引力波探测器中热噪声与量子噪声的统一

Chris Whittle，[1, *] Lee McCuller，[2] Vivishek Sudhir，[1, 3, †] 和 Matthew Evans[11] *LIGO, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA* [2] *LIGO, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA* [3] *Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139*（日期：2023年1月3日）

当代引力波探测器的根本限制来自热噪声——这是测试质量的机械元件耗散所致——以及量子噪声——这是用于探测测试质量位置的光场真空涨落所致。原则上，还有另外两种基本噪声也可能限制灵敏度：由其机械模的零点涨落引起的测试质量量子化噪声，以及光场的热激发。我们运用量子涨落—耗散定理，将这四种噪声统一起来。这一统一图景明确揭示了何时可以忽略测试质量量子化噪声和光学热噪声。

arXiv:2301.00338v1 [astro-ph.IM] 1 Jan 2023

引言。—引力波（GW）探测器灵敏度的基本限制源于经典涨落和量子涨落。目前，这些噪声分别采用不同的技术进行建模。热噪声——由机械测试质量的布朗运动、其悬挂系统以及测试质量上的镜面镀层引起——根据（经典）涨落—耗散定理推导得出 [1, 2]。量子噪声——由用于测量测试质量位置的光场中的真空涨落引起——则通过所谓的"双光子形式"中的量子电动力学推导得出 [3–7]。这些噪声的总和限制了当代引力波探测器的性能：光场振幅中的量子涨落驱动测试质量在 ∼20-50 Hz 范围内运动 [8, 9], 镜面镀层的布朗运动在 ∼50-200 Hz 范围内占主导地位 [10], , 而光场相位中的量子涨落决定了 200 Hz 以上的灵敏度 [11, 12]。

原则上，存在恰好互补的噪声，即机械自由度的量子噪声和光场的热噪声。前者是对干涉仪测试质量块的机械运动进行量子化，以及由此产生的零点涨落的结果。事实上，布拉金斯基等人研究了测试质量的量子化噪声的作用 [13], , 得出结论："如果适当地对输出数据进行滤波，测试质量的量子化无关紧要 *[.....]*"。另一方面，光场的热涨落——例如由黑体辐射引起的热涨落——可能导致额外噪声。

我们证明，上述四种基本噪声——机械自由度和光学自由度的热噪声与量子噪声——都可以利用涨落—耗散定理的量子扩展 [14–19] 统一处理。这一观点使我们能够以一种与探测器拓扑无关的简单方式处理测试质量量子噪声，而只需考虑相对热能量尺度与光学量子能量尺度。在此基础上，我们扩展了文献 [13] 中的分析，以纳入机械损耗，并允许不同的引力波探测器光学拓扑或任意复杂的测试质量悬挂系统。我们发现，原则上测试质量量子化噪声可以忽略不计——也就是说，*independent*于任何"滤波"——只要测试质量的机械自由度在声学频率（Ω_m）处谐振，且探测器运行于某一温度

$$T > \hbar\Omega_m/k_B \approx (5\times10^{-11}\,\mathrm{K})\cdot\left(\frac{\Omega_m}{2\pi\cdot 1\,\mathrm{Hz}}\right).$$

同样，只要引力波探测器在某一温度下运行，载波频率处的光学热噪声ω_o 与其量子噪声相比就是可以忽略的

$$T < h\omega_o/k_B \approx (14\times10^{3}\,\mathrm{K})\cdot\left(\frac{\omega_o}{2\pi\cdot 300\,\mathrm{THz}}\right).$$

量子涨落耗散定理。—处于温度 T 下热平衡中的系统，可以通过将其可观测量与来自环境的噪声力耦合来建模。在最简单的单一可观测量 $\hat{x}$情况下，这种耦合可由相互作用哈密顿量 $H_{\mathrm{int}} = -\hat{x}f_x$描述，其中 f_x 是与系统算符 $\hat{x}$ 共轭的广义力，源自系统的量子与热环境涨落。在线性响应区间内，量子涨落耗散定理（涨落耗散定理）指出，任意系统可观测量 $\hat{y}$ 的（对称化双边）功率谱密度为 [15, 式（7.2）]

$$\bar{S}_{yy}[\omega] = \hbar\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\mathrm{Im}\,\chi_{yx}[\omega], \tag{1}$$

其中， χ_{yx} 是可观测量$\hat{y}$ 对广义力 f_x的易感率，即$\hat{y}[\omega] = \chi_{yx}[\omega]f_x[\omega]$。利用恒等式$\coth\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + 2(\mathrm{e}^{\alpha}-1)^{-1}$，可将其改写为 −

$$\bar{S}_{yy}[\omega] = \hbar\,(2n_{\mathrm{th}}[\omega]+1)\,\mathrm{Im}\,\chi_{yx}[\omega], \tag{2}$$

其中， $n_{\mathrm{th}}[\omega] \equiv (\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_BT}-1)^{-1}$ 是玻色–爱因斯坦占据数。

我们将 $\hat{y}$ 中的量子噪声（QN）定义为其在零温度下的涨落：

$$\bar{S}^{\mathrm{QN}}_{yy}[\Omega] \equiv \lim_{T\to0}\bar{S}_{yy}[\omega] = \hbar\,\mathrm{Im}\,\chi_{yx}[\omega], \tag{3}$$

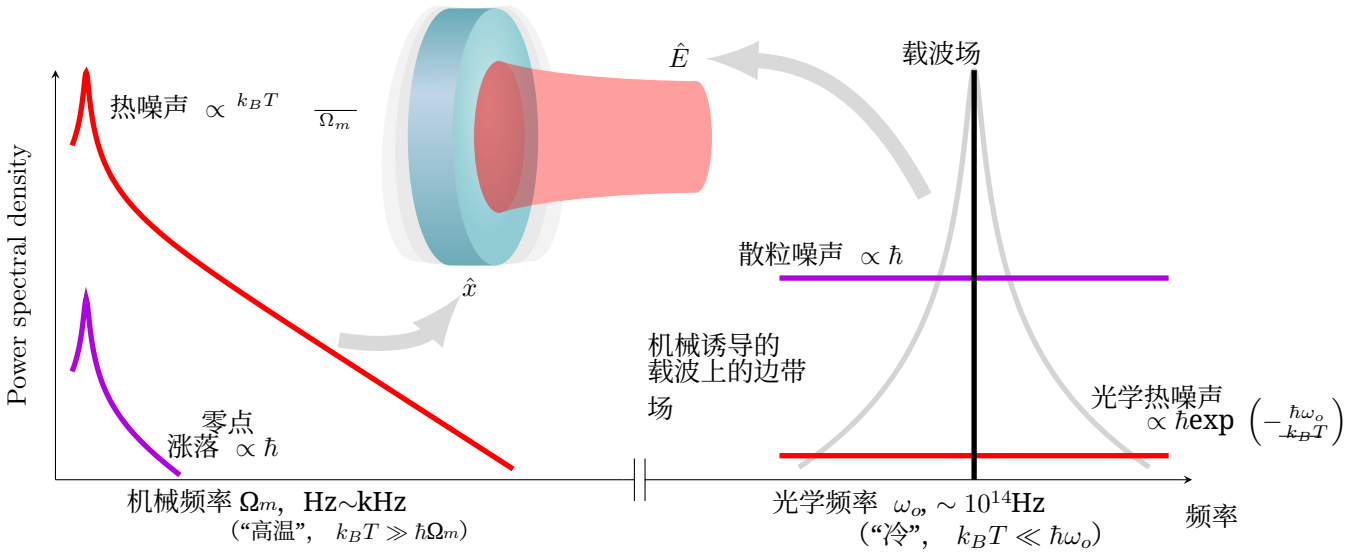

图 1. 涨落耗散定理的一般形式所产生、并耦合到各机械模$\hat{x}$和光学模$\hat{E}$的噪声项示意图。在低频范围（最高至 ~kHz），测试质量块机械运动的贡献以功率谱表示。在这些频率下，热噪声（红色）占主导地位，超过测试质量块的零点涨落（紫色）。在高频范围（ ~THz 量级），图中显示的是光学功率谱。此时，光学真空涨落（紫色）是相关效应；光学模的热占据数（红色）受到指数级抑制。对于噪声曲线，易感率 $\mathrm{Im}\,\chi$ [的相关前因子取自式（3）；式（4）和（6）] 也一并示出。灰色表示由机械运动产生的光学边带。

也称为零点涨落。

因此，热噪声（TN）就是式（ $T2$）中剩余的依赖项

$$\bar{S}_{yy}^{\mathrm{TN}}[\omega] \equiv \hbar \cdot 2n_{\mathrm{th}}[\omega]\,\mathrm{Im}\,\chi_{yx}[\omega]. \tag{4}$$

确实，在热能占主导的区域（$k_B T \gg \hbar\omega$）中，我们有 $n_{\mathrm{th}} \approx k_B T/\hbar\omega \gg 1$，并可恢复经典涨落耗散定理的结果：$\bar{S}_{yy} \approx \bar{S}_{yy}^{\mathrm{TN}} \approx (2k_B T/\omega)\ \mathrm{Im}\ \chi_{yx}$。

涨落耗散定理的强大之处在于，仅凭对易感率的了解——这一对象可通过经典实验获得——便能确定所有我们所关注的基本噪声（即量子噪声和热噪声）。更进一步，它意味着热噪声和量子噪声之间存在如下直接关系：

$$\bar{S}_{yy}^{\mathrm{TN}}[\omega] = 2n_{\mathrm{th}}[\omega]\bar{S}_{yy}^{\mathrm{QN}}[\omega]. \tag{5}$$

因此，即使不了解易感率，也可以通过其中一个噪声推导出另一个，而无需直接获取易感率的信息。

对于处于“冷”或“热”区域的系统，我们可以将占据数近似为

$$n_{\mathrm{th}}[\omega] \approx \begin{cases} \mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_B T}, & k_B T \ll \hbar\omega\ (\text{“cold”}), \\ \dfrac{k_B T}{\hbar\omega}, & k_B T \gg \hbar\omega\ (\text{“hot”}), \end{cases} \tag{6}$$

在式（5）中，将已知的量子噪声与热噪声联系起来，反之亦然。在当代引力波探测器中，机械模和光学模分别处于冷热区间。因此，机械自由度中已知的热噪声——使用经典涨落耗散定理 [1, 2] 独立计算得出——可用于估算机械量子噪声：

$$\bar{S}_{yy}^{\mathrm{QN,mech}}[\omega] \approx \frac{\hbar\omega}{2k_B T}\bar{S}_{yy}^{\mathrm{TN,mech}}[\omega]. \tag{7}$$

类似地，光场中已知的量子噪声——例如可独立地根据输入输出关系 [5, 6]计算得到——可用于估算光学热噪声：

$$\bar{S}_{yy}^{\mathrm{TN,opt}}[\omega] \approx 2\mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_B T} \cdot \bar{S}_{yy}^{\mathrm{QN,opt}}[\omega]. \tag{8}$$

图1定性展示了已充分理解的机械热噪声和光学量子噪声，以及自举得到的机械量子噪声和光学热噪声。接下来，我们将讨论引力波探测器中机械和光学各自由度的具体情况。

测试质量的量子化。—引力波探测器中的测试质量块被设计成声学频率的机械振荡器。对它们最简单的描述，是采用机械力 f_x 的集总元件模型——按定义，该力与位移$\hat{x}$共轭——驱动位移，即$\hat{x}[\Omega] = \chi_{xx}[\Omega] f_x[\Omega]$。鉴于测试质量摆动模态具有结构阻尼，阻尼率为$\Gamma_m[\Omega] = \Omega_m^2/\Omega Q$，其中 Ω_m 为机械共振频率，Q 为模态品质因数 [1]。摆模的易感率于是为

$$\chi_{xx}^{-1}[\Omega] = m(-\Omega^2 + \Omega_m^2 - i\Omega_m^2/Q). \tag{9}$$

正是测试质量振荡器与其环境之间的相互作用——以及由此导致的易感率在频率上的展宽——在布拉金斯基的分析中被假定为可忽略不计等人 [13]。根据量子涨落耗散定理对其进行一致处理后可知，振荡器的零点运动就是机械量子噪声：

$$\bar{S}_{xx}^{\mathrm{QN}}[\Omega] = \frac{\hbar}{m} \cdot \frac{\Omega_m^2/Q}{(\Omega^2 - \Omega_m^2)^2 + (\Omega_m^2/Q)^2}. \qquad (10)$$

即使在这个简单模型中，测试质量的量子噪声也是一种宽带位移噪声 [18, 20]，正如 Bragin- sky 等人 [13]所断言的那样，它显然无法被“滤除”。例如，在先进激光干涉引力波天文台中， [21], 由于测试质量摆模的频率低、损耗小（$\Omega_m \approx 2\pi \cdot 0.4\mathrm{Hz}$ 且 $Q \approx 10^8$），该模型预测，非共振测试质量量子噪声：

$$\sqrt{\bar{S}_{xx}^{\mathrm{QN}}[\Omega \gg \Omega_m]} \approx 10^{-25}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \cdot \left(\frac{\Omega}{2\pi \cdot 10\,\mathrm{Hz}}\right)^{-2},$$

比热噪声小六个数量级。

实际上，测试质量块（及其悬挂系统）并非集总元件，而是振动的弹性连续体；此外，在干涉式引力波探测器中，测试质量块带有反射镜镀层，而镀层自身也会产生弹性涨落。虽然在这种情况下无法采用集总元件模型处理易感率，但仍然可以推导出描述热噪声的易感率 [2]。这正是我们先前的观察发挥作用之处。由于相关频率 $\Omega \approx 2\pi\cdot(0.1-10^3)$ Hz，且工作温度满足 $T \gg \hbar\Omega/k_B$，这些模处于“热”区。因此，利用热噪声，便可通过公式（7）直接而准确地预测宽带机械量子噪声。图 2中的紫色虚线表示先进激光干涉引力波天文台中的宽带机械量子噪声，该结果是根据建模完善的机械热噪声（红色实线）推算得出的。请注意，宽带机械量子噪声相对平坦，这与热噪声振幅谱密度按 $1/\Omega$ 衰减的趋势形成对比；这是公式（7）中的频率因子所致。橙色虚线表示仅针对摆模的集总元件模型预测结果 [公式（10）]。显然，位移量子噪声是宽带的，但与相应的热噪声相比可以忽略不计——这一点取决于工作温度。

光学热噪声。—测试质量块的运动信息会被记录在穿过引力波探测器的电磁场中。通常，

入射场的载波频率为 ω_o，而所有相关信息都包含在载波附近偏移频率为 Ω 的场涨落中；这些偏移频率相较于 ω_o 较小（即 $|\Omega| \ll \omega_o$）。因此，我们关注的是 $S_{EE}[\omega_o + \Omega]$，，它由量子涨落耗散定理给出

$$\bar{S}_{EE}[\omega_o + \Omega] = \hbar\,(2n_{\mathrm{th}}[\omega_0 + \Omega] + 1)\,\mathrm{Im}\,\chi_{EE}[\omega_0 + \Omega].$$

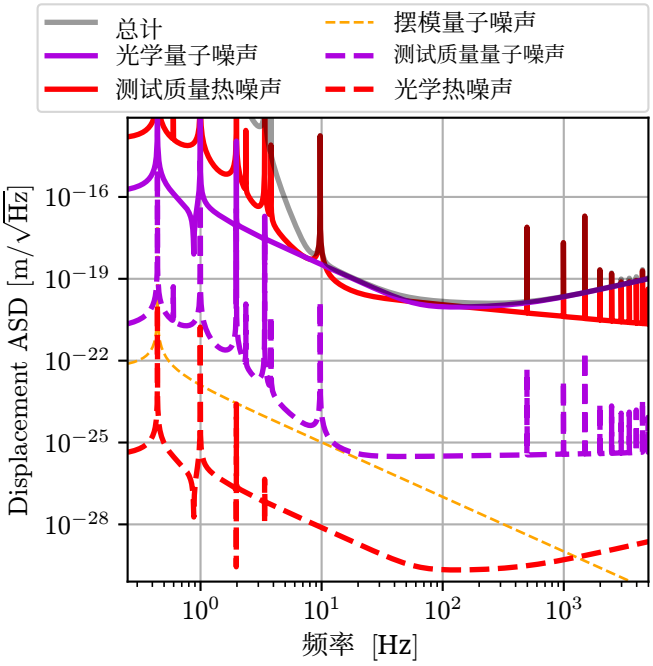

图 2. 灰色曲线表示先进激光干涉引力波天文台的设计灵敏度，在 ∼200Hz 以下主要受机械热噪声（红色实线）支配，而在该频率以上主要受光学量子噪声（紫色实线）支配 [21]。橙色虚线表示测试质量摆的简化模型所预测的机械量子噪声 [方程（10）]，；紫色虚线则表示完整机械自由度的预测 [方程（7）]。测试质量量子噪声与热噪声在形状上的差异，源于方程（7）中的频率相关因子。红色虚线表示根据已知光学量子噪声，利用方程（11）预测的光学热噪声。

当前干涉仪引力波中的光场相对于光学载波处于“冷”状态，而相对于偏移频率 Ω 处于“热”状态，即 $\hbar\Omega \ll k_B T \ll \hbar\omega_o$。因此，载波附近的场涨落可表示为

$$1 + 2n_{\mathrm{th}}[\omega_o + \Omega] \approx 1 + 2\mathrm{e}^{-\hbar\omega_o/k_B T}\left(1 + \frac{\hbar\Omega}{k_B T}\cdot\right),$$

其中包含一个占主导地位的量子噪声项 [19,22, 23]，以及一个指数级微小的热噪声贡献。因此，电场载波附近的热噪声与量子噪声之间的关系为

$$\bar{S}_{EE}^{\mathrm{TN}}[\omega_o + \Omega] \approx 2e^{-\hbar\omega_o/k_B T}\left(1 + \frac{\hbar\Omega}{k_B T}\right)\bar{S}_{EE}^{\mathrm{QN}}[\omega_o + \Omega]. \qquad (11)$$

在先进激光干涉引力波天文台中，光场涨落的量子噪声贡献已有充分表征（见图2中的紫色实线）。应用公式（11）可以直接外推光学热噪声（图2中的红色虚线）；结果表明，即使与本已很小的机械量子噪声相比，它也可以忽略不计。

探测器未来升级和下一代装置的一些设计采用了低温技术。然而，温度只会降低一个或两个数量级 [24–26]，因此图2所示的影响不会改变。一个对比鲜明的例子是超流氦-4韦伯棒天线，它们代表了一种完全不同的技术，并进入了新的运行区间。在这种装置中，超流体的（可调谐）机械共振频率为 ∼1kHz，与谐振频率为 10.6 GHz 的微波腔 [27, 28]耦合。微波读出电路的温度范围从 50 mK 到室温。对于该电路内高于 0.5 K 的温度，微波模式进入高温区，其热噪声相对于量子涨落变得显著。

光机械／电机械相互作用。—图2展示了对测试质量块自由运行位移 $\hat{x}_0$ 有贡献的噪声，其中光学和电反馈的影响已通过校准过程去除。这里，我们解释为何就计量学而言，此类反馈的具体形式不会影响我们的分析。

作用于振荡器的反馈力可写为

$$\hat{f}_{\rm fb}[\Omega] = \chi^{-1}_{xx,{\rm fb}}[\Omega]\hat{x}[\Omega],$$

其中$\chi^{-1}_{xx\,,\,{\rm fb}}$ 是位移到力的开环传递函数；我们省略了反馈的噪声分量，因为它不会影响校准。这种反馈可以是电光控制回路，也可以是来自失谐相互作用的直接光学反馈 [29]。由涨落耗散定理（FDT）导致的位移涨落 [式（2）] 也可等效地写成力涨落 $\hat{}\, f_x$，其谱为

$$\bar{S}_{f_x f_x}[\Omega] = \hbar\left(2n_{\rm th}[\Omega]+1\right){\rm Im}\left(-\chi^{-1}_{yx}[\Omega]\right), \qquad (12)$$

$\hat{}$ 与反馈力 $f_{\rm fb}$ 相加。

由于反馈，测试质量块的易感率从其固有形式 χ_{xx} [（见式（9）]）变为有效（即闭环）易感率，$\chi_{xx,\,{\rm cl}} \equiv \chi_{xx}/\left(1 - \chi_{xx}\chi^{-1}_{xx\,,\,{\rm fb}}\right)$。闭合回路时观测到的位移为 $\hat{x}_{\rm cl} \equiv \chi_{xx,\,{\rm cl}} f_x$。还可将引力波信号纳入其中；它通过力 $f_{\rm gw}$ [30] 与测试质量块的位移耦合。由此推得自由运行位移为

$$\hat{x}_0 = \hat{x}_{\rm cl}\left(1 - \chi_{xx}\chi^{-1}_{xx,{\rm fb}}\right) = \chi_{xx}\left(\hat{f}_x + \hat{f}_{\rm gw}\right),$$

为简洁起见，我们省略每一项对频率的依赖$^{-}\,\hat{}$。按照惯例，噪声 S_{ff} 的谱 f_x被校准为位移谱，然后如图2所示绘制。由于反馈的影响对所有力都是相同的，我们测量 $f_{\rm gw}$ 的能力仅取决于力噪声 f_x，而不取决于反馈系统的行为。在先进激光干涉引力波天文台的正常运行中，额外的技术噪声会超过这些低频下的基本噪声源（先进激光干涉引力波天文台设计中的$\lesssim$ 10Hz） [10],，但为简单起见，我们省略了这些噪声。

我们的结论认为，反馈对计量学（例如引力波探测器）并无实质影响；但这不应与关于基于反馈的量子态制备的一般性论断相混淆。例如，在满足某些测量灵敏度条件时，可以利用反馈捕获并冷却测试质量块的运动，正如参考文献 [31]中对摆模所做的那样。然而，就计量学而言，这种做法会抑制信号（即源自引力波的力 $f_{\rm gw}$），不会提高信噪比。

结论。—热噪声和量子噪声为引力波探测器可实现的灵敏度设定了根本限制。在这封信中，我们借助一般的涨落—耗散定理，扩展了布拉金斯基对这些噪声源的处理 [13] 。我们的方法能够直接根据已充分理解的机械热噪声和光学量子噪声，分别计算机械量子噪声（“测试质量量子化噪声”）和光学热噪声。通过这一工作，我们解决了引力波探测器中测试质量量子化噪声这一长期悬而未决的问题：它是一种宽带噪声源，不能以其仅限于某些频率为由而忽略；但对于采用当前技术的任何引力波探测器而言，其幅度都比灵敏度低许多个数量级。

致谢。—作者感谢美国国家科学基金会和 LIGO 实验室的支持。LIGO 由加州理工学院和麻省理工学院在美国国家科学基金会的资助下建造，并依据合作协议编号 PHY-1764464 运行。作者还感谢 Lisa Barsotti、Joe Bentley、Farid Khalili、Mikhail Korobko、Sergey Vyatchanin、Bernard Whiting 和 Christopher Wipf 提供有益评论。本文的 LIGO 文档编号为 LIGO-P2200369。

*chris.whittle@ligo.org † vivishek@mit.edu[1] P. R. Saulson, 《物理评论 D》42，2437（1990）。[2] Y. Levin, 《物理评论 D》57，659（1998）。[3] C. M. Caves, 《物理评论 D》23，1693（1981）。[4] C. M. Caves 和 B. L. Schumaker, 《物理评论 A》31，3068（1985）。[5] A. Buonanno 和 Y. Chen, 《物理评论 D》64，042006（2001）。[6] H. J. Kimble、Y. Levin、A. B. Matsko、K. S. Thorne 和 S. P. Vyatchanin, 《物理评论 D》65，022002（2001）。[7] T. Corbitt、Y. Chen 和 N. Mavalvala, 《物理评论 A》72，013818 2005( )。[8] H. Yu、L. McCuller、M. Tse、N. Kijbunchoo、L. Barsotti 和 N. Mavalvala, 《自然》583，43（2020）。

[9] F. Acernese *et al.*（Virgo 合作组），《物理评论快报》125，131101（2020）。[10] A. Buikema、C. Cahillane、G. Mansell、C. Blair， *et al.*，《物理评论 D》102，062003（2020）。[11] M. Tse、H. Yu、N. Kijbunchoo， *et al.*，《物理评论快报》123，231107（2019）。[12] F. Acernese *et al.*（Virgo 合作组），《物理评论快报》123，231108（2019）。[13] V. B. Braginsky、M. L. Gorodetsky、F. Y. Khalili、A. B. Matsko、K. S. Thorne 和 S. P. Vyatchanin，《物理评论 D》67，082001（2003）。[14] H. Callen 和 T. Welton，《物理评论》83，34（1951）。[15] R. Kubo，《物理学进展报告》29，255（1966）。[16] M. Lax，《现代物理评论》32，25（1960）。[17] J.-M. Courty 和 S. Reynaud，《物理评论 A》46，2766（1992）。[18] A. A. Clerk、M. H. Devoret、S. M. Girvin、F. Marquardt 和 R. J. Schoelkopf，《现代物理评论》82，1155（2010）。[19] H. Miao、N. D. Smith 和 M. Evans，《物理评论 X》9，011053（2019）。[20] F. Y. Khalili、H. Miao、H. Yang、A. H. Safavi-Naeini、O. Painter 和 Y. Chen，《物理评论 A》86，033840（2012）。[21] LIGO 科学合作组，《经典与量子引力》32，074001（2015）。[22] B. J. Meers 和 K. A. Strain，《物理评论 A》44，4693（1991）。[23] A. Pace、M. Collett 和 D. Walls，《物理评论 A》47，3173（1993）。[24] R. X. Adhikari、K. Arai、A. Brooks、C. Wipf、O. Aguiar、P. Altin、B. Barr、L. Barsotti、R. Bassiri、A. Bell， *et al.*，《经典与量子引力》37，165003（2020）。[25] T. Akutsu、M. Ando、K. Arai、Y. Arai 和 K. 合作组，《自然·天文学》3，35（2019）。[26] ET 指导委员会， *et al.*，ET 公开文件（2020）。[27] S. Singh、L. De Lorenzo、I. Pikovski 和 K. Schwab，《新物理学杂志》19，073023（2017）。[28] L. De Lorenzo 和 K. Schwab，《低温物理学杂志》186，233（2017）。[29] K. Komori、D. ˇDurovˇc´ıkov´a 和 V. Sudhir，《物理评论 A》105，043520（2022）。[30] J. Weber 和 J. A. Wheeler，《现代物理评论》29，509（1957）。[31] C. Whittle、E. D. Hall、S. Dwyer、N. Mavalvala、V. Sud *et al.*hir，《科学》372，1333（2021）。