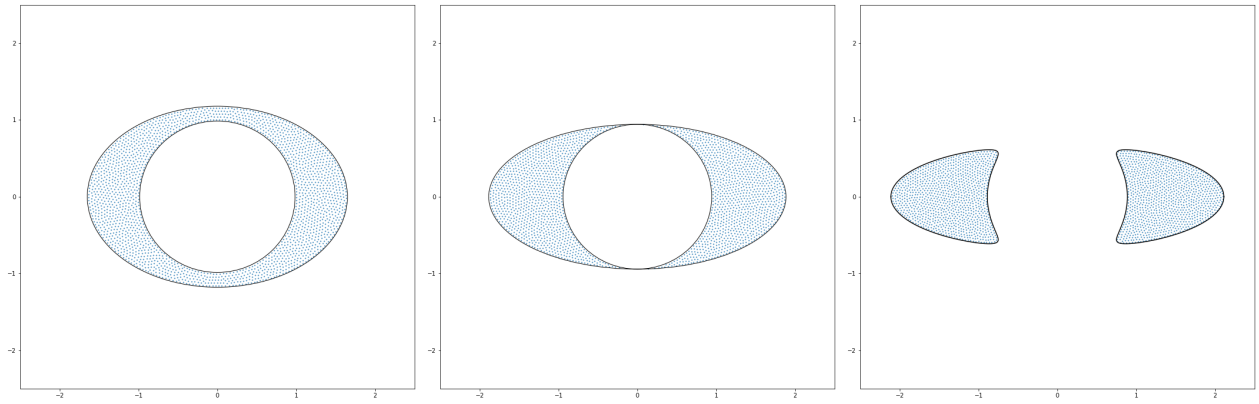
$$d\mu_Q(z) = \frac{1}{1-\tau^2}\mathbb{1}_S(z)\,dA(z) \tag{1.12}$$

如下所示。

- **(后临界情形)** 若 $\tau \in (0, \tau_c]$，则有

$$S_{\tau,c} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{x}{(1+\tau)\sqrt{1+c}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{(1-\tau)\sqrt{1+c}}\Big)^2 \le 1\,,\ \frac{x^2+y^2}{(1-\tau^2)c} \ge 1\Big\}. \tag{1.13}$$

- （**前临界情形**）若 $\tau \in [\tau_c, 1)$，液滴 $S_{\tau,\,c}$ 是由映射 $z \mapsto \pm\sqrt{f(z)}$作用于单位圆所得的实解析若尔当曲线所围成区域的闭包，其中 f 由 (1.11) 给出。



(a) $\tau = 1/6 < \tau_c$ (b) $\tau = 1/3 = \tau_c$ (c) $\tau = 1/2 > \tau_c$

FIGURE 1. 液滴 $S_{\tau,\,c}$，其中 $c = 1$ ， 以及具有 $N = 2048$ 的 Fekete 点构型 .

注意，若 $c=0$ （分别地， $\tau=0$），则液滴 (1.13) 对应于 (1.8)（分别地，(1.9)）。我们指出，定理 1.1 的后临界情形实际上是在更一般的设置下证明的，见下文的 (2.1) 和命题 2.1。

备注 1.2 （液滴的相变）。 在定理 *1.1* 中，我们观察到，如果 $c>0$，液滴的拓扑会呈现相变。具体而言，在 $\tau<\tau_c$ 的后临界情形下，液滴是一个二重连通域；而在前临界情形 $\tau>\tau_c$ 下，它由两个非连通分支组成。在 $\tau=\tau_c$的临界状态下，液滴包含两个对称的双重点。关于液滴呈现各种相变的进一步模型，参见 [12, 14, 3, 36] 。我们还要提到，最近已有一些关于模型 (1.3) 的研究，其中液滴具有多个分支，例如参见 [13, 30, 9, 10]。在这一前临界区域，预计各种统计量中会出现某些 *theta* 函数振荡；参见 [32, 9]。配分函数的精确渐近行为也值得研究，这与如下猜想有关：配分函数取决于液滴的欧拉指标，参见 [42, 29] 和 [26, 第 4.1 节和第 5 节。3] 关于进一步讨论，参见。

注 1.3 （Fekete 点与数值计算）。 使哈密顿量 (1.1) 或(1.2) 达到最小值的构型 $\{\zeta_j\}_{j=1}^N$ 称为 *Fekete* 构型。这可以解释为系综(1.3)在低温极限 $\beta=\infty$下的情形，参见例如 [61, 58, 7, 11] 及其中的参考文献。由于液滴与逆温度 $\beta>0$ 无关（高温区域 [2] 除外，此时 $\beta=O(1/N)$），*Fekete* 点可用于数值观察液滴的形状。图 *1* 和图 *2* 还展示了与哈密顿量(1.1) 对应的 *Fekete* 构型，它们与定理 *1.1* 和 *1.4* 相当吻合。

注意，势 (1.7) 和液滴 $S_{\tau,\ c}$ 在映射 $\zeta\mapsto-\zeta$下保持不变。现在我们讨论去除这种对称性后定理 1.1 的一种等价表述。（参见 [36, 第 1.3] 节，那里对球面上带点电荷的向量平衡问题进行了类似讨论。）下一小节将阐明采用这种表述的动机。

为此，我们记

$$\widehat{Q}(\zeta):=\frac{2}{1-\tau^2}\Big(|\zeta|-\tau\,\mathrm{Re}\,\zeta\Big)-2c\log|\zeta|. \tag{1.14}$$

根据定义，(1.7) 中的势 Q 与 (1.14) 中的势 Q 之间的关系为

$$Q(\zeta)=\frac{1}{2}\widehat{Q}(\zeta^2). \tag{1.15}$$

将与 Q 相关联的液滴记为 S，由 [14, 引理 1] 可得

$$S=\{\zeta\in\mathbb{C}:\zeta^2\in\widehat{S}\}. \tag{1.16}$$

由关系式 (1.16) 以及

$$\Delta\widehat{Q}(\zeta)=\frac{1}{2(1-\tau^2)}\frac{1}{|\zeta|}, \tag{1.17}$$

我们得到定理 1.1 的以下等价表述。

定理 1.4. 设 Q 由 (1.14) 给出。则平衡测度的液滴 $S\equiv S_{\tau,c}=S_{\widehat{Q}}$

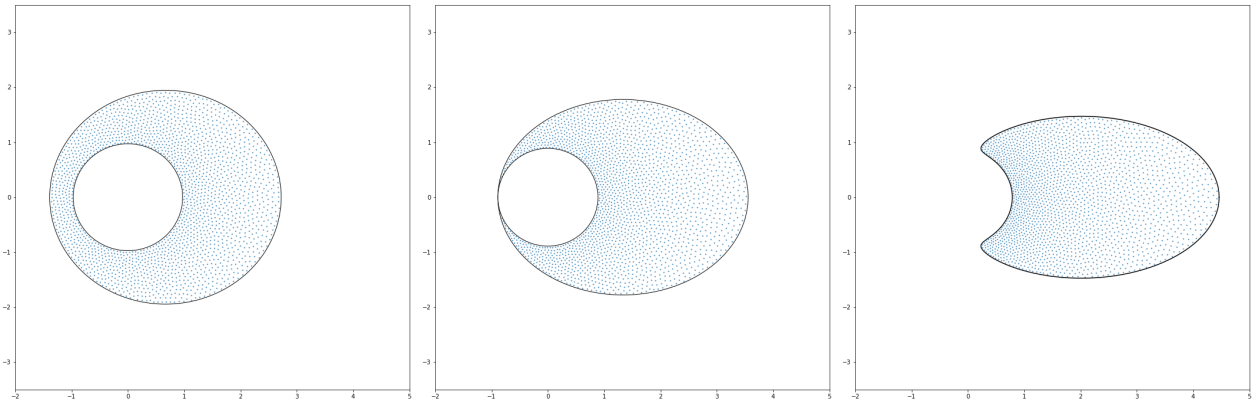
$$d\mu_{\widehat{Q}}(\zeta)=\frac{1}{2(1-\tau^2)}\frac{1}{|\zeta|}\mathbb{1}_{\widehat{S}}(\zeta)\,dA(\zeta) \tag{1.18}$$

如下所示。

(i) **（后临界情形）**若 $\tau\in(0,\tau_c]$，则有

$$\widehat{S}_{\tau,c}=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\Big(\frac{x-2\tau(1+c)}{(1+\tau^2)(1+c)}\Big)^2+\Big(\frac{y}{(1-\tau^2)(1+c)}\Big)^2\le1\,,\ \frac{x^2+y^2}{(1-\tau^2)^2c^2}\ge1\Big\}. \tag{1.19}$$

(ii) **（前临界情形）**若 $\tau\in[\tau_c,1)$，则液滴 $S_{\tau,\ c}$ 是由有理映射 $z\mapsto f\ (z)$ 作用于单位圆所得的实解析若尔当曲线内部的闭包，其中 f由 （1.11）给出。



(a) $\tau = 1/6 < \tau_c$ (b) $\tau = 1/3 = \tau_c$ (c) $\tau = 1/2 > \tau_c$

FIG 图 2. 液滴 $S_{\tau,\ c}$，其中 $c = 1$，以及一个具有 $N = 2048$ 的 Fekete 点构型 .

注 1.5（临界情形下的儒可夫斯基变换）。 若 $\tau = \tau_c$ 且满足 （1.10），则有 $a = 1/a = -1$。因此在这一临界情形下，（1.11）中的有理函数 f_τ 可简化为

$$f_{\tau_c}(z) = (1+c)\frac{(z+\tau)^2}{z} = (1+c)\Big(z + 2\tau + \frac{\tau^2}{z}\Big). \tag{1.20}$$

请注意，与一般情形 (1.11) 相比，(1.20) 中少了一个零点和一个极点。事实上，在临界情形下，有理映射 f_{τ_c} 是一个（平移后的）儒可夫斯基变换

$$f_{\tau_c} : \mathbb{D}^c \to \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{x - 2\tau(1+c)}{(1+\tau^2)(1+c)}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{(1-\tau^2)(1+c)}\Big)^2 \geq 1\Big\}. \tag{1.21}$$

在 [3], 一项类似类型的儒可夫斯基变换曾被用于求解平衡测度问题。对于本文研究的模型，由于有理函数 (1.11)的形式更为复杂，因此对相关平衡问题所需的分析也更加复杂。

注 1.6（Marchenko-Pastur 分布的非厄米扩展）。 在厄米极限 $\tau \uparrow 1$，根据(1.7) 和(1.14)，我们有

$$\lim_{\tau\uparrow 1} Q(x+iy) = V(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2c\log|x|, & \text{if } y = 0, \\ +\infty & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\lim_{\tau\uparrow 1} \widehat{Q}(x+iy) = \widehat{V}(x) := \begin{cases} x - 2c\log|x|, & \text{if } y = 0,\ x > 0, \\ +\infty & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{1.23}$$

于是，相关的平衡测度由著名的 *Marchenko-Pastur* 定律（变量取平方）给出 [38,命题3.4。1], 即

$$d\mu_V(x) = \frac{1}{2\pi|x|}\sqrt{(\lambda_+^2 - x^2)(x^2 - \lambda_-^2)}\cdot \mathbb{1}_{[-\lambda_+,-\lambda_-]\cup[\lambda_-,\lambda_+]}\,dx, \tag{1.24}$$

$$d\mu_{\widehat{V}}(x) = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(\lambda_+^2 - x)(x - \lambda_-^2)}\cdot \mathbb{1}_{[\lambda_-^2,\lambda_+^2]}\,dx, \tag{1.25}$$

其中 $\lambda_\pm : \overline{= \sqrt{2}c + 1 \pm 1}$，参见注 *2.3*。因此，可以将定理 *1.1*（分别为定理 *1.4*）理解为马尔琴科-帕斯图尔分布 (1.24) （分别为 (1.25)）的非厄米推广；参见 [8, 第 2]节，了解更多关于借助统计截面概念所表达的几何意义。我们还请参阅 [3] ，其中讨论了在手征 *Ginibre* 系综背景下对 (1.24) 和 (1.25) 的另一种非厄米推广。

注 1.7（液滴的包含关系）。记

$$S_1 = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \Big(\frac{x}{1+\tau}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{1-\tau}\Big)^2 \le 1+c\Big\}, \qquad S_2 := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le (1-\tau^2)c\Big\} \tag{1.26}$$

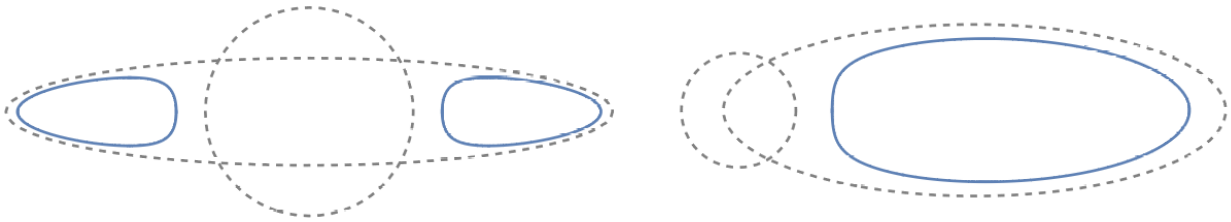
并记 $\widehat{S}_j$ $(j=1,2)$ 为 S_j 在映射 $z\mapsto z^2$下的像。由定义 (1.10)可得

$$\tau\in(0,\tau_c) \quad \text{if and only if} \quad S_1^c\cap S_2=\emptyset. \tag{1.27}$$

由定理 *1.1* 和 *1.4*，对于一般的 $\tau\in[0,1)$ 和 $c\ge 0$，可以观察到

$$S_{\tau,c}\subseteq S_1\cap(\operatorname{Int} S_2)^c, \qquad \widehat{S}_{\tau,c}\subseteq \widehat{S}_1\cap(\operatorname{Int}\widehat{S}_2)^c. \tag{1.28}$$

当且仅当处于后临界情形时，(1.28) 中的等号成立。（这一性质在更一般的情形下也成立，见命题 *2.1*。）另一方面，在前临界情形下，可以理解为 $S_1^c\cap S_2$ 中的粒子被扩散到 $S_1\cap S_2^c$，这使得包含关系 (1.28) 严格成立，见图 *3*。



(a) $S_{\tau,c}$ (b) $\widehat{S}_{\tau,c}$

图 3. 前临界情形下的液滴 $S_{\tau,c}$ 和 $S_{\tau,c}$，其中 $c=2$ 和 $\tau=0.7>\tau_c$。这里，虚线表示 S_j 和 S_j $(j=1,2)$ 的边界。

1.2. **证明概要**。回顾一下，μ_W 是能量 (1.4) 的唯一极小化子。众所周知，平衡测度 μ_W 由变分条件刻画（见 [59, 第27页]）

$$\int \log\frac{1}{|\zeta-z|^2}\,d\mu_W(z)+W(\zeta)=C, \quad \text{q.e.} \quad \text{if } \zeta\in S_W; \tag{1.29}$$

$$\int \log\frac{1}{|\zeta-z|^2}\,d\mu_W(z)+W(\zeta)\ge C, \quad \text{q.e.} \quad \text{if } \zeta\notin S_W. \tag{1.30}$$

这里，q.e. 表示拟 处处。（不过，正如我们接下来将要说明的，这个概念在下文中并不重要，因为对于我们所 w 考虑的模型，条件 (1.29) 和 (1.30) 确实处处成立。）

由于平衡测度的唯一性，我们只需证明：若 $W=Q$，则 (1.12) 中的 μ_Q 满足变分原理 (1.29) 和 (1.30)。等价地，根据 (1.16)，只需证明 (1.18) 中平衡测度 $\mu_{\widehat{Q}}$ 满足变分原理。

然而，要得到液滴的“正确候选形状”绝非显而易见。或许有人会认为，至少对于后临界情形，鉴于众所周知的情形 (1.8) 和 (1.9)，以及 $S_{\tau,c}$ 的面积应为 $(1-\tau^2)\pi$这一事实，液滴 (1.13) 的形状相当自然。另一方面，对于前临界情形，人们很容易注意到，推导有理函数 (1.11) 的显式公式背后似乎另有玄机。为得到正确的候选形状，我们借助施瓦茨函数，采用共形映射方法，见附录 A。

注 1.8（去除对称性）。我们强调，共形映射方法不适用于多连通液滴，即定理 *1.1* 的前临界情形。这本质上是由于黎曼映射定理不适用所致。不过可以看到，去除对称性 $\zeta\mapsto-\zeta$ 后，定理 *1.4* 的前临界情形中的液滴是单连通的。这解释了我们为何需要采用去除对称性的思路。

本文其余部分安排如下。

- 在第 2 节中，我们证明定理 1.1 和 1.4。在第 2.1 小节中，我们在更一般的设定下证明定理 1.1 的后临界情形，见命题 2.1。另一方面，在第 2.2 小节中，我们证明定理 1.4 的前临界情形。由关系式 (1.16)，这些结果共同完成了主结果的证明。
- 本文包含两个附录。在附录 A 中，我们介绍如何运用共形映射方法推导液滴的“正确候选形状”。在附录 B 中，我们给出一种求解注 2.3 中一维平衡问题的方法，该方法与共形映射方法具有共同特征。这两个附录仅供学习参考；只想了解主定理证明的读者可以读到第 2 节末尾为止。

2. 主定理的证明

本节中，我们证明定理 1.1 和 1.4。

2.1. 临界情形之后。作为 (1.7) 的推广，我们考虑势

$$Q_p(\zeta) := \frac{1}{1-\tau^2}\Big(|\zeta|^2 - \tau \operatorname{Re}\zeta^2\Big) - 2c\log|\zeta - p|, \qquad p \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

对于情形 $\tau = 0$，与势 (2.1) 对应的液滴形状已在 [12]中得到完整刻画。（在此情形下，由于旋转不变性，只需考虑 $p \geq 0$ 的情形。）特别地，文中证明了若

$$c < \frac{(1-p^2)^2}{4p^2}, \qquad \tau = 0, \qquad p \geq 0, \tag{2.2}$$

液滴由 $S = \mathbb{D}(0,\ \sqrt{1+c}) \setminus \overline{\mathbb{D}(p,\ \sqrt{c})}$ 给出，其中 $\mathbb{D}(p,\ R)$ 是中心为 p、半径为 R 的圆盘；另一种情形 $c > (1-p^2)^2/(4p^2)$ 见注 A.5。

为了描述与 Q_p 对应的液滴，我们记

$$S_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{1+\tau}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-\tau}\right)^2 \leq 1 + c\right\} \tag{2.3}$$

and

$$S_2 := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \operatorname{Re} p)^2 + (y - \operatorname{Im} p)^2 \leq (1-\tau^2)c\Big\}. \tag{2.4}$$

由此得到如下结论。

命题 2.1. 设参数 τ、$c \in \mathbb{R}$ 和 $p \in \mathbb{C}$ 满足

$$S_2 \subset S_1, \tag{2.5}$$

其中，S_1 和 S_2 由 (2.3) 和 (2.4)给出。与 (2.1) 相关的液滴 $S \equiv S_{Q_p}$ 为

$$S = S_1 \cap (\operatorname{Int} S_2)^c. \tag{2.6}$$

液滴的形状以及 Fekete 点构型的数值模拟见图4。我们指出，只需稍作修改，命题 2.1 还可进一步推广到存在多个点电荷的情形，即势具有如下形式

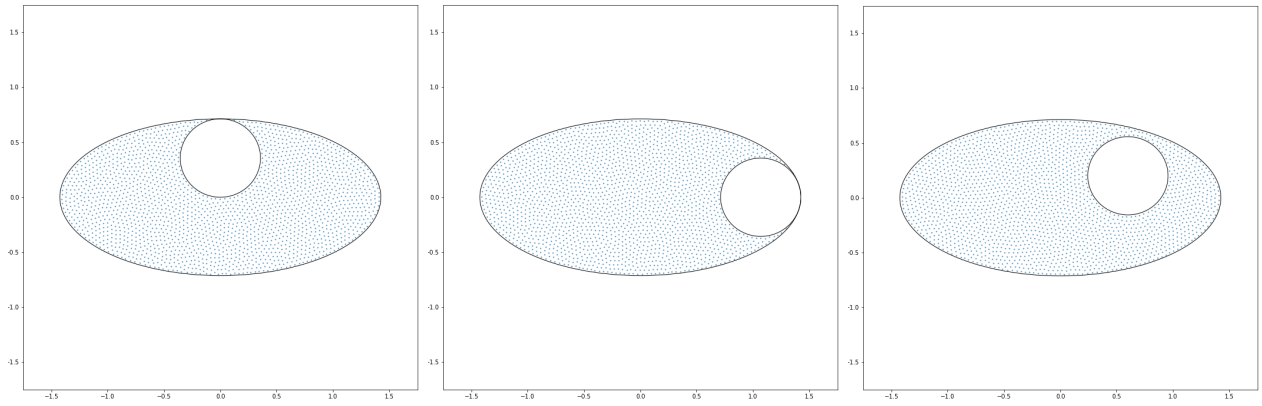
$$\frac{1}{1-\tau^2}\Big(|\zeta|^2 - \tau \operatorname{Re}\zeta^2\Big) - 2\sum c_j \log|\zeta - p_j|, \qquad p_j \in \mathbb{C}, \quad c_j \geq 0. \tag{2.7}$$

（相关讨论见注 A.4。）还需指出，文献 [21] 给出了球面上平衡问题的类似结论。关于更一般情形的处理，请参阅文献[35, 54, 36]。

注 2.2. 若 $p = 0$，条件 (2.5) 对应于

$$\tau < \frac{1}{1+2c} = \tau_c. \tag{2.8}$$

因此，命题 *2.1* 在特殊取值 $p = 0$ 下给出了定理 *1.1 (i)*。由此，根据(1.16)，定理 *1.4 (i)* 也随之成立。我们还提到，若 $\tau = 0$ 且 $p > 0$，条件(2.5) 与(2.2)一致。



(a) $p = \frac{2}{21}\sqrt{14}\,i$ (b) $p = \frac{2}{7}\sqrt{14}$ (c) $p = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$

图4. 命题 2.1 中的液滴 S，其中 $\tau = 1/3$ 和 $c = 1/7$。此处还展示了具有 $N = 2048$ 的 Fekete 点构型。

注 2.3 (厄米极限下的平衡测度**)**。 在转向(2.1)的平面平衡问题之前，我们先讨论厄米极限下产生的一维问题。对于 $p \in \mathbb{R}$，势 Q_p 的厄米极限 $\tau \uparrow 1$ 为

$$\lim_{\tau\uparrow 1} Q_p(x+iy) = V_p(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2c\log|x-p|, & \text{if } y = 0, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.9}$$

于是可以证明，相应的平衡测度 $\mu_V \equiv \mu_{V_p}$ 为

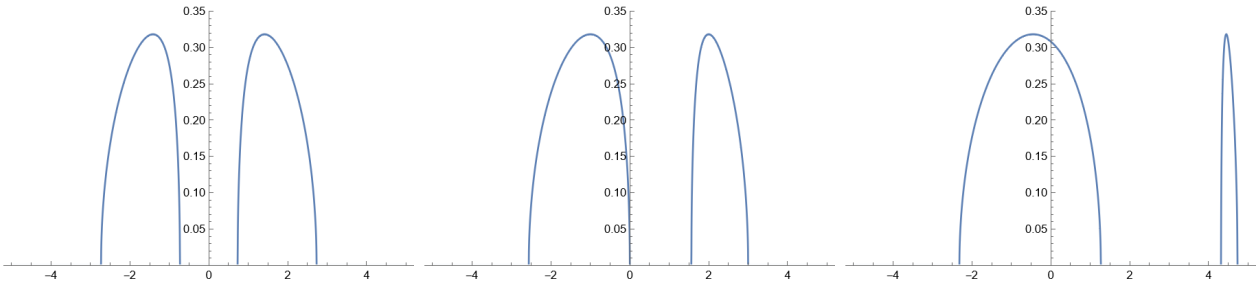
$$\frac{d\mu_V(x)}{dx} = \frac{\sqrt{-\prod_{j=1}^4 (x-\lambda_j)}}{2\pi|x-p|} \cdot \mathbb{1}_{[\lambda_1,\lambda_2]\cup[\lambda_3,\lambda_4]}(x), \tag{2.10}$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{p-2-\sqrt{(p+2)^2+8c}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{p+2-\sqrt{(p-2)^2+8c}}{2}, \tag{2.11}$$

$$\lambda_3 = \frac{p-2+\sqrt{(p+2)^2+8c}}{2}, \qquad \lambda_4 = \frac{p+2+\sqrt{(p-2)^2+8c}}{2}. \tag{2.12}$$

我们指出，当 $p = 0$ 时，它还原为 (1.24)。平衡测度 μ_{V_p} 的图像见图*5*。平衡测度 (2.10) 可由运用斯蒂尔切斯变换和索科茨基–普莱梅利反演公式的标准方法得到。为方便读者，我们在附录 *B* 中给出 (2.10) 的证明。



(a) $p = 0$ (b) $p = 1$ (c) $p = 4$

图5. 平衡测度 μ_{V_p}的图像，其中 $c = 1$。

在本小节余下部分，我们证明命题 2.1。首先，证明以下几个初等引理。

引理 2.4。对于 a， $b>0$，令

$$K:=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\Big(\frac{x}{a}\Big)^2+\Big(\frac{y}{b}\Big)^2\le 1\Big\}.$$

则有

$$\int_K\frac{1}{\zeta-z}\,dA(z)=\begin{cases}\bar\zeta-\dfrac{a-b}{a+b}\,\zeta & \text{if } \zeta\in K,\\ \dfrac{2ab}{a^2-b^2}\Big(\zeta-\sqrt{\zeta^2-a^2+b^2}\Big) & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{2.13}$$

特别地，对于 $\zeta\in K$，存在常数 $c_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$\int_K\log|\zeta-z|^2\,dA(z)=|\zeta|^2-\frac{a-b}{a+b}\operatorname{Re}\zeta^2+c_0.\tag{2.14}$$

注 2.5。 式(2.13) 中的柯西变换可用于显式计算平衡测度的矩。也就是说，根据定义，有

$$\int_K\frac{1}{\zeta-z}\,dA(z)=\frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta^k}\int_K z^k\,dA(z),\qquad \zeta\to\infty.$$

另一方面，我们有

$$\zeta-\sqrt{\zeta^2-a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k+1}\frac{(b^2-a^2)^k}{\zeta^{2k}},\qquad \zeta\to\infty.$$

Co将上述方程与(2.13)结合，我们得到对任意非负整数 k ，

$$\frac{1}{ab}\int_K z^{2k}\,dA(z)=2\binom{1/2}{k+1}(b^2-a^2)^k.\tag{2.15}$$

引理 *2.4* 的证明。 回顾一下， $\mathbb{D}$ 是以原点为中心的单位圆盘。于是，儒可夫斯基变换 $f:\mathbb{D}^c\to K^c$ 由下式给出

$$f(z)=\frac{a+b}{2}\,z+\frac{a-b}{2}\,\frac{1}{z}.\tag{2.16}$$

应用格林公式，我们有

$$\int_K\frac{1}{\zeta-z}\,dA(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{\bar z}{\zeta-z}\,dz+\bar\zeta\cdot\mathbb{1}_{\{\zeta\in K\}}.\tag{2.17}$$

此外，通过变量替换 $z=f(w)$，可得

$$\int_{\partial K}\frac{\bar z}{\zeta-z}\,dz=\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\overline{f(1/\bar w)}}{\zeta-f(w)}f'(w)\,dw=\int_{\partial\mathbb{D}}g_\zeta(w)\,dw,\tag{2.18}$$

其中， g_ζ 是由下式给出的有理函数

$$g_\zeta(w):=\frac{1}{\zeta-f(w)}\Big(\frac{a+b}{2}\frac{1}{w}+\frac{a-b}{2}w\Big)\Big(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\frac{1}{w^2}\Big).\tag{2.19}$$

注意到

$$\zeta=f(w)\qquad\text{if and only if}\qquad w=w_\zeta^{\pm}:=\frac{\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-a^2+b^2}}{a+b},$$

即，点 $w_\zeta^{\pm}$ 是该二次方程的解

$$(a+b)w^2-2\zeta\,w+(a-b)=0.$$

这里，平方根分支的选取使得

$$w_\zeta^-\to 0\qquad\zeta\to\infty.$$

根据上述观察，函数 g_ζ 仅在以下位置有极点

$$0,\qquad w_\zeta^+,\qquad w_\zeta^-.$$

此外请注意

$$\zeta \in K \qquad \text{if and only if} \qquad w_\zeta^\pm \in \mathbb{D}.$$

注意，如果 $\zeta \in K^c$，那么 $w_\zeta^- \in \mathbb{D}$ 和 $w_\zeta^+ \in \mathbb{D}^c$。

利用留数演算，我们得到

$$\operatorname*{Res}_{w=0}\Big[g_\zeta(w)\Big] = \frac{a+b}{a-b}\,\zeta. \tag{2.20}$$

另一方面，我们有

$$\operatorname*{Res}_{w=w_\zeta^\pm}\Big[g_\zeta(w)\Big] = -\overline{f(1/\bar{w}_\zeta^\pm)} = -\frac{a+b}{2}\frac{1}{w_\zeta^\pm} - \frac{a-b}{2}w_\zeta^\pm. \tag{2.21}$$

特别地,

$$\operatorname*{Res}_{w=w_\zeta^+}\Big[g_\zeta(w)\Big] + \operatorname*{Res}_{w=w_\zeta^-}\Big[g_\zeta(w)\Big] = -2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\zeta. \tag{2.22}$$

综合以上结果，我们得到所需的恒等式 (2.13)。第二个断言可由 (2.13) 以及 $\zeta \mapsto \int_K \log|\zeta - z|^2\, dA(z)$ 的实值性立即推出。□

引理 2.6. 对于 $R > 0$ 和 $p \in \mathbb{C}$，我们有

$$\int_{\mathbb{D}(p,R)} \log|\zeta - z|\, dA(z) = \begin{cases} R^2 \log|\zeta - p| & \text{if } \zeta \notin \mathbb{D}(p,R), \\ R^2 \log R - \dfrac{R^2}{2} + \dfrac{|\zeta - p|^2}{2} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.23}$$

证明. 首先，回顾著名的詹森公式：对于 $r > 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\zeta - re^{i\theta}|\, d\theta = \begin{cases} \log r & \text{if } r > |\zeta|, \\ \log|\zeta| & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.24}$$

通过变量替换，我们有

$$\int_{\mathbb{D}(p,R)} \log|\zeta - z|\, dA(z) = \int_{\mathbb{D}(0,R)} \log|\zeta - p - z|\, dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^R r \int_0^{2\pi} \log|\zeta - p - re^{i\theta}|\, d\theta\, dr.$$

假设 $\zeta \notin \mathbb{D}(p,R)$。那么应用 (2.24)，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^R r \int_0^{2\pi} \log|\zeta - p - re^{i\theta}|\, d\theta\, dr = 2\int_0^R r\, \log|\zeta - p|\, dr = R^2 \log|\zeta - p|.$$

另一方面，如果 $\zeta \in \mathbb{D}(p,R)$，则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^R r \int_0^{2\pi} \log|\zeta - p - re^{i\theta}|\, d\theta\, dr &= 2\int_0^{|\zeta-p|} r\, \log|\zeta - p|\, dr + 2\int_{|\zeta-p|}^R r\, \log r\, dr \\ &= R^2 \log R - \frac{R^2}{2} + \frac{|\zeta - p|^2}{2}, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

现在我们可以完成命题 2.1 的证明了。

命题的证明 *2.1.* 注意，由 (1.5) 可知，与 Q_p 相关联的平衡测度 μ 具有如下形式

$$d\mu(z) := \Delta Q_p(z) \cdot \mathbb{1}_S(z)\, dA(z) = \frac{1}{1-\tau^2} \cdot \mathbb{1}_S(z)\, dA(z). \tag{2.25}$$

由假设 (2.5)，我们有

$$\int \log\frac{1}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(z) = \frac{1}{1-\tau^2}\Big(\int_{S_1} \log\frac{1}{|\zeta - z|^2}\, dA(z) - \int_{S_2} \log\frac{1}{|\zeta - z|^2}\, dA(z)\Big).$$

注意，由引理 2.4，存在一个常数 c_0，使得

$$\int_{S_1} \log \frac{1}{|\zeta - z|^2}\, dA(z) = -|\zeta|^2 + \tau \operatorname{Re} \zeta^2 - c_0. \tag{2.26}$$

另一方面，由引理 2.6 可得

$$\int_{S_2} \log \frac{1}{|\zeta - z|^2}\, dA(z) = -2(1-\tau^2)c \log|\zeta - p|. \tag{2.27}$$

结合 (2.26)、(2.27) 和 (2.1)，得到

$$\int \log \frac{1}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(z) = -Q_p(\zeta) - \frac{c_0}{1-\tau^2}, \tag{2.28}$$

由此得到 (1.29)。

接下来，我们证明变分不等式 (1.30)。注意，若 $\zeta \in S_2$，则由引理 2.6 可立即得出。因此，只需验证 $\zeta \in S_1^c$ 情形下的 (1.30)。令

$$H_p(\zeta) := \int \log \frac{1}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(z) + Q_p(\zeta). \tag{2.29}$$

假设变分不等式 (1.30) 不成立。于是，由于当 $\zeta \to \infty$ 时，$H_p(\zeta) \to \infty$，存在 $\zeta_* \in S_1^c$ 使得

$$\partial_\zeta H_p(\zeta)|_{\zeta=\zeta_*} = 0. \tag{2.30}$$

另一方面，由 引理 2.4 和 2.6，若 $\zeta \in S_1^c$，测度 μ 的柯西变换可计算为 s

$$\int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\tau}\Big(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\tau(1+c)}\Big) - \frac{c}{\zeta - p}. \tag{2.31}$$

结合 (2.1)，可得

$$\partial_\zeta Q_p(\zeta) - \int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{1-\tau^2}\Big(\bar\zeta - \tau\zeta\Big) - \frac{1}{2\tau}\Big(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\tau(1+c)}\Big). \tag{2.32}$$

于是可得，条件 $\partial_\zeta H_p(\zeta) = 0$ 等价于

$$(1+\tau^2)|\zeta|^2 - \tau(\zeta^2 + \bar\zeta^2) = (1-\tau^2)^2(1+c). \tag{2.33}$$

因此，由 (2.3) 可知，$\partial_\zeta H_p(\zeta) = 0$ 当且仅当 $\zeta \in \partial S_1$。这与假设 $\zeta_* \in S_1^c$. 矛盾。因此我们得出结论：对于 $\zeta \in S^c$，变分不等式 (1.30) 成立，证明完成。□

注 2.7. 记

$$m_k := \int z^k\, d\mu(z) \tag{2.34}$$

平衡测度的第 k 阶矩。注意，μ 的柯西变换满足如下渐近展开

$$\int \frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{\zeta^k}, \qquad \zeta \to \infty. \tag{2.35}$$

利用这一性质和 (2.31)，经过直接计算，可以验证命题 *2.1* 中的平衡测度 μ 具有以下矩

$$m_{2k} = 2\frac{(2k-1)!}{(k-1)!(k+1)!}\tau^k(1+c)^{k+1} - c\,p^{2k}, \qquad m_{2k+1} = -c\,p^{2k+1}. \tag{2.36}$$

特别注意，如果 $p = 0$，则所有奇数阶矩都为零。

2.2. **前临界情形**。 在本小节中，我们证明定理 1.4 (ii)。由此再根据 (1.16)，定理 1.1 (ii) 得证。

‸定理 *1.4 (ii)* 的证明。回想一下， Q 由 (1.14) 给出，而我们需要证明的只是 $W = Q$. 的变分‸原理 (1.29) 和 (1.30)。为此，与上文类似，令

$$H(\zeta) := \int \log \frac{1}{|\zeta - z|^2}\, d\widehat{\mu}(z) + \widehat{Q}(\zeta), \tag{2.37}$$

‸其中， $\widehat{\mu}$ 是与 Q相关联的平衡测度。于是

$$\partial_\zeta H(\zeta) = \partial_\zeta \widehat{Q}(\zeta) - C(\zeta) = \frac{1}{1-\tau^2}\Big(\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}} - \tau\Big) - \frac{c}{\zeta} - C(\zeta), \tag{2.38}$$

其中， $C(\zeta)$ 是 $\widehat{\mu}$ 的柯西变换，定义为

$$C(\zeta) = \frac{1}{2(1-\tau)^2} \int_{\widehat{S}} \frac{1}{\zeta - z} \frac{1}{|z|}\, dA(z). \tag{2.39}$$

这里我们用到了 (1.5)。

应用格林公式，我们得到

$$(1-\tau^2) C(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \widehat{S}} \frac{1}{\zeta - z} \sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}\, dz + \sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}} \cdot \mathbb{1}_{\{\zeta \in \mathrm{Int}(\widehat{S})\}}. \tag{2.40}$$

回顾一下， f 由（1.11）给出。令

$$g(w) := \sqrt{\frac{\overline{f(1/\bar{w})}}{f(w)}}\, f'(w). \tag{2.41}$$

由于 $f'(a\tau) = 0$, 函数 $g(w)$ 仅在 0， $1/a$， a 处有极点。我们还记

$$h_\zeta(w) := \frac{g(w)}{\zeta - f(w)}. \tag{2.42}$$

作变量替换 $z = f(w)$ 后，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \widehat{S}} \frac{1}{\zeta - z} \sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{\zeta - f(w)} \sqrt{\frac{\overline{f(1/\bar{w})}}{f(w)}}\, f'(w)\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} h_\zeta(w)\, dw. \tag{2.43}$$

根据留数演算，我们有

$$\operatorname*{Res}_{w=0} \Big[h_\zeta(w)\Big] = \frac{1}{\tau}, \qquad \operatorname*{Res}_{w=a} \Big[h_\zeta(w)\Big] = 0. \tag{2.44}$$

注意到， $\zeta = f(w)$ 等价于

$$d(1-aw)(w-a\tau)^2 = w(w-a)\zeta, \qquad d = \frac{(1+\tau)(1+2c)}{2}, \tag{2.45}$$

可改写为一个三次方程

$$adw^3 - (d + 2a^2 d\tau - \zeta) w^2 + a(2d\tau + a^2\tau^2 d - \zeta) w - a^2\tau^2 d = 0. \tag{2.46}$$

对于给定的 $\zeta \in \mathbb{C}$, 存在 $w_\zeta^{(j)}$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$, 使得 $f(w_\zeta^{(j)}) = \zeta$. 注意，由 (2.46) 可得

$$w_\zeta^{(1)} w_\zeta^{(2)} w_\zeta^{(3)} = a\tau^2 \in (-1, 0). \tag{2.47}$$

‸此外，由于 f 是从 $\mathbb{D}^c$ 到 S^c 的共形映射，我们有如下结论：

(1) 如果 $\zeta \in \mathrm{Int}(\widehat{S})$，那么所有 $w_\zeta^{(j)}$ 都在 $\mathbb{D}$ 中；

(2) 如果 $\zeta \in \widehat{S}^c$，那么 $w_\zeta^{(j)}$ 中有两个属于 $\mathbb{D}$。

利用留数演算以及公式 (1.11) 和 (2.41)，对于每个 j,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{w=w_\zeta^{(j)}}\Big[h_\zeta(w)\Big] &= -\frac{g(w_\zeta^{(j)})}{f'(w_\zeta^{(j)})} = -\frac{(w_\zeta^{(j)}-a)(1-a\tau w_\zeta^{(j)})}{(w_\zeta^{(j)}-a\tau)(1-aw_\zeta^{(j)})}\\ &= \frac{d}{\zeta}\frac{(a\tau w_\zeta^{(j)}-1)(w_\zeta^{(j)}-a\tau)}{w_\zeta^{(j)}} = \frac{d}{\zeta}\Big(a\tau w_\zeta^{(j)} - (a^2\tau^2+1) + \frac{a\tau}{w_\zeta^{(j)}}\Big),\end{aligned} \tag{2.48}$$

这里我们用到了（2.45）。另一方面，由（2.46）可得

$$\sum_{j=1}^{3} w_\zeta^{(j)} = \frac{d+2a^2d\tau-\zeta}{ad}, \qquad \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{w_\zeta^{(j)}} = \frac{-\zeta+2d\tau+a^2\tau^2 d}{a\tau^2 d}. \tag{2.49}$$

这些关系给出

$$\begin{aligned}d\sum_{j=1}^{3}\Big(a\tau w_\zeta^{(j)} - (a^2\tau^2+1) + \frac{a\tau}{w_\zeta^{(j)}}\Big) &= d\tau + 2a^2d\tau^2 - \tau\zeta - \frac{\zeta}{\tau} + 2d + a^2\tau d - 3d(a^2\tau^2+1)\\ &= -\Big(\tau+\frac{1}{\tau}\Big)\zeta - c(1-\tau^2).\end{aligned} \tag{2.50}$$

综上所述，我们证明了若 $\zeta \in \mathrm{Int}(S)$,

$$\sum_{j=1}^{3}\operatorname*{Res}_{w=w_\zeta^{(j)}}\Big[h_\zeta(w)\Big] = -\Big(\tau+\frac{1}{\tau}\Big) - \frac{c(1-\tau^2)}{\zeta}. \tag{2.51}$$

因此，若 $\zeta \in \mathrm{Int}(S)$，则有

$$(1-\tau^2)C(\zeta) = \sqrt{\frac{\bar\zeta}{\zeta}} - \frac{1}{\tau} - c(1-\tau^2) = (1-\tau^2)\partial_\zeta\widehat{Q}(\zeta). \tag{2.52}$$

于是由（2.40），变分等式（1.29）得证。

现在只需证明变分不等式 (1.30)。注意，根据定义， $H(\zeta) \to \infty$ 当 $\zeta \to \infty$ 时。假设变分不等式 (1.30) 不成立。则存在 $\zeta_* \in S^c$ 使得

$$\partial_\zeta H(\zeta)|_{\zeta=\zeta_*} = \partial\widehat{Q}(\zeta_*) - C(\zeta_*) = 0. \tag{2.53}$$

回想一下，若 $\zeta \in \widehat{S}^c$，则 $w_\zeta^{(j)}$ 中只有一个（记作 w_ζ）属于 $\mathbb{D}^c$。结合上述计算可得，对于 $\zeta \in S^c$,

$$(1-\tau^2)\Big(\partial_\zeta\widehat{Q}(\zeta) - C(\zeta)\Big) = \sqrt{\frac{\bar\zeta}{\zeta}} - \operatorname*{Res}_{w=w_\zeta}\Big[h_\zeta(w)\Big] = \sqrt{\frac{\bar\zeta}{\zeta}} - \frac{d}{\zeta}\Big(a\tau w_\zeta - (a^2\tau^2+1) + \frac{a\tau}{w_\zeta}\Big). \tag{2.54}$$

因此，恒等式 (2.53) 成立当且仅当

$$|\zeta_*| = d\Big(a\tau w_{\zeta_*} - (a^2\tau^2+1) + \frac{a\tau}{w_{\zeta_*}}\Big). \tag{2.55}$$

注意，由 (1.11) 可得,

$$-\frac{d}{f(x)}\Big(a\tau x - (a^2\tau^2+1) + \frac{a\tau}{x}\Big) = -\frac{1}{f(x)}\frac{(1+\tau)(1+2c)}{2}\frac{(a\tau x-1)(x-a\tau)}{x} = \frac{(a\tau x-1)(x-a)}{(ax-1)(x-a\tau)}.$$

因此，若 $x < 1/(a\tau)$,

$$d\Big(a\tau x - (a^2\tau^2+1) + \frac{a\tau}{x}\Big) < \tau|f(x)| < |f(x)|.$$

由此可见，对于 $w_{\zeta_*} \in \mathbb{R}$，(2.55) 不成立。此外，这意味着 (2.55) 的右端为实值，当且仅当 $w_{\zeta_*} \in \partial\mathbb{D}$，等价地， $\zeta_* \in \partial S$. 这与假设即 $\zeta_* \in S^c$ 相矛盾。至此，证明完成。□

附录 A. 共形映射方法：前临界情形

在本附录中，我们介绍共形映射方法，该方法有助于推导以有理函数 (1.11) 表示的候选液滴。

命题 A.1. 设 $\tau \in (\tau_c, 1)$。假设 S *in* (1.18) 是单连通的。令 f 为唯一的共形映射 $(\mathbb{D}^c, \infty) \to (S^c, \infty)$，其满足

$$f(z) = r_1\, z + r_2 + O\Big(\frac{1}{z}\Big), \qquad z \to \infty. \tag{A.1}$$

于是，以下结论成立。

(i) 共形映射 f 是如下形式的有理函数

$$f(z) = r_1 z + r_2 + \frac{r_3}{z} + \frac{r_4}{z-a}, \qquad a \in (-1, 0), \tag{A.2}$$

其满足

$$f(1/a) = \frac{r_1}{a} + r_2 + r_3 a + \frac{a r_4}{1-a^2} = 0. \tag{A.3}$$

(ii) 参数 r_j $(j = 1, \dots, 4)$ 由下式给出

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1+\tau}{2}\sqrt{\frac{1+2c}{\tau}}, \qquad & r_2 &= \frac{1+\tau}{2\tau}(\tau(1+2c) + 2\tau - 1), \\ r_3 &= \frac{1+\tau}{2}\tau\sqrt{\tau(1+2c)}, \qquad & r_4 &= \frac{(1-\tau)^2(1+\tau)(1-(1+2c)\tau)}{2\tau\sqrt{\tau(1+2c)}} \end{aligned} \tag{A.4}$$

and

$$a = -\frac{1}{\sqrt{\tau(1+2c)}}. \tag{A.5}$$

注意，f 在选取参数 (A.4) 时，对应于 (1.11)。因此在 S 为单连通的假设下，命题 A.1 推出定理 1.4 (ii)。然而，目前没有一般理论能够刻画液滴的连通性。（尽管如此，关于一类势所对应液滴的精确连通性界，读者可参见 [49, 48]。）因此，我们需要像第 2.2 小节中那样直接验证变分原理。

命题 *A.1 (i)* 的证明。对变分等式 (1.29) 求导，我们得到

$$\partial_\zeta \widehat{Q}(\zeta) = C(\zeta) := \int \frac{d\widehat{\mu}(z)}{\zeta - z}, \qquad \zeta \in \widehat{S}. \tag{A.6}$$

利用 (1.14)，可将其改写为

$$\bar{\zeta} = \zeta\Big[(1-\tau^2)\Big(C(\zeta) + \frac{c}{\zeta}\Big) + \tau\Big]^2. \tag{A.7}$$

因此，与液滴 S 相关联的施瓦茨函数 F 存在。此外，它可表示为关于 C 的

$$F(\zeta) = \zeta\Big[(1-\tau^2)\Big(C(\zeta) + \frac{c}{\zeta}\Big) + \tau\Big]^2. \tag{A.8}$$

注意，对于 $z \in \partial\mathbb{D}$，

$$\overline{f(1/\bar{z})} = \overline{f(z)} = f(z)\Big[(1-\tau^2)\Big(C(f(z)) + \frac{c}{f(z)}\Big) + \tau\Big]^2. \tag{A.9}$$

利用这一点，我们通过解析延拓定义 $f\colon\ \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$，即

$$f(z) := \overline{f(1/\bar{z})\Big[(1-\tau^2)\Big(C(f(1/\bar{z})) + \frac{c}{f(1/\bar{z})}\Big) + \tau\Big]^2}. \tag{A.10}$$

因此，f 仅在 0、∞ 以及满足 $f(1/a) = 0$ 的点 $a \in \mathbb{R}$ 处有简单极点，这就得到了 (A.2)。 □

接下来，我们需要确定常数 r_j 和 $a.$。为此，我们将求出这些参数之间的关系。

引理 A.2. 我们有

$$r_3 = r_1\tau^2 \tag{A.11}$$

and

$$r_4 = a(1-\tau^2)\Big(r_2 - 2\tau(1+c)\Big). \tag{A.12}$$

此外，我们有

$$r_2 = r_1\frac{1+a^2\tau^2}{1-a^2\tau^2}\frac{a^2-1}{a} + \frac{2a^2(1-\tau^2)\tau(1+c)}{1-a^2\tau^2}. \tag{A.13}$$

证明。 注意

$$\overline{f(1/\bar z)} = \frac{r_1}{z} + r_2 + r_3 z + \frac{r_4 z}{1-az}. \tag{A.14}$$

因此，我们有

$$\frac{1}{\overline{f(1/\bar z)}} = \frac{1}{r_1}\,z - \frac{r_2}{r_1^2}\,z^2 + \frac{r_2^2 - r_1r_3 - r_1r_4}{r_1^3}\,z^3 + O(z^4), \qquad z\to 0. \tag{A.15}$$

由于柯西变换 C 满足渐近行为

$$C(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + O(\frac{1}{\zeta^2}), \qquad \zeta\to\infty, \tag{A.16}$$

我们有

$$\overline{C(f(1/\bar z))} = \frac{1}{r_1}\,z + O(z^2), \qquad z\to 0. \tag{A.17}$$

将这些方程与 (A.10) 结合，得到

$$f(z) = \frac{r_1\tau^2}{z} + \Big(r_2\tau^2 + 2\tau(1-\tau^2)(1+c)\Big) + O(z), \qquad z\to 0. \tag{A.18}$$

另一方面，利用 (A.2)，有

$$f(z) = \frac{r_3}{z} + \Big(r_2 - \frac{r_4}{a}\Big) + O(z), \qquad z\to 0. \tag{A.19}$$

然后比较 (A.18) 和 (A.19) 中的系数，得到 (A.11) 和 (A.12)。

注意，由 (A.3) 可得

$$r_4 = \frac{a^2-1}{a}\Big(\frac{r_1}{a} + r_2 + r_3 a\Big). \tag{A.20}$$

然后由 (A.11) 可得

$$r_4 = \frac{a^2-1}{a}\Big(\frac{r_1}{a} + r_2 + r_1 a\tau^2\Big) = r_1\frac{(1+a^2\tau^2)(a^2-1)}{a^2} + r_2\frac{a^2-1}{a}. \tag{A.21}$$

将这一恒等式与（A.12）结合，可得

$$a(1-\tau^2)r_2 - 2a(1-\tau^2)\tau(1+c) = r_1\frac{(1+a^2\tau^2)(a^2-1)}{a^2} + r_2\frac{a^2-1}{a}, \tag{A.22}$$

从而得到（A.13）。 □

引理 A.3. 我们有

$$\Big((2-a^2+a^4\tau^2)r_1 + ar_2\Big)\Big(r_2 - 2\tau(1+c)\Big) = (1-\tau^2)c^2a(a^2-1). \tag{A.23}$$

证明。 利用 (A.3)，我们有

$$\frac{1}{\overline{f(1/\bar{z})}} = \frac{a^2(a^2-1)}{(2-a^2)r_1 + ar_2 + a^4 r_3}\,\frac{1}{z-a} + O(1), \qquad z \to a. \tag{A.24}$$

于是，由 (A.10) 和 (A.11) 可得

$$r_4 = \frac{(1-\tau^2)^2 c^2\, a^2(a^2-1)}{(2-a^2)r_1 + ar_2 + a^4 r_3} = \frac{(1-\tau^2)^2 c^2\, a^2(1-a^2)^2}{r_1(a^2\tau^2-1)(1-a^2)^2 + r_4 a^2}. \tag{A.25}$$

现在由 (A.12) 即可得到引理。 □

命题 *A.1 (ii)* 的证明。由于 $\widehat{\mu}$ 是一个概率测度，我们有

$$1 = \int_{\widehat{S}} \frac{1}{2(1-\tau^2)}\frac{1}{|z|}\,dA(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\widehat{S}} \frac{1}{1-\tau^2}\sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}\,dz, \tag{A.26}$$

其中第二个等式用到了格林公式。通过变量替换 $z = f(w)$，其中 f 具有 (A.2) 的形式，可将其改写为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \sqrt{\overline{f(1/\bar{w})}f(w)}\,\frac{f'(w)}{f(w)}\,dw = 1-\tau^2. \tag{A.27}$$

由引理 A.2 和 (A.2) 可得

$$f(z) = \frac{1-az}{z(z-a)}\Big(-\frac{r_1}{a}z^2 + \Big(\frac{a^2-1}{a^2}r_1 - \frac{r_2}{a}\Big)z - a\tau^2 r_1\Big), \tag{A.28}$$

$$\overline{f(1/\bar{z})} = \frac{z-a}{z(1-az)}\Big(-a\tau^2 r_1 z^2 + \Big(\frac{a^2-1}{a^2}r_1 - \frac{r_2}{a}\Big)z - \frac{r_1}{a}\Big). \tag{A.29}$$

注意到，根据构造，除 $1/a$ 之外， f 的另外两个零点位于单位圆盘内。利用这两个零点以及直接的留数演算，我们得到

$$\mathrm{Res}_{w=0}\Big[\sqrt{\overline{f(1/\bar{w})}f(w)}\,\frac{f'(w)}{f(w)}\Big] = (1+c)(1-\tau^2) \tag{A.30}$$

and

$$\mathrm{Res}_{w=a}\Big[\sqrt{\overline{f(1/\bar{w})}f(w)}\,\frac{f'(w)}{f(w)}\Big] = -\frac{1}{a}\Big[\Big(\frac{1+a^2\tau^2}{a}r_1 + r_2\Big)\Big(\frac{a^4\tau^2 - a^2 + 2}{a}r_1 + r_2\Big)\Big]^{1/2}. \tag{A.31}$$

此外，由引理 A.3 可知

$$\mathrm{Res}_{w=a}\Big[\sqrt{\overline{f(1/\bar{w})}f(w)}\,\frac{f'(w)}{f(w)}\Big] = -c(1-\tau^2). \tag{A.32}$$

结合 (A.27)、(A.30) 和 (A.32)，可以发现函数 f 有一个二重零点，这意味着

$$\frac{a^2-1}{a^2}r_1 - \frac{r_2}{a} = 2r_1\tau. \tag{A.33}$$

通过求解 引理 A.2、A.3 和 (A.33) 中给出的方程组，即可得到所需结果 . □

注 A.4 （平衡测度高阶矩的运用）。 在更复杂的情形下，例如存在多个点电荷的情形，如(2.7)，质量为一条件(A.26) 可能不足以刻画这些参数。此时，可以进一步利用上述引理中出现的高阶渐近展开，其中涉及平衡测度的 k 阶矩；参见(2.35)。因此，原则上总能找到足够的（代数）关系来刻画共形映射中出现的参数。

注 A.5. 对于 $\tau = 0$ 和 $p > 0$，文献 [12] 证明了，若

$$c > \frac{(1-p^2)^2}{4p^2},$$

与 (2.1) 相关的液滴是一个单连通域，其边界由共形映射的像给出

$$f(z) = R\,z - \frac{\kappa}{z-q} - \frac{\kappa}{q}, \qquad R = \frac{1+p^2q^2}{2pq}, \qquad \kappa = \frac{(1-q^2)(1-p^2q^2)}{2pq}.$$

这里， q 由 $P\left(q^2\right) = 0$的唯一解给出，其中

$$P(x) := x^3 - \Big(\frac{p^2+4c+2}{2p^2}\Big)x^2 + \frac{1}{2p^4}$$

使得 $0 < q < 1$ 且 $\kappa > 0$.

除 $\tau = 0$这一情形外，上述共形映射方法也适用于具有一般 $\tau \in [0,1)$ $c \in \mathbb{R}$ 和 $p \in \mathbb{C}$ 的势(2.1)，前提是相应的液滴为单连通。在此假设下，可以证明液滴的边界是如下形式的有理共形映射 f 的像

$$f(z) = R_1\,z + R_2 + \frac{R_3}{z} + \frac{R_4}{z-q}, \qquad q \in \mathbb{D}, \tag{A.34}$$

它满足 $f\left(1/q\right) = 0$。此外，按照上述策略，还可以刻画该有理映射的系数 R_j（$j = 1, \ldots, 4$）以及极点 $q \in \mathbb{D}$的位置。

然而，如前所述，要刻画使液滴单连通的条件并非显而易见。不过，由于椭圆(2.3) 在点（$1+\tau$）$\sqrt{1+c}$ 处的曲率半径为

$$\frac{(1-\tau)^2}{1+\tau}\sqrt{1+c},$$

可以预期，如果

$$p > \max\Big\{\frac{4\tau}{1+\tau}\sqrt{1+c},\, (1+\tau)\sqrt{1+c} - \sqrt{1-\tau^2}\sqrt{c}\Big\} \tag{A.35}$$

那么液滴是一个单连通域。

附录 B. 厄米极限下一维平衡测度问题

在本附录中，我们给出 (2.10) 的证明。记

$$V(z) \equiv V_p(z) = \frac{z^2}{2} - 2c\log|z-p|. \tag{B.1}$$

回顾一下，$\mu_V \equiv \mu_{V_p}$ 是与 $V_p(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ 相关的平衡测度。我们定义

$$R(z) := \Big(\frac{V'(z)}{2}\Big)^2 - \int_{\mathbb{R}} \frac{V'(z)-V'(s)}{z-s}\,d\mu_V(s). \tag{B.2}$$

通过应用 Schiffer 变分（例如参见 [35, 第 3节），我们得到

$$R(z) = \Big(\int \frac{d\mu_V(s)}{z-s} - \frac{V'(z)}{2}\Big)^2, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{supp}(\mu_V). \tag{B.3}$$

结合渐近行为

$$\int \frac{d\mu_V(s)}{z-s} \sim \frac{1}{z}, \qquad z \to \infty,$$

与 (B.3)，我们得到

$$R(z) = \frac{1}{4}z^2 - (c+1) - \frac{cp}{z} + O\Big(\frac{1}{z^2}\Big), \qquad z \to \infty. \tag{B.4}$$

另一方面，由于

$$V'(z) = z - \frac{2c}{z-p}, \qquad \frac{V'(z)-V'(s)}{z-s} = 1 + \frac{2c}{z-p}\frac{1}{s-p},$$

我们有

$$R(z) = \frac{1}{4}\Big(z - \frac{2c}{z-p}\Big)^2 - 1 - \frac{2c}{z-p}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_V(s)}{s-p}. \tag{B.5}$$

因此我们得到

$$R(z) = \frac{c^2}{(z-p)^2} + O\Big(\frac{1}{z-p}\Big), \qquad z \to p. \tag{B.6}$$

在表达式 (B.5) 中，可以观察到 R 是一个在 $z = p$ 处有二阶极点的有理函数。因此它具有如下形式

$$R(z) = \frac{1}{4}z^2 + \frac{Az^2 + Bz + C}{(z-p)^2} \tag{B.7}$$

其中 A, B 和 C 是一些常数。与上一小节一样，我们需要确定这些参数。

通过直接计算，我们得到

$$R(z) = \frac{1}{4}z^2 + A + \frac{2Ap + B}{z} + O\Big(\frac{1}{z^2}\Big), \qquad z \to \infty, \tag{B.8}$$

and

$$R(z) = \frac{Ap^2 + Bp + C}{(z-p)^2} + O\Big(\frac{1}{z-p}\Big), \qquad z \to p. \tag{B.9}$$

通过比较 (B.4) 和 (B.8) 中的系数，我们得到

$$A = -c - 1, \qquad -cp = 2Ap + B. \tag{B.10}$$

同样，由 (B.6) 和 (B.9),

$$Ap^2 + Bp + C = c^2. \tag{B.11}$$

通过求解这些代数方程，我们得到

$$B = p(c+2), \qquad C = c^2 - p^2. \tag{B.12}$$

结合上述所有结果与 (B.7)，我们证明了

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{4}z^2 + \frac{-(c+1)z^2 + p(c+2)z + (c^2 - p^2)}{(z-p)^2} \\ &= \frac{((z-p)(z-2) - 2c)((z-p)(z+2) - 2c)}{4(z-p)^2} = \frac{\prod_{j=1}^4 (z - \lambda_j)}{4(z-p)^2}, \end{aligned} \tag{B.13}$$

其中 λ_j 由 式 (2.11) 和 (2.12) 给出。因此，由 (B.3)， μ_V 的斯蒂尔切斯变换为 y

$$\int \frac{d\mu_V(s)}{z-s} = \frac{V'(z)}{2} - R(z)^{1/2} = \frac{z}{2} - \frac{c}{z-p} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^4 (z-\lambda_j)}{(z-p)^2}}. \tag{B.14}$$

令 $z = x + i\varepsilon \to x \in \mathbb{R}$，我们得到

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \operatorname{Im} \int \frac{d\mu_V(s)}{(x+i\varepsilon) - s} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-\prod_{j=1}^4 (x-\lambda_j)}}{2|x-p|} & \text{if } x \in [\lambda_1, \lambda_2] \cup [\lambda_3, \lambda_4], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在所需的恒等式 （2.10）由索科茨基–普列梅利反演公式得出，参见例如 [39, 第 I.4.2 节].

致谢。 作者非常感谢 Yongwoo Lee 提供图和数值模拟。

参考文献

[1] G. Akemann。三维 QCD 中非厄米狄拉克算子的微观相关性。Phys. Rev. D，64(11):114021，2001。 [2] G. Akemann 和 S.-S. Byun。一般二维库仑气体的高温交叉行为。统计物理学杂志，( ): –，2019。[3] G. Akemann、S.-S. Byun 和 N.-G. Kang。马尔琴科-帕斯图尔分布的一个非厄米推广：从圆定律到多临界状态。Ann. Henri Poincaré，22(4):1035–1068，2021。 [4] G. Akemann、S.-S. Byun 和 N.-G. Kang。平面辛系综的标度极限。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.，18：论文编号 007，40，2022。[5] G. Akemann、M. Duits 和 L. Molag。椭圆 Ginibre 系综：高维局部与整体统计量的统一方法。预印本 arXiv:2203.00287，2022。 [6] G. Akemann、M. Ebke 和 I. Parra。复平面上的斜正交多项式及其类 Bergman 核。数学物理通讯，389(1):621–659，2022。 [7] Y. Ameur。低温 β-系综中的排斥。数学物理通讯，359(3):1079–1089，2018。 [8] Y. Ameur 和 S.-S. Byun。近厄米随机矩阵与带限点过程。预印本 arXiv:2101 03832，2021。.[9] Y. Ameur、C. Charlier 和 J. Cronvall。二维库仑气体：通过谱隙的涨落。预印本 arXiv:2210.13959，2022。[10] Y. Ameur、C. Charlier、J. Cronvall 和 J. Lenells。随机正规矩阵硬边附近的圆盘计数统计量：多分量区域。预印本 arXiv:2210.13962，2022。[11] Y. Ameur 和 J. L. Romero。平面低温库仑气体：分离与等分布。Rev. Mat. Iberoam.（在线），arXiv:2010.10179，2022。 [12] F. Balogh、M. Bertola、S.-Y. Lee 和 K. D. T.-R. McLaughlin。关于平面上支撑测度的正交多项式的强渐近。纯粹与应用数学通讯，68(1):112–172，2015。 [13] F. Balogh、T. Grava 和 D. Merzi。复平面上一类具有离散旋转对称性的测度的正交多项式。构造逼近，46(1):109–169，2017。 [14] F. Balogh 和 D. Merzi。一类具有离散旋转对称性的势的平衡测度。构造逼近，42(3):399–424，2015。 [15] F. Benaych-Georges 和 F. Chapon。高斯四元数矩阵的随机右特征值。Random Matrices Theory Appl.，1(2):1150009，18，2012。 [16] S. Berezin、A. B. Kuijlaars 和 I. Parra。作为 I 型多重正交多项式的平面正交多项式。预印本 arXiv:2212.06526，2022。[17] M. Bertola、J. G. Elias Rebelo 和 T. Grava。复平面正交多项式的 Painlevé IV 临界渐近。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.，14：论文编号 091，34，2018。[18] P. M. Bleher 和 A. B. J. Kuijlaars。具有三次势的正规矩阵模型中的正交多项式。数学进展，230(3):1272–1321，2012。 [19] T. Bothner 和 A. Little。弱非厄米性下的复椭圆 Ginibre 系综：体间距分布。预印本 arXiv:2212.00525，2022。[20] T. Bothner 和 A. Little。弱非厄米性下的复椭圆 Ginibre 系综：边缘间距分布。arXiv:2208.04684，2022。[21] J. S. Brauchart、P. D. Dragnev、E. B. Saff 和 R. S. Womersley。球面上多个源的对数与 Riesz 平衡：特殊情形。载于《当代计算数学——庆祝 Ian Sloan 80 岁寿辰》，第 179–203 页。Springer，2018。 [22] S.-S. Byun 和 C. Charlier。关于近圆形辛诱导 Ginibre 系综。Stud. Appl. Math.（在线），arXiv:2206.06021，2022。[23] S.-S. Byun 和 C. Charlier。关于随机正规矩阵特征值模的特征多项式。预印本 arXiv:2205.04298，2022。[24] S.-S. Byun 和 M. Ebke。辛椭圆 Ginibre 系综的普适标度极限。Random Matrices Theory Appl.（在线）arXiv:2108.05541，2021。 [25] S.-S. Byun、M. Ebke 和 S.-M. Seo。平面辛系综的 Wronskian 结构。非线性，36(2):809–844，2023。 [26] S.-S. Byun 和 P. J. Forrester。Ginibre 系综研究进展 I：GinUE。预印本 arXiv:2211.16223，2022。 [27] S.-S. Byun 和 P. J. Forrester。具有辛对称性的球形诱导系综。预印本 arXiv:2209.01934，2022。 [28] S.-S. Byun 和 P. J. Forrester。Ginibre 系综研究进展 II：GinOE 与 GinSE。准备中，2023年。 [29] S.-S. Byun、N.-G. Kang 和 S.-M. Seo。具有径向对称势的行列式与 Pfaffian 库仑气体的配分函数。预印本 arXiv:2210.02799，2022。 [30] S.-S. Byun 和 M. Yang。具有一类离散旋转对称势的行列式库仑气体系综。预印本 arXiv:2210.04019，2022。[31] D. Chafaï、N. Gozlan 和 P.-A. Zitt。具有奇异成对排斥的受限粒子的一级整体渐近。Ann. Appl. Probab.，24(6):2371–2413，2014。 [32] C. Charlier。随机正规矩阵模型中环带上的大间隙渐近。预印本 arXiv:2110.06908，2021。 [33] C. Charlier。具有旋转不变权重且沿圆周存在不连续性的行列式渐近。数学进展，408:108600，2022。

[34] P. Choquard、B. Piller 和 R. Rentsch。《经典库仑系统的介电极化率》。II. 统计物理学杂志，46(3):599–633，1987年。[35] J. G. Criado del Rey 和 A. B. Kuijlaars。《球面上具有两个相等电荷的平衡问题》。预印本 arXiv:1907.04801，2019年。[36] J. G. Criado del Rey 和 A. B. Kuijlaars。《球面上对称分布点电荷的向量平衡问题》。构造逼近，页码 1–53，2022年。[37] P. Forrester 和 B. Jancovici。《四极场中的二维单组分等离子体》。国际现代物理学杂志 A，11(05):941–949，1996年。[38] P. J. Forrester。《对数气体与随机矩阵》（LMS-34）。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2010年。[39] F. D. Gakhov。《边值问题》。Dover Publications, Inc.，纽约，1990年。译自俄语，重印1966年译本。[40] J. Ginibre。《复矩阵、四元数矩阵和实矩阵的统计系综》。数学物理学杂志，6(3):440–449，1965年。[41] H. Hedenmalm 和 N. Makarov。《库仑气体系综与拉普拉斯生长》。伦敦数学会会刊（3 907, 2013 106 4 859），（）：–。[42] B. Jancovici、G. Manificat 和 C. Pisani。《作为临界系统的库仑系统：二维中的有限尺寸效应》。统计物理学杂志，76(1):307–329，1994年。[43] E. Kanzieper。《非厄米辛随机矩阵中的特征值关联》。物理学杂志 A，35(31):6631–6644，2002年。[44] A. B. J. Kuijlaars 和 A. López-García。《具有单项式势的正规矩阵模型、向量平衡问题及星形集上的多重正交多项式》。非线性，28(2):347–406，2015年。[45] A. B. J. Kuijlaars 和 K. T.-R. McLaughlin。《负参数拉盖尔多项式零点的渐近行为》。构造逼近，20(4):497–523，2004年。[46] A. B. J. Kuijlaars 和 G. L. F. Silva。《多项式外场中的 S 曲线》。逼近理论杂志，191:1–37，2015年。[47] A. B. J. Kuijlaars 和 A. Tovbis。《具有三次势的正规矩阵模型中的超临界区域》。数学进展，283:530–587，2015年。[48] S.-Y. Lee 和 N. Makarov。《求积域连通性界的锐度》。预印本 arXiv:1411.3415，2014年。[49] S.-Y. Lee 和 N. G. Makarov。《求积域的拓扑》。美国数学会杂志，29(2):333–369，2016年。[50] S.-Y. Lee 和 R. Riser。《随机正规矩阵特征值的精细渐近行为：椭圆情形》。数学物理学杂志，57(2):023302，2016年。[51] S.-Y. Lee 和 M. Yang。《高斯权受到扰动时平面正交多项式渐近行为的不连续性》。数学物理通讯，355(1):303–338，2017年。[52] S.-Y. Lee 和 M. Yang。《作为第二类多重正交多项式的平面正交多项式》。物理学杂志 A，52 275202，14，2019 27( ): 。[53] S.-Y. Lee 和 M. Yang。《平面正交多项式的强渐近：受有限个点电荷扰动的高斯权》。纯粹与应用数学通讯（即将出版），arXiv:2003.04401，2020年。[54] A. Legg 和 P. Dragnev。《存在多个点电荷时球面上的对数平衡》。构造逼近，54(2):237–257，2021年。[55] M. Lewin。《库仑气体与黎曼气体：已知与未知》。数学物理学杂志，63(6):论文编号 061101，77，2022年。[56] A. Martínez-Finkelshtein 和 G. L. F. Silva。《向量能量的临界测度：三次权下非对角多重正交多项式的渐近》。数学进展，349:246–315，2019年。[57] L. Molag。《随机正规矩阵边缘普适性向高维的推广》。预印本 arXiv:2208.12676，2022年。[58] S. R. Nodari 和 S. Serfaty。《二维库仑系统中的重整化能量均匀分布与局部电荷平衡》。国际数学研究通知，2015(11):3035–3093，2015年。[59] E. B. Saff 和 V. Totik。《带外场的对数势》，《数学科学基础丛书》第316卷。 /数学科学基本原理/。施普林格出版社，柏林，1997年。附录 B 由 Thomas Bloom 撰写。[60] M. Sakai。《具有施瓦茨函数的边界的正则性》。数学学报，166(3-4):263–297，1991年。[61] E. Sandier 和 S. Serfaty。《从金兹堡-朗道模型到涡旋晶格问题》。数学物理通讯，313 743，2012 3 635( ): –。[62] S. Serfaty。《对数气体与库仑气体的微观描述》。载于《随机矩阵》，IAS/帕克城数学丛书第26卷，页码 341–387。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2019年。

数学挑战中心 ，韩国高等研究院 ，会基路85号 ，东大门区 ，首尔02455 ，大韩民国
电子邮箱地址：sungsoobyun@kias.re.kr