前置部分

标题

- 利用共形变换光学控制电磁表面波

作者

赵晓宇,[1]† 邓宏,[1]† 高晓珂,[1]† 马锡奎,[1] 董天宇[1]*[1]西安交通大学电气工程学院，中国西安710049。

†这些作者对本研究的贡献相同。*联系作者；电子邮箱：tydong@mail.xjtu.edu.cn。

摘要

将变换光学应用于新颖电磁器件的开发，借助准保角映射和/或保角映射，可以实现弱各向异性或各向同性介质；这与一般映射所产生的强各向异性介质不同，但其应用通常局限于二维。通过研究嵌入三维空间的两个流形之间的保角映射，我们展示了无需在器件参数中引入奇点和各向异性，即可控制电磁表面波。借助丰富的曲面共形参数化方法，可以实现边界任意的光滑流形之间近乎完美的保角映射。文中给出了隐身和幻象的实例，包括用于表面波的曲面龙伯透镜、伊顿透镜和黑洞。我们的工作使微波和光学波长下的表面波操控更进一步。

导读

在任意没有孔洞的开曲面上，波都可以随意调控，从而展现出许多引人入胜的应用，例如为表面波创造隐形凸起、在其他光滑曲面上重现一个凸起所产生的散射，以及在曲面上控制光束，使其聚焦、偏转和／或被吸收，效果如同黑洞，且不产生可见散射。

正文

引言

自电磁隐身斗篷设计（1、2）问世以来，变换光学（TO）已被证明是一种强大的工具，可用于理解并定制声学（3）、光学（4）、力学（5）、热力学（6、7）等领域的物理规律。继隐身领域的开创性工作之后，研究人员在变换光学的理论框架下提出了许多其他电磁器件，例如电磁聚束器（8、9）、场旋转器（10）、光学透镜（11、12）和光学幻象器件（13、14）。然而在实际应用中，传统变换光学往往会使设计介质具有显著的各向异性（15）。因此，人们常借助超材料，根据坐标变换几何推断空间变化；这一方法建立在几何与材料之间的数学等价性之上（16）。

为降低变换光学引起的功能介质各向异性，人们开发了多种方法。例如，通过在非欧空间中构造映射，可以消除传统变换光学产生的奇点（17），从而在一定程度上减小各向异性。但当波长与变换区域的尺度相当时，非欧变换光学的效果甚至可能更差（18）；因此，一些研究致力于利用保角映射或拟共形映射实现各向同性（19）。在 R^2，中，通过在滑移边界条件下最小化修正李奥泛函，采用由此得到的各向同性介质，成功实现了类似于平坦地面的地毯斗篷（20）；等价地，也可以通过求解拉普拉斯方程逆问题来构造拟共形映射（21）。尽管地毯斗篷的概念已扩展至 R^3，即通过将二维折射率分布挤出或旋转来控制自由空间波的反射，但它仅适用于具有平移对称性或旋转对称性的曲面（22）。

以往研究主要致力于通过变换光学控制传播波，而对表面波操控的关注较少 (12, 23, 24)。研究人员通过令均匀折射率平面上射线的光程与具有角度相关折射率的曲面上沿两条正交路径传播的光程相等，提出了完美表面波斗篷 (25, 26)，并已通过实验验证 (27)。虽然这种斗篷利用非均匀各向同性介质可以隐去电尺寸较大的物体，但这种方法仅适用于旋转对称曲面。通过变换光学将虚拟平面与曲面上的控制程函方程联系起来，投影映射能够为非旋转对称几何体实现表面波隐身斗篷，但会产生很强的各向异性 (14, 28)。为降低这种各向异性，研究人员投入了大量精力，采用边界优先展平 (29) 等高效数值共形算法；然而，研究对象仍仅限于边界为圆形的非旋转对称曲面 (30)。

在本研究中，我们展示了如何在共形变换光学的框架下，操控嵌入于 R^3 中的光滑流形上的表面波；在几何光学条件下，这需要使用有效各向同性材料。图 1 展示了 R^2 和 R^3，中的两个光滑流形之间的共形曲面映射，即 f: M′ →M。图 1A 所示的曲面 M 已通过 uv 参数化，网格可视为图 1B 中笛卡尔坐标系 $\{x', y'\}$ 的映射结果。当映射为共形或准共形时，面元 dS 仍保持直角，表明各面元仅按比例缩放，几乎没有失真。根据 dS和 dS'上的局部坐标系（图 S5），可以推导出映射 f 的雅可比矩阵 $\mathbf{J}$，其两个奇异值 $\sigma_{J1} = \sigma_{J2} = \sigma_J$ 表明两个正交方向上的缩放相同 (31)。

因此，可基于共形变换光学（19）获得各向同性隐形介质分布 $\overline{n = 1/\sqrt{\det(\mathbf{J})}} = 1/\sigma_J$，它表示虚拟空间中的线元 d$l'$ 与物理空间中经缩放的线元 dl 之比，用于补偿光程（2）。因此，光在曲面 M 上传播时，其行为与在平面 M′ 上传播时相同。在实践中，使用笛卡尔坐标系 $\{x, y, z\}$ 描述 R^3 中的网格顶点更为方便，而由局部坐标系导出的雅可比矩阵构成一个非对称二阶矩阵 $\mathbf{J}_{3\times2}$。此外，可通过共形度（即比值 $Q = \max(\sigma_{J1}/\sigma_{J2}, \sigma_{J2}/\sigma_{J1})$ 来衡量可能的拟共形映射。比值为 1 Q 时，每个面元都可采用有效的隐形介质，其表达式为 $n_{\text{cloak}} = 1/\sqrt{\sigma_{J1}\sigma_{J2}}$ （20）。

结果 H

在获得流形 $M \in R^3$ 与 $M' \in R^2$，之间的共形映射后，我们首先从共形变换光学的角度设计一种各向同性表面波隐身斗篷，并将其性能与采用各向异性介质的传统表面波隐身斗篷（14）进行比较。我们在嵌入 R^3，中的椭圆底部轮廓双驼峰凸起上进行了仿真，如图 2 所示。与表面没有折射率分布时的散射情况（图 S1A）相比，可以观察到，两种不同方法均成功实现了表面波隐身：一种由（14）中提出的投影映射实现（图 2A），另一种则源于本文提出的拟共形映射（图 2B）。图 2C 显示了这两类隐身斗篷相应的材料特性，表明前者具有强各向异性，而后者几乎是各向同性的。此外，各向同性折射率 $n_{c,\ double}$ （下标“c”表示隐身斗篷，“double”表示双驼峰凸起）的取值范围为 0.83 至 1；随着凸起高度增加，其数值会降低，因为要补偿更长的几何距离，就需要更小的折射率，才能获得相同的光程。

基于共形变换光学提出的方案实现了近乎完美的表面波隐身，同时消除了传统方案中变换介质所具有的各向异性。图2C中的$n_{c,\ double}$ 分布勾勒出不对称的几何轮廓，表明该方案的有效性不依赖于任何对称性。实现这一成果需要采用具有高保角性的映射，而非投影映射（14）等会造成较大畸变的映射。我们在此采用的数值方法（29）可获得保角度为$Q < 1.03$的拟共形映射，如图 S1B 所示，这足以用于设计有效的各向同性隐形介质分布。

与隐身相反，光学幻象器件可通过变换介质，使其他物体重现特定物体的散射特性（13, 14）。图3A描绘了填充均匀材料的单驼峰凸起 M 对表面电磁波的散射。传统上，若要在平面区域 M′ 上重现其散射，设计幻象器件所用的拟共形映射为f': $M \rightarrow M'$，其雅可比矩阵为$\mathbf{\Lambda}_{2\times3}$。图3B显示了平面区域 M′ 中填充$n_{i,\ plane} = 1/\sqrt{\sigma_{\Lambda1}\sigma_{\Lambda2}}$ 时精确重现的散射特性（下标“i”表示幻象，“plane”表示平面区域），其中$\sigma_{\Lambda1}$ 和$\sigma_{\Lambda2}$ 是$\mathbf{\Lambda}_{2\times3}$的奇异值。此外，图3C表明，填充了精心设计的各向同性介质分布的双驼峰凸起能够重现图3A所示的相同散射图样。该幻象通过级联图 S3 所示的两个共形映射实现，即从 R^3 （虚拟空间）到 R^2 （中间空间）的f_1，以及从 R^2 到 R^3 （物理空间）的f_2。因此，双驼峰凸起的幻象介质为$n_{i,\ double} = n_{i,\ plane} \cdot n_{c,\ double}$。图3D分别展示了$n_{i,\ plane}$ （对应图3B）和$n_{i,\ double}$ （对应图3C）的分布轮廓，其范围分别为 1 至 1.25（$n_{i,\ plane}$）和 0.85 至 1.21（$n_{i,\ double}$）。

单驼峰凸起的散射图样（图3A）已成功在平面区域（图3B）和双驼峰凸起（图3C）上重现，这表明所提出的方案是适用于光滑二维流形上幻象设计的一种通用解决方案。用于构建嵌入于 R^3 中的流形间映射的级联方法甚至可以处理具有不同基准轮廓的曲面，因为

根据黎曼映射定理（32），R^2 中的单连通区域之间存在保角映射。此外，双驼峰凸起和单驼峰凸起对应的两个映射的拟保角比 Q 分别小于 1.03（图 S1B）和 1.012（图 S2C），这表明级联映射满足高保角性的要求。$n_{\mathrm{i,\ single}}$ 的取值范围（1 至 1.25）与图 S2B 所示隐身折射率 $n_{\mathrm{c,\ single}}$ 的取值范围（0.8 至 1）互为倒数，因为幻象可视为隐身的逆向设计，因此两者对应映射的雅可比矩阵互为摩尔－彭若斯伪逆（31）。

现在，既然可以灵活地操控曲流形上的波行为，自然可以考虑在其上设计各种复杂器件，例如用于表面波的伦伯格透镜、伊顿透镜和黑洞 (12, 23, 33, 34)。传统设计通常基于半径恒定的球形或圆形轮廓。而对于半径不恒定的椭圆轮廓，我们采用椭圆上点到中心（亦即坐标原点）的距离作为广义半径，即 $R(\theta) = \sqrt{(a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2}$ (35–37)。因此，所研究的伦伯格透镜的折射率可表示为

$$n_{\mathrm{L}}(r,\theta) = \sqrt{2 - (r/R(\theta))^2}, \tag{1}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$。与传统的圆形伦伯格透镜类似，这种分布在边界处保持 $n_{\mathrm{L}} = 1$，在中心处为 $n_{\mathrm{L}} = \sqrt{2}$ $r = 0$ (38)。接下来，双驼峰凸起上伦伯格透镜的介质分布可表示为 $n_{\mathrm{Luneburg}} = n_{\mathrm{c,\ double}} \cdot n_{\mathrm{L}}$。如图4A所示，两个自由空间波长为 $\lambda_{\mathrm{G}} = 50$ mm 的高斯光束沿 x 方向入射，位置为 $\pm 0.8b$ 沿 y 方向传播，并被伦伯格透镜反射后在焦点处发生干涉。焦距为 $20\lambda_{\mathrm{G}}$，与单位圆形伦伯格透镜相同。对于伊顿透镜，其折射率 n_{E} 表示为

$$n_{\mathrm{E}}(r,\theta) = \sqrt{2R(\theta)/r - 1}, \tag{2}$$

当 $r = 0$ 时，其可能趋于无穷大，因此需要处理一个奇点。图4B描述了高斯光束沿 x 方向传播，经过双驼峰凸起上的伊顿透镜后，向反向的 x 方向弯曲。所提出的表面波伦伯格透镜和伊顿透镜可应用于光学成像、信号采集以及表面波微波天线的新型设计。另一种能够旋转光束传播方向的功能器件是双层光学黑洞的外围，在那里，光被迫沿螺旋路径进入核心处的吸收介质。分段折射率分布函数 n_{B} 可表示为

$$n_{\mathrm{B}}(r,\theta) = \begin{cases} 1, & r > R(\theta) \\ R(\theta)/r, & r_c \cdot R(\theta) < r < R(\theta), \\ 1/r_c + \mathrm{i}\gamma, & r < r_c \cdot R(\theta) \end{cases} \tag{3}$$

其中，$r_c = 0.4$ 是内部椭圆核心相对于基准轮廓的缩放因子，$\gamma = 0.1$ 是损耗因子。双驼峰凸起上的折射率分布 $n_{\mathrm{c\,double}} \cdot n_{\mathrm{B}}$，如图 D 所示。材料参数的实部在内边界处匹配，而用于吸收能量的虚部（范围为 0.083 至 0.097）仅存在于核心中。采用与伊顿透镜相同的高斯

$n_{\mathrm{Blackhole}} = \frac{4}{}$

光束，图4C所示结果表明，光束在到达内边界前绕过 90° ，随后被有损芯层吸收且没有发生反射，展现出其在电子器件干涉抑制和能量采集方面的潜在应用。请注意，仿真模型的整体尺寸超过工作波长的十倍，这表明所提出的方案能够处理电尺寸较大物体上的表面波行为。此外，这些功能性表面波器件的优异性能表明，基于所提出的方案，可以在光滑曲面流形上实现各种新型器件，从而有望推动小型化、集成化光子器件的发展。

讨论 我们的

我们的理论和方法基于几何光学。这要求曲率较小且波长变化较小（参见材料与方法中的（7）和（8）），可表示为

$$w = |\nabla\lambda| = |\nabla(\lambda_0/n)| = \lambda_0|\nabla n|/n^2 \ll 1, \tag{4}$$

$$\rho = \left|R_{ij}\right|\lambda^2 = \left|K g_{ij}\right|(\lambda_0/n)^2 = \det\left(g_{ij}\right) K^2\lambda_0^2/n^2 = K^2\lambda_0^2/n^6 \ll 1, \tag{5}$$

其中，R_{ij} 为里奇曲率张量，K 为高斯曲率，g_{ij} 为度量张量。波长指数 w 和曲率指数 ρ 均与折射率 n的幂成反比。为避免 w 和 ρ 大幅增加，较为理想的高度应低于底部半径的一半，从而可通过接近 1 的折射率补偿光程。在此基础上，

要求 (4) 和 (5) 需要更短的波长 λ_0 以及更平滑的几何结构，以降低变化率 $|\nabla n|$ 和高斯曲率 K。作为反面例子，文中回顾了半球形表面波斗篷，并在图 S4 中展示了结果。其折射率 $n_{\mathrm{c,sphere}}$ 介于 0.5 和 1 之间，准保角比 Q 的最大值小于 1.012。图 S4C 中出现的可见散射表明，由于半球与平面直角连接处的曲率指数 $\rho > 20$ 较高，几何光学失效；这一点如图 S4F 所示，且平均曲率指数 $\bar{\rho} = 1.57$ 也大于 1。连接处不平滑导致后向散射中的相位畸变，而前向散射最大值 $|E_z - E_{\mathrm{bz}}|_{\max} = 0.75$ V/m 表明，波前重构产生了 $\arcsin(0.75) = 48.6^\circ$ 的相位差。相比之下，图 S1C 和图 S2D 分别显示，双驼峰凸起的平均曲率指数 $\bar{\rho} = 0.54$、单驼峰凸起的平均曲率指数 $\bar{\rho} = 0.39$，二者均满足要求 (5)，并在平滑边界处留下近乎为零的 ρ 。可以注意到，图 S1D、图 S2E 和图 S4E 所示隐身斗篷的波长指数 w 处处小于 1，因为它与 λ_0 和 n 的较低次幂有关；因此，与满足要求 (5) 相比，满足要求 (4) 要容易得多。这些经筛选的曲率和波长特征验证了几何光学近似，是电磁器件出色性能不可或缺的条件。

用于确定要求（4）和（5）表达式的各向同性情形，基于二维流形之间的保角映射或拟共形映射。得益于保角参数化的快速发展，一系列映射方法可用于设计表面波地毯隐身衣（29，39，40）。本研究采用的边界优先展平（BFF）方法（29），不仅能在光滑流形之间建立近乎完美的保角映射，也能在带有尖点的曲面之间建立此类映射，

例如尖角和锥形奇点，从而为在更复杂的曲面上操控波带来令人振奋的前景。此外，还有一些旨在构建高亏格流形之间拟共形映射的算法（41，42），可用于处理带孔洞曲面上的相位调控。一个值得注意的思路是，通过将孔洞变换为狭缝（43，44），把高亏格曲面映射到零亏格平面区域；这意味着，在单连通区域中实施的方案有望用于操控多连通曲面上的波行为。通过合理利用针对各种特殊情形的先进算法，我们的方法有望成为一种通用方案，用于调控任意二维流形上的表面电磁波。

总而言之，我们提出了一种通用方法，通过由拟共形映射导出的特定各向同性折射率分布，操控不具有旋转对称性的光滑二维流形上的电磁波。介质与映射之间的关系，是在几何光学近似下由流形上的波动方程推导得出的。我们介绍了用于构造流形间映射的数值拟共形算法，并通过隐身曲面和在平面区域中生成幻象，验证了由此得到的功能介质。通过级联 R^2 与 R^3 之间的映射，得到 R^3，之间的映射，我们成功再现了一个曲面在另一个曲面上的散射。此外，我们基于地毯隐身斗篷设计了表面伦伯格透镜、曲面伊顿透镜以及表面波黑洞等功能器件。最后，我们回顾了几何光学所需的折射率，以验证该近似在仿真模型中的有效性。我们的方法为调控任意二维流形上的表面电磁波开辟了道路，也可用于控制其他领域中的表面波，例如声学、力学和热力学。

材料与方法

用于表面波的共形变换光学

曲流形上的波动方程。变换介质的概念源于几何与介质之间的等价性。根据爱因斯坦求和约定，自由空间中电场 $\nabla_{\mathcal{M}} \times \nabla_{\mathcal{M}} \times \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E} = 0$ 的麦克斯韦波动方程可表示为 (16)

$$\nabla^j \nabla_j E_i - R_{ij} E^j - c_0^{-2} \partial_t^2 E_i = 0, \tag{6}$$

其中，$c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ 为自由空间中的光速；R_{ij} 为所研究几何 M 的里奇张量。假设电磁波被限制在嵌入于 R^3 中的曲面 M 附近，并以表面波的形式传播，其局部平面波解为 $E_i = \mathrm{E_i} e^{\mathrm{i}\varphi}$，其中复振幅 E 为常数，相位为 $\varphi = \mathrm{k} \cdot \mathrm{r}$，波矢和角频率分别为 ωt 。对于表面波，波矢 k 位于曲面 M 的切空间内，即 $\mathbf{k} = \nabla_{\mathcal{M}} \varphi$ $\mathbf{k} \in \mathcal{T}$ $\omega = -\partial_t \varphi$ (M)。

因此，在几何光学适用的范围内，式 (6) 可以简化并近似为，其中波长 $\lambda = 2\pi/k$ 随距离缓慢变化，即，

$$|\nabla_{\mathcal{M}} \lambda| \ll 1. \tag{7}$$

此外，曲面的有效曲率应足够小，相较于波长而言，这样局部平面波的假设才成立，即

$$|R_{ij}| \lambda^2 \ll 1. \tag{8}$$

因此，将 E_i =$\mathrm{E_i}e^{\mathrm{i}\varphi}$ 代入式 (6)，并考虑到 $\mathrm{E_i}$ 的（空间和时间）导数为零，可得沿 M 传播的表面波的色散关系，其表达式为

$$k^2 = k^j k_j = g^{ij} k_i k_j = \omega^2 / c_0^2. \tag{9}$$

这里，g_{ij} 是曲面 M 的诱导度量张量，可由从 R^2 中的流形 M′到 M 的变换雅可比矩阵（31）确定，。

平面上的波动方程。或者，如果 M 是平面（即 $R_{ij} = 0$），且填充了以相对磁导率张量 μ^{ij}表示的各向异性介质，则（6）变为

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \partial_t^2 \mathbf{E} = 0. \tag{10}$$

假设电磁波被限制在 M 附近，且电场 $\mathbf{E}$ 为垂直极化。在笛卡尔坐标系中，若 M 可置于xy 平面内，我们关注电场矢量 $\mathbf{E}$ 位于平面 M 的法空间内的情形，即 $\mathbf{E} \in \mathcal{N}(\mathrm{M})$，此时全局波解可写为 $E_z = \mathrm{E}_z e^{\mathrm{i}\varphi}$。因此，相位 φ 与 z 无关，波矢仅位于平面上，表示为 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$，因为平面与其切空间重合。由于平坦流形 M 的曲率张量为零，条件（7）自然成立。当满足波长缓慢变化的另一条件（8）后，将 $E_z = \mathrm{E}_z e^{\mathrm{i}\varphi}$ 代入（10）并忽略复振幅的导数，即可得到沿 M 传播的表面波的色散关系，其形式为 ($\mu_{xx}k_x^2 + 2\mu_{xy}k_x k_y +$ $\mu_{yy}k_y^2$ $\boldsymbol{\mu} = \omega^2 c_0^2$)/

det() / 。不考虑特定极化时，可在爱因斯坦求和约定下将色散方程改写为

$$\frac{1}{\det(\boldsymbol{\mu})} \mu^{ij} k_i k_j = \frac{\omega^2}{c_0^2}. \tag{11}$$

变换介质与几何。对于在两个流形上表现完全相同的电磁波，通过比较式（9）和式（11），可以得到几何与材料属性之间的等价关系:

$$\frac{\mu^{ij}}{\det(\boldsymbol{\mu})} = g^{ij}. \tag{12}$$

相对磁导率张量 μ^{ij} 实际上在平面上产生了一种幻象，因为被介质 $\boldsymbol{\mu}$ 填充的空间点等价于具有度量 $\boldsymbol{g} = \det(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu}^{-1}$的点。如果该点处的局部笛卡尔坐标系沿 $\boldsymbol{\mu}$的正交特征向量方向排列，则实对称磁导率张量将化简为 diag(

μ_x μ_y μ_z x $s^2 = g_{xx}$ $x^2 =$, ,), $\mu_y\mu_z$ x^2

此时沿方向的线元平方为 d d d ，这也是弯曲自由空间中光程的平方。与平坦流形上的 $\mathrm{d}s^2 = n_x^2 \mathrm{d}x^2$ 相比，可以推导出 $n_x^2 = \mu_y\mu_z$ ，并可在 y 和 z 方向得到类似结果。因此，相对磁导率张量 $\boldsymbol{\mu}$ 与折射率张量 $\boldsymbol{n}$ 之间的关系可表示为 $\boldsymbol{n}^2 = \det(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu}^{-1}$ ，进而可以得到

$$\boldsymbol{n}^2_{\text{illustion}} = \boldsymbol{g}. \tag{13}$$

参见式 (12)。

表面变换与变换光学介质。式 (13) 中的度量张量由映射 f:M′ → M 诱导得到，并可通过雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{3\times2}$ 构造为

$\boldsymbol{g} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}$ *31* $\boldsymbol{n}_{\mathrm{illusion}}$ $\boldsymbol{\Lambda}_{2\times3}$ ( )。然而，我们更倾向于将其与表示从 R³ (虚拟空间)到 R² (物理空间)变换的雅可比矩阵关联起来。事实上，非对称雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{3\times2}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}_{2\times3}$ 互为摩尔－彭若斯伪逆 (31)，即 $\mathbf{J} = \boldsymbol{\Lambda}^{\dagger}$，其中上标“†”表示伪逆。因此，可以将等价关系 (13) 改写为

$$\boldsymbol{n}^2_{\mathrm{illustion}} = \boldsymbol{g} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J} = (\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{14}$$

隐形介质 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{cloak}}$ 与从 R² （虚拟空间）到 R³ （物理空间）的相应雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{3\times2}$ 之间可得到类似关系，即

$$\boldsymbol{n}^2_{\mathrm{cloak}} = (\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J})^{-1}. \tag{15}$$

对于 R³ 之间的映射（图 S3），该映射由 R³ 和 R², 之间的两个变换级联而成，幻象对应的介质可重新表示为隐身与幻象折射率张量的组合，即

$$\boldsymbol{n}^2_{\mathrm{illustion}} = (\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_1^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot (\mathbf{J}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_2)^{-1}. \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$ 分别是映射 f_1 和 f_2的雅可比矩阵，如图 S3 所示。特别是，当映射为保角映射时，折射率变为各向同性，相应的雅可比矩阵具有两个相同的奇异值。对式 (14) 和 (15) 取行列式后，折射率可表示为雅可比矩阵奇异值的形式：$n_{\mathrm{cloak}} = 1/\sigma_{\mathrm{J}}$ 和 $n_{\mathrm{illusion}} = 1/\sigma_{\Lambda}$。

离散保角映射与变换介质

离散保角映射综述。研究表明，仅在旋转对称曲面上求解光程相等方程，才能实现各向同性折射率分布（25）。对于非旋转对称隐身斗篷，投影映射会使坐标网格发生畸变，从而引入强各向异性（14）。然而，曲面参数化的数值算法可为任意曲面提供可能的保角映射。例如，已有研究提出基于角度的展平（ABF）方法（45，46），通过最小化惩罚泛函来减小角度畸变，从而构造保角参数化；但其非线性会降低计算效率。此外，研究者还提出了所谓的最小二乘共形映射（LSCM）（47）和谱共形参数化（SCP）（48），利用其线性特性提高效率。这些方法的缺点是目标边界不固定且不具备双射性，而我们期望获得一种一一映射，使物理空间和虚拟空间中的每个点都包含在映射中，并且边界可控。后续研究提出了圆盘保角映射（DCM）（40），这是一种线性且双射的保角映射方法，但其圆盘边界固定。直到边界优先展平（BFF）（29）使边界能够按需编辑，这些缺点才得以彻底消除。为应对特定的电磁环境，可从上述技术中选择合适的算法（49，50）。

三角剖分与雅可比矩阵。假设如图 S5A 所示，流形 $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{R}^3$ 与 $\mathrm{M}_2 \subset \mathrm{R}^2$，之间的保角映射为$f_1$：$\mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_1$ （或 f_2：$\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$），可以发现，网格化 M_1 上的单纯形 $\mathcal{S}_1$ 及其在网格化 M_2 上的对应单纯形是一对相似三角形，因此$\mathcal{S}_1$ 和$\mathcal{S}_2$ 可以共享同一个重心坐标系。如图 S5B 所示，该局部坐标系可以表示任意

单纯形内部的点，即三个顶点的线性组合，并有助于基于三角网格参数化快速推导数值映射的雅可比矩阵。例如，$\mathcal{S}_2$ 上点 $\mathbf{q}(x', y')$ 的位置可以表示为 $x' = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i'$ 和 $y' = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i'$，其中 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$，即顶点 $\mathbf{q}_1(x_1', y_1')$、$\mathbf{q}_2(x_2', y_2')$ 和 $\mathbf{q}_3(x_3', y_3')$ 的线性组合。对于三角剖分网格，我们可以得到重心坐标，其形式为

$$\lambda_1 = [(y_2' - y_3')(x' - x_3') + (x_3' - x_2')(y' - y_3')]/\det(\mathbf{M}), \tag{17}$$

$$\lambda_2 = [(y_3' - y_1')(x' - x_3') + (x_1' - x_3')(y' - y_3')]/\det(\mathbf{M}), \tag{18}$$

$$\lambda_3 = [(y_1' - y_2')(x' - x_2') + (x_2' - x_1')(y' - y_2')]/\det(\mathbf{M}), \tag{19}$$

其中 det($\mathbf{M} = |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3|$ $\mathbf{q}_i$ x_i y_i i $i =$) ( ) ( )，且 (′, ′) 为第 -th 个顶点 (, ,)。这里，( )、( ) 和 ( ) 表明，重心坐标系 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 可用笛卡尔坐标系 (x', y') 表示。对于 R 上由 R 中的点映射得到的点 $\mathbf{p}$ x y z $\mathcal{S}_1 \subset$ ^{3}, $\mathbf{q}$ ^{2}, $x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i$ $y =$ (, ,)，我们有，并且它是 $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i$ $z = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i z_i$ $\mathbf{p}_1$ x_1 y_1 z_1 $\mathbf{p}_2$ x_2 y_2 z_2 (, ,)、(, ,) 和 $\mathbf{p}_3(x_3, y_3, z_3)$ 的线性组合，因为 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 具有相同的重心坐标 λ_i。因此，根据 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 对 (x', y') 的导数，可以推导出从 $\mathcal{S}_2 \subset \mathrm{R}^2$ 到 $\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{R}^3$ 的映射的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{3\times2}$，其形式为

$$\mathbf{J}_{3\times2} = \begin{pmatrix} \partial_{x'}x & \partial_{y'}x \\ \partial_{x'}y & \partial_{y'}y \\ \partial_{x'}z & \partial_{y'}z \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2' - y_3' & x_3' - x_2' \\ y_3' - y_1' & x_1' - x_3' \\ y_1' - y_2' & x_2' - x_1' \end{pmatrix}. \tag{20}$$

同样地，可以推导出从 $\mathcal{S}_1$ 到 $\mathcal{S}_2$ 的数值映射的雅可比矩阵 $\mathbf{\Lambda}_{2\times3}$；或者，也可以计算 $\mathbf{J}_{3\times2}$ 的 Moore–Penrose伪逆，记为 $\mathbf{\Lambda}_{2\times3}$ (31)。通过计算每个单纯形上的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{3\times2}$ 或 $\mathbf{\Lambda}_{2\times3}$，即可完整描述映射 f_1 或 f_2 的信息。

模拟方法

有限元模拟。采用有限元方法模拟电磁器件的波行为。几何模型为光学薄膜波导，其厚度小于波长的五分之一。在波导的外表面施加理想电导体（PEC）边界条件，以模拟表面波在二维流形上的传播。因此，平面波或高斯光束的传播被限制在光学薄膜内。为模拟开放且无反射的无限域，在传播平面的边界处设置完美匹配层（PML）。设计介质通过拟合函数配置到波导中，该拟合函数由基于额外密集网格计算得到的离散数据集插值得出。

参考文献 1. J. B. Pendry、D. Schurig、D. R. Smith，《控制电磁场》。Science，312，1780–1782（2006）。

2. U. Leonhardt，《光学共形映射》。Science，312，1777–1780（2006）。

3. H. Chen、C. Chan，《利用声学超材料实现三维声学隐身》。Appl Phys Lett. 91, 183518 (2007)。

4. X. Wang, H. Chen, H. Liu, L. Xu, C. Sheng, S. Zhu， 共形变换光学中的自聚焦和塔尔博特效应。Phys Rev Lett. 119, 033902 (2017)。 5. D. Genov, S. Zhang, X. Zhang，在超材料中模拟天体力学。自然物理. 5, 687–692 (2009)。 6. S. Guenneau, C. Amra, D. Veynante，变换热力学：热隐身与热流集中。Opt Express. 20, 8207–8218 (2012)。 7. M. Raza, Y. Liu, E. Lee, Y. Ma，变换热力学与热隐身：综述。J Opt. 18, 044002 (2016)。 8. M. Rahm, D. Schurig, D. A. Roberts, S. A. Cummer, D. R. Smith, J. B. Pendry，设计 o

f

利用形式不变的坐标变换实现电磁隐身斗篷和聚集器 s

的麦克斯韦方程组。《光子纳米结构：基础与应用》6，87–95（2008）。9. M. M. Sadeghi、S. Li、L. Xu、B. Hou、H. Chen，利用法布里-珀罗共振实现变换光学。《Sci Rep》5，1–7（2015）。10. Y. Luo、H. Chen、J. Zhang、L. Ran、J. A. Kong，设计与解析全波验证

n

通过一类一般变换所构造的隐形斗篷、聚集器和场旋转器。《物理评论B》. 77, 125127 (2008). 11. J. Perczel, U. Leonhardt，光学仪器中奇点的部分嬗变。新物理学杂志. 13, 1005–1008 (2008). 12. Y. Liu, T. Zentgraf, G. Bartal, X. Zhang，变换等离激元光学。纳米快报. 10, 1991–1997 (2010). 13. Y. Lai, J. Ng, H. Chen, D. Han, J. Xiao, Z.-Q. Zhang, C. Chan，幻象光学：将一个物体光学变换为另一个物体。物理评论快报. 102, 253902 (2009). 14. T. McManus, J. Valiente Kroon, S. Horsley, Y. Hao，表面波的幻象与隐身斗篷。Sci Rep. 4, 5977 (2014). 15. D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. Starr, D. R. Smith，微波频率下的超材料电磁隐身斗篷。Science. 314, 977–980 (2006). 16. U. Leonhardt, T. Tyc,《几何与光：隐形科学》（Courier Corporation, 2010）。17. U. Leonhardt, T. Tyc，通过非欧几里得隐身实现宽带隐形。Science. 323, 110–112 (2009). 18. T. Tyc, H. Chen, C. T. Chan, U. Leonhardt，光的非欧几里得隐身。IEEE量子电子学精选主题期刊. 16, 418–426 (2010). 19. L. Xu, H. Chen，共形变换光学。自然·光子学. 9, 15–23 (2015). 20. J. Li, J. B. Pendry，藏于地毯之下：一种新的隐身策略。物理评论快报. 101, 203901 (2008)。

21. C. Zheng, X. Zhou, J. Hu, G. Hu，基于具有滑动边界的逆拉普拉斯方程的准各向同性变换材料设计方法。Opt Express. 18, 6089 6096 2010–（）。22. N. Landy, N. Kundtz, D. Smith，利用拟共形坐标变换设计三维变换光学介质。物理评论快报. 105, 193902 (2010). 23. T. Zentgraf, Y. Liu, M. H. Mikkelsen, J. Valentine, X. Zhang，等离激元伦伯格透镜和伊顿透镜。Nat. Nanotechnol. 6, 151–155 (2011). 24. A. Vakil, N. Engheta，利用石墨烯实现变换光学。Science. 332, 1291–4 (2011). 25. R. C. Mitchell Thomas, T. M. McManus, O. Quevedo-Teruel, S. A. R. Horsley, Y. Hao，完美表面波斗篷。Phys Rev Lett. 111, 213901 (2013). 26. R. Mitchell Thomas, O. Quevedo Teruel, J. Sambles, A. Hibbins，全向表面波

ce

使用各向同性均匀介电涂层的表面波隐身斗篷。Sci Rep. 6, 30984 (2016)

.

27. L. La Spada, T. McManus, A. Dyke, S. Haq, L. Zhang, Q. Cheng, Y. Hao，表面波 e

采用梯度折射率纳米复合材料的隐身斗篷。Sci Rep. 6, 29363 (2016). 28. T. M. McManus, L. L. Spada, Y. Hao，各向同性与各向异性表面波隐身技术。J Opt. 18, 044005 (2016). 29. R. Sawhney, K. Crane，边界优先展平。ACM Trans Graph. 37 (2017), doi:10.1145/3132705. 30. L. Xu, H. Ge, J. Li, R. He, H. Chen, 二维梯度的共形景观

t

几何光学的折射率分布。Phys Rev Appl. 13 (2020), doi:10.1103/PhysRevApplied.13.054007. 31. K. Hormann, B. Levy, A. Sheffer, 网格参数化：理论与实践。ACM SIGGRAPH计算机图形学与交互技术国际会议。2 (2008), doi:10.1145/1508044.1508091. 32. M. Floater, K. Hormann, 《几何建模多分辨率方法进展》（Springer Berlin Heidelberg，纽约，第 1 版，2005）。33. E. Narimanov, A. Kildishev，光学黑洞：宽带全向光吸收器。Appl Phys Lett. 95, 041106 (2009)。34. J. A. Dockrey, M. J. Lockyear, S. J. Berry, S. A. R. Horsley, J. R. Sambles, A. P. Hibbi

ns,

用于表面波的薄型超材料伦伯格透镜。《物理评论B》。87，125137（2013）。35. J. A. Grzesik, 《三参数类扁球形类伦伯格非均匀透镜的聚焦特性》。《电磁学杂志》。19，1005–1019（2005）。36. A. Demetriadou、Y. Hao，适用于天线应用的纤薄伦伯格透镜。Opt Express。19，19925–34（2011）。

37. J. Gómez Correa、V. Coello、A. Garza Rivera、P. Puente、S. Chávez-Cerda，适用于人眼晶状体的球形和椭圆形广义伦伯格透镜三维光线追迹。《应用光学》。55，2002（2016）。38. R. Luneburg、E. Wolf、M. Herzberger，《光学数学理论》（加利福尼亚大学，1964）。39. B. Springborn、P. Schröder、U. Pinkall，“三角网格的共形等价”，载于 ACM SIGGRAPH 2008 论文集（计算机协会，2008），第1–11页。40. P. T. Choi、L. M. Lui，单连通开曲面的快速圆盘共形参数化。《科学计算杂志》。65，1065–1090（2015）。

41. M. Zhang, Y. Li, W. Zeng, X. Gu，《带边界的高亏格曲面的典范共形映射》。《计算机图形学》36，417–426（2012）。

42. G. Choi, 保角使用。准。科学计算。多连通曲面的 42 (2021)。doi:10.1007/s10915-021-01479-y。

43. X. Yin, J. Dai, S.-T. Yau, X. Gu，“狭缝映射：多连通曲面的保角参数化“连通曲面”，载于《几何建模与处理会议》（2008），第 410–422 页。

44. A. W. K. Sangawi、A. Murid、K. W. Lee，多连通区域的圆形狭缝映射及其在脑图像处理中的应用。《马来西亚数学科学学会通报》44（2020），doi:10.1007/s40840-020-00942-7。

45. A. Sheffer、E. de Sturler，用于网格剖分的多面片曲面角度基展平法。《工程计算》17，326–337（2001）。

46. A. Sheffer、B. Lévy、M. Mogilnitsky、A. Bogomyakov，ABF++：快速且稳健的角度基于展平。ACM Trans Graph. 24, 311–330 (2005)。

47. B. Lévy, S. Petitjean, N. Ray, J. Maillot，自动最小二乘保角映射纹理图集生成。ACM Trans Graph. 21, 362–371 (2002)。

48. P. Mullen, Y. Tong, P. Alliez, M. Desbrun，谱保角参数化。计算机图形论坛 27 (2008)，doi:10.1111/j.1467-8659.2008.01289.x。

49. M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, B. Lévy，《多边形网格处理》（A. K. Peters 出版社，马萨诸塞州纳蒂克，2010）。

50. X. Gu、F. Luo、S.-T. Yau，《现代技术背后的计算保角几何》。美国数学会，67，1（2020）。

致谢 资助：本研究得到国家自然科学基金委员会（NSFC）项目（编号：51977165）的资助。

作者贡献：概念化

n：X.Z.、X.M.、T.D.

方法学：X.Z.、H.D.、X.G.、T.D. 研究：
X.Z.、H.D.、X.G. 可视化：X.Z.、
H.D.、X.G. 指导：X.M.、T.D. 撰写——
初稿：所有作者。撰写——审阅与编
辑：所有作者。

C利益冲突：作者声明不存在利益冲突 .

数据和材料可用性：论文中和/或补充材料中提供了评估论文结论所需的所有数据。原始数据和相应的模拟数据可按需提供。

图和表

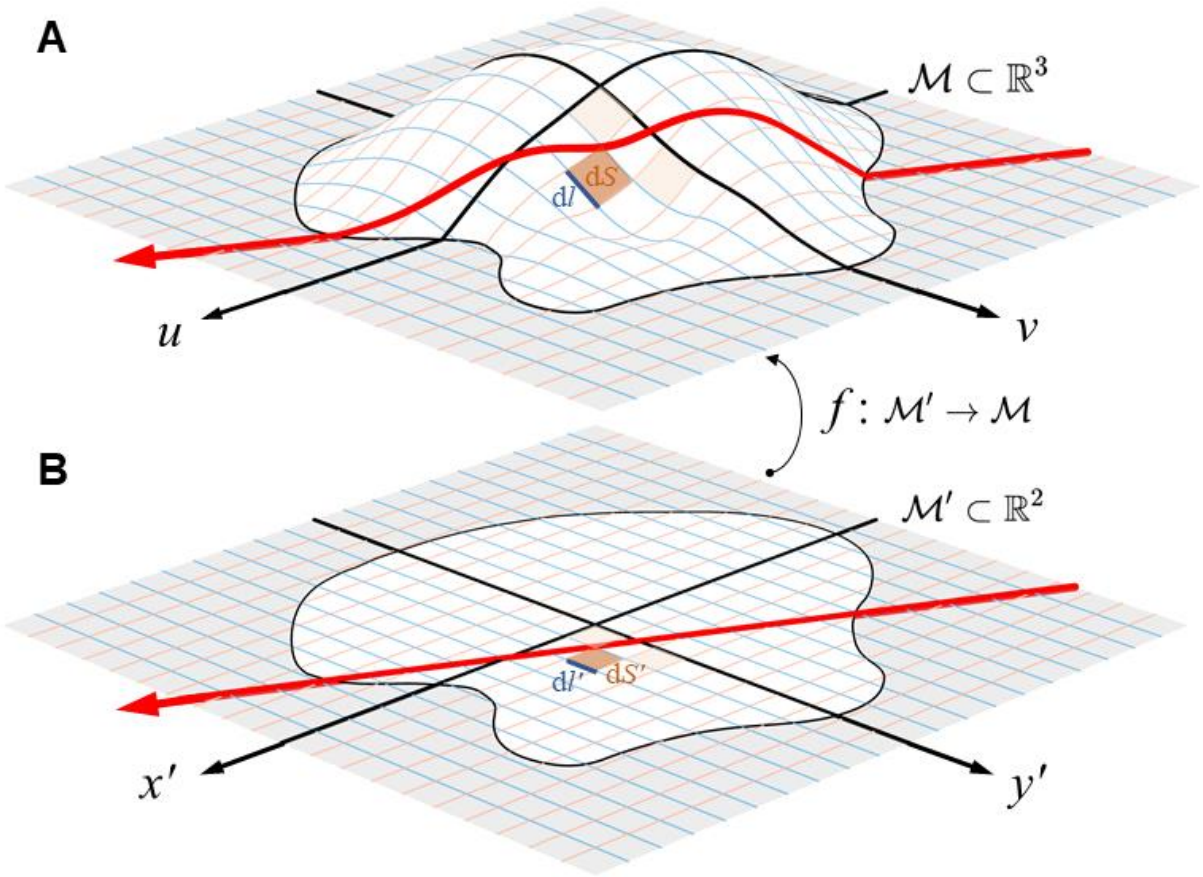

图 1. 流形之间的保角映射。(A) 光束穿过嵌入 R^3 中的曲面二维流形 M。(B) 光束穿过 R^2 中的平坦二维流形 M′。流形 M 由 uv 参数化，两个流形均以坐标网格绘制。可以通过某种解析或数值映射 f：M′ →M，从 (B) 中的 M′ 得到 (A) 中的流形 M。

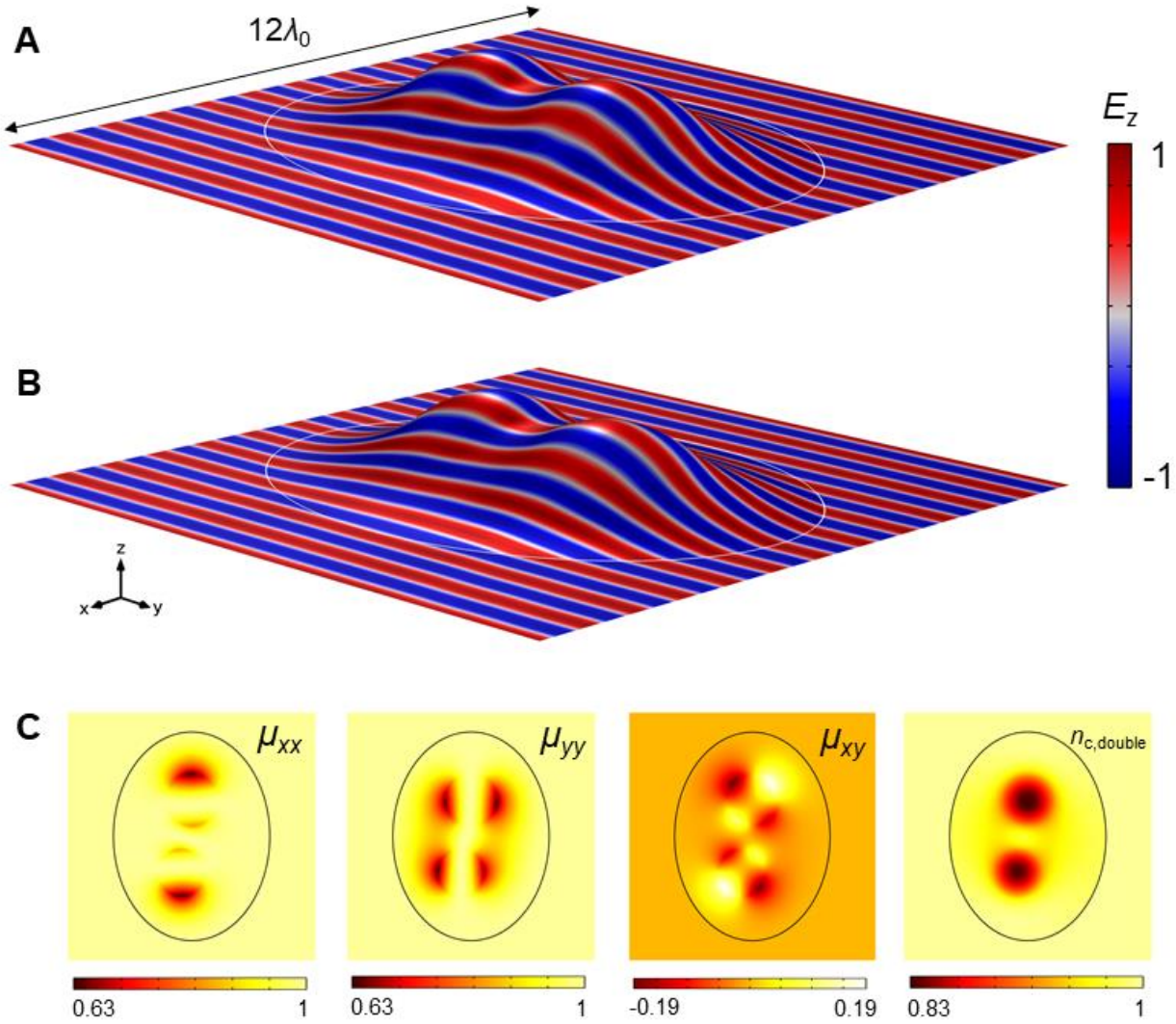

图2. 隐身斗篷的场与介质分布。通过（A）各向异性相对磁导率和（B）各向同性折射率实现的表面电磁波隐身斗篷的归一化电场分布。（C）应用于（A）的各向异性相对磁导率分量 μ_{xx}、 μ_{yy} 和 μ_{xy}，以及应用于（B）的各向同性折射率 $n_{\mathrm{c,\ double}}$。激励为幅值为 $|E_z| = 1\ \mathrm{V/m}$ 的 z 极化平面波；自由空间中的波长为 $\lambda_0 =$ 20 mm。高度为 $1.25\lambda_0$ 的凸起位于宽度为 $12\lambda_0$ 的方形波导中心。对于椭圆边界，短半轴和半长轴长度分别为 $a = 3.75\lambda_0$ 和 $b = 5\lambda_0$，并分别沿 x 轴和 y 轴。

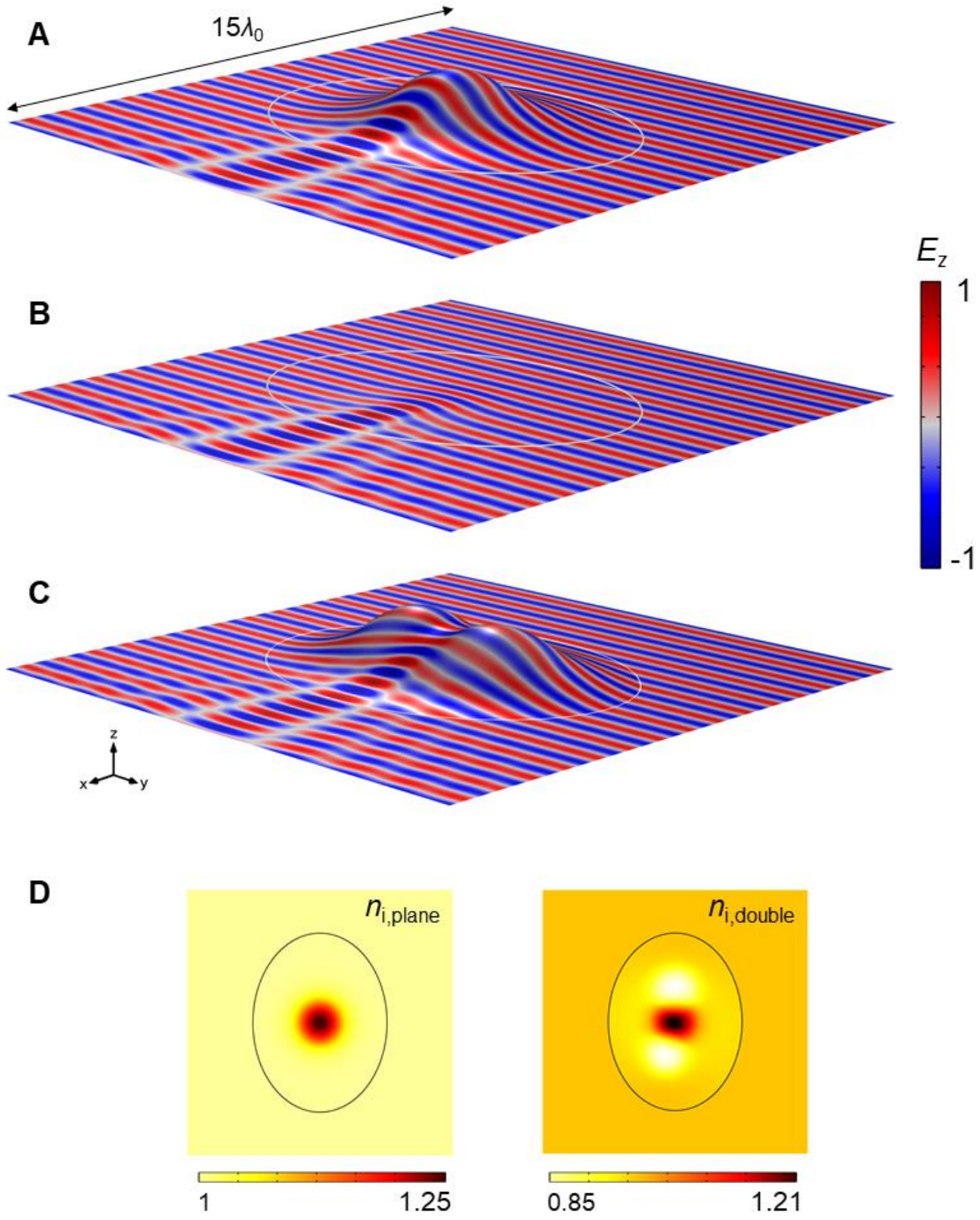

图3. 幻象的场与介质分布。表面电磁波散射的归一化电场分布。(A) 填充均匀介质时，单驼峰凸起上的散射。(B) 单驼峰凸起在平面上呈现的幻象。(C) 单驼峰凸起在双驼峰凸起上呈现的幻象。(D) 各向同性折射率：$n_{i,\ plane}$ 对应于(B)中的椭圆区域，$n_{i,\ double}$ 对应于(C)中的双驼峰凸起。(A)、(B)和(C)中的椭圆形基底轮廓相同。

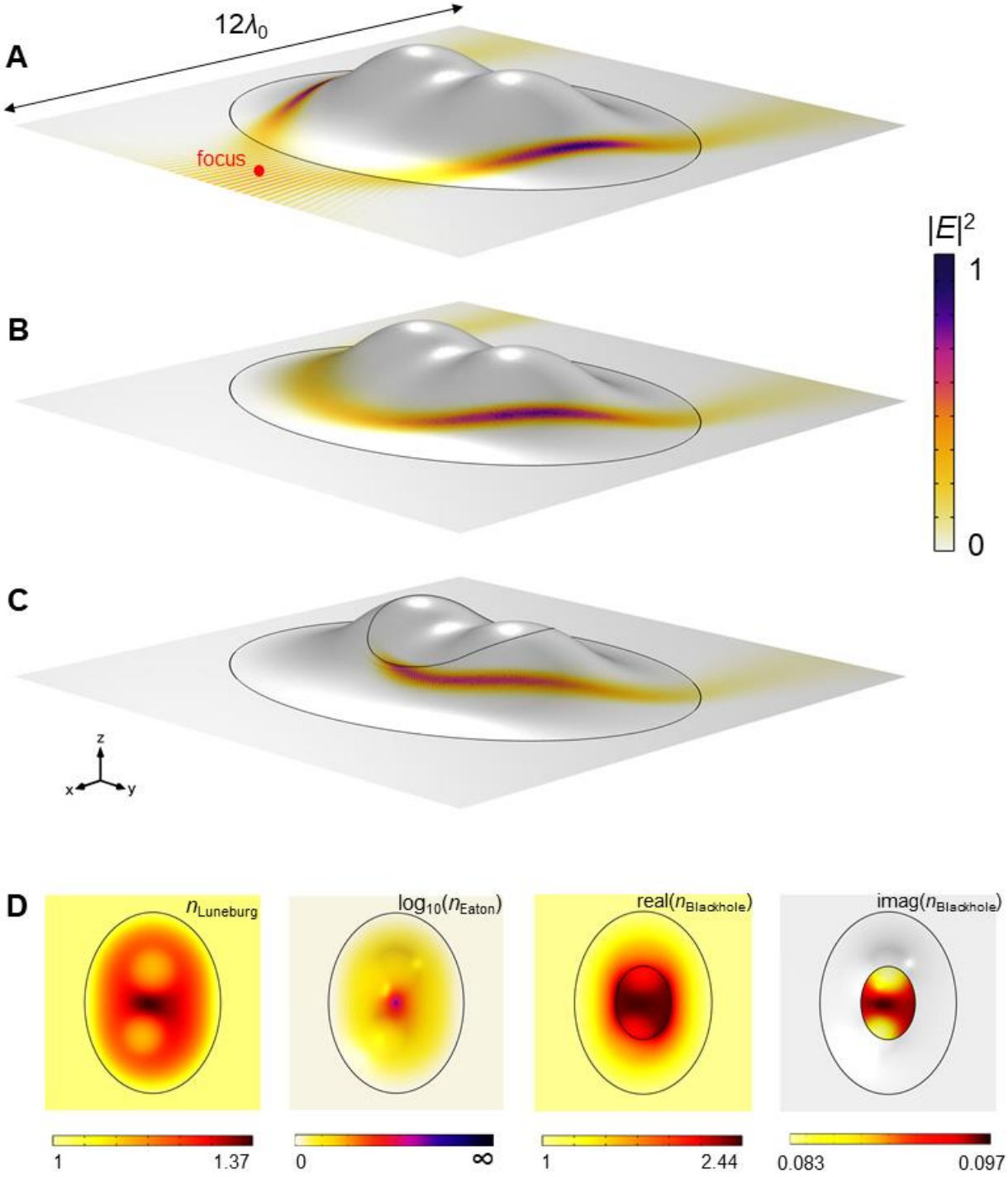

图4. 器件的场与介质分布。表面电磁波器件上的归一化电场分布。（A）伦伯格透镜；（B）伊顿透镜；（C）黑洞。采用高斯光束展示其功能。（D）各向同性折射率；n_{Luneburg} （A）中伦伯格透镜的折射率、n_{Eaton} （B）中伊顿透镜的常用对数，以及$n_{\text{Blackhole}}$ （C）中黑洞的实部和虚部。

以下内容为补充材料：

- 利用共形变换光学控制电磁表面波

赵晓宇等

*通讯作者。电子邮箱：tydong@mail.xjtu.edu.cn。

此 PDF 文件包括：

图 S1 至 S5

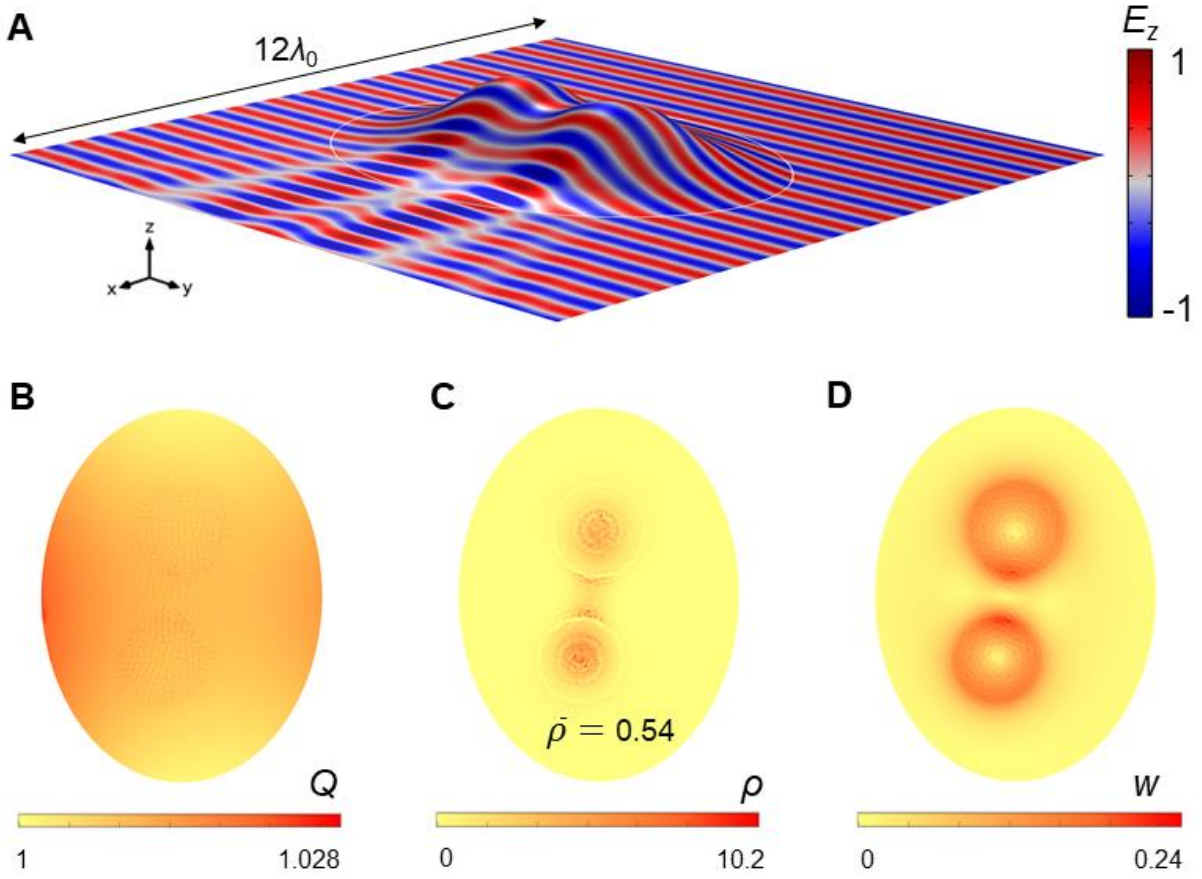

图 S1。（A）均匀介质填充时，双驼峰凸起上表面电磁波散射的归一化电场分布。（B）用于设计图2A所示隐身斗篷的映射的准保角比 $\boldsymbol{Q}$ 。（C）曲率指数 $\boldsymbol{\rho}$。（D）波长指数 $\boldsymbol{w}$。

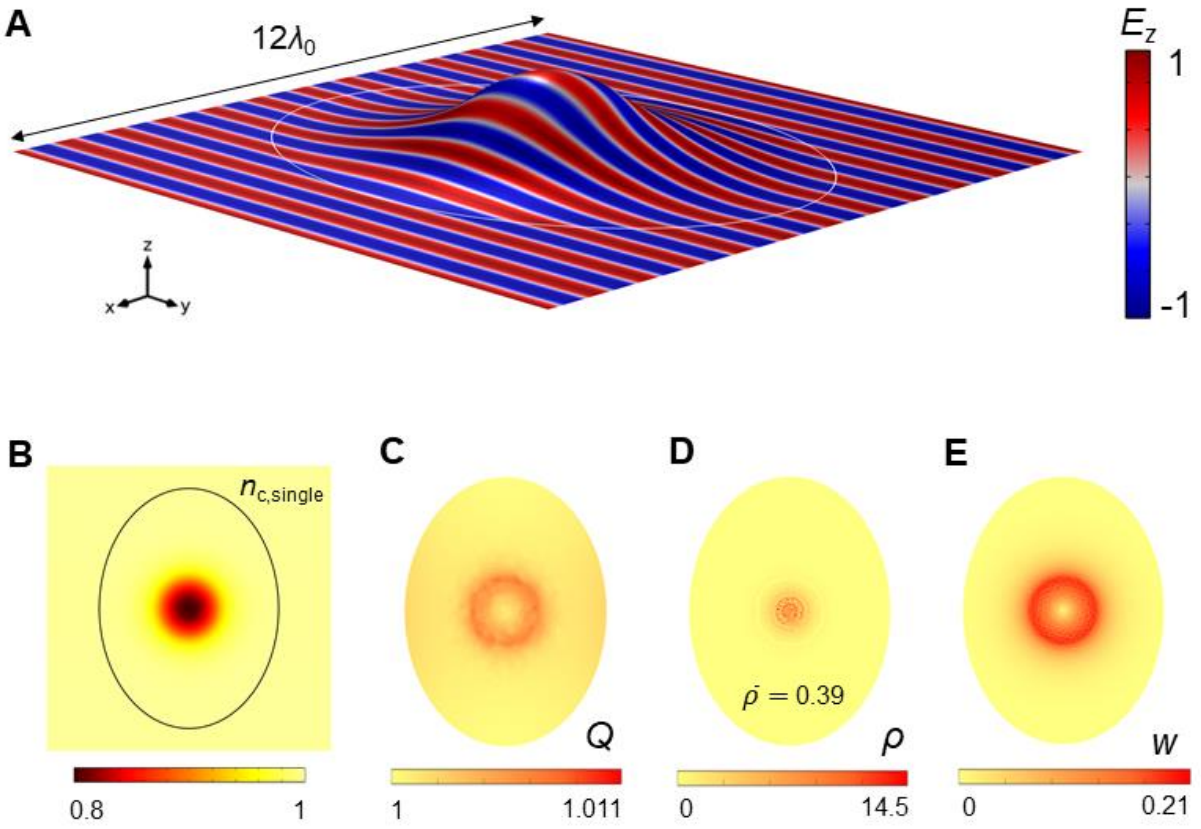

图 S2. (A) 单驼峰凸起上表面电磁波隐身衣的归一化电场分布，由 (B) 各向同性折射率 $\boldsymbol{n_{c,\,single}}$ 实现。(C) 用于设计 (A) 中所示隐身衣的映射的准保角比 $\boldsymbol{Q}$ 。(D) 曲率指数 $\boldsymbol{\rho}$。(E) 波长指数 $\boldsymbol{w}$。

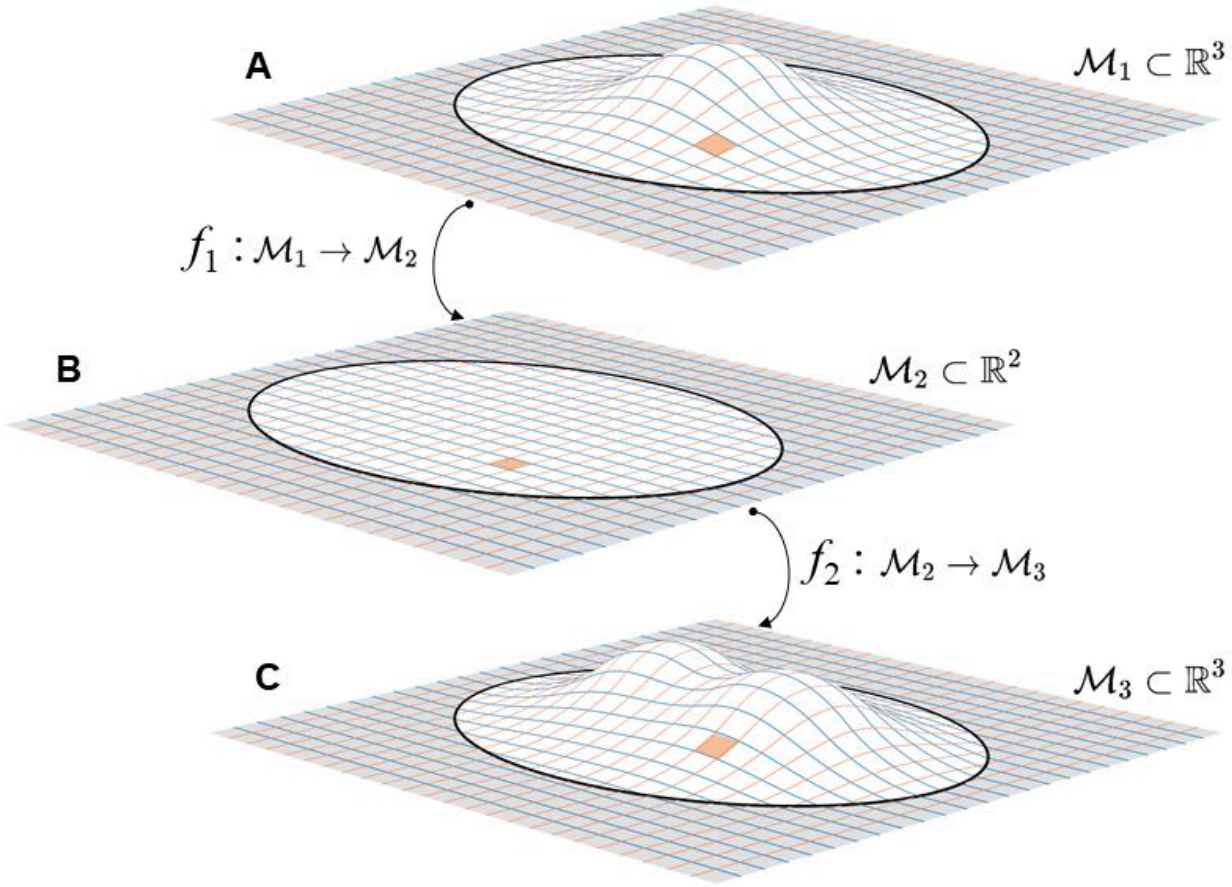

图 S3. 在嵌入于 R^3 中的两个流形之间进行的拟共形映射，由两个 R^3 到 R^2的映射级联构成。(A) 嵌入于 R^3中的单驼峰流形 $\boldsymbol{\mathcal{M}_1}$。(B) 通过映射 $\boldsymbol{f_1}$将 $\boldsymbol{\mathcal{M}_1}$ 映射得到的 R^2 中的平面区域 $\boldsymbol{\mathcal{M}_2}$。(C) 通过映射 $\boldsymbol{f_2}$将 $\boldsymbol{\mathcal{M}_2}$ 映射得到的嵌入于 R^3 中的双驼峰流形 $\boldsymbol{\mathcal{M}_3}$。

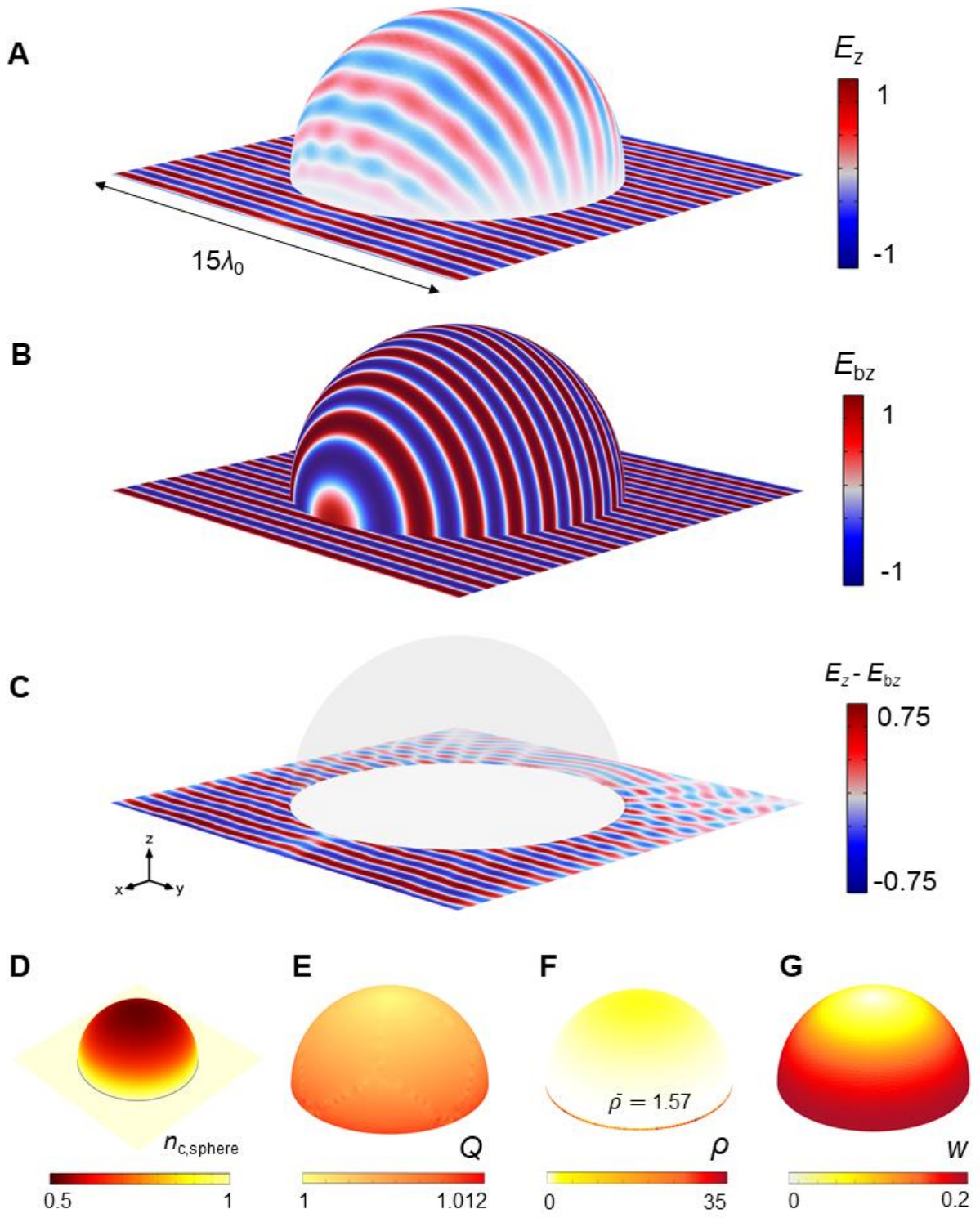

图 S4。（A）半球形表面波斗篷的归一化电场 E_z，（B）背景场 E_{bz} 和（C）散射场 $E_z - E_{bz}$，该斗篷通过（D）各向同性折射率，sphere实现。（E）用于设计（A）中所示隐身斗篷的映射的准保角比 Q。（F）曲率指数 ρ。（G）波长指数 w。半球半径为 $5\lambda_0$。

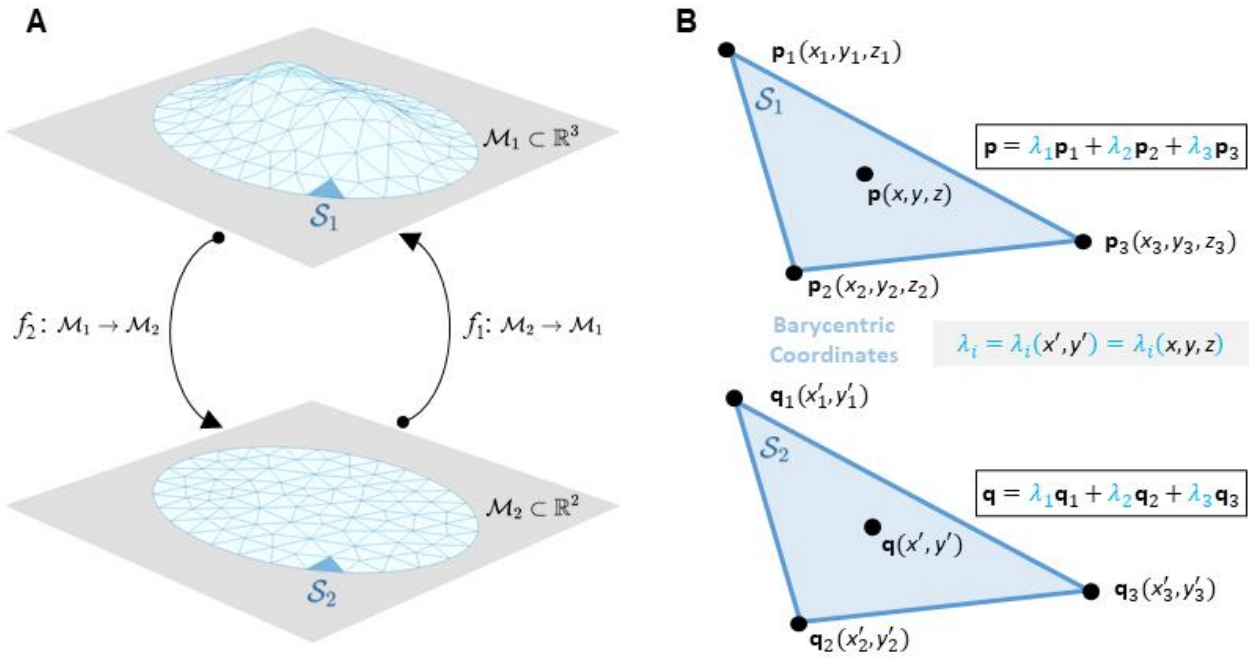

图 S5。（A）单纯形 $\boldsymbol{S_1}$ 和 $\boldsymbol{S_2}$ 作为三角形单元，位于嵌入 $\mathbf{R^3}$ 中的双驼峰流形 $\boldsymbol{\mathcal{M}_1}$ 的网格以及 $\mathbf{R^2}$ 中的区域 $\boldsymbol{\mathcal{M}_2}$ 中，并由拟共形映射 $\boldsymbol{f_1}$ 和 $\boldsymbol{f_2}$ 相关联。（B）单纯形 $\boldsymbol{S_1}$ 和 $\boldsymbol{S_2}$ 上相同的重心坐标。