arXiv:2301.00343v1 [hep-th] 1 Jan 2023

关于全纯矩映射的 A_∞-范畴

Ahsan Z. Khan*

高等研究院自然科学学院，爱
因斯坦大道，普林斯顿，NJ 08540

2023年1月3日

摘要

设 M 是一个配备了 $U(1)$ 超K¨ahler 等距变换的超K¨ahler 流形，并设 I 是 M 上的一个复结构。本文研究以 (M, I) 为目标空间、超势为I-全纯矩映射的朗道-金兹堡模型的 A-膜 A_∞范畴。我们证明，若 I 是一般复结构，则A_∞范畴是半单的。对于例外复结构，尽管它通常不是半单的，但该范畴仍不存在瞬子修正。我们以 M 为射影直线的余切丛为例，说明一般情形和例外轨迹上的 A_∞范畴。

Morse-Smale-Witten（MSW）复形是与黎曼流形 (M, g) 上实函数[1] h 相关联的上链复形。从物理学角度来看，MSW 复形是一个 $\mathcal{N} = 2$ 超对称量子力学（SQM）系统 [Wit82]的微扰基态空间。该复形上的微分由瞬子效应构造而成。

在一种特殊情形下，MSW 复形会大幅简化。具体来说，当 (M, g) 具有与 g 相容的复结构 I（因此 (M, g, I) 是一个 K¨ahler 流形），且 h 是定义在 M 上的全纯函数 I 的实部时，便是如此。在这种情况下，众所周知， h 的所有临界点都具有相同的莫尔斯指标，该指标等于 M 的复维数。因此，MSW 复形只是一个集中在单一次数上的向量空间，每个临界点对应一个基向量。这立即意味着微分必定为零。从物理学的角度来看，这种情形下还会发生一件特殊的事

*khan@ias.edu[1]本文中，我们假设 h 的所有临界点都是孤立且非退化的

。当 M 是 K¨ahler 流形且 $h = \mathrm{Re}\ W$ 时，以 (M, g) 为目标空间、以 h 为超势的超对称量子力学具有 $\mathcal{N} = 2$ 超对称性，并且恰好增强为 $\mathcal{N} = 4$。具有两倍超对称性的系统，其超对称基态往往具有更简单的性质。

注：超对称性增强为 $\mathcal{N} = 4$ 的另一种情形是，h 是 M的连续 K¨ahler 等距变换的动量映射。稍后我们将在本文中使用这一陈述的复版本。

我们由此得出，ReW 的 MSW 复形并非对 $\big((M, g, I)\ W\big)$特别有趣的不变量。不过，同一对对象还存在一个更丰富的不变量；在一种可以精确定义的意义下，它将 Re W的 MSW 复形范畴化。ReW 的 MSW 复形的范畴化，在数学界称为 (M, W) 的 Fukaya-Seidel A_∞范畴。从物理学的角度看，这种范畴化之所以存在，是因为 $\mathcal{N} = 4$ 超对称量子力学可以提升为一个二维 $\mathcal{N} = (2, 2)$ Landau-Ginzburg（LG）模型，使得原来的超对称量子力学超荷可以提升为该 LG 模型的拓扑超荷[2] 。Fukaya-Seidel A_∞范畴就是保持这一拓扑超荷的 Landau-Ginzburg 模型的边界条件范畴。这些边界条件称为 A- 膜。对 Fukaya-Seidel 范畴取 Hochschild 同调后，即可恢复 ReW 的 MSW 复形。

更准确地说，与（M，W）相关的 A_∞-范畴有几种不同的版本（通常猜想它们彼此 A_∞-等价）。通常，“Fukaya-Seidel范畴”指的是 Seidel 基于消失圈及其交集 [Seid]提出的一种表述。我们主要采用 Gaiotto、Moore 和 Witten 提出的一种表述，该表述基于 ζ- 孤子方程和 ζ- 瞬子方程的某些特定类型的解[3] [4][GMW15]。

自然会让人思考，是否存在一类 K¨ahler 流形和超势，使得相应的 A_∞-范畴得到简化。对于这类对，一个可能的判据是，(M, W) 的朗道-金兹堡模型的超对称性得到增强。确实存在一种特殊情形满足这一点。设目标空间 (M, g, I) 具有一个满足下式的I-全纯二形式 Ω:

$$\Omega g^{-1}\overline{\Omega} + g = 0, \quad \nabla\Omega = 0, \tag{1}$$

[2]如果一个超荷的像包含所有平移，则称其为拓扑的。 Q [3]Haydys 也提出了一个类似（但并不完全相同）的表述 [Hay10]。[4]另请参见 [KKS14] ，其中对 [GMW15] 的形式体系进行了重新表述，并将其推广到高维。

从而空间 (M, g, I, Ω) 是一个超K¨ahler 流形[5]。此外，设 (M, g, I, Ω) 具有由向量场 V 生成的超K¨ahler 等距变换，使得

$$\mathcal{L}_V g = \mathcal{L}_V I = \mathcal{L}_V \Omega = 0, \tag{2}$$

而 W 是相应的全纯矩映射

$$\mathrm{d}W = \iota_V \Omega. \tag{3}$$

若情况如此，那么对 $\big($（M， g， I） $W\big)$ 而言，朗道-金兹堡模型还具有一个额外对称性[6]，它源自通过以下自同态旋转该理论中的费米子

$$J = g^{-1}\mathrm{Re}\big(\Omega\big) \tag{4}$$

切丛。该对称变换与 $\mathcal{N}$ =(2, 2) 超对称性的交换子会生成另外四个费米子对称性，从而总共有八个超荷。因此，(M， W) 的朗道-金兹堡模型的超对称性由 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 增强为 $\mathcal{N} = (4, 4)$。

事实上，上述例子为我们提供了无穷多个凯勒流形与全纯函数的对，这些对象的超对称性都会增强。除了 I ，我们还可以定义可积复结构 $J = g^{-1}$Re(Ω) 和 $K = g^{-1}$ Im(Ω)，它们还满足四元数关系

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1. \tag{5}$$

这引出了一个众所周知的事实：超K¨ahler流形 M 拥有一整个二维球面上的复结构，因为对于任意 $v = (v_1, v_2, v_3) \in S^2$，自同态

$$I^{(v)} = v_1 I + v_2 J + v_3 K \tag{6}$$

是 M 上的可积复结构。此外，给定由向量场 V 生成的超K¨ahler 等距变换，在每个复结构中都有一个全纯矩映射

$$W^{(v)} : M \to \mathbb{C}$$

[5]请回想，超K¨ahler流形的一种定义是：具有相容平行全纯辛形式 Ω 的K¨ahler流形。[6]轴向R对称性 F_A、由绕 J 旋转产生的对称性，以及它们的交换子，共同生成一个 SO(3) R对称代数。理解超对称性增强和这一 $SO(3)$ R对称性的另一种方式，是注意到这个二维理论源自将一个六维超K¨ahler σ模型降维到二维；在该模型中，超K¨ahler等距变换由一个六维 $U(1)$ 矢量多重态规范化。降维时，我们将四个内部方向上的规范场设为 $\mathbb{R}^4$ 中的一个非零向量，同时令其他所有矢量多重态场为零。选择一个非零向量，会将来自内部方向的 $SO(4)$ R对称性破缺为 $SO(3)$。

在每个复结构 $I^{(v)}$ 中。具体而言， $W^{(v)}$ 可以如下获得。设 μ_I 是与实辛形式 $\omega_I = gI$ 对应的动量映射，并令

$$W = \mu_J + \mathrm{i}\mu_K, \quad \Omega = \omega_J + \mathrm{i}\omega_K, \tag{7}$$

使三元组 (μ_I, μ_J, μ_K) 满足

$$\mathrm{d}\mu_I = \iota_V \omega_I, \tag{8}$$
$$\mathrm{d}\mu_J = \iota_V \omega_J, \tag{9}$$
$$\mathrm{d}\mu_K = \iota_V \omega_K. \tag{10}$$

我们可以通过超K¨ahler 旋转从 I 得到复结构 $I^{(v)}$ ： 存在一个四元数

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H} \tag{11}$$

使得

$$\bar{q}\, i\, q = v_1 i + v_2 j + v_3 k. \tag{12}$$

四元数 q 在通过相位 $q \to e^{\mathrm{i}\theta} q$重新定义的意义下是唯一的。将超K¨ahler 动量映射按虚四元数展开

$$\vec{\mu} = \mu_I i + \mu_J j + \mu_K k. \tag{13}$$

相对于复结构 I，超K¨ahler 动量映射分解为实部和复部的形式为

$$\vec{\mu} = h\, i + W j, \tag{14}$$

因此， $h = \mu_I$ 是实矩映射，而 $W = \mu_J + \mathrm{i}\mu_K$ 是复动量映射。相对于 $I^{(v)}$ 的实矩映射和全纯动量映射可通过将 μ 相对于$\overline{q}$旋转得到:

$$q\, \vec{\mu}\, \overline{q} = h^{(v)} i + W^{(v)} j. \tag{15}$$

将 q 重新定义为相位,

$$q \to e^{\mathrm{i}\theta} q \tag{16}$$

会使 $h^{(v)}$ 保持不变，而它则变换为

$$W^{(v)} \to e^{2\mathrm{i}\theta} W^{(v)}. \tag{17}$$

由于将 $W^{(v)}$ 重新定义为相位乘积不会改变相应的朗道-金兹堡模型，因此单位二球面上的每个点都对应一个 LG 模型 $((M, g, I^{(v)})\ W^{(v)})$。由于所有这类模型的超对称性都会增强，因此自然可以预期，每个这类对 $\left((M, g, I^{(v)})\ W^{(v)}\right)$ 的 A_∞-范畴都会简化。

本文旨在证明事实确实如此[7]。

在本文余下部分中，我们假设超K¨ahler 动量映射具有孤立且非退化的临界点，并且 $v \in S^2$ 使得 $W^{(v)}$ 的临界值在复平面上处于一般位置。

动量映射的 A_∞-范畴有一个基本的简化之处：不存在瞬子修正。原因如下。回顾 Gaiotto-Moore-Witten 对 W的 A_∞-范畴的构造，其中所有瞬子修正都来自ζ-瞬子方程的解。 $\phi: \mathbb{C} \to M$ 的 ζ-瞬子方程为

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial \bar{z}} = \zeta g^{i\bar{j}} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \bar{\phi^j}}, \tag{18}$$

其中， $\zeta = e^{\mathrm{i}\theta}$ 是为定义范畴而必须选取的相位，$(\phi^i, \overline{\phi}^{\bar{i}})$是 M 上的局部复坐标，而 z 是 $\mathbb{C}$ 上的标准复坐标。对 A_∞-结构有贡献的特定解，是在无穷远处满足“扇形”边界条件且具有刚性的解。刚性意味着，除欧几里得时空复平面上的整体平移外，解没有其他模空间。在超K¨ahler 情形下，不可能存在~~这样~~的解，这一点很容易从将 ζ-瞬子方程线性化后得到的算子具有一个零模这一事实看出

$$\delta \phi^i = V^i \tag{19}$$

除了平移零模之外。因此不存在非平凡的刚性瞬子。

接下来我们证明，在复结构二球面上的一般点 v 处，有一个更强的结论成立：对 $\left((M, g, I^{(v)}) \; W^{(v)}\right)$ 而言， A_∞-范畴是半单的。其含义如下。回想一下，超势 W 的 A_∞-范畴有一个由“下降流形”对象 $\{T_i\}$ 构成的生成集，这些对象与 W 的临界点一一对应。如果下降流形对象之间的态射空间满足以下条件，则称该 A_∞-范畴是半单的

$$\mathrm{Hom}(T_i, T_j) = \delta_{ij}\mathbb{C}. \tag{20}$$

这一性质可由一个初等引理得出。

引理 设 (M, g, I, J, K) 是一个超 K¨ahler 流形，

$$\vec{\mu}: M \to \mathbb{R}^3$$

[7]F或与本文设定相关的先前工作，参见 [SV18] 和 [Jin2 1]

是一个超 K¨ahler 动量映射，并且 $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in S^2$ 是单位球面上的一点。假设 ϕ : $\mathbb{R} \to M$ 是梯度流方程的一个（非恒定）解

$$\frac{\mathrm{d}\phi^A}{\mathrm{d}y} = g^{AB}\frac{\partial(\vec{n}\cdot\vec{\mu})}{\partial\phi^B} \tag{21}$$

其中

$$\vec{n}\cdot\vec{\mu} = n_1\mu_I + n_2\mu_J + n_3\mu_K. \tag{22}$$

那么，复合映射 $\vec{\mu}\circ\phi$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 是一个嵌入，其像是沿$\vec{n}$方向的一条直线。

证明。我们对 $\vec{n} = (0, 1, 0)$证明这一结论，因此考察μ_J的梯度流方程。由于 μ_J 是全纯函数 I 的实部

$$W_I = \mu_J + \mathrm{i}\mu_K, \tag{23}$$

柯西-黎曼方程

$$\mathrm{d}\mu_J = I^{\mathrm{t}}\mathrm{d}\mu_K \tag{24}$$

这意味着， μ_J 的梯度向量场等价于关于辛形式 ω_I的哈密顿向量场 μ_K

$$g^{-1}\mathrm{d}\mu_J = \omega_I^{-1}\mathrm{d}\mu_K. \tag{25}$$

因此， μ_K 沿流线保持不变。但 μ_J 也是全纯函数 K的实部

$$W_K = \mu_J - \mathrm{i}\mu_I$$

因此， W_K 的柯西-黎曼方程意味着， μ_J 的梯度流也等价于相对于辛形式 ω_K 的 $-\mu_I$ 哈密顿流。因此，μ_I 也保持不变。由于 $\mu_J\circ\phi$ 是单调的， $\vec{\mu}\circ\phi$ 的像是一条平行于 J 轴的直线。 $\vec{n}$ 任意时的情形可通过超 K¨ahler 旋转得到。 □

现在考虑目标空间为 $(M, g, I^{(v)})$、超势由全纯函数 $W^{(v)}$ 给出的朗道-金兹堡模型，其中该函数关于 $I^{(v)}$ 全纯。BPS 孤子在朗道-金兹堡模型中起着基础性作用。设 ϕ_i 和 ϕ_j 是 $W^{(v)}$的临界点。回想一下，ij-BPS 孤子是 $\mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta_{ij}}W_{(v)})$ 的梯度流方程的一个解，其中

$$e^{\mathrm{i}\theta_{ij}} = \frac{W^{(v)}(\phi_i) - W^{(v)}(\phi_j)}{|W^{(v)}(\phi_i) - W^{(v)}(\phi_j)|}. \tag{26}$$

令 $h^{(v)}$ 为复结构 $I^{(v)}$ 下的实矩映射，具体为

$$h^{(v)} = v_1\mu_I + v_2\mu_J + v_3\mu_K = \vec{v}\cdot\vec{\mu}. \tag{27}$$

根据引理，实矩映射 $h^{(v)}$ 沿着 $\mathrm{Re}\big(e^{\mathrm{i}\theta}W^{(v)}\big)$ 的梯度流保持守恒（$\mathrm{Im}\big(e^{\mathrm{i}\theta}W^{(v)}\big)$ 亦然），对 θ 的任意取值均如此。因此，ij 孤子只有在以下条件成立时才可能存在

$$h^{(v)}(\phi_i) = h^{(v)}(\phi_j), \tag{28}$$

令 $\vec{\mu}_i \in \mathbb{R}^3$ 为第 i 个真空中的超凯勒动量映射的临界值，这个条件就是说

$$\vec{v} \cdot (\vec{\mu}_i - \vec{\mu}_j) = 0, \tag{29}$$

因此 $\vec{v}$ 垂直于向量

$$\vec{Z}_{ij} = \vec{\mu}_i - \vec{\mu}_j \tag{30}$$

该向量从第 j 个临界值指向第 i 个临界值。如果任意一对不同的临界点都不满足这一条件，那么朗道-金兹堡理论的孤子谱为空。按照 [GMW15], 的记号，孤子空间 R_{ij} 是平凡的

$$R_{ij} = \{0\}, \tag{31}$$

对每一对不同的临界点（ϕ_i，ϕ_j）均成立。由于在 Gaiotto-Moore-Witten 形式体系中，不同下降流形对象之间的态射空间由孤子空间的张量积直和给出，我们得到如下结论。

推论 假设 $\vec{v} \in S^2$ 满足：对于任意一对临界点（ϕ_i，ϕ_j），$\vec{v} \cdot (\vec{\mu}_i - \vec{\mu}_j) \neq 0$。那么，$\big((M,\ g,\ I^{(v)})\ W^{(v)}\big)$ 的 A_∞-范畴是半单的：

$$\mathrm{Hom}(T_i, T_i) = \mathbb{C}, \text{ for all } i, \tag{32}$$

$$\mathrm{Hom}(T_i, T_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j. \tag{33}$$

也可以用 Lefschetz下降流形及其交集来重新表述这段讨论。临界点 ϕ_i 在给定角度 θ 下的 Lefschetz 下降流形 $L_i(\theta; v)$，是函数 $\mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\theta}W^{(v)})$ 的所有梯度流轨迹构成的空间，这些轨迹在遥远的过去趋向 ϕ_i。我们只是在说，如果 v 不在例外轨迹上，那么给定角度 θ 下的 Lefschetz下降流形$L_i(\theta; v)$ 和 $L_j(\theta; v)$，即使稍微偏离 θ 旋转，使它们在 $W^{(v)}$ 平面上的像相交，它们在

$$L_i(\theta \pm \epsilon; s) \cap L_j(\theta \mp \epsilon; s) = \varnothing \tag{34}$$

M 中的交集仍为空。

考虑例外轨迹颇有意思，即复结构球面上满足以下条件的点：对于某一对真空态 (i, j)，$\vec{v} \cdot \vec{Z}_{ij} = 0$。例外轨迹通常是球面上的若干大圆；每一对真空态 (i, j) 对应一个这样的大圆 S_{ij}。沿着大圆 S_{ij} 上的点，可以存在一个 ij- 孤子，因此不同对象之间的态射空间可能非平凡。

为了更好地理解这些例外点处发生的情况，我们来看一个例子。设 M 是射影直线 $M = T^*\mathbb{P}^1$ 的余切丛。考虑由 $\mathbb{P}^1$ 上的复结构诱导的复结构，并考察一个坐标片中的全纯坐标 (p, q)。我们将这个复结构称为 I。在此复结构下，实辛形式和全纯辛形式为

$$\begin{aligned} \omega &= 2\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}\bar{q}}{(1+|q|^2)^2} - 2\mathrm{i}(1+|q|^2)^2 \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\bar{p}, \quad (35) \\ \Omega &= \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q. \quad (36) \end{aligned}$$

实　动量映射与对应于超K¨ahler 等距变换的复动量映射　　y

$$(p, q) \to (e^{-\mathrm{i}\theta}p, e^{\mathrm{i}\theta}q), \quad (37)$$

由下式给出

$$\begin{aligned} h_I &= \frac{1-|q|^2}{1+|q|^2} - (1+|q|^2)^2|p|^2 \quad (38) \\ W_I &= \mathrm{i}pq. \quad (39) \end{aligned}$$

存在两个临界点，分别为 ϕ_1 和 ϕ_2，由 $(p, q) = (0, 0)$ 和 $(p, q) = (0, \infty)$ 给出，其对应的临界值为

$$\begin{aligned} (h_I, W_I)|_{(0,0)} &= (1, 0), \quad (40) \\ (h_I, W_I)|_{(0,\infty)} &= (-1, 0). \quad (41) \end{aligned}$$

在复结构 I 中，实动量映射的临界值彼此不同，因此满足推论的条件。在该复结构下的朗道-金兹堡超势，

$$W_I = \mathrm{i}pq \quad (42)$$

由于 W_I 在两个不同临界点处的取值相同，均为零，因此两点之间不存在流。因此，对 $\left(T^*\mathbb{P}^1, g, I\right) W_I\big)$ 的 A_∞-范畴确实是半单的。另一方面，考虑球面上与复结构 K 对应的点。该复结构下的全纯矩映射为

$$W_K = h_I + \mathrm{i}\mathrm{Re}(W_I), \quad (43)$$

而实矩映射为

$$h_K = \mathrm{Im}(W_I). \quad (44)$$

对于复结构 K，我们确实发现，实矩映射 h_K 在两个临界点处具有相同的（零）临界值。另一方面， W_K 的临界值为

$$W_K(\phi_1) = 1, \quad W_K(\phi_2) = -1, \quad (45)$$

因此，在临界点 ϕ_1 和 ϕ_2 之间插值的 BPS 孤子的相位 $e^{\mathrm{i}\theta_{12}}$ 必须为实数。因此，我们研究 Re(W_K) $= h_I$ 的梯度流方程，或者等价地，研究关于 $\omega_K = \mathrm{Im}(\Omega)$ 的 Re(W_I) 哈密顿流方程。该方程为

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = -\mathrm{i}\frac{\partial W_I}{\partial p}, \tag{46}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \mathrm{i}\frac{\partial W_I}{\partial q}, \tag{47}$$

这就简化为

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = q, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p. \tag{48}$$

存在一个解族：对于每个 $q_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，我们有

$$q(y) = q_0 e^y, \tag{49}$$

$$p(y) = 0, \tag{50}$$

是一个在临界点之间插值的孤子。写作 $q_0 = e^{y_0 + \mathrm{i}\alpha}$，我们发现 y_0对应于中心的整体平移，而 α 是对应于 $U(1)$等距变换的内部集体坐标。对后一个集体坐标进行量子化后，我们得出孤子空间 R_{12} 同构于圆的德拉姆上同调。

关于后一点，稍作展开：注意，单粒子BPS态 $\mathbb{M}_{12}$的空间，也就是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{12}$ 中被A型超荷（其中 $\zeta = 1$）及其伴随算符湮灭的子空间，是四维的，因为存在四个费米子零模：平移模的超伴侣 b、$\overline{b}$，以及 $U(1)$全局对称性的超伴侣 c、$\bar{c}$。我们也可以从以下事实理解这些零模的来源：BPS孤子方程在八超荷理论中是半BPS的，因此产生四个破缺的超对称变换，我们将其识别为费米子零模。这些费米子零模作用于 $\mathcal{H}_{12}$ 中的真空，生成克利福德代数的一个不可约表示，其中有两个产生算符和两个湮灭算符

$$\{b, \overline{b}\} = \{c, \overline{c}\} = 1, \tag{51}$$

从而得到四维向量空间 $\mathbb{M}_{12}$。为了得到 R_{12}，如 [GMW15], 中所做的那样，我们将对应于平移模 b的克利福德模商去，从而

$$\mathbb{M}_{12} = \left(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{[1]}\right) \otimes R_{12} \tag{52}$$

因此得到

$$R_{12} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{[1]}. \tag{53}$$

在具有两个真空态 1 和 2 的理论中，并选择 ζ 使得 $T_1 < T_2$，态射空间

$$\widehat{R}_{12} := \mathrm{Hom}(T_2, T_1),$$

与孤子空间 R_{12} 重合。因此我们得出结论，在例外轨迹处，下降流形对象 T_1, T_2 满足

$$\widehat{R}_{12} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{[1]}. \tag{54}$$

具有对象 T_1 和 T_2 的范畴上的 A_∞-结构显而易见：唯一的非平凡复合来自 Hom(T_1, T_1) 和 Hom(T_2, T_2) 中的单位元。

在复结构 K 下，以及实际上在任何满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的 $I_{(0,a,b)} = aJ + bK$ 下，所考虑的都是一个实辛形式的 A模型

$$\omega_{(0,a,b)} = \mathrm{Im}\big((a + \mathrm{i}b)\Omega\big), \tag{55}$$

该形式是恰当的（因为 Ω 在 $T^*\mathbb{P}^1$ 上是恰当形式）。另一方面，若我们采用满足 $c \neq 0$ 的复结构 $I_{(c,a,b)}$（例如复结构 I），那么实辛形式 $\omega_{(c,a,b)}$ 就不是恰当的（因为非恰当辛形式 ω 有非零贡献）。恰当和非恰当辛形式对应的 A_∞-范畴确实表现不同。在例外圆上，辛流形 (M,$\omega_{(0,a,b)}$) 与实余切丛 T^*S^2 辛同构，其中非平凡的态射空间 Hom(T_2, T_1) 最早由 [Seid04] 计算出来。

恰当轨迹还有一个值得注意的特征，如下所述。考虑 $T^*\mathbb{P}^1$ 的零截面，我们将其记为 C。注意， C 是 $T^*\mathbb{P}^1$ 的一个 I- 全纯子流形，且全纯辛形式 Ω 限制在其上时为零。因此， C 是一种所谓的（B， A， A）型膜的（支撑）。特别地，相对于辛结构 ω_K，它是拉格朗日的。因此，我们预期它是对 $\big($（$T^*\mathbb{P}^1$， g， K） $W_K\big)$ 的 A_∞-范畴中的一个对象。回忆一下，由缠结生成的 A_∞-范畴中的一般对象或膜由一个扭曲复形给出。扭曲复形 B 由以下选择指定：为每个下降流形对象 T_i 配备一个分次向量空间 V_i ，以及一个 Maurer-Cartan 元（也称为边界振幅）：一个元素

$$\gamma_B \in \oplus_{i,j} V_i \otimes \widehat{R}_{ij} \otimes V_j^\vee \tag{56}$$

次数为 $+1$ 且满足 Maurer-Cartan方程的对象。我们将这样的膜写作

$$B = [\oplus_i V_i \otimes T_i, \gamma_B]. \tag{57}$$

我们断言，支撑为 C 的拉格朗日膜等价于以下扭曲复形：

$$B_C = [T_1^{[1]} \oplus T_2, \gamma_C] \tag{58}$$

其中 $T^{[1]}$ 表示对 T 的一个重数空间的选择，而 T 是位于 $+1$ 次的一维向量空间

$$T^{[1]} = \mathbb{C}^{[1]} \otimes T, \tag{59}$$

且 γ_C 是一个 Maurer-Cartan元

$$\gamma_C \in \mathrm{Hom}(T_1^{[1]} \oplus T_2, T_1^{[1]} \oplus T_2). \tag{60}$$

这个空间的一度部分是一维的，我们令 γ_C 为一个张成向量。由于

$$m_2(\gamma_C, \gamma_C) = 0, \tag{61}$$

它是 Maurer-Cartan方程的一个解。接下来通过初等计算可得，该对象的自同态空间的上同调为

$$H^*\big(\mathrm{Hom}(B_C, B_C)\big) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{[2]}. \tag{62}$$

此外，作为一个 A_∞-代数，它不过是环 $\mathbb{C}[x]/x^2$ ，其中 x 是一个同调次数为 $+2$的元素。因此，Hom(B_C, B_C) 的上同调就是 C的德拉姆上同调环，正如我们所预期的。我们看到，在一个例外点处， A_∞-范畴以一个拉格朗日球面为对象。

总之，对于 $M = T^*\mathbb{P}^1$，例外轨迹是扭量球面上的一条大圆，对应于实辛形式恰当的情形。若不在这条轨迹上，全纯矩映射的A_∞-范畴是半单的；而在例外轨迹上，则存在一个非平凡的态射空间，它同构于圆的上同调。恰恰也是在例外轨迹上， A_∞-范畴以一个拉格朗日球面为对象。

回到一般情形，在例外轨迹处，我们看到 A_∞-范畴取决于孤子谱，而一般来说，对此并无普适的答案。不过，有一点值得指出：在超K¨ahler 动量映射的设定中，BPS 孤子是一个全纯泛函的临界点。事实上， μ_I的梯度流方程等价于 μ_K的 ω_J-流以及 $-\mu_J$的 ω_K-流。我们可以将后者视为以下定~~义在从$\mathbb{R}$到~~ M的映射空间上的全纯泛函的临界轨迹：

$$\mathcal{W}[\varphi] = \int \big(\varphi^*(\Lambda_c) + \mathrm{i}\mu_c \,\mathrm{d}y\big), \tag{63}$$

其中 φ：$\mathbb{R} \to M$, Λ_{c}是 $\Omega_{\mathrm{c}} = \omega_J + \mathrm{i}\omega_K$和 $\mu_{\mathrm{c}} = \mu_J + \mathrm{i}\mu_K$的刘维尔形式。泛函 $\mathcal{W}$确实是由 I诱导的 Map($\mathbb{R}, M$) 上复结构中的全纯泛函，而 Re $\mathcal{W}$的临界点满足 μ_K的 ω_J-流方程。因此我们发现，孤子现在是一个全纯泛函的临界点。这也为为何即使存在非平凡孤子，也没有瞬子修正提供了另一种论据。

总之，本文研究了双曲¨ahler 流形某个复结构下全纯矩映射的 A_∞-范畴。除复结构二球面上的例外轨迹外， A_∞-范畴是半单的。在例外轨迹处，虽然范畴通常并非半单，但仍然没有瞬子修正。因此我们发现，全纯矩映射的 A_∞-范畴并不是很有趣。

正如全纯函数的 A_∞-范畴将其实部的 MSW 复形范畴化一样，自然会思考：是否存在一种全纯矩映射的 A_∞-范畴的范畴化，它更加丰富，也更加内在于超K¨ahler 动量映射。支持这一设想的事实是， $\mathcal{N} = (4, 4)$ 理论可以提升为具有 $\mathcal{N} = 4$ 超对称性的三维理论，其中 A型超荷提升为拓扑超荷。这表明，与超K¨ahler 动量映射相关联的自然不变量应当是某种适当的 2-范畴。

该 猜想中的与 $(M, \vec{\mu})$ 相关联的 2-范畴目前正在研究中 .

致谢

感谢 Justin Hilburn、Mikhail Kapranov、Semon Rezchikov、Paul Seidel 和 Edward Witten 富有启发性的讨论。本工作得到高等研究院和美国国家科学基金会的支持，资助编号 PHY-2207584。

参考文献

[GMW15]D. Gaiotto、G. W. Moore 和 E. Witten，“红外代数：二维大质量 $\mathcal{N} = (2,2)$场论中的弦场论结构”，[arXiv:1506.04087 [hep-th]]。

[Hay10] A. Haydys，“Fukaya-Seidel范畴与规范理论”，J. Sympl. Geom. 13, 151- 207 (2015) doi:10.4310/JSG.2015.v13.n1.a5 [arXiv:1010.2353 [math.SG]]。

[Jin21] X. Jin，“将大倾斜层表示为全纯Morse膜”，Advances in Mathematics，第 345 卷 (2019) 845-860, [arXiv:1602.07382 [math.SG]]。

[KKS14] M. Kapranov、M. Kontsevich 和 Y. Soibelman，“红外代数与次多面体”，Adv. Math. 300, 616-671 (2016)doi:10.1016/j.aim.2016.03.028[arXiv:1408.2673 [math.SG]]。

[Seid] P. Seidel《Fukaya范畴与Picard-Lefschetz理论》，苏黎世高级数学讲座。欧洲数学会（EMS），苏黎世

[Seid04] P. Seidel《 T^*S^n 的精确拉格朗日子流形与分次克罗内克箭图》， [arXiv:math/0401212 [math.SG]]。

[SV18]J. P. Solomon 和 M. Verbitsky，《超K¨ahler流形的 Fukaya范畴中的局部性》，组合数学 155，第10期，1924–1958（2019），doi:10.1112/S0010437X1900753X [arXiv:1805.00102 [math.SG]]。

[Wit82] E. Witten，《超对称性与莫尔斯理论》，微分几何杂志 17，第4期，661-692（1982）