arXiv:2301.00336v1 [math.CO] 1 Jan 2023

# 从离散到连续：单色三项等差数列

Torin Greenwood*、Jonathan Kariv†、Noah Williams‡

2022年12月31日

**摘要**

我们证明，在某些限制条件下，一种已知的整数二着色 $[N]:=\{1,2,3,...,N\}$使单色三项等差数列的数量最少。单色等差数列是由间距相等且颜色相同的整数组成的集合。Parrilo、Robertson 和 Saracino 先前的研究猜想，对于较大的$N$，一种包含 12 个着色区块的着色是最优的。在此，我们证明，在包含不超过 12 个着色区块的反对称着色中，该猜想是最优的。我们利用了与连续区间 $[0,1]$着色之间的联系；Parrilo、Robertson 和 Saracino，以及 Butler、Costello 和 Graham 都曾使用过这种着色。我们的证明将各类着色与排列对应起来，然后利用混合整数线性规划对这些排列进行计数。

## 1 引言

考虑用 $r$ 种颜色之一为 $[N]$ 中的每个整数着色。 $\kappa$项等差数列是由 $\kappa$ 个等间距整数构成的任意子集，记作 $\kappa$-等差数列。如果等差数列的每一项都被涂成相同的颜色，则称它是单色的。我们能否以某种方式为 $[N]$ 着色，从而避免所有单色的 $\kappa$-等差数列？一个经典结果是范德瓦尔登定理：

**定理1.1** (范德瓦尔登， [17])。 对于任意整数 $r$、 $\kappa \geq 1$，都存在一个数 $N$，使得 $[N]$ 的每一种 $r$-着色都包含一个单色的 $\kappa$-等差数列。

既然当足够多的数被着色时，必定会出现单色 $\kappa$-等差数列，我们便提出一个更精细的问题：可能出现的单色 $\kappa$-等差数列的最小数量是多少？更准确地说，定义 $\mathcal{C}_r(N)$为 $r$的 $[N]$-着色集合。对于任意 $c \in \mathcal{C}_r(N)$，令 $m_\kappa(c)$表示

*北达科他州立大学数学系，美国北达科他州法戈，torin.greenwood@ndsu.edu

†Isazi Consulting，南非约翰内斯堡，jkariv@isaziconsulting.co.za

‡阿巴拉契亚州立大学数学科学系，美国北卡罗来纳州布恩，williamsnn@appstate.edu

由 $c$所诱导的单色 $\kappa$-等差数列的数量。最后，令 $\mathrm{AP}_\kappa(N)$ 表示 $[N]$中 $\kappa$-等差数列的总数，不论它们是否为单色。接下来，我们考察

$$P_{r,\kappa}(N) := \min_{c\in\mathcal{C}_r(N)} \frac{m_\kappa(c)}{\mathrm{AP}_\kappa(N)}.$$

本文旨在考察二着色中单色三项等差数列的最小值， $P(N) := P_{2,3}(N)$。1999年，Ron Graham 提出 $\lim_{n\to\infty} P(n) = \beta$ for some constant, $\beta$，并悬赏 100 美元寻找$\beta$。起初，人们并不清楚从长远来看，着色是否能优于随机着色：对于较大的 $N$，能否对 $[N]$ 进行着色，使随机选取的三项等差数列为单色的概率低于 $(1/2)^3 + (1/2)^3 = 1/4$? 值得注意的是，对于 $\mathbb{Z}_p$ 的二着色，类似问题在 $p$ 为素数时答案是否定的。事实上，Lu 和 Peng [12] 证明，对于 $\mathbb{Z}_p$的任意一种二着色，单色三项等差数列所占的比例仅取决于着色中各颜色所占的比例。

对于我们关于 $[N]$ 二染色的问题，Parrilo 等人 [14] 和 Butler 等人 [2] 独立地（但几乎同时）证实，结果可以优于随机着色，并找到了单色等差数列最小值的上下界。上界是通过模拟优良着色并找出表现出色的着色而得到的。他们最终得到了以下 12 块分块染色：



具体来说，对 $[N]$ 着色时，各块的大小约为：

$$\left(\frac{28N}{548}, \frac{6N}{548}, \frac{28N}{548}, \frac{37N}{548}, \frac{59N}{548}, \frac{116N}{548}, \frac{116N}{548}, \frac{59N}{548}, \frac{37N}{548}, \frac{28N}{548}, \frac{6N}{548}, \frac{28N}{548}\right) \tag{1}$$

由于这种着色， $P(N) \le \frac{117}{548} + o(1)$。请注意，这种着色是反对称的：着色的左半部分是右半部分的镜像，但使用相反的颜色。在 [2], ，Butler 等人使用遗传算法进行了大量计算机模拟，以寻找最优着色，并指出无论起始时采用哪种种子着色，都会一再出现同一种 12 块分块染色。他们还指出，剩下的一项挑战是分析快速交替染色的情形。

本文旨在证明，当 $N \to \infty$ 时， $[N]$ 的二着色中，具有交替色块且色块大小由公式（1）给出的着色，在至多含有 12 个块的反对称着色中是全局最优的。据作者所知，这是首个在任何限制条件下证明最优性的结果。此处，我们令 $\tilde{\mathcal{C}}_2(N)$ 表示 $[N]$ 的二染色，其中这些染色具有反对称性，且红色或蓝色的连续线段不超过 12 段。接着，定义

$$\tilde{P}(N) = \min_{c\in\tilde{\mathcal{C}}_2(N)} \frac{m_3(c)}{\mathrm{AP}_3(N)}.$$

我们的主要结果如下：

**定理 1.2**。 考虑对 $[N]$ 中的每个整数进行红色或蓝色染色，使该染色具有反对称性且至多包含 12 个连续区块。那么，随着 $N$ 增大，等差数列所占的最小可能比例趋近于 $\frac{117}{548}$。也就是说，$\lim_{N\to\infty} \tilde{P}(N) = \frac{117}{548}$。

下面，我们提供一份证明概要，概述论文各部分的内容。

证明概要。 首先，我们将把对 $[N]$ 的离散着色转换为对 $[0,1]$ 的连续染色，且至多包含 12 个连续线段，这种染色称为分块染色。 限制染色中可能发生的颜色变化次数后，结果表明，优化离散着色与优化连续染色是等价的，严格论证见引理 3.6。

转向连续领域时，我们将连续染色定义为函数 $c : [0,1] \to \{0,1\}$，其中值域中的 0 和 1 分别表示红色和蓝色。接着，令 $f_{[0,1]}(c)$ 表示染色 $c$ 中单色等差数列所占的比例。我们可以用几何图形来表示这一比例，即 Butler、Costello 和 Graham 在 [2] 中介绍并在下方图1中展示的*BCG* 图。当 $c$ 由 12 个连续线段组成时，我们将染色的端点标记为 $(x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{12} = 1)$。随着染色 $c$ 的变化， $f_{[0,1]}(c)$ 是关于 $x_i$ 的分段二次函数。此外，如引理 4.1 所述，$f_{[0,1]}(c)$ 的每一段完全由各对和 $\{x_i + x_j\}$ 的相对顺序决定。

接下来，我们旨在确定在所有将 $[0,1]$ 划分为 12 个区间的着色 $c$ 中，二次函数的每一部分。借助 GNU 线性规划工具包 [9]，我们统计出 371,219 种可能的排列，它们可能使 $f_{[0,1]}$ 中出现不同的二次式；这一点已在引理 4.2 中证明，所用代码可在线获取：https://cocalc.com/TorinGreenwood/MonochromeSequences/MonochromaticProgressions。

最后，在确定二次函数中可能的 371,219 个部分后，我们在所有这些部分中寻找 $f_{[0,1]}$ 的全局最小值。幸运的是，根据引理 4.3， $f_{[0,1]}$ 是一个具有连续偏导数的连续函数。因此，我们可以通过搜索二次式每个部分内的所有临界点来最小化 $f_{[0,1]}$ 。由于 $f_{[0,1]}$ 是分段二次式，其临界点由线性不等式系统（定义 $f_{[0,1]}$ 某一部分的定义域）和等式（令 $f_{[0,1]}$ 的偏导数为零）确定，因此我们再次可以使用线性规划来确定这些临界点。我们在引理 4.4 中介绍了搜索这些临界点的方法，从而完成证明。

□

我们的证明结构还带来一个附带结果：如推论 4.5 所述，在连续区块数固定的着色中，存在端点为有理数的最优着色。在第 5 节中，我们证明，对于连续单位圆 $S_1$ 的二着色，单色等差数列所占的比例仅取决于着成红色的点的测度。这与 $[5, 12]$ 中关于 $\mathbb{Z}_p$ 的着色结果类似，其中 $\mathbb{Z}_p$ 针对的是 $p$ 素数。

## 2 背景

在寻找 $[N]$ 中单色等差数列数量的界时，Frankl、Graham 和 R¨odl 得出了以下定理：

**定理2.1** (Frankl,Graham,R¨odl, [7])。 对于固定的 $r$ 和 $\kappa$，存在 $\ell > 0$，使得在对 $\{1, 2, \ldots, N\}$进行的任意 $r$着色中，单色 $\kappa$-等差数列的数量至少为 $\ell N^2 + o(N^2)$。

这证明了随着数列长度增长，等差数列中必有正比例是单色的，但并未说明 $\ell$ 可以有多小。

Datskovsky 在 [5], 研究了一个相关问题，分析 $[N]$中单色 Schur 三元组的最小数量。来自$[N]$ 的 Schur 三元组（$a$， $b$， $c$）是指满足 $a + b = c$的任意三个整数。Datskovsky 考察了将每个整数染成红色或蓝色时，单色 Schur 三元组可能的最小数量，并证明了其渐近最小值为 $N^2/11$。证明依赖于离散傅里叶变换，该变换导出了一个组合恒等式，将 Schur 三元组的计数分解为几个更易分析的集合。虽然我们的证明不使用离散傅里叶变换，但同样会将一个离散问题转换到连续空间中。

在 [14], Parrilo 等人将 Datskovsky 的一些研究工具应用于等差数列。同样，作者发现了一个组合恒等式，可以将等差数列集合分解为更简单的集合，但已无法再精确枚举这些集合。于是，作者最终得出了$[N]$中可能出现的单色等差数列最小数量的上下界。他们还指出了上文引言中公式（1）所示的着色，并验证了它在具有 12 个区间且满足反对称条件的着色中是局部最优的。我们的论文旨在证明，在同一类着色中，这种着色是全局最优的。

星座 是 [2], 中研究的一种等差数列推广。与等差数列中所有点等间距不同，星座中各项的连续差必须满足某些固定比例。Butler 等人通过用示性函数的积分表示单色星座集合，对星座进行了分析。这使他们能够在二维图中表示单色区域，我们称之为 BCG 图，如图1所示。通过这些图来可视化等差数列对我们的证明至关重要，也为我们提供了连接离散领域与连续领域所需的纽带。

我们证明中的一个重要方面，是枚举两两和 $\{x_i + x_j\}$ 对于由正实数 $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$ 组成的列表 $n$为偶数且满足 $x_i + x_{n-i} = 1$时，可能的排序方式数。这个问题可以表述为计算超平面排列中胞腔的数量；正如 [16] 中所示，已有丰富的工具可用于计算胞腔数量。不过，在本文中，我们采用混合整数线性规划，这种方法非常适合判断一个线性不等式系统是否有解。Miller 和 Peterson 在[13] 中统计和多于差集合时也采用了这种编码方法，Laaksonen 也曾使用

在 [10] 中，他统计了密切相关的两两和排列。关于这种方法的更多细节，见下文第4.2节。

目前，在一般（非反对称）情形下，关于 $\kappa > 3$ 中单色$\kappa$-三项等差数列最小数量的最佳已知界，是通过一种“展开”策略得到的，该策略见于 [12] 和 [3]。具体而言，先明确找出区间 $\{1, \dots, \ell\}$ 上针对 $\ell \ll N$ 的最优着色，然后重复该着色以填满区间 $[N]$。尽管这种策略在 $\kappa > 3$ 时效果很好，但当 $\kappa = 3$ 时，从长远来看，这些着色的效果并不优于随机着色。

# 3 离散情形与连续情形之间的关系

本节将明确界定 $[N]$ 的离散二染色与 $[0,1]$ 的一种自然的连续二染色类比之间的联系。首先，我们先正式定义 $[N]$ 中的三项等差数列：三项等差数列是由 3 项组成的任意集合（$a,\ a+d,\ a+2d$），其中每一项都属于 $[N]$，而 $d$ 可以是包括负值或零在内的任意整数。为方便论证，我们将 $d \leq 0$ 的情形也纳入考虑；不过，这一选择最终不会改变使单色等差数列最少的着色，也不会改变所能达到的最小值。

对于区间 $[0,1],$，我们通过其首项和末项（$a,\ a+2d$）来确定任意一个三项等差数列（$a,\ a+d,\ a+2d$）在 $[0,1] \times [0,1]$ 中的位置，现在允许 $d$ 为任意实数。通过在等差数列的起点和终点上均匀取值，我们在 $[0,1]$ 中三项等差数列的集合上得到一个测度。区间的着色定义为一个函数 $c\colon\ [0,1] \to \{0,1\}$。

在本节中，我们首先讨论 $[0,1],$ 的可测着色，它们可以用下文定义的标准方式通过 珠串染色 进行逼近。然后，我们证明，在 $[0,1]$ 的所有可测着色中最小化单色等差数列的数量，与仅在珠串染色中最小化所有等差数列的数量是相同的，具体形式化表述见下文的引理3.1、引理3.2和引理3.3。

接下来，我们说明 $[N]$ 的每个离散着色都有一个相应的 $[0,1],$ 连续着色，并且正如上文及引理 3.4 所述，连续着色中单色等差数列的比例是离散着色中的单色等差数列和单色差一等差数列的函数。利用这一联系，我们发现，当着色中连续颜色段的块数受 $n$限制时，随着 $N$ 变大，连续着色中的等差数列比例与其离散对应物之间的差异很小，这一点在引理 3.5 中得到了形式化。最后，这使我们能够证明本节的主要结果：对具有固定块数的离散着色进行最小化，与对具有相同块数的连续着色进行最小化是相同的，详见引理 3.6。

现在，我们开始正式陈述结果，首先给出勒贝格可测着色的定义。

**定义 1.** $[0,1]$ 的着色是勒贝格可测的，当且仅当 $c^{-1}(0)$ 是勒贝格可测的（等价地，$c^{-1}(1)$ 是勒贝格可测的）。

**定义 2.** $[0,1]$ 的珠子着色是指这样一种着色：对于某个 $\ell$，每个区间 $(\frac{i}{\ell}, \frac{i+1}{\ell})$ 对于 $i = 0、1、\cdots\cdots、\ell-1$ 都是单色的。每个区间$(\frac{i}{\ell}, \frac{i+1}{\ell})$称为一颗珠子，我们有时也将这种着色称为 $\ell$-珠子着色。

我们引入珠子着色，因为它是对整数 $[N]$ 着色的连续类比：将每个整数扩展成一个区间即可得到。我们的目标是证明，在区间 $[0,1]$，上优化着色时，只需考虑珠子着色。我们将珠子着色的集合记为 $\mathcal{B}$，将勒贝格可测着色的集合记为 $\mathcal{M}$。注意到 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$。最后，我们定义两种着色之间的差异如下。

**定义 3**。对于两种着色 $c_a \in \mathcal{M}$ 和 $c_b \in \mathcal{M}$，我们定义 $d(c_a, c_b)$：$=\mu(\{x \mid c_a(x) \neq c_b(x)\})$，其中 $\mu$ 是 $\mathbb{R}$ 上的通常勒贝格测度。

回顾一下，我们用 $[0,1]$ 中的起点和终点组成的有序对来表示 $[0,1]$ 中的一个等差数列。对于 $[N]$ 上的着色 $c$，我们将 $f_{[N]}(c)$ 定义为单色等差数列所占的比例。类似地，当 $c$ 是 $[0,1]$，的一个着色时，我们有如下定义：

**定义 4.** 对于着色 $c: [0,1] \to \{0,1\}$，令 $f_{[0,1]}(c)$ 表示由着色 $c$诱导的单色三项等差数列集合（视为 $[0,1]^2$的子集）的勒贝格测度。

我们用以下标准测度论引理说明为何将讨论限制在珠子着色上（稍后将给出完整证明）：

**引理 3.1.** 对于 $[0,1]$，上的任意两个可测着色 $c_1$ 和 $c_2$，如果 $d(c_1, c_2) < \epsilon$，那么 $|f_{[0,1]}(c_1) - f_{[0,1]}(c_2)| < 4\epsilon$。

**引理 3.2.** 对于 $[0,1]$ 上的任意可测着色 $c_m$ 以及任意 $\epsilon > 0$，存在一个珠子着色 $c_b$，使得 $c_m$ 和 $c_b$ 在一个测度至多为 $\epsilon$的集合上不一致。

由 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$，引理 3.2 立即推出以下结论：

**引理 3.3.** 在珠子着色中优化单色三项等差数列，与在所有可测着色中进行优化，在以下意义上是相同的：

$$\inf_{c_b \in \mathcal{B}} f_{[0,1]}(c_b) = \inf_{c_m \in \mathcal{M}} f_{[0,1]}(c_m).$$

我们先证明引理 3.1。

引理 *3.1* 的证明。设 $A \subset [0,1]$ 是一个测度为 $\epsilon$ 的集合，并考虑翻转 $A$ 中所有元素的颜色。可能因此产生或消失的单色三项等差数列分为三类：首项、中项或末项被翻转的等差数列（有些等差数列可能属于多个类别）。我们分别考察这三类的测度。由于等差数列的首项和末项是均匀选取的，相应类别的测度为$\epsilon$。中项是两个均匀随机变量的平均值，因此

在 $[0,1]$ 上服从三角分布，且最大密度为 2。因此，中项落在 $A$ 中的单色等差数列的测度至多为 $2\epsilon$。将这三类的测度相加，便得到它们并集的测度上界 $4\epsilon$。

□

现在我们证明引理 3.2，其证明是一个标准的测度论论证。

引理 *3.2* 的证明。 根据假设， $X_{\mathrm{bl}} := c_m^{-1}(0)$ 中被染成蓝色的元素构成的集合是可测的，且测度有限。因此，测度论中的一个标准结果（例如 [15, 定理 12]）表明，存在有限个两两不相交的开区间 $I_1, \ldots, I_\ell \subset [0,1]$，满足

$$\mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} I_i\right) \setminus X_{\mathrm{bl}}\right) + \mu\left(X_{\mathrm{bl}} \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} I_i\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

由于有理数在 $[0,1]$ 中稠密，我们可以分别将区间 $\{I_i\}$ 的 $2\ell$ 端点移动小于 $\frac{\epsilon}{4\ell}$ 的距离，从而找到一组两两不相交且端点为有理数的开区间$I_1', I_2', \ldots, I_\ell'$。令 $\mathcal{U}_{\mathrm{bl}}$ 为这些区间的并集。那么， $\mathcal{U}_{\mathrm{bl}}$ 与 $X_{\mathrm{bl}}$ 的对称差的测度至多为 $\epsilon$。由此可知，将 $\mathcal{U}_{\mathrm{bl}}$ 中的每个区间都染成蓝色所定义的着色 $c_b$ 是一种珠子着色，并且 $d(c_b, c_m) < \epsilon$。 □

如果一个等差数列形如 $(a,\ a+d,\ a+2d \pm 1)$，就称它为偏差为 *1* 的等差数列 。我们将说明，对于含有 $N$ 颗珠子的珠子着色 $c_b$，只需将这些着色的珠子视为 $[N]$ 的整数着色，计算该数列中的三项等差数列数量，再加上偏差为 1 的等差数列数量的一半，就能轻松算出 $f_{[0,1]}(c_b)$。回顾一下，对于离散着色 $c$， $m_3(c)$ 表示由 $c$ 导出的单色三项等差数列的数量。令 $m_3'(c)$ 表示单色偏差为 1 的等差数列的数量。于是，对于恰好含有 $N$ 颗珠子（颜色不一定交替）的 $[0,1]$ 着色与其对应的 $[N]$ 着色，我们有如下比较。

**引理 3.4.** 设 $c_b$ 是 $[0,1]$ 的一种 $N$ 珠子着色， $c_b^*$ 是与 $c_b$ 对应的 $[N]$ 的离散着色，其中当且仅当 $c_b$ 中第 $i$ 颗珠子被染成蓝色时，数字 $i$ 才被染成蓝色。那么，

$$f_{[0,1]}(c_b) = \frac{m_3(c_b^*) + m_3'(c_b^*)/2}{N^2}.$$

证明。 考虑在 $[0,1]$ 中随机选取一个由端点（$a$， $b$）确定的等差数列，以及一个固定的 $N$ 珠子着色 $c_b$。我们采用概率证明，因此改写为

$$(\mu \times \mu)((a,b) \in [0,1]^2 : (a,b) \text{ is monochromatic}) =: \mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic}),$$

其中 $\mu \times \mu$ 是 $\mathbb{R}^2$上的通常勒贝格测度。我们将根据哪些珠子 $S$ 和 $E$ 包含 $a$ 和 $b$ 来进行条件分析。令 $M$ 为包含该等差数列中间

项的珠子。给定 $[0,1]$, 的珠子着色，定义两个珠子 $A$ 和 $B$, $d_b(A, B)$之间的距离很有用：当 $A = B$ 时，距离为 0；否则，距离为严格位于 $A$ 和 $B$ 之间的其他珠子数量再加 1。请注意，当 $d_b(S, E)$为偶数时， $S$， $M$和 $E$必定构成珠子的三项等差数列。另一方面，当 $d_b(S, E)$为奇数时， $S$， $M$，和 $E$构成一个差一项数列，而 $M$ 可能是两个不同的珠子，具体取决于 $a$和 $b$ 在 $S$ 和 $E$中的内部位置。形式化地，令 $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^N$ 为珠子的集合，

$$\begin{aligned} f_{[0,1]}(c_b) &= \sum_{i,j} \mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \cdot \mathbb{P}(a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \\ &= \sum_{d(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j) \text{ even}} \mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \cdot \mathbb{P}(a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \\ &+ \sum_{d(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j) \text{ odd}} \mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \cdot \mathbb{P}(a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \end{aligned} \tag{2}$$

现在，对于每个 $\mathbb{P}(a \in \mathcal{B}_i,\ b \in \mathcal{B}_j) = 1/N^2$，由于 $i$和 $j$是在珠子中独立且均匀分布的，因此 $a$和 $b$。另外，因为我们的着色是固定的，当 $d_b(\mathcal{B}_i,\ \mathcal{B}_j)$为偶数时， $\mathbb{P}((a,\ b)$ 单色$|a \in \mathcal{B}_i,\ b \in \mathcal{B}_j)$取值为0或1，具体取决于珠子 $S$， $M$，和 $E$ 是否构成单色三项等差数列。因此，

$$\begin{aligned} &\sum_{d(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j) \text{ even}} \mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \cdot \mathbb{P}(a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \\ &\qquad = m_3(c_b^*) \cdot \frac{1}{N^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

当 $d_b(\mathcal{B}_i,\ \mathcal{B}_j)$为奇数时， $M$有两种选择： $\mathcal{B}_{(i+j-1)/2}$或 $\mathcal{B}_{(i+j+1)/2}$。因此，我们可以根据这两种选择进行条件分析：

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \\ &\quad = \mathbb{P}((a,b) \text{ mono.} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j, M = \mathcal{B}_{(i+j-1)/2}) \cdot \mathbb{P}(M = \mathcal{B}_{(i+j-1)/2} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \\ &\quad + \mathbb{P}((a,b) \text{ mono.} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j, M = \mathcal{B}_{(i+j+1)/2}) \cdot \mathbb{P}(M = \mathcal{B}_{(i+j+1)/2} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \end{aligned}$$

这里， $\mathbb{P}(M = \mathcal{B}_{(i+j-1)/2} | a \in \mathcal{B}_i,\ b \in \mathcal{B}_j) = \mathbb{P}(M = \mathcal{B}_{(i+j+1)/2} | a \in \mathcal{B}_i,\ b \in \mathcal{B}_j) = 1/2$ ，因为 $a$ 和 $b$ 在 $S$ 和 $E$中均匀分布。此外，

$$\mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j, M = \mathcal{B}_{(i+j-1)/2})$$

根据 $c_b^*$ 中偏差 1 的等差数列是否为单色，其值为 0 或 1。因此，将这两项合并后可简化为

$$\begin{aligned} &\sum_{d(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j) \text{ odd}} \mathbb{P}((a,b) \text{ monochromatic} | a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \cdot \mathbb{P}(a \in \mathcal{B}_i, b \in \mathcal{B}_j) \\ &\qquad = \frac{1}{2N^2} m_3'(c_b^*). \end{aligned} \tag{4}$$

将方程 (3) 和 (4) 代入方程 (2)，证明即告完成。

□

本文其余大部分内容将讨论一类称为“分块染色”的特殊着色，下面我们给出其定义。简单来说，它们是将 $I$ 划分为互不相交的区间，并交替染成红色和蓝色。

**定义 5.** 对于一组有限的端点 $\{x_i\}$，使得 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$，我们将相应的“分块”着色定义为如下着色：$n$ 区间 $J_i = (x_{i-1}, x_i)$（对于 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$）均为单色，且颜色交替出现。

注意，赋予端点 $\{x_i\}$（事实上，赋予零测集内任意点）的颜色并不重要。根据这些定义，我们现在可以比较离散着色与其连续对应物的表现。

**引理 3.5.** 设 $\mathcal{C}(N, n)$ 为 $[N]$ 的 2 色着色集合，其中颜色至多由 $n$ 个连续的块组成。对于任意着色 $c \in \mathcal{C}(N, n)$，令 $c_*$ 为相应的 $[0, 1]$ 分块着色，其中区间 $[(i-1)/N, i/N)$ 被涂为蓝色，当且仅当 $i \in [N]$ 被 $c$ 涂为蓝色。于是，

$$\max_{c \in \mathcal{C}(N,n)} \left| f_{[0,1]}(c_*) - f_{[N]}(c) \right| = O\left(\frac{n}{N}\right).$$

这里，存在一个独立于 $N$ 和 $n$ 的 $C > 0$，使得对所有正整数 $n$ 和 $N$，都有 $|O(n/N)| < Cn/N$。

证明。 我们的证明将使用引理 3.4，将 $f_{[0,1]}(c_*)$ 改写为关于 $f_{[N]}(c)$ 的表达式。在此之前，我们先用常规单色等差数列 $m_3(c)$ 来解释由 $c$、$m_3'(c)$ 诱导的偏差1的单色等差数列的数量。我们有如下结论：

$$m_3'(c) = 2m_3(c) + O(nN). \tag{5}$$

为验证这一点，注意到 $[N]$ 中的每个等差数列 $(a, a+d, a+2d)$ 几乎都与一对偏差1的等差数列一一对应：将首端点或末端点向内移动一位，得到 $(a+1, a+d, a+2d)$ 或 $(a, a+d, a+2d-1)$。（当 $N$ 为奇数时，恰好遗漏两个偏差1的等差数列：$(1, (N-1)/2, N)$ 和 $(1, (N+1)/2, N)$。当 $N$ 为偶数时，这确实是一一对应。）

利用这个近似双射，我们现在比较等差数列与偏差为 1 的等差数列何时为单色。在这一收缩操作下，只有当 $a$ 或 $a + 2d$ 紧邻一个异色数字时，某个等差数列（$a$，$a+d$，$a+2d$）为单色而其对应的某个偏差为 1 的等差数列不是单色；反过来，若原等差数列不是单色而偏差为 1 的等差数列是单色，也同样如此。如果我们的着色总共只有 $n$ 个区间，那么将 $a$ 紧挨着颜色变化之前放置的方式只有 $n-1$种；同理，将 $a + 2d$ 紧挨着颜色变化之后放置的方式也只有 $n-1$种。由于 $d$ 仍可自由选择，因此有 $O(nN)$ 个可能的偏差为 1 的等差数列，其是否为单色与对应的等差数列不一致，从而验证了我们的论断。

现在，按照引理 3.4 的记号，我们可知（$c_*$）$^* = c_\circ$ 因此，

$$\begin{aligned} f_{[0,1]}(c_*) &= \frac{m_3(c)}{N^2} + \frac{m_3'(c)/2}{N^2} \\ &= \frac{2m_3(c) + O(nN)}{N^2} \\ &= \frac{m_3(c)}{N^2/2} + O\left(\frac{n}{N}\right). \end{aligned}$$

如果我们能验证以下内容，引理的证明就完成了：

$$\frac{m_3(c)}{N^2/2} = f_{[N]}(c) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

为此，回想根据定义，$f_{[N]}(c) = m_3(c)/\mathrm{AP}_3(N)$，因此

$$\frac{m_3(c)}{N^2/2} - f_{[N]}(c) = \frac{m_3(c)}{\mathrm{AP}_3(N)} \cdot \frac{\mathrm{AP}_3(N) - N^2/2}{N^2/2}. \tag{6}$$

我们有 $m_3(c) \le \mathrm{AP}_3(N)$，因此公式 (6) 右侧的第一个分数至多为 1。接下来注意，$\mathrm{AP}_3(N) = N^2/2 + O(N)$：容易针对 $N$ 为偶数或奇数的情况直接计算这一数值。不过，直观地说，如果我们从 $[N]$ 中随机选取两个数 $x$ 和 $y$，共有 $N^2$ 种选法；其中约有一半情况下，$x - y$ 为偶数，这些数对对应于一个三项等差数列的起点和终点。因此，$\mathrm{AP}_3(N) - N^2/2 = O(N)$，将其代入公式 (6)，即可完成证明，得到

$$\frac{m_3(c)}{N^2/2} - f_{[N]}(c) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

□

最后，我们以这一结果结束本节，它严格论证了我们在离散染色与连续染色之间的转换。

**引理 3.6**。令 $\mathcal{S}_n$ 表示 $[0,1]$ 的至多含有 $n$ 个块的 2 着色，令 $\mathcal{C}(N, n)$ 表示 $[N]$ 的至多含有 $n$ 个连续区块的 2 着色，其中当 $N$ 趋于无穷时，$n = o(N)$。那么，在 $\mathcal{S}_n$ 上使单色等差数列数量最小化，与在 $\mathcal{C}(N, n)$ 上使单色等差数列数量最小化是等价的，具体如下：

$$\lim_{N\to\infty} \left| \inf_{c\in\mathcal{S}_n} f_{[0,1]}(c) - \min_{c\in\mathcal{C}(N,n)} f_{[N]}(c) \right| = 0.$$

这里，我们考虑 $[0,1]$ 的分块染色，其中一个块的边界可能是无理数。不过，正如我们稍后将看到的，$[0,1]$ 的所有最优着色在块数固定时都必须具有有理数端点。

证明。这基本上是一个标准的 $\epsilon$ 论证，因此设 $\epsilon > 0$ 已给定。我们的目标是证明，对于所有充分大的 $N$，

$$\left| \inf_{c \in \mathcal{S}_n} f_{[0,1]}(c) - \min_{c \in \mathcal{C}(N,n)} f_{[N]}(c) \right| \leq \epsilon.$$

我们分两部分证明：首先证明下确界几乎不超过最小值，然后再证明反向不等式。考虑任意着色 $\tilde{c} \in \mathcal{S}_n$。那么，根据引理 3.1，对于每个足够大的 $N$，我们都能找到一个 $n$-块着色 $\tilde{c}_N$，其定义在 $[0,1]$ 上，端点具有 $r/N$ 的形式，其中 $r$ 为整数，使得

$$\left| f_{[0,1]}(\tilde{c}) - f_{[0,1]}(\tilde{c}_N) \right| < \epsilon/4. \tag{7}$$

这是因为我们可以将每个端点取整到最近的 $1/N$。接着，我们定义 $\tilde{c}_N^*$ 为 $[N]$ 上的着色，当且仅当 $\tilde{c}_N$ 的第 $i$ 个块为蓝色时，$i$ 才染成蓝色。注意，$\tilde{c}_N^*$ 仍然至多有 $n$ 个块，并且使用引理 3.5 中的记号，$(\tilde{c}_N^*)_* = \tilde{c}_N$。因此，根据引理 3.5，对于足够大的 $N$（与着色 $\tilde{c}$，$\tilde{c}_N$，$\tilde{c}_N^*$ 无关），

$$|f_{[0,1]}(\tilde{c}_N) - f_{[N]}(\tilde{c}_N^*)| = O(n/N). \tag{8}$$

通过选取足够大的 $N$（与着色 $\tilde{c}, \tilde{c}_N, \tilde{c}_N^*$ 无关），等式 (7) 和 (8) 可推出

$$\min_{c \in \mathcal{C}(N,n)} f_{[N]}(c) \leq f_{[N]}(\tilde{c}_N^*) < f_{[0,1]}(\tilde{c}) + \epsilon$$

其中，该界对所有足够大的 $N$ 以及所有 $\tilde{c} \in \mathcal{S}_n$ 都成立。因此，对所有足够大的 $N$，

$$\min_{c \in \mathcal{C}(N,n)} f_{[N]}(c) \leq \inf_{c \in \mathcal{S}_n} f_{[0,1]}(c) + \epsilon.$$

现在，我们证明反向不等式：任取 $[N]$ 的一个着色 $\hat{c}$，并令 $\hat{} : [0,1]$ 为由 $\hat{c}$ 诱导出的 $[0,1]$ 的着色。再次由引理 3.5 可知，当 $N$ 足够大时，

$$\left| f_{[N]}(\hat{c}) - f_{[0,1]}(\hat{c}^*) \right| < \epsilon,$$

由于这对任意着色 $\hat{c} \in \mathcal{C}(N,n)$ 都成立，因此可证明当 $N$ 足够大时，

$$\inf_{c \in \mathcal{S}_n} f_{[0,1]}(c) \leq \min_{c \in \mathcal{C}(N,n)} f_{[N]}(c) + \epsilon.$$

将此结果与上面的互补不等式结合，即完成证明。

□

至此，我们已经证明，在限定着色中的块数后，优化 $[N]$ 的着色与优化 $[0,1]$ 的着色是相同的。只有当块数为 $n = 12$ 时，我们才会用到这一结果，因为这就是猜想的全局最优块数。不过，同一证明也表明，只要 $n = o(N)$ 如 $N \to \infty$ 所示，转到连续领域就同样适用。

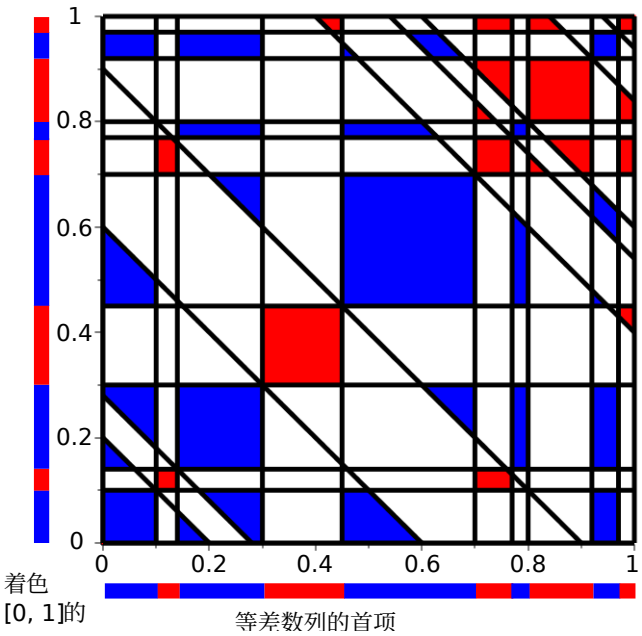



图1：水平轴下方展示了一种着色， $c$。水平轴表示等差数列的首项 $a$ ， 垂直轴表示该等差数列的第三项 $a+2d$ 。图中某一点被标为红色（蓝色），对应于等差数列（$a$， $a+d$， $a+2d$）被 $c$标为红色（蓝色）。

---

# 4 连续情形的证明

## 4.1 着色可以用 BCG 图表示

考虑区间的任意一种分块染色 $c$： $[0,1] \to \{0,1\}$ ，其中各块的端点由 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ 给出，且满足 $x_0 = 0$ 和 $x_n = 1$。不失一般性，假设第一块（$x_0$， $x_1$）染成蓝色，其余区间依次交替着色。请记住，各块端点的颜色可以任意指定，因为这不会改变选取到单色等差数列的概率。

在 [2], Butler、Costello 和 Graham 提出了一种方法，用类似图1的示意图来呈现与某种着色相关的单色等差数列。任何等差数列（$a$， $a+d$， $a+2d$）都可以由其首项和末项唯一确定，它们分别由此类示意图的水平轴和垂直轴表示。请注意，该示意图被划分为垂直条带、水平条带以及西北／东南向对角条带。考虑由一个水平条带、一个垂直条带和一个对角条带的交集确定的任意区域。对于分块染色，当且仅当定义该区域的垂直、水平和对角条带的编号奇偶性一致时，该区域对应于一组单色等差数列

当且仅当定义该区域的垂直、水平和对角条带的索引奇偶性一致时，才能将其分解为一组单色等差数列。

由于任何类似图1的图中正方形的总面积为一，单色序列集合的测度等于红色区域与蓝色区域的面积之和。在定理2.1中， [2], Butler 等人将着色区域的总面积表示为两个涉及示性函数的积分之和。他们的研究适用于星座，即等差数列的一种推广。这里，我们转而为这些面积推导显式的多项式方程。考虑此类图中的任意一个着色区域。端点 $x_i$ 稍作扰动时，该区域仍保持相同的多边形类型，尽管其尺寸可能改变。这意味着每个区域的面积在局部都可表示为变量 $\{x_i\}$的二次式。用其端点列表 $\mathbf{x} := (x_0, \dots, x_n)$ 表示一个分块染色 $c$ 。于是，对所有单色区域求和可知，单色等差数列的测度 $f_{[0,1]}(\mathbf{x})$ 在局部也关于 $\{x_i\}$呈二次式。现在记 $f(\mathbf{x}) := f_{[0,1]}(\mathbf{x})$。当我们将$f$ 限定为作用于恰有 $n$ 个块的着色时，记作 $f(\mathbf{x}_n)$。

随着$\mathbf{x}$ 变化，图中的区域会改变多边形类型。因此，对每个$n$， $f(\mathbf{x}_n)$都是一个局部为二次式的分段函数。为了在全局上最小化$f$ ，我们希望确定这些分段关于$\mathbf{x}$的边界。下面的引理说明了如何确定此类图中的多边形。

**引理 4.1.** 图中第 $i$个垂直条带、第 $j$个水平条带与第 $k$个对角条带的交集，要么为空，要么构成一个闭多边形。通过检验四个值 $\{x_i + x_j, x_i + x_{j+1}, x_{i+1} + x_j, x_{i+1} + x_{j+1}\}$ 是否分别大于或小于两个值 $\{2x_k, 2x_{k+1}\}$，即可确定多边形的类型。若已知这些值的大小顺序，则相应区域的面积可表示为变量$\{x_i, x_{i+1}, x_j, x_{j+1}, x_k, x_{k+1}\}$的二次多项式。

证明。 在类似图1的图示中，所有水平线均由$\{y = x_i\}_{i=0}^n$ 给出，垂直线则由 $\{x = x_i\}_{i=0}^n$给出。在图中任意一点（$x$， $y$），对应等差数列的中间项为（$x+y$）/2，令其等于着色中的任一端点，可得对角线由 $\{y = 2x_i - x\}_{i=0}^n$给出。如上所述，对于任意三元组（$i$， $j$， $k$），若 $i$， $j$， $k \in \{0, \dots, 12\}$ 的奇偶性均相同，则第 $i$个垂直条带、第 $j$个水平条带与第 $k$个对角条带的交集对应于一个单色等差数列区域。

要确定单色等差数列区域的形状，首先考虑第 $i$ 个垂直条带与第 $j$ 个水平条带的交集所形成的矩形。该矩形的角点坐标为 $(x_i, x_j)$、$(x_{i+1}, x_j)$、$(x_i, x_{j+1})$，以及 $(x_{i+1}, x_{j+1})$，如图 2 所示。若要使该矩形与第 $k$ 个对角条带的交集非空，需要上方对角线 $y = 2x_{k+1} - x$ 位于矩形左下角 $(x_i, x_j)$ 之上，并且下方对角线 $y = 2x_k - x$ 位于矩形右上角 $(x_{i+1}, x_{j+1})$ 之下。这等价于要求满足不等式 $2x_{k+1} \geq x_i + x_j$ 和 $2x_k \leq x_{i+1} + x_{j+1}$。

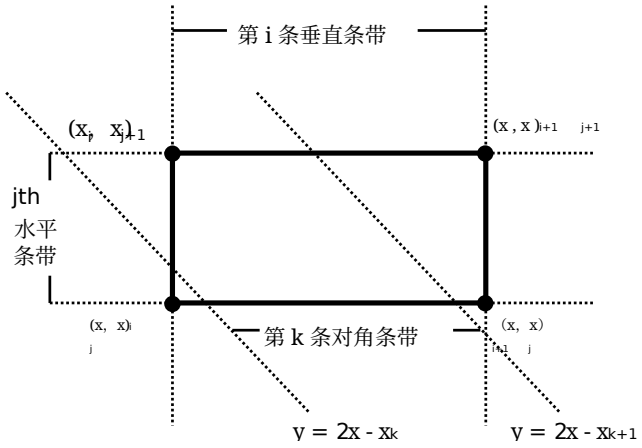
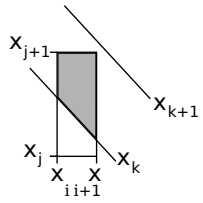



图 2：上图为由端点$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$确定的分块染色所形成的第 $i$ 个垂直条带、第 $j$ 个水平条带和第 $k$ 个对角条带的交集。只需比较对角线 $\{y = 2x_k - x,\ y = 2x_{k+1} - x\}$ 与盒子的角点 $\{(x_i, x_j), (x_{i+1}, x_{j+1})\}$，即可判断该交集是否为空。

---

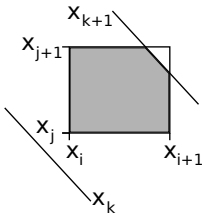



**刻画不等式：**

$$x_{i+1} + x_j \le 2x_k \le x_i + x_{j+1} \le x_{i+1} + x_{j+1} \le 2x_{k+1}$$

**区域面积：**

$$(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} + x_i/2 + x_{i+1}/2 - 2x_k)$$




**刻画不等式：**

$$2x_k \le x_i + x_j, \text{最大值}(x_i + x_{j+1}, x_{i+1} + x_j) \le 2x_{k+1} \le x_{i+1} + x_{j+1}$$

**区域面积：**

$$(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} - x_j) - (2x_{k+1} - x_{j+1} - x_{i+1})^2/2$$

图3：此处展示了在一种着色中，第 $k$ 条对角条带与第 $i$ 条水平条带和第 $j$ 条垂直条带相交的两种不同方式。所得单色区域以灰色阴影表示，其面积以二次式表示，列于示意图下方的$\mathbf{x}$ 中。多边形的类型由各示意图下方给出的部分置换决定。其余 18 种可能性列于附录 A。

---

此外，条带交集所形成的多边形类型，取决于两条对角线 $y = 2x_k - x$ 和 $y = 2x_{k+1} - x$相对于方框四个角点的位置（在其上方还是下方）。对于直线与四个角点之间任意一种特定的位置关系，运用一些基本的几何论证，就可以求出条带围成的多边形面积，并以$\{x_i, x_{i+1}, x_j, x_{j+1}, x_k, x_{k+1}\}$表示。结果表明，直线有 20 种不同的排列方式，能够形成彼此不同的多边形。图3给出了其中两种可能性，以及相应的面积二次方程。20 种多边形的完整列表见附录 A。

□

## 4.2 枚举 BCG 图

现在，我们已经确定了可以用来判定图中每个单色区域形状的准则，接下来希望计算所有图中可能出现多少种形状组合。换句话说，我们现在知道，对于每个固定的 $n$ ，函数 $f(\mathbf{x}_n)$ 关于端点 $\mathbf{x}_n$ 是一个分段二次函数，但我们想知道它有多少段。根据引理 4.1，两两和 $\{x_i + x_j\}_{0 \le i < j \le n}$ 的排列顺序完全决定了图中的形状。这是在线整数序列百科全书中的序列 A237749。目前该序列只已知 9 项，以 771，505，180 种可能的两两和排列方式结束，其中 $n = 8$。因此，该序列增长得太快，无法用于检查 $n = 12$ 的每一段 $f(\mathbf{x}_n)$。

注意，如果 $f(\mathbf{x}_n)$ 处处上凹，那么它至多只有一个局部最小值，而该最小值必然也是全局最小值。由于猜想中的最优解是一个局部最小值，因此对于具有有限个区间的任意着色，无论该着色是否反对称，证明都将完成。此外，即使事先不知道全局最小值，梯度下降算法也能迅速找到它。不幸的是，通过计算搜索，很容易找到 $f(\mathbf{x}_n)$ 中并非上凹的部分。因此，为了保证猜想中的着色是全局最小的，我们必须分别在 $f(\mathbf{x}_n)$ 的每一部分上搜索局部最小值。

统计 $\{x_i + x_j\}_{0 \le i < j \le n}$ 的两两排序与其他组合问题密切相关。在图4中，我们发现， $\{x_i + x_j\}$ 的任意一种排序都可以编码在一个逆阶梯形状的标准杨氏表中。表中 $(r,\ s)$ 项的填入数值（表的顶端为 (0，0) 项），等于将所有 $\{x_i + x_j\}$ 按递增顺序排列时 $x_r + x_s$ 所处的位置。

为简化计算，我们作出两项限制。首先，基于 [2] 以及我们自己的数值模拟，我们只考虑反对称着色：关于单位区间的中点反射时，着色中几乎每个点都会变成相反的颜色。等价地，我们要求 $x_k + x_{n-k} = 1$ 对 $0 \le k \le n$成立。此外，要确定一种配置，我们不需要了解 $\{x_i + x_j\}_{0 \le i < j \le n}$ 全序中的所有关系。相反，对于每一对满足 $i \neq j$的 $(i,\ j)$，我们都要寻找其值

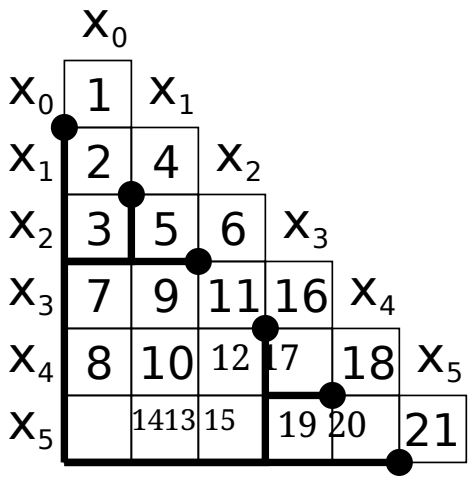



图4：上方展示的是一个标准杨氏图，对应于端点 $x_0 = 0, x_1 = 0.19, x_2 = 0.9,$ $x_3 = 0.6, x_4 = 0.65$ 和 $x_5 = 1$ 的选取。标记为 3 的格子告诉我们， $x_0 + x_2$ 在有序对 $\{x_i + x_j\}_{i,j=0}^{5}$ 的排序中位列第三小。此外，从杨氏图左下方的直线 $y = -x$ 出发的不相交格路将该图划分为若干区域，其中所有相应的两两和都介于某个 $k$ 对应的两个连续取值 $2x_{k-1}$ 和 $2x_k$ 之间。

$k$ 其中 $2x_{k-1} \le x_i + x_j \le 2x_k$。因此，我们要寻找将两两和 $\{x_i + x_j\}_{i \neq j}$ 插入直线 $0 = 2x_0 \le 2x_1 \le \cdots \le 2x_n = 2$ 的方法数。在图4中，这种重新表述意味着不必知道图示的完整填充，而只需考虑一组不相交格路，每条路径都从对角线下方的不同点出发。这种设定与 Lindstr¨om-Gessel-Viennot 引理非常相似，该引理用于计算不相交格路的数量，[11,8]，并且在证明关于交错符号矩阵数量的猜想时发挥了重要作用；相关故事见 [1]。

为了确定这类部分置换的数量，我们开发了一种递归算法，用于验证逐步扩展的部分置换是否可行。我们的实现与 Miller 和 Peterson 通过几何方法解决*More Sums Than Differences* 集合相关问题的思路相似，[13,也与引理 2.1]，以及 Laaksonen 枚举 OEIS 数列 A237749, [10] 的方法相似。这两个问题以及我们在此研究的问题，都可以表述为枚举超平面排列中的胞腔，并且还可以进一步限制在该超平面排列的某个特定锥内。胞腔枚举本身就是一个研究方向（例如[16, 6]），已有定理利用 M¨obius 反演来计算胞腔数量，[20, 19]。然而，在这里，我们不需要在不加限制的情况下枚举所有胞腔，因为这又等价于计算 $\{x_i + x_j\}_{0 \le i < j \le n}$ 的可能全序数。

**引理 4.2**。考虑端点为$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$的反对称块着色，其中 $n$ 为偶数，且 $x_k + x_{n-k} = 1$ 对于 $0 \le k \le n$成立。于是，将数对 $\{x_i + x_j\}_{i \neq j}$ 插入排列 $0 = 2x_0 < 2x_1 < \cdots < 2x_n = 2$ 的方法数按如下规律增长，从 $n = 0$ 开始，$n$ 每次增加 *2*：

1，1，3，23，357，9391，371219，.....

证明。证明中关键的计算工具是线性规划：借助现有的线性规划软件包，例如 GNU 线性规划工具包（GLPK，[9]），我们可以轻松检查一个不等式组是否存在有效解。因此，我们建立一个持续更新的列表，记录所有存在有效解的不等式部分系统，并统计每个系统可以通过添加一个不等式扩展的方式数。下面给出所用算法的伪代码，随后简要说明为确保代码正确、高效运行所需处理的一些技术细节。完整代码已发布在网上：
https://cocalc.com/TorinGreenwood/MonochromeSequences/MonochromaticProgressions。

枚举 BCG 图的伪代码

```
\\ 初始化不等式部分系统的运行列表|旧部分不等式
 = {{0 = x_0,  x_k + x_{n-k} = 1 对于  0 ≤ k ≤ n,
                                x_k ≤ x_{k+1} 对于  0 ≤ k ≤ n − 1}}

\\ 对于每个部分不等式组（即每组部分约束），找出添加一个新不等式的所有方法
```

[7] $2x_k \le x_i + x_j \le 2x_{k+1}$ 通过判断 $x_i + x_j$ 位于[8] 个连续的 $2x_k$[9] 之间的位置，针对 $(i,\ j)$，其中 $i \neq j$:[10] 新部分不等式 = $\{\}$[11] 对于 $k$ 从 $i$ 到 $j-1$:[12] 对于旧部分不等式中的约束:[13] 如果约束 $\cup\ \{2x_k < x_i + x_j < 2x_{k+1}\}$ 有效:[14] 新部分不等式 $+=$ {约束

[15] $\cup\ \{2x_k < x_i + x_j < 2x_{k+1}\}\}$

[16] 旧部分不等式 =新部分不等式[17] 返回旧部分不等式

---

现在，我们来讨论使用 GLPK 实现时的一些重要细节，这些细节确保代码能够高效、正确地运行。对这部分内容不感兴趣的读者可以跳过本证明的其余部分，而不会影响理解的连贯性。首先，混合整数线性规划通常会尝试优化变量$\mathbf{x}$ 的线性目标函数，其范围是由$\mathbf{x}$所表示的线性不等式构成的区域。在这里，我们的目标只是检查一个线性不等式系统是否可行，也就是说，是否存在一个解。我们可以通过线性规划实现这一点：将目标函数设为任意常数 $C$，因为线性规划会返回一个证书$\mathbf{x}^*$，使得最大值在此处取得。当目标函数为常数时，这个解就是任意一个可行解。

复杂之处还在于，线性规划通常只允许非严格不等式。然而，对于数对 $\{x_i + x_j\}_{i \neq j}$，通过解$\mathbf{x}^* = (0,\ 1/2,\ 1/2,\ \ldots\ldots,\ 1/2,\ 1)$，就能轻易得到指数多种排列，因为任意若干个不同端点 $x_i + x_j$的和都等于 $1/2$，$1$，或 $3/2$。事实上，许多这样的排列只能通过这些平凡解得到。如果允许这类解，由于可能的不等式系统数量激增，程序将无法完成运行。为避免这种情况，我们强制每个系统中的所有不等式都为严格不等式。因此，我们引入一个辅助变量 $\epsilon$，将严格不等式转换为非严格不等式。例如，严格不等式$2x_k < x_i + x_j < 2x_{k+1}$会变成一对非严格不等式 $2x_k + \epsilon \le x_i + x_j$和$x_i + x_j + \epsilon \le 2x_{k+1}$。将 $\epsilon$加到每个不等式后，我们把目标函数从常数 $C$ 改为变量 $\epsilon$，并在不等式系统成立的区域内寻找 $\epsilon$ 的最大值。只要找到了$\epsilon > 0$ 的一个取值，这组不等式就是可行的。

通常，线性规划的实现采用浮点运算，因此会产生舍入误差。由于无法限定可行域可能有多小，我们使用了采用有理数运算的 GLPK 版本。即便如此，GLPK 返回的解仍是浮点数，偶尔会出现舍入误差。因此，我们将 $\epsilon$ 的阈值设在浮点运算极限附近，即 $5 \times 10^{-15}$。我们发现，高于该阈值的最小 $\epsilon$ 值约为 $10^{-3}$，这说明任何低于 $5 \times 10^{-15}$ 的值都是由精度误差造成的。

遗憾的是，有理数求解器的速度往往比浮点求解器慢得多

对应求解器。为了解决这个问题，我们需要优化代码。显著影响运行时间的一个因素，是在上述伪代码第 9 行的 for 循环中检查数对 $(i,\ j)$ 的顺序。尝试了不同的顺序后，我们发现，按$j-i$ 递减顺序检查数对，比按字典序检查快好几倍。

此外，对于 $n=12$ 情形，针对不等式组进行的数百万次可行性检查中，有 26 次导致有理数求解器陷入无限循环。我们通过在将这些有问题的不等式组输入 GLPK 之前调整其中不等式的顺序，解决了这个问题。我们没有找到一种对所有可行性检查都能避免无限循环的统一排序方式。相反，我们发现，对于任意特定的不等式集合，总存在某种排序方式，使 GLPK 能够迅速终止。

□

## 4.3 对所有 BCG 图进行优化

既然我们已经找到了对于每个满足反对称条件的 $f(\mathbf{x}_n)$、$n\le 12$ 和 $\mathbf{x}_n$，可能的 BCG 图数量，那么终于可以发挥微积分的威力了。尽管 $f(\mathbf{x}_n)$ 是一个分段函数，但我们很快发现它是连续的，且具有连续偏导数。这意味着它的全局最大值要么出现在临界点，要么出现在函数定义域的边界点处。在引理 4.3 中，我们证明了对于任意固定的 $n$，$f(\mathbf{x}_n)$ 都具有连续偏导数，之后便可以完成定理 1.2 的证明。

**引理 4.3**。考虑所有具有 $n$ 个块、端点为 $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\dots,x_n)$的分块染色。在区域 $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$中，$f(\mathbf{x}_n)$是关于每个变量 $x_j$均具有连续偏导数的连续函数。

证明。从图1中的图示表示可以清楚看出，$f$ 是端点$\mathbf{x}_n$的连续函数。为验证偏导数的连续性，我们给出一个几何论证：考虑图示中的单个区域 $R$，例如图3所示的区域。令 $f_R(\mathbf{x}_n)$表示这个单独区域的面积，它是端点的函数。该区域最多有 6 条边，每条边都是一条直线，其位置由某个单独的端点 $x_i$决定。因此，$\frac{\partial}{\partial x_i}f_R(\mathbf{x}_n)$等于由变量 $x_i$决定的 $R$ 边界的总长度。（事实上，移动一个$\mathbf{x}$少许时，多边形 $R$的面积变化量为 $\Delta x_i\cdot\ell_i+O(\Delta x_i)^2$，其中 $\Delta x_i\to 0$，而 $\ell_i$是由 $x_i$ 决定的 $R$ 边界的总长度。）

现在，我们考虑几种情况。随着$\mathbf{x}_n$ 变化，$R$ 可能出现以下情况：保持为同一类型的多边形、变为另一种多边形，或完全进入或离开图示区域。显然，当 $R$ 保持为同一类型的多边形时，其边长会随$\mathbf{x}_n$连续变化，因此在这种情况下，$f_R(\mathbf{x}_n)$的偏导数连续。当 $R$ 改变多边形类型时，变化必定发生在一条对角线越过图3所示水平条带和垂直条带形成的方框的角点时。这意味着，每当一个区域改变多边形类型时，进入或离开该区域的那条边的初始长度为0，这再次说明偏导数连续。最后，我们考虑 $R$ 进入或离开

图示区域的情况。这可能有两种方式：水平条带、垂直条带或对角条带的宽度缩减至0，或者一条对角线越过上述方框的角点。当某条条带的宽度缩减至0时，这意味着存在两个相邻的端点 $x_i$ 和 $x_{i+1}$，其中$(x_{i+1}-x_i)$趋于零。因此，尽管这种情况下偏导数不连续，但它位于我们所考虑的$\mathbf{x}_n$ 取值区域的边界上。另一方面，当一条对角线越过方框的角点时，多边形的所有边长都趋于零，因此偏导数再次连续。

$f(\mathbf{x}_n)$ 的图示表示清楚地表明，$f(\mathbf{x}_n)$ 的区域数量有上界：水平、垂直和对角条带的每个交集至多对应一个区域。由于对于每个区域 $R$，$f_R(\mathbf{x}_n)$ 都是连续且具有连续偏导数的，$f(\mathbf{x}_n)$ 也如此。 □

现在我们已经证明，对于固定的 $n$，$f(\mathbf{x}_n)$ 连续且具有连续偏导数，可以用以下引理完成定理 1.2 的证明。

**引理 4.4**。设 $\mathbf{x}_{12}=(x_0,\ldots,x_{12})$ 满足 $0\le x_0\le\cdots\le x_{12}=1$，且 $\mathbf{x}_{12}$ 为反对称。对于所有此类 $\mathbf{x}_{12}$，$f(\mathbf{x}_{12})$ 的全局最小值为 $117/548$，且唯一在方程 *1* 中的着色处取得。

证明。由于 $f(\mathbf{x}_{12})$ 是多胞体 $0=x_0<x_1<\ldots<x_{12}=1$ 上的一个 $C_1$ 函数，其全局最小值出现在多胞体的边界上，或出现在多胞体内部的临界点处。该多胞体的边界是若干具有相同形式但变量更少的多胞体的并集。因此，我们求出 $f(\mathbf{x}_n)$ 在 $n$ 从 0 到 12 的每个偶数值处的临界点。

引理 4.1 表明，对于每个$n$，$f(\mathbf{x}_n)$都是分段二次函数。固定 $n$，并考虑该函数的任意一段，它可以扩展为定义在整个 $\mathbb{R}^{n/2-1}$ 上的函数 $f^*(\mathbf{x}_n)$（因为 $x_1$ 到$x_{n/2-1}$ 决定了着色，这是由于它是反对称的）。$f^*(\mathbf{x}_n)$的偏导数是分段线性函数。这个处处有定义的二次函数的临界点是线性方程组的解。因此，临界点要么不存在，要么构成一个向量空间。如果该向量空间的维数大于零，那么 $f^*(\mathbf{x}_n)$在其所有临界点上的取值必定相同。因此，当 $f^*(\mathbf{x}_n)$存在临界点时，在检查局部最优值时，只需检查 $f^*(\mathbf{x}_n)$在任意一个临界点处的取值。

由此，我们得到了以下伪代码，用于搜索多胞体 $0=x_0\le x_1\le\cdots\le x_{12}=1$ 上 $f(\mathbf{x}_{12})$ 的全局最小值。（完整代码已发布于 https://cocalc.com/TorinGreenwood/MonochromeSequences/MonochromaticProgressions。）

~~用于求 $f(\mathbf{x}_{12})$~~[18] 的最小值的伪代码 \\ 我们搜索 $f(\mathbf{x}_n)$ 的内部，取值为 $n=2$、4、6、8、10、和 12。[19] >>对于 $n$，从 0 到 12，步长为 2：[20]

```
21          >> 对于分段函数 f(xn) 的每一段 f*(xn)（由引理 4.2 确定）： 2324                    >>计算对应于
25 f*(xn) 的二次多项式（使用引理 4.1） 26 27 \\接下来，我们可以将定义 f*(xn) 配置的所有 28 个不等式，以及令 f*
(xn) 的各个偏导数为零的等式，输入 GLPK。 3031          >> 使用 GLPK 检查在 33                    f(xn) ≡ f*(x
n) 所对应的 xn 值区域内，是否存在 f*(xn) 的临界点 32 3435          >>如果存在临界点：36          >> 计
算 f*(xn) 在任一临界点 cn 处的值37          >> 记录 cn 及 f*(cn)，前提是这是一个新的最小值纪录 38
```

```
39 >> 返回最小值 cn 和 f*(cn)
```

这段代码验证了，当 $n$ 至多为 12 时，$f(\mathbf{x}_n)$ 的全局最小值为$117/548$，且仅在端点由公式（1）给出的着色处取得（每个坐标中不含 $N$ ）。

□

函数 $f(\mathbf{x}_n)$ 在 $n \geq 14$ 时的分段数增长极快，使得分析其临界点越来越困难。不过，我们可以保证最优值始终是有理数：

**推论 4.5**。 对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，$f(\mathbf{x}_n)$ 的最小值都是有理数，无论 $\mathbf{x}_n$ 是否被限制为反对称。

证明。 从我们的证明结构来看，这几乎是显而易见的：$f(\mathbf{x}_n)$ 的最小值在 $f(\mathbf{x}_\ell)$ 的某个临界点处取得，其中 $\mathbf{x}_\ell$ 位于$f(\mathbf{x}_\ell)$ 的定义域内部，且满足某个 $\ell \leq n$。这些临界点由一个有理系数的线性方程组确定。只要临界点的数量有限，它们的坐标就必定全是有理数。另一方面，如果分段函数 $f(\mathbf{x}_\ell)$ 中有一段 $f^*(\mathbf{x}_\ell)$ 存在无穷多个临界点，那么 $f^*(\mathbf{x}_\ell)$ 的所有临界点都取得相同的常数值。这意味着仍然存在一个坐标为有理数且能取得最小值的临界点。最后，由于 $f(\mathbf{x}_\ell)$ 的每一段都是有理系数的二次式，因此其最小值也为有理数。

□

# 5 圆着色

作为研究 $[N]$ 的着色中单色等差数列数量这一主题的一种变体，一些作者还研究了

循环群 $\mathbb{Z}_N$ 的着色中的等差数列性质。例如，给定 $\mathbb{Z}_p$ 的一种固定红蓝二着色，其中 $p$ 为素数，单色三项等差数列中红色或蓝色数列所占的比例只取决于被着为红色的元素比例，而与红色和蓝色元素的具体位置无关，[5, 12]。即使 $N$ 不是素数，$\mathbb{Z}_N$ 中单色三项等差数列所占的比例也不低于假设 $N$ 为素数时给出的数值，[12]。

受这些结果的启发，我们现在来探讨对 $\mathbb{Z}_N$ 的二着色中单色等差数列计数问题的连续类比。将单位圆 $S_1 = \{e^{2\pi i\theta}$ 上的每个数 $\theta \in [0,1)\}$ 染成红色或蓝色，并考虑形如 $(e^{2\pi ix_1}, e^{2\pi i(x_1+d)}, e^{2\pi i(x_1+2d)})$ 的三项等差数列，其中 $x_1$, $d \in [0,1)$。为了恰当地讨论给定着色下这些数列中单色数列所占的“比例”，我们引入 $[0,1)$ 上的均匀概率测度 $\mu$，并通过独立地按照 $\mu$ 选取 $x_1, d \in [0,1)$ 来随机抽取等差数列。在这一框架下，选中单色等差数列的概率仅取决于被染成红色的点集的勒贝格测度（也就是某个点——例如 $e^{2\pi ix_1}$ ——为红色的概率），而与哪些点被染成红色无关；这与离散群 $\mathbb{Z}_p$ 的二着色结果类似。

**引理 5.1.** 设 $C\colon S_1 \to \{0,1\}$ 是 $S_1$ 的任意可测着色，其中

$$p := \mu\left(\left\{\theta \in [0,1) : C\left(e^{2\pi i\theta}\right) = 0\right\}\right)$$

定义为红色点所占的比例，并令 $m(C)$ 为包含所有满足以下条件的点对的集合：$(x_1, d) \in [0,1) \times [0,1)$，其中 $(e^{2\pi ix_1}, e^{2\pi i(x_1+d)}$、$e^{2\pi i(x_1+2d)})$ 均为单色。那么，

$$(\mu \times \mu)(m(C)) = 1 - 3p + 3p^2.$$

特别地，若我们按照 $S_1$ 上的均匀分布，独立随机选取一个起点 $x_1$ 和一个公差 $d$，那么相应的3项等差数列为单色的概率只取决于红色点所占的比例 $p$，而与这些点在 $S_1$ 上的分布方式无关。

证明。我们采用概率方法，其证明结构遵循 [12] 中定理 6 的证明。为此，令 $x_1$ 和 $d$ 是从 $\mu$ 中独立抽取的样本；对于 $i = 1,2,3$，令 $A_i$（分别为 $B_i$）表示等差数列 $(e^{2\pi ix_1}, e^{2\pi i(x_1+d)}, e^{2\pi i(x_1+2d)})$ 中第 $i$ 项为红色（分别为蓝色）这一事件。于是，根据容斥原理，我们有

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \left(\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\right) - \left(\sum_{1 \le i < j \le 3} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)\right) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

我们注意到 $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$。由于 $\mathbb{P}(m(C)) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$，我们可以将上述式子重新排列为

$$\mathbb{P}(m(C)) = 1 - \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{1 \le i < j \le 3} \mathbb{P}(A_i \cap A_j). \tag{9}$$

随机变量 $e^{2\pi i x_1}$、 $e^{2\pi i(x_1+d)}$和 $e^{2\pi i(x_1+2d)}$ 两两独立，并在 $S_1$ 上服从均匀分布。这是基于均匀分布在 $S_1$ 上的旋转不变性，以及 $e^{2\pi i x_1}$ 和 $e^{2\pi i d}$ 相互独立且在 $S_1$ 上服从均匀分布这一事实。由此可知，对于 $i,\ j=1,\ 2,\ 3$，有 $\mathbb{P}(A_i)=p$ 和 $\mathbb{P}(A_i\cap A_j)=p^2$。将这些结果代入式（9）可得

$$(\mu\times\mu)(m(C))=\mathbb{P}(m(C))=1-3p+3p^2.$$

□

# 6 未来工作

在上文第 3 节和第 4 节中，我们概述了一种方法，用于确定 $[N]$ 和区间 $[0,1]$ 的最优着色，使得在块数 $n$的任何固定上限下，单色三项等差数列所占比例最小。一个自然的问题是：对于任意 $n>12$，其最优着色是否与 $n=12$的最优着色相同？一种可能的做法是证明，对于 $n=14$而言，这些着色并不会更优；然后论证，任意增加更多区间并不比只增加两个区间更优。

除了研究 $[N]$、 $\mathbb{Z}_N$、 $[0,1]$和 $S_1$的着色如何影响长度为 3 的单色等差数列的出现频率之外，还有其他相关问题尚未得到探索。或许最自然的问题是：如果考虑更长的等差数列，分析会发生怎样的变化？文献 [18, 2, 12, 3] 针对若干不同长度的等差数列，在这一方向上取得了部分进展。一个不那么显而易见的问题是，若考虑长度取决于颜色的等差数列，会出现什么情况。例如，我们可以尝试对 $[0,1]$或 $[N]$着色，使长度为 3 的单色蓝色等差数列和长度为 4 的单色红色等差数列所占比例同时最小。

另一个自然的推广方向是增加颜色数量。使长度为 3 的单色等差数列数量最少的 $[0,1]$ 的 3 着色和 4 着色是什么样的？随着颜色数量增加，单色等差数列所占比例的衰减速率能否得到某种结论？所有这些问题在将拉姆齐理论应用于图的情形下都有自然的类比；当然，这些推广也可能以各种方式相互作用。

当论文中研究的问题首次提出时，人们尚不清楚着色是否能够优于随机。尽管在我们上文详细介绍的情形中，着色确实能够优于随机，但对于相关问题是否也同样如此？ [4] 的近期研究为一些其解必须优于随机的问题类别提供了有趣的见解。

除了改变我们研究的颜色数量或等差数列的长度外，我们还可以考虑其他几何空间中的着色。例如，我们想知道如何给中间有缺口的区间着色，才能使其中的单色等差数列数量最少。通过改变缺口的长度，我们或许能深入了解为何在我们上文讨论的**{v1}**的最优分块着色中，反对称性似乎至关重要。

此外，我们已经看到，在 $\mathbb{Z}_p$ （其中 $p$ 为素数）和连续圆的情形下，着色在三项等差数列方面的表现仅取决于其中各颜色所占的比例。还有哪些代数和几何环境会呈现类似的行为？或者，如果像第 5 节那样考虑 $S_1$，但按照不同于均匀分布的方式选择起点和公差来抽样三项等差数列，会发生什么？

## 7 致谢

计算工作使用了威特沃特斯兰德大学数学科学支持部门提供的高性能计算基础设施，作者对此深表感谢。此外，作者还感谢 Antti Laaksonen 教授就如何优化引理 4.2 中的代码提供了宝贵建议。

## 参考文献

[1] David M. Bressoud. 证明与确认. 剑桥大学出版社 , 1999年8月。 ISBN: 9780511613449. DOI: 10.1017/cbo9780511613449. URL: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511613449.[2] Steve Butler、Kevin P. Costello 和 Ron Graham。“寻找避开众多单色星形配置的模式”。载于：《实验数学》19.4（2010年1月），第399–411页。 DOI: 10.1080/10586458.2010.10 390631. URL: https://doi.org/10.1080%2F10586458.2010.10390631.[3] Steve Butler、Ron Graham 和 Linyuan Lu。“展开剩余类以避开等差数列”。载于：《数学杂志》87.2（2014），第83–94页。 DOI: 10 .4169/math.mag.87.2.83. 电子版：https://doi.org/10.4169/math.mag.87.2.83. URL: https://doi.org/10.4169/math.mag.87.2.83.[4] Kevin P. Costello 和 Gabriel Elvin。避开三项方程的单色解。2021年。 DOI: 10. 48550 / ARXIV. 2103. 03350. URL: https://arxiv.org/abs/2103.03350.[5] Boris A. Datskovsky。“关于单色 Schur 三元组的数量”。载于：《应用数学进展》31.1（2003），第193–198页。 ISSN: 0196- 8858. DOI: https://doi.org/10.1016/S0196-8858(03)00010-1. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S019688580 3000101.[6] Galen Dorpalen-Barry。《超平面排列的锥》。博士论文。明尼苏达大学，2021年。

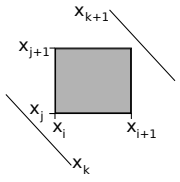
[7] P. Frankl、R. L. Graham 和 V. R¨odl。“正则方程组的定量定理”。载于：组合论杂志 A 辑 47.2（1988），第246–261页。 ISSN: 0097-3165. DOI: 10.1016/0097-3165(88)90020-9. URL: https :// doi-org.ezproxy.lib.ndsu.nodak.edu/10.1016/0097-3165(88)9 0020-9.[8] Ira Gessel 和 G´erard Viennot。“二项式行列式、路径与钩长公式”。载于：数学进展 58.3（1985），第300–321页。ISSN: 0001-8708. DOI: https://doi.org/10.1016/0001-8708(85)90121 -5. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000 1870885901215.[9] GNU 线性规划工具包。2012年。 URL: http://www.gnu.org/softw are/glpk/glpk.html.[10] Antti Laaksonen。《和的排序计数》。2019年1月。 URL: https: //www.cs.helsinki.fi/u/ahslaaks/orderings.html.[11] Bernt Lindstr¨om。“关于诱导拟阵的向量表示”。载于：Bull. London Math. Soc. 5.1（1973年3月），第85–90页。[12] Linyuan Lu 和 Xing Peng。“整数模 n 环二着色中的单色四项等差数列”。载于：组合论杂志 A 辑 119.5（2012），第1048–1065页。 ISSN: 0097-3165. DOI: https://doi.org / 10.1016/j.jcta.2011.12.004. URL: http://www.sciencedirect.com / science/article/pii/S0097316511001932.[13] Steven J. Miller 和 Carsten Peterson。“MSTD 问题的几何视角”。载于：离散与计算几何 62.4（2019年6月），第832–855页。 ISSN: 1432-0444. DOI: 10.1007/s00454-019-00109-7. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00454-019-00109-7.[14] Pablo A. Parrilo、AaronRobertson 和 DanSaracino。“单色三项等差数列渐近最小数量”。载于：组合论杂志 A 辑 115.1（2008），第185–192页。ISSN: 0097-3165. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcta.2007.03.006.URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S00973 1650700043X.[15] H.L. Royden 和 P.M. Fitzpatrick。《实分析》。第四版。普伦蒂斯·霍尔，波士顿，2010年。 ISBN: 0-13-143747-X.[16] Richard P Stanley。《超平面排列导论》。 [在线；访问日期：7月21日，2022]。2006年。 URL: https://www.cis.upenn.edu/~cis6 10/sp06stanley.pdf.[17] B.L. van der Waerden。“对鲍代特猜想的证明”。载于：Nieuw Arch. Wisk. 15（1927年），第212–216页。[18] Julia Wolf。“ $\mathbb{Z}_p$中的单色四项等差数列最小数量”。载于：组合论杂志 1.1（2010），第53–68页。

[19] Thomas Zaslavsky. “拓扑剖分的组合分析”。载于：《数学进展》25.3（1977），第267–285页。 ISSN：0001-8708。 DOI：10.1016/0001-8708(77)90076-7。 URL：https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90076-7。[20] Thomas Zaslavsky. “正视超平面排列：空间划分的面数公式”。载于：《美国数学会回忆录》1.issue 1, 154（1975），第vii+102页。 ISSN：0065-9266。 DOI：10.1090/memo/0154。 URL：https://doi.org/10.1090/memo/0154。

# A 附录：20 个多边形区域

引理 4.1 中的 20 个可能区域如下所示。

**1**



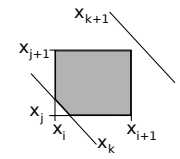

**刻画不等式：**

$$2x_k \le x_i + x_j \le x_{i+1} + x_{j+1} \le 2x_{k+1}$$

**区域面积：**

$$(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} - x_j)$$

**2**



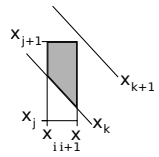

**刻画不等式：**

$$x_i + x_j \le 2x_k \le \text{分钟}(x_i + x_{j+1},\ \ x_{i+1} + x_j),$$
$$x_{i+1} + x_{j+1} \le 2x_{k+1}$$

**区域面积：**

$$(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} - x_j)\ - (2x_k - x_i - x_j)^2/2$$

**3**



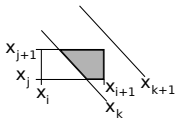

**刻画不等式：**

$$x_{i+1} + x_j \le 2x_k \le x_i + x_{j+1} \le x_{i+1} + x_{j+1} \le 2x_{k+1}$$

**区域面积：**

$$(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} + x_i/2 + x_{i+1}/2 - 2x_k)$$

**4**



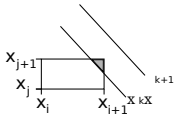

**刻画不等式：**

$$x_i + x_{j+1} \le 2x_k \le x_{i+1} + x_j \le x_{i+1} + x_{j+1} \le 2x_{k+1}$$

**区域面积：**

$$(x_{j+1} - x_j)(x_{i+1} + x_j/2 + x_{j+1}/2 - 2x_k)$$

**5**



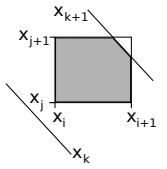

**刻画不等式：**

$\max(x_i + x_{j+1}, x_{i+1} + x_j) \leq 2x_k \leq x_{i+1} + x_{j+1} \leq 2x_{k+1}$

**区域面积：**

$(2x_k - x_{i+1} - x_{j+1})^2/2$

**6**




**刻画不等式：**

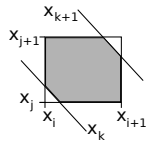
$2x_k \leq x_i + x_j,$

$\max(x_i + x_{j+1}, x_{i+1} + x_j) \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_{j+1}$

**区域面积：**

$(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} - x_j) - (2x_{k+1} - x_{j+1} - x_{i+1})^2/2$

**7**




**刻画不等式：**

$x_i + x_j \leq 2x_k \leq \min(x_i + x_{j+1}, \quad x_{i+1} + x_j),$

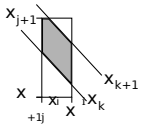
$\max(x_i + x_{j+1}, \quad x_{i+1} + x_j) \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_{j+1}$

**区域面积：**

$(x_{i+1} - x_i)(x_{j+1} - x_j) - (2x_k - x_i - x_j)^2/2$

$-(2x_{k+1} - x_{i+1} - x_{j+1})^2/2$

**8**




**刻画不等式：**

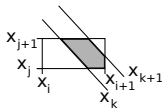
$x_{i+1} + x_j \leq 2x_k \leq x_i + x_{j+1} \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_{j+1}$

**区域面积：**

$(x_{i_2} - x_{i_1})(x_{j_2} + x_{i_1}/2 + x_{i_2}/2 - 2x_{k_1})$

$-(2x_{k_2} - x_{i_2} - x_{j_2})^2/2$

**9**




**刻画不等式：**

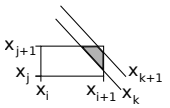
$x_i + x_{j+1} \leq 2x_k \leq x_{i+1} + x_j \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_{j+1}$

**区域面积：**

$(x_{j+1} - x_j) \cdot (x_{i+1} + x_j/2 + x_{j+1}/2 - 2x_k)$

$-(2x_{k+1} - x_{i+1} - x_{j+1})^2/2$

**10**



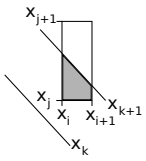

**刻画不等式：**

$\max(x_i + x_{j+1}, x_{i+1} + x_j) \leq 2x_k \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_{j+1}$

**区域面积：**

$(2x_k - x_{i+1} - x_{j+1})^2/2 - (2x_{k+1} - x_{i+1} - x_{j+1})^2/2$

**11**



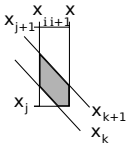

**刻画不等式:**

$2x_k \leq x_i + x_j \leq x_{i+1} + x_j \leq 2x_{k+1} \leq x_i + x_{j+1}$

**区域面積:**

$(x_{i+1} - x_i)(2x_{k+1} - x_j - x_i/2 - x_{i+1}/2)$

**12**




**刻画不等式:**

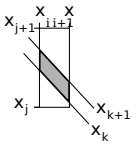
$x_i + x_j \leq 2x_k \leq x_{i+1} + x_j \leq 2x_{k+1} \leq x_i + x_{j+1}$

**区域面積:**

$(x_{i+1} - x_i)(2x_{k+1} - x_j - x_i/2 - x_{i+1}/2)$

$-(2x_k - x_i - x_j)^2/2$

**13**



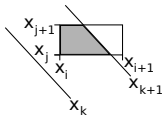

**刻画不等式:**

$x_{i+1} + x_j \leq 2x_k \leq 2x_{k+1} \leq x_i + x_{j+1}$

**区域面積:**

$(x_{i+1} - x_i)(2x_{k+1} - 2x_k)$

**14**



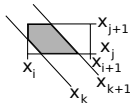

**刻画不等式:**

$2x_k \leq x_i + x_j \leq x_i + x_{j+1} \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_j$

**区域面積:**

$(x_{j+1} - x_j)(2x_{k+1} - x_j/2 - x_{j+1}/2 - x_i)$

**15**




**刻画不等式:**

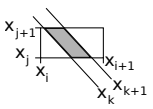
$x_i + x_j \leq 2x_k \leq x_i + x_{j+1} \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_j$

**区域面積:**

$(x_{j+1} - x_j)(2x_{k+1} - x_j/2 - x_{j+1}/2 - x_i)$

$-(2x_k - x_i - x_j)^2/2$

**16**



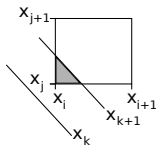

**刻画不等式:**

$x_i + x_{j+1} \leq 2x_k \leq 2x_{k+1} \leq x_{i+1} + x_j$

**区域面積:**

$(x_{j+1} - x_j)(2x_{k+1} - 2x_k)$

**17**



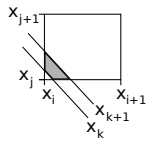

**刻画不等式:**

$2x_k \le x_i + x_j \le 2x_{k+1} \le \min(x_i + x_{j+1},\ \ x_{i+1} + x_j)$

**区域面积:**

$(2x_{k+1} - x_i - x_j)^2/2$

**18**



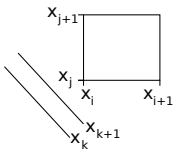

**刻画不等式:**

$x_i + x_j \le 2x_k \le 2x_{k+1} \le \min(x_i + x_{j+1},\ \ x_{i+1} + x_j)$

**区域面积:**

$(2x_{k+1} - x_i - x_j)^2/2 - (2x_k - x_i - x_j)^2/2$

**19**



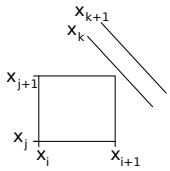

**刻画不等式:**

$2x_{k+1} \le x_i + x_j$

**区域面积:**

$0$

**20**




**刻画不等式:**

$x_{i+1} + x_{j+1} \le 2x_k$

**区域面积:**

$0$