arXiv:2301.00367v1 [math.LO] 1 Jan 2023

在内集理论中构造非标准壳与Loeb测度

Karel Hrbacek 和 Mikhail G. Katz

Abstract. 目前，实践罗宾逊非标准分析的两种流行方式是模型论方法和公理化／句法方法。有人有时声称，内部公理化方法无法处理依赖外部集合的构造。我们表明，内在框架能够成功地阐述非标准壳和Loeb测度。本文所依赖的基本事实是：标准宇宙在标准超滤子下的超幂自然同构于内宇宙的一个子宇宙。

Contents

1. 引言 2 2. 内部集合论 BST 4 3. BST 宇宙的子宇宙 6 3.1. w-标准集合 6 3.2. 外部集合编码 8 4. BST 中的非标准壳与 Loeb 测度 11 4.1. 标准度量空间的非标准壳 11 4.2. 非标准壳的完备性 15 4.3. 标准一致空间的非标准壳 16 4.4 内部赋范向量空间 17 4.5. Loeb 测度 18 4.6. 由 Loeb 测度得到的勒贝格测度 21 4.7. 中性元与外部数 22 5. 子宇宙与超幂 23 5.1. 子宇宙 S_w 与超幂 23 5.2. 第 3.1 小节中各项主张的证明 25 6. 若干早期构造 27 6.1. “完整的”非标准壳 27 6.2. Vakil 构造 29

日期：2022年12月4日。关键词和短语：非标准分析；内集理论；外部集合；非标准壳；Loeb测度。

6.3. IST 中的勒布测度 29 6.4. 有界内部集合论 30 6.5. 有限集上的测度与积分 31 7. 结论 31 参考文献 32

1. Introduction

Robinson 将他的理论命名为“非标准分析”，因为它涉及算术的所谓非标准模型，并且在某种程度上受到这些模型的启发；这些模型的存在最早由 T. Skolem 指出”（Robin- son [27], 第 vii 页）。目前，实践 Robinson 非标准分析的方式有两种较为流行。

模型论方法包括 Robinson 的扩张（由紧致性定理得到, Robinson [27]）、超幂（Luxemburg [22]），以及基于超结构的非标准宇宙（Robinson 和 Zakon [28], Chang and Keisler [4]）。

公理化／句法方法起源于 Hrbacek [10] 和 Nelson [25]。Nelson 的 IST 尤为知名（例如参见 Robert [29], Diener 和 Stroyan [6]）。Kanovei 和 Reeken [15] 的专著是公理化非标准分析的一部全面参考著作。

在模型论方法中，我们在 ZFC 中使用各种非标准宇宙；有关这一框架的定义和术语，请参见 Chang and Keisler [4], 第 4.4 节。令 $\mathfrak{N} = (V(X)\ V(^*X)\ *)$ 为一个非标准宇宙。$\mathfrak{N}$ 中的内部集合族 $^*V(X)$ 同构于超结构 $V(X)$ 的某个有界超幂 [1]。它扩展为超结构 $V(^*X)$, 其中还包含外部集合。

以 st-$\in$-语言表述的非标准集合论内部部分的公理系统，非常适合发展无穷小分析及更广泛的理论。人们普遍承认，内部理论比模型论方法更容易学习和使用。然而，有时有人将以下一点视为内部方法的缺陷：对于 Robinson 非标准分析对数学作出的一些最重要的新贡献而言，外部集合是不可或缺的，例如非标准赫尔的构造（卢森堡 [23]）和 Loeb测度（Loeb [18]）；例如参见 Loeb 和 Wolff [20] 第 xiv 页以及 [21] 第 vii 页、Loeb [19] 和

[1] 更一般地说，是某个有界极限超幂。

Zlatoˇs [34]。这些说法并非意在按字面理解。由于 IST 将 ZFC 包含在其公理之中，非标准宇宙及其中的外部构造在 IST 中都是有意义的。然而，非标准宇宙拥有自身的“标准”和“内部”概念，它们与 IST 所提供的相应概念并无直接联系。在 IST 内部的超结构框架中直接开展工作时，这种概念上的重复可能会造成混淆并增加难度。无论如何，问题在于：能否在内部集合论中，使用这些理论所公理化的概念来完成这些构造。

本文介绍了一种外部构造方法，它更适合内部集合论所提供的概念框架。我们采用的技术早已为人所知，但据我们所知，文献中尚未明确出现过将其用于在内部集合论中实现外部方法的做法。我们表明，几乎所有在超结构中需要借助外部集合构造的对象，都可以通过这些技术在内部公理化框架下得到。

我们在有界集合论 BST 中工作（参见 Kanovei 和 Reeken [15],第 3 章）。BST 公理是对更为熟悉的 IST 公理略作修改而来。我们在第 2 节陈述这些公理，随后讨论如何在 BST 中将可定义外部集作为缩写来处理。

关于 BST，一个鲜为人知的事实是，它的宇宙包含与标准宇宙的任意标准超幂（甚至极限超幂）同构的子宇宙。对于每个内部集合 w，都存在一个子宇宙 S_w，以及一个简单定义的同构，将 S_w 与标准宇宙在由 w 生成的标准超滤子下的超幂对应起来。因此，BST 自然提供了内宇宙的一种类似物
${}^*V(X)$，适用于任意超结构。子宇宙 S_w 满足 BST 的某些公理，如第 3.1 小节所述；因此，我们可以公理化地研究这些子宇宙，而无须提及它们与超滤子或超幂之间的关系。

S_w 的外部子集以及由它们构成的高阶外部集合，并不是 BST 中的对象；不过，上述同构结合强大的标准化原则，提供了一种自然的方法，用标准集合为这些“并不存在”的外部集合编码，并模拟由外部集合构成的超结构 $V({}^*X)$。这一思想将在第3.2小节中展开。

本文的核心是第4节，我们将在其中展示如何构造标准度量空间和一致空间的非标准壳以及Loeb测度。我们还将考察内赋范空间上的类似构造，并概述如何处理中性元和外部数。

从实际应用的角度来看，使用这些技术的最佳方式可能是先非正式地完成外部构造，然后用标准集合将其编码出来。原则上，任何涉及外部集合的构造都可以通过这些方法在BST的框架内实现。

第5节阐述了子宇宙 S_w 与超幂之间的关系，并给出了 Subsection 3.1 中所述 S_w 性质的证明。

在第6节中，我们回顾了此前提出的几种在 IST 中进行外部构造的方法，并讨论其不足之处。主要困难在于，这些方法往往会产生“过大”的对象，不适合进一步研究（其大小超过任何标准集合的标准元素类）。

2. BST 内部集合论

我们在 BST 的框架下开展讨论。[2] BST 理论采用 st-$\in$-语言表述。它是 ZFC 的保守扩张。

带上标 st 的量词取遍标准集合。带上标 stfin 的量词取遍标准有限集合。除 ZFC 外，BST 的公理如下（ZFC 的分离公理和替换公理模式仅适用于 $\in$-公式）：

- B（有界性）$\forall x\, \exists_{\rm st} y\, (x \in y)$。
- T（迁移原理）设 $\phi(v)$ 是一个带有标准参数的 $\in$-公式。那么

$$\forall^{\rm st} x\ \phi(x) \to \forall x\ \phi(x).$$

- S（标准化）设 $\phi(v)$ 是一个带有任意参数的 st-$\in$-公式。那么

$$\forall A\, \exists^{\rm st} S\, \forall^{\rm st} x\ (x \in S \longleftrightarrow x \in A \wedge \phi(x)).$$

- BI（有界理想化）设 $\phi(u, v)$ 是一个带有任意参数的 $\in$-公式。

对于每个标准集合 A

$$\forall^{\rm stfin} a \subseteq A\, \exists y\, \forall x \in a\ \phi(x, y) \longleftrightarrow \exists y\, \forall^{\rm st} x \in A\ \phi(x, y).$$

关于其动机和更多细节，请参阅 Kanovei 和 Reeken [15] 以及 Fletcher 等人 [8] 。

迁移原理的一个等价的存在性版本是

$$\exists x\ \phi(x) \to \exists^{\rm st} x\ \phi(x),$$

[2] IST 的有界集合（即标准集合的元素）满足 BST 的所有公理。因此，本文中的所有论证都可以在 IST 中进行，尽管不那么直接。

对于具有标准参数的 $\in$公式 ϕ 。另一个等价版本可以通过对$\in$公式 $\phi(v_1, \ldots, v_k)$ 的逻辑复杂度进行归纳法（参数为标准参数）轻易得到，即

$$\forall^{\mathrm{st}} x_1, \ldots, x_k \, [\, \phi(x_1, \ldots, x_k) \longleftrightarrow \phi^{\mathrm{st}}(x_1, \ldots, x_k)]$$

其中， ϕ^{st} 是由 ϕ 通过将所有量词相对化到谓词 st 而得到的公式（也就是说，将每个 $\exists$ 替换为 $\exists^{\mathrm{st}}$ ，并将每个 $\forall$ 替换为 $\forall^{\mathrm{st}}$）。

与数学中的通常用法一样，符号 $\mathbb{N}$和 $\mathbb{R}$ 分别表示所有自然数的集合和所有实数的集合。在内部集合论中，可以用两种方式看待它们。在“内部图景”中，$\mathbb{R}$被视为通常的实数集合，其中谓词 st 将某些元素标记为“标准”；对于任何无限标准集合，情况也类似。这是 Nelson [25]所熟悉的观点。在“标准图景”中，通常的集合 $\mathbb{R}$ 被视为除了包含其标准元素外，还包含虚构的理想元素。更多讨论请参见 Fletcher 等人 [8]。

BST 中的数学可以用与 IST 中相同的方式发展。特别地，实数 r、s 无限接近（记作： $r \simeq s$），当且仅当对所有标准 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|r - s| < 1/n$ 成立。若实数 r满足 $r \simeq 0$， $r \neq 0$，则称其为无穷小。若对某个标准 $n \in \mathbb{N}$有 $|r| < n$ ，则称其有限。我们回顾一下：对于每个有限的 $x \in \mathbb{R}$ ，都存在唯一的标准 $r \in \mathbb{R}$使得 $r \simeq x$；它称为 x 的影子（或标准部分），记作 sh(x)；当 x 无限时，我们还定义 sh(x) $= +\infty$， $x > 0$；当 x 无限时，定义 sh(x) $= -\infty$ ，$x < 0$。

BST 所假定存在的所有对象都是集合，有时为强调这一点也称为内部集合。分离公理仅适用于 $\in$-公式。但在基于内部公理化方法的文献中，通常会将可定义外部集作为方便的简写引入（参见例如 Vakil [32], Diener 和 Stroyan [6]）。我们可以通过为任意 st-$\in$-公式的扩张命名来丰富该理论的语言，从而讨论宇宙中所有（内部）集合的 st-$\in$-可定义子类。我们注意到：（a）这并不等于形式化一种名为“外部集合”的新实体，后者是一项更复杂的任务；（b）这也不等于非正式地使用“外部集合”一词（即依赖某种背景形式化）。这类似于集合论学家在 ZFC 中惯常使用类的方式（全体集合类、全体序数类）。这类为数学论述提供了方便的捷径，因为人们可以“仿佛”它们是对象一般地进行操作，

但原则上可以用其定义公式来替代它们。下文的例 2.1 展示了这一熟悉的做法。

设 $\phi(v)$ 是一个带有任意参数的 st-$\in$-公式。我们用虚线花括号表示类 $x \mid \phi(x)$。需要强调的是，这仅仅是为了方便；表达式 $z \in \{x \mid \phi(x)\}$ 只是 $\phi(z)$ 的另一种记法。通常我们用粗体字符表示类。包含在某个集合中的类称为外部集合。如果存在一个集合 A，使得 $\forall x(x \in A \longleftrightarrow \phi(x))$，那么类 $\{x \mid \phi(x)\}$ 就可以与集合 A 等同起来。[3] 单子和星系是一些常见的外部集合例子，它们通常不是集合。设 (M, d) 是一个度量空间：$a \in M$ 的单子是 $\mathbf{M}(a) = \{x \in M \mid d(x,a) \simeq 0\}$，而 $a \in M$ 的星系是 $\mathbf{G}(a) = \{x \in M \mid d(x,a)$ 有限。一些有用的真类（即不是外部集合的类）包括 $\mathbf{V} = \{x \mid x = x\}$（所有（内部）集合构成的宇宙）、[4]以及 $\mathbf{S} = \{x \mid \mathrm{st}(x)\}$（所有标准集合构成的宇宙）。

例 2.1。设 M, $f : M \to M$ 和 $a \in M$ 是标准的。定义连续性的一种便捷方式如下：函数 f 在 a 处连续，当且仅当 $f[\mathbf{M}(a)] \subseteq \mathbf{M}(f(a))$。不过，可以通过改写定义来消除其中对外部集合的使用：函数 f 在 a 处连续，当且仅当对于所有 x, $d(x,a) \simeq 0$ 蕴含 $d(f(x)\ f(a)) \simeq 0$。

在 BST 中，可用这种方式妥善处理可定义的内部集合外部集；详尽讨论请参阅 Vakil [32]。只有在需要对外部集合构造更高层次的结构（例如商空间和幂集）时，才会出现困难。我们将在第 3.2、4.1、4.4 和 4.5 小节中说明如何处理这些困难。

3. Subuniverses of the universe of BST

3.1. w-标准集合。固定一个集合 w 和一个标准集合 I，使得 $w \in I$。[5]

定义 3.1. 集合 x 称为 w-标准（记作：$\mathrm{st}_w(x)$），如果 $x = f(w)$ 对某个定义域为 I 的标准函数 f 成立。接下来，我们令

[3]在模型论方法中，外部集合按定义是非内部集合。在公理化方法中，通常将内部集合视为外部集合的一种特殊情况。[4]文献中常用符号 I 表示这一概念；但在 st-$\in$-理论的语境下，所有集合都是内部的，因此符号 V 似乎更为恰当。[5]有界性公理保证存在某个这样的 I。这也是我们更倾向于采用 BST 而不是 IST 的原因之一。

$\mathbf{S}_w = \{x \mid \mathrm{st}_w(x)\}$ 为所有 w-标准集合构成的宇宙。 w-标准性的概念仅取决于 w，而不取决于标准集合 I。

命题 3.2。（a）$\forall x$（st(x) $\to$ st$_w$(x)）。（b）$\forall x$（st$_w$(x) $\to$ st(x)）成立，当且仅当 w 是标准的。（c）st$_w$(f) $\wedge$st$_w$(x) $\wedge$ $x \in$dom $f \to$st$_w$(f(x))。

证明。（a）设 x 为标准的；我们有 $x = c_x(w)$，其中 c_x 是取值为 x的常值函数。

（b）如果 w 是标准的，那么对于标准的 f，每个 $f(w)$都是标准的。如果w 是非标准的，令 $f(i) = i$ 为 I上的恒等函数。那么$f(w) = w$ 是 w-标准的，但不是标准的。

（c）假设 st$_w$(f)、st$_w$(x) 且 $x \in$dom f。那么存在定义在 I上的标准函数 F、G，使得 $f = F(w)$和 $x = G(w)$。定义一个定义在 I 上的函数 H 如下:

$H(i) = F(i)(G(i))$，当右侧有定义时；否则 $H(i) = \emptyset$。

那么， H 是定义在 I 上的标准函数，并且 $H(w) = f(x)$。 □

定义 3.3. 如果存在 $\nu \in \mathbb{N}$ 使得 ν 是 w-标准但非标准的，那么集合 w 称为良好集合。

特别地，如果 $\nu \in \mathbb{N}$ 是非标准的，那么 $w = \nu$ 是良好集合；更一般地，对于任意集合 z， $w = \langle \nu, z \rangle$ 都是良好集合。

以下事实可由已知结果直接推出（参见 Kanovei 和 Reeken [15], 第 3.3、6.1、6.2 节，尤其是定理 6.2.6）。为便于查阅，我们在第5节给出证明。带上标 st$_w$ 的量词，其论域为 w-标准集合。

命题 3.4. (1)（从 w-标准集合出发的迁移原理）设 ϕ 是一个$\in$-公式，且具有 w-标准参数。那么

$$\forall^{\mathrm{st}_w} x\ \phi(x) \to \forall x\ \phi(x).$$

（2）（关于 w-标准集合的可数理想化）

设 ϕ 是一个带有 w-标准参数的 $\in$公式。若 w 良好，则

$$\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \exists x\ \forall m \in \mathbb{N}\ (m \le n \to \phi(m,\ x)) \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st}_w} x\ \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \phi(n,\ x)。$$

换言之，（S$_w$，S $\in$）满足可数理想化。

（3）（可表示性）

设 $\phi(v)$ 是一个带标准参数的 $\in$公式。若 I 是标准的， $w \in I$、x 是 w-标准的，并且 $\phi(x)$ 成立，则存在一个定义域为 $f = I$ 的标准函数 f，使得对于所有 $i \in I$， $x = f(w)$ 以及 $\phi(f(i))$ 成立。

（1）的一个等价表述是迁移原理到 w-标准集合：

$$\exists x\ \phi(x) \to \exists^{\mathrm{st}_w} x\ \phi(x).$$

对于带有 w-标准参数的 $\phi(v_1, \ldots, v_r)$，另一种等价表述是

$$\forall^{\mathrm{st}_w} x_1, \ldots, x_r\ [\phi(x_1, \ldots, x_r) \longleftrightarrow \phi^{\mathrm{st}_w}(x_1, \ldots, x_r)],$$

其中，ϕ^{st_w} 是通过将所有量词限制到 st_w 而从 ϕ 得到的公式。换言之，$(V, S_w, \in)$ 满足迁移原理。它还满足有界性，并且对于良好的 w，满足有界理想化（见 Kanovei 和 Reeken [15, 定理 6.1.16 (i)），但不满足标准化（同上，定理 6.1.15）。尽管本文不需要这些结果，但它们共同表明，$(V, S_w, \in)$ 满足 BST 的除标准化之外的全部公理。请注意，在这里，S_w 扮演着新的“厚标准宇宙”的角色。另一方面，$(S_w, S\ \in)$ 满足迁移原理、有界性、标准化和可数理想化；在这里，S_w 扮演着新的“薄内部宇宙”的角色。

如果恰当选择 w，就可以将理想化从 $\mathbb{N}$ 强化到基数为 κ 的集合。κ^+-良好集合的技术性定义留待第 5.2 小节介绍（见定义 5.7）。对于我们的应用，只需知道：对于每个标准不可数基数 κ 和每个 z，都存在 κ^+-良好 w，使得 z 是 w-标准的；这一结果也在该小节中得到证明。

命题 3.5。（将理想化应用于基数为 $\leq \kappa$ 的集合上的 w-标准集合）设 ϕ 是一个带有 w-标准参数的 $\in$-公式。若 w 是 κ^+-良好的，则对于每个基数为 $\leq \kappa$ 的标准集合 A

$$\forall^{\mathrm{stfin}} a \subseteq A\ \exists y\ \forall x \in a\ \phi(x, y) \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st}_w} y\ \forall^{\mathrm{st}} x \in A\ \phi(x, y).$$

命题 3.4 和 3.5 并未穷尽宇宙 S_w 的性质；有关其他有用原理的列表，见 Kanovei 和 Reeken[15],定理 3.3.7。

3.2. 外部集合编码。定义 3.1 提供了一种通过标准函数表示 w-标准集合的自然方式：一个 w-标准 $\xi \in S_w$由任意满足 $f(w) = \xi$ 的标准 $f \in V^I$ 表示。注意，每个 ξ 都有一个真类的表示。这会造成一些技术上的困难（见第5节）；就我们的目的而言，最好的解决办法是固定一个全标准集合 V，使得所有感兴趣的对象都是 V 的子集或 V上的关系；通常要求 $\mathbb{R} \subseteq V$。根据可表示性，对于每个 $\xi \in V \cap S_w$，都存在一个标准 $f \in V^I$，使得 $f(w) = \xi$。此外，如果 ψ 是一个带有标准参数的 $\in$-公式，且 $\psi(\xi)$ 成立，那么可以选取 f，使得 $\psi(f(i))$ 成立

对所有 $i \in I$。这种表示使得可以用标准集合对外部子集进行编码，通过标准集合构造 $V \cap \mathsf{S}_w$ 的内部子集，而编码过程可以并且编码过程可以继续延伸到外部累积层级中假定存在的更高层级。这一过程由标准化原理所支持。

定义 3.6。设 $\phi(v)$ 是 st-$\in$-语言中的一个公式，带有任意参数。我们令

$$^{\mathrm{st}}\{x \in A \mid \phi(x)\}$$

表示标准集合 S，使得 $\forall^{\mathrm{st}} x(x \in S \longleftrightarrow x \in A \wedge \phi(x))$。

标准化原理假定此集合存在，而迁移原理保证其唯一性。此外，根据迁移原理，若 ψ 是任意一个带标准参数的 $\in$ 公式，且 $\forall^{\mathrm{st}} x \in A\ (\phi(x) \to \psi(x))$，那么 $\forall x \in S\ \psi(x)$。

特别地，若 $\phi(u.v)$ 是 st-$\in$ 语言中带任意参数的公式，A、B 是标准的，并且对每个标准的 $x \in A$，都存在唯一的标准 $y \in B$ 使得 $\phi(x, y)$，那么存在唯一的标准函数 $F\colon A \to B$，使得 $\forall^{\mathrm{st}} x \in A\ \phi(x, F(x))$ 成立。只需令 $F = {}^{\mathrm{st}}\{\langle x, y\rangle \in A \times B \mid \phi(x, y)\}$。

定义 3.7。外部集合 $\mathbf{X} \subseteq V \cap \mathsf{S}_w$ 的 w, V-编码是标准集合

$$\Psi_{w,V}(\mathbf{X}) = X = {}^{\mathrm{st}}\{f \in V^I \mid f(w) \in \mathbf{X}\}.$$

换言之，$\Psi_{w,\,V}(\mathbf{X})$ 是标准集合，其标准元素恰好是满足 $f(w) \in \mathbf{X}$ 的标准 $f \in V^I$。

当上下文已明确时，我们省略下标 w 和/或 V。

显然，编码保留了集合论的基本运算。

命题 3.8。对于任意外部集合 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \subseteq V \cap \mathsf{S}_w$：

(1) $\Psi(\emptyset) = \emptyset, \quad \mathbf{X}_1 \subseteq \mathbf{X}_2 \longleftrightarrow \Psi(\mathbf{X}_1) \subseteq \Psi(\mathbf{X}_2)$;
(2) $\Psi(\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_2) = \Psi(\mathbf{X}_1) \cup \Psi(\mathbf{X}_2), \quad \Psi(\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2) = \Psi(\mathbf{X}_1) \cap \Psi(\mathbf{X}_2)$;
(3) $\Psi(\mathbf{X}_1 \setminus \mathbf{X}_2) = \Psi(\mathbf{X}_1) \setminus \Psi(\mathbf{X}_2)$.

编码也保留无限并和交。一个外部子集的外部可数序列 V 在 BST 中可以视为一个外部子集 $\mathbf{X}$ 属于 $\mathbb{N} \times V$，其中 $\mathbf{X}_n = \{x \mid \langle n, x\rangle \in \mathbf{X}\}$ 对标准 $n \in \mathbb{N}$ 成立。令 $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ 为满足以下条件的标准序列：$X_n = \Psi(\mathbf{X}_n)$ 对所有标准 n 均成立（其存在性由标准化保证）。于是

$$\Psi\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cap \mathbf{S}} \mathbf{X}_n\Big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

因为如果 $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 是标准的，那么最小的 $n \in \mathbb{N}$ 使得$f \in X_n$ 是标准的。类似地，

$$\Psi(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\cap\mathbf{S}} \mathbf{X}_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

因为如果一个标准 $f \in \Psi(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\cap\mathbf{S}}\mathbf{X}_n)$，那么 $f \in X_n$ 对所有标准 $n \in \mathbb{N}$都成立，因此 $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 由迁移原理得出。

将编码的定义放宽是很方便的，这样每个标准 $S \subseteq V^I$ 都是某个外部 X $\subseteq V \cap \mathsf{S}_w$的编码。

定义 3.9。若一个标准集合 S 为 X $\subseteq V \cap \mathsf{S}_w$ 编码，则对于每个标准 $f \in S$，$f(w) \in$ X，并且对于每个 $\xi \in$X，都存在某个标准 $f \in S$，使得 $f(w) = \xi$。

如果 S 为 X 编码，那么

$$\Psi(\mathbf{X}) = {}^{\mathrm{st}}\{f \in V^I \mid f(w) = g(w) \text{ for some standard } g \in S\}.$$

X 的一个编码必须包含针对每个 $\xi \in$X 的表示，但不一定包含所有这类表示。

我们注意到，在以下意义上，编码独立于全标准集合的选择：若 X $\subseteq V_1 \cap \mathsf{S}_w$ 且 $V_1 \subseteq V_2$，那么S 将 X 视为 $V_1 \cap \mathsf{S}_w$ 的子集时的编码，当且仅当 S 将 X 视为 $V_2 \cap \mathsf{S}_w$的子集时的编码。因此，V的具体选择通常并不重要。

对于任意集合 x，令 c_x 为取值恒为 x的常值函数。将 x 与 c_x 非正式地视为相同，使我们能够将标准集合 A 与表示 $A \cap \mathsf{S}$ 的编码 $^{\mathrm{st}}\{c_x \mid x \in A\} = \{c_x \mid x \in A\}$ 相对应。另一方面，标准集合 A^I 是 $A \cap \mathsf{S}_w$的编码。

每个标准 $S \subseteq V^I$ 都是唯一外部集合的编码

$$\mathbf{X}_S = \check{\{}\xi \in V \cap \mathbf{S}_w \mid \xi = f(w) \text{ for some standard } f_w \in S\check{\}}.$$

这样的 S 是某个外部集合 X 的子集的编码，当且仅当 $\forall^{\mathrm{st}} f\,(f \in S \to f($ $w) \in$ X)，当且仅当 $S \subseteq \Psi$(X)。因此，将 $X = \Psi$(X)的$\tilde{}$幂集解释为 X 的“并不存在的”外部幂$\tilde{}$集 $\mathcal{P}^{\mathrm{ext}}$(X) 的编码，并将 $\mathcal{P}(X)$ 的标准子集视为“ $\mathcal{P}^{\mathrm{ext}}$(X) 的外部子集”的编码，是有意义的。由于 BST 不允许外部集合构成集合，因此无法在其中严谨地表达这一点；但我们可以“仿佛”存在这样的高阶外部集合那样继续讨论。

直观地说，在 $V \cap \mathsf{S}_w$ 之上构建了一个外部集合层级：

对于标准的 $n \in \mathbb{N}$，有 $\mathbf{H}_1 = \mathcal{P}^{\mathrm{ext}}(V \cap \mathsf{S}_w)$ 和 $\mathbf{H}_{n+1} = \mathcal{P}^{\mathrm{ext}}(\mathbf{H}_n)$（为避免进一步复杂化，我们就到此为止）。这一层级无法在 BST 中形式化。但相应的 V^I 上的层级是良定义的：

对于标准的 $n \in \mathbb{N}$，有 $H_1 = \mathcal{P}(V^I)$ 和 $H_{n+1} = \mathcal{P}(H_n)$。
在 BST 中，人们可以正当地在后一个层级中进行研究，同时牢记编码确立了 $\mathbf{H}_n$ 与 $H_n \cap \mathbf{S}$ 之间的一种（多对一）对应关系。两个层级及其关系都可以在 HST 中形式化；HST 是 BST 的保守扩展，也是一个涵盖外部集合的理论（Hrbacek [10], Kanovei 和 Reeken [15]）。

请注意，编码过程将 ξ of $V \cap \mathbf{S}_w$ 的元素视为个体；它们并非由 Ψ 编码。因此，ξ 可由任何满足 $f(w) = \xi$ 的 f 表示，但 $\Psi(\xi)$ 未定义。集合 $\{\xi\} \subseteq V \cap \mathbf{S}_w$ 由 $\{f\}$ 编码，即使 $\{\xi\} \in V \cap \mathbf{S}_w$ 也是如此。特别地，若 R 是 $V \cap \mathbf{S}_w$ 上的二元关系，则 R 的编码是标准二元关系

$$\Psi(\mathbf{R}) = R = {}^{\mathrm{st}}\{\langle f, g\rangle \mid f, g \in V^I \wedge \langle f(w), g(w)\rangle \in \mathbf{X}\}.$$

函数和高元关系也同样如此。

另一种编码方式用单个对象表示每个 $\xi \in \mathbf{X}$。

定义 3.10。设 $f \in V^I$ 为标准的。我们令

$$f_{w,V} = f_w = {}^{\mathrm{st}}\{g \in V^I \mid g(w) = f(w)\}.$$

我们定义标准集合 $V^I/w = {}^{\mathrm{st}}\{f_w \mid f \in V^I\}$，并且对于 $\mathbf{X} \subseteq V \cap \mathbf{S}_w$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}_w(\mathbf{X}) &= {}^{\mathrm{st}}\{f_w \in V^I/w \mid f(w) \in \mathbf{X}\}\\ &= {}^{\mathrm{st}}\{F \in V^I/w \mid \exists^{\mathrm{st}} f \in V^I\,(F = f_w \wedge f(w) \in \mathbf{X})\}.\end{aligned}$$

$\widetilde{\ }$编码 Ψ_w 是一一对应的。对于标准的 $X \subseteq V^I/w$，我们令

$$\widetilde{\Psi}_w^{-1}(X) = \mathbf{X} = \{\xi \in V \cap \mathbf{S}_w \mid \exists^{\mathrm{st}} f \in V^I\,(f_w \in X \wedge f(w) = \xi)\}.$$

可以得到 $\Psi_w(\mathbf{X})$ 和 $\widetilde{\Psi}_w(\mathbf{X})$，反之亦然：$\widetilde{\Psi}_w(\mathbf{X}) = {}^{\mathrm{st}}\{f_w \mid f \in \Psi_w(\mathbf{X})\}$ 以及 $\Psi_w(\mathbf{X}) = {}^{\mathrm{st}}\{f \in V^I \mid f_w \in \widetilde{\Psi}_w(\mathbf{X})\}$.

命题 3.8 及其后续段落在将 Ψ 替换$\widetilde{\ }$为 Ψ 后仍然成立。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们为$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$标准 $n \in \mathbb{N}$定义层级 $H_1 = \mathcal{P}(V^I/w)$ 和 $H_{n+1} = \mathcal{P}(H_n)$。编码 Ψ_w 将 $\mathbf{H}_1$ 映射到 $H_1 \cap \mathbf{S}$。它可以通过 $\Psi_w(\mathbf{X}) = {}^{\text{属于}}\{\Psi_w(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \mathbf{X}\}$ 的方式，非正式地扩展到更高层级，并$\widetilde{\ }$在 $\mathbf{H}_n$ 与 $H_n \cap \mathbf{S}$ 之间建立一一对应关系。

4. BST

4.1. 标准度量空间的非标准壳。令 $\mathbb{R}$ 为实数域，并设 (M, d) 为标准度量空间，因此 M 是标准集合，且距离函数是标准映射

d： $M \times M \to \mathbb{R}$。若存在某个（等价地，对所有）标准 $p \in M$，使得 $d(x, p)$ 有限，则点 $x \in M$ 是有限的。

取一个无限整数 $w \in \mathbb{N}$。我们定义标准集合 B_w 为

$$B_w = {}^{\mathrm{st}}\{f \in M^{\mathbb{N}} \mid f(w) \text{ is a finite point of } M\}.$$

标准关系 E_w 在 B_w 上定义为

$$E_w = {}^{\mathrm{st}}\{\langle f, g\rangle \in B_w \times B_w \mid d(f(w), g(w)) \simeq 0\}.$$

显然， E_w 在 B_w的标准元素上具有自反性、对称性和传递性；由迁移原理可知， E_w 是 B_w上的一个等价关系。我们用 f_{E_w}表示 f 模 E_w 的等价类。

由标准化可知，存在一个标准函数 D_w： $B_w \times B_w \to \mathbb{R}$，它由如下要求确定：对于所有标准的 f、 $g \in B_w$， $D_w(f, g) = \mathsf{sh}(d(f(w)\ g(w)))$。

对于标准的 f、 $g \in B_w$ ，距离

$$d(f(w), g(w))) \le d(f(w), f(0)) + d(f(0), g(0)) + d(g(0), g(w))$$

是有限的，因此 $\mathsf{sh}(d(f(w)\ g(w))) \in \mathbb{R}$。

对于标准的 $f, g, h \in B_w$ ， 显然 $D_w(f, g) = D_w(g, f)$，

$$D_w(f, h) \le D_w(f, g) + D_w(g, h), \text{ and } D_w(f, g) = 0 \text{ iff } \langle f, g\rangle \in E_w.$$

此外，对于标准的 $f, g, f', g' \in B_w$ ，我们有

$$\big(\langle f, f'\rangle \in E_w \wedge \langle g, g'\rangle \in E_w\big) \to D_w(f, g) = D_w(f', g').$$

根据迁移原理，这些性质对所有 $f, g, h, f', g' \in B_w$ 都成立。

我们注意到，对于自然选择 $V = M \cup \mathbb{R}$, B_w 是外部集合的一个编码

$$\mathbf{B}_w = \{x \in M \cap \mathbf{S}_w \mid x \text{ is finite}\},$$

E_w 不过是外部等价关系的一个编码

$$\mathbf{E}_w = \{\langle x, y\rangle \in \mathbf{B}_w \times \mathbf{B}_w \mid d(x, y) \simeq 0\},$$

且 D_w 是外部函数 $\mathbf{D}_w : \mathbf{B}_w \times \mathbf{B}_w \to \mathbb{R} \cap \mathbf{S}$ 的编码，该函数定义为 $\mathbf{D}_w = \{\langle x, y, r\rangle \mid r = \mathsf{sh}(d(x, y))\}$。

按照通常的外部方法构造 (M, d) 的非标准壳，会形成 $\mathbf{B}_w/\mathbf{E}_w$ 对 $\mathbf{B}_w$ 模 $\mathbf{E}_w$ 的商空间。在 BST 中无法完成这一步。对于 $x \in \mathbf{B}_w$， x 模 $\mathbf{E}_w$ 的等价类是 $\mathbf{M}_w(x) = \{z \in M \cap \mathbf{S}_w \mid d(x, z) \simeq 0\}$，但对于所有 $x \in \mathbf{B}_w$，类 $\mathbf{M}_w(x)$ 的集合并不受 BST 支持。然而，对于标准的 $f \in B_w$，集合 f_{E_w} 是 $\mathbf{M}_w(x)$ 的一个编码，当 $f(w) = x$ 时。因此，$\mathbf{B}_w/\mathbf{E}_w$ 可以由 B_w/E_w 替代，它是 BST 中的一个标准集合。 B_w/E_w 的标准元素恰好是 $x \in \mathbf{B}_w$ 对应的单子 $\mathbf{M}_w(x)$ 的编码。因此， B_w/E_w 是

（如第3.2小节所述）“不存在的”（在 BST 中）商空间 $\mathrm{B}_w/\mathrm{E}_w$ 的一个编码。

我们强调，尽管外部集合为我们的构造提供了动机，但实际上并未在其中使用它们；这些构造只涉及 BST 的集合。本节其余部分也同样如此。

令 $\widehat{M_w = B_w/E_w}$ 为 B_w 模 E_w 的标准商空间。从现在起，在上下文清楚时，我们常常省略下标 w。

函数 D 通过 E 因子化为一个（标准）函数 $\widehat{D}$ 在 $\widehat{M}$ 上定义为 $\widehat{D}(f_E, g_E) = D(f, g)$（如上所示，$D$ 的值与代表元 f、g 的选择无关）。显然，$\widehat{D}$ 是 $\widehat{M}$ 上的一个度量。

从 M 到 $\widehat{M}$ 的嵌入 c 是通过常值函数实现的：对于 $x \in M$，$c(x) = (c_x)_E$，其中 c_x 是定义在 $\mathbb{N}$ 上、取值为 x 的常值函数。显然，嵌入 c 保持度量不变。我们将 M 与其在此嵌入下于 $\widehat{M}$ 中的像等同。

我们强调，结构 $(\widehat{M}, \widehat{D})$ 取决于参数 w（一个无限整数）的选择。度量空间在等距意义下有唯一的完备化，但它可能有许多彼此不同构的非标准赫尔。

例 4.1。令 $M = \mathbb{Q}$ 为有理数集，且 $d(x, y) = |x - y|$ 为 $\mathbb{Q}$ 上的通常度量。我们固定一个无限的 $w \in \mathbb{N}$。注意，对于标准的 f，

$$f \in B_w \longleftrightarrow f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \wedge f(w) \text{ is limited},$$

并且对于标准的 f，$g \in B_w$

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle \in E_w &\longleftrightarrow f(w) \simeq g(w)\\ &\longleftrightarrow f(w), g(w) \in \mathbf{M}(a) \text{ for } a = \mathrm{sh}(f(w)) = \mathrm{sh}(g(w)).\end{aligned}$$

根据标准化原理，存在一个标准函数 $\Gamma : B_w/E_w \to \mathbb{R}$，使得对于标准的 f，$\Gamma(f/E) = \mathrm{sh}(f(w))$。容易验证，$\Gamma \restriction (B_w/E_w) \cap \mathsf{S}$ 是从 $M_w \cap \mathsf{S}$ 到 $\mathbb{R} \cap \mathsf{S}$ 的一一映射，并且保持度量：

$$\begin{aligned}\widehat{D}(f/E, g/E) = D(f, g) &= \mathrm{sh}(|f(w) - g(w)|)\\ &= |\,\mathrm{sh}(f(w)) - \mathrm{sh}(g(w))| = |\Gamma(f) - \Gamma(g)|.\end{aligned}$$

此外，对于任意标准的 $x \in \mathbb{Q}$，$\Gamma((c_x)_E) = x$。由迁移原理，Γ 是 M_w 与 $\mathbb{R}$ 之间的等距同构，并且在 $\mathbb{Q}$ 上是恒等映射。特别地，非标准壳与 w 的选择无关。

例 4.2。设 $M = \mathbb{N}$，并令 d 为 M上的离散度量；即，对于所有 x、$z \in M$、$x \neq z$，$d(x, z) = 1$。由于 M的所有点相对于此度量都是有限的，因此我们有 $B_w = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。此外

$$E_w = {}^{\mathrm{st}}\{\langle f, g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(w) = g(w)\}$$

并且，对于标准的 $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f/E = {}^{\mathrm{st}}\{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid g(w) = f(w)\} = f_w$.

$\widehat{\ }$空间 M 通过 Γ与 M_w 的一个子集相对应：$(c_x)_w \mapsto x$。

在注 5.5 中，我们证明 $\widehat{\ }$$M_w = B_w/E_w = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/w$ 恰好是 $\mathbb{N}$ 上的超滤子 U_w所生成的 M 的超幂；该超滤子由 w生成。特别是，$\widehat{\ }$它的基数为连续统。此外，D 是 M_w上的$\widehat{\ }$离散度量。按照注 4.6 的做法，用 I 替换 $\mathbb{N}$，便可得到基数任意大的非标准壳。

例 4.3。可逼近点在非标准壳的研究中起着重要作用。我们如下定义这一概念。

设 (M, d) 是一个标准度量空间。若对每个标准的 $\epsilon > 0$，都存在一个标准的 $a \in M$，使得$d(x, a) \leq \epsilon$，则点 $x \in M$ 是可逼近的。

$M \cap \mathsf{S}_w$ 中的可逼近点，恰好是其非标准壳 M_w中 M 的闭包里的标准$\widehat{\ }$点。事实上，对于满足 $f(w) = x \in M$ 的标准 $f \in B_w$，我们有

x 是可逼近的 $\longleftrightarrow \forall^{\mathrm{st}}\epsilon > 0\ \exists^{\mathrm{st}} a \in M\,(d(x, a) \leq \epsilon) \longleftrightarrow$ $\forall^{\mathrm{st}}\epsilon > 0\ \exists^{\mathrm{st}} a \in M(\ \widehat{D}(f/E, a) \leq \epsilon) \longleftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists a \in M(\ \widehat{D}(f/E, a) \leq \epsilon)$, 最后一步依据迁移原理。因此，在例 4.1 中，所有有限$x \in \mathbb{Q}$ 都是可逼近的，因而 $\mathbb{R}$ 中的所有标准点都属于 $M = \mathbb{Q}$ 的闭包。根据迁移原理，这对$\mathbb{R}$中的所有点都成立。在例 4.2 中，$\mathbb{N}$ 中的所有非标准点都不可逼近，因此 M 在 M_w中是闭的。

注 4.4. 在本节的这一构造及其他构造中，我们使用基于 Ψ 的编码。选择这种方式的优点是，它会产生$\widetilde{\ }$函数空间（尤其参见第 4.4 小节）。也可以改用 $\widetilde{\Psi}$，并定义例如 $B_w = {}^{\mathrm{st}}\{f_w \mid f(w)$ 是 $M\}$. 的有限点。这里的优点是可以得到外部结构 $(\mathsf{B}_w, \mathsf{E}_w, \mathsf{D}_w)$ 与 $(B_w \cap \mathsf{S}\ \ E_w \cap \mathsf{S}\ \ D_w \cap \mathsf{S})$ 的同构。因此，显而易见，如果后一个商能在 BST 中构造出来，那么 $((B_w/E_w) \cap \mathsf{S}, (D_w/E_w) \cap \mathsf{S})$ 将与 $(\mathsf{B}_w/\mathsf{E}_w, \mathsf{D}_w/\mathsf{E}_w)$ 同构。（它可以在 HST 中构造出来，而且这一断言在那里是一个定理。）对于最终结果，编码方法的选择并不重要。

$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$命题 4.5. 结构 $(B_w/E_w, D_w/E_w)$ 与 $(B_w/E_w, D_w/E_w)$ 同构。

~证明。对于标准的 $f, g \in M^{\mathbb{N}}$, $f \in B_w$ 当且仅当 $f_w \in B_w$, $\langle f, g\rangle \in E_w$ 当且仅当~ ~$\langle f_w, g_w\rangle \in E_w$ 且 $D_w(f, g) = D_w(f_w, g_w)$。 □

^ ^注 4.6。在构造 (M, D) 时，可以用任意无限集合 I 替换 $\mathbb{N}$，只要 $w \in I$ 是良好的。若 $\mathsf{S}_{w_1} \subseteq \mathsf{S}_{w_2}$，取一个标准函数 $h \in I_1^{I_2}$，使得 $h(w_2) = w_1$，并定义标准映射 $H\colon\ M^{I_1} \to M^{I_2}$，令 $H(f) = f \circ h$。那么 H 在显然的意义下是从 $(B_{w_1}, E_{w_1}, D_{w_1})$ 到 $(B_{w_2}, E_{w_2}, D_{w_2})$ 的嵌入，并且它可分解为从 $(B_{w_1}/E_{w_1}, D_{w_1}/E_{w_1})$ 到 $(B_{w_2}/E_{w_2}, D_{w_2}/E_{w_2})$ 的等距嵌入。给定任意良好的 w_1 和 w_2，令 $w = \langle w_1, w_2\rangle$;^ ^ ^ ^，则 (M_{w_1}, D_{w_1}) 和 (M_{w_2}, D_{w_2}) 都嵌入到 (M_w, D_w) 中。

4.2. 非标准壳的完备性。本小节说明如何使用第 4.1 小节中构造的非标准壳。

^ ^定理 4.7。（M_w, D_w）是一个完备度量空间。

^ ^证明。设 $\langle F_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ 是（M, D）中的一个标准柯西序列；^我们证明它收敛到某个 $F \in M$。

利用可数选择公理，我们得到一个标准序列$\langle f_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$F_n = (f_n)_E$。

对于 $k \in \mathbb{N}$，令 n_k 为 $\mathbb{N}$ 中大于或等于 k 的最小元素，使得

$$\forall m, n\ \left(n_k \le n \le m \to \widehat{D}(F_n, F_m) < \tfrac{1}{k+1}\right);$$

注意，序列 $\langle n_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ 是标准的。根据 D 的定义^，对于标准的 k,

$$\forall^{\mathrm{st}} m, n\ \left(n_k \le n \le m \to d(f_n(w), f_m(w)) < \tfrac{1}{k+1}\right).$$

因此 $\forall^{\mathrm{st}} k\ \exists^{\mathrm{st}} m\ \forall \ell \le k$

$$\left[n_\ell \le m \ \wedge\ \forall n\ \left(n_\ell \le n \le m \to d(f_n(w), f_m(w)) < \tfrac{1}{\ell+1}\right)\right].$$

通过将可数理想化应用于 w-标准集合，我们得到

$$\exists^{\mathrm{st}_w} m\ \forall^{\mathrm{st}} k\ \left[n_k \le m \ \wedge\ \forall n\ \left(n_k \le n \le m \to d(f_n(w), f_m(w)) < \tfrac{1}{k+1}\right)\right].$$

固定这样一个 m；显然它是无限的。考虑标准点$p = f_{n_0}(0)$。我们有 $d(p, f_m(w)) \le d(f_{n_0}(0) f_{n_0}(w)) + d(f_{n_0}(w)\ f_m(w))$。不等式右侧的第一项是有限的，因为 f_{n_0}是标准的且 $f_{n_0} \in B$，而第二项是 < 1（取 $k = 0$）。因此 $f_m(w)$ 是 M 的一个有限元素。

注意到 $f_m(w)$是 w-标准的；因此存在一个标准函数$f \in M^{\mathbb{N}}$，使得 $f(w) = f_m(w)$。由此可得 $f \in B$。令~$F = f_E \in M$。

我们有，对于所有标准的 k,

$$\forall^{\mathrm{st}} n \ \left(n_k \leq n \to d(f_n(w), f(w)) < \tfrac{1}{k+1}\right),$$

因此

$$\forall^{\mathrm{st}} n \ \left(n_k \leq n \to \widehat{D}(F_n, F) \leq \tfrac{1}{k+1}\right).$$

这表明序列 $\langle F_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ 收敛于 F。 □

只要 $w \in I$ 是良好的，定理 4.2 的证明对任意无限集合 I（代替 $\mathbb{N}$）同样成立。

4.3. 标准一致空间的非标准壳。我们将 BST 中非标准壳的构造推广到一致空间。

设 (M, Δ) 是一个标准一致空间。也就是说，M 是一个标准集合，而 Δ 是定义在 M 上的伪度量的标准族，它赋予 M一个豪斯多夫一致结构。在一致空间中，如果对于所有标准的 $d \in \Delta$，$d(x, p)$ 对某个（等价地，对所有）标准 $p \in M$而言是有限的，则 $x \in M$ 是有限的。点 x 和 y无限接近，当且仅当对于所有标准 $d \in \Delta$，$d(x, y) \simeq 0$。

我们固定一个标准无限集合 I 和一个 $w \in I$，使得对于 $\kappa = \max\{|\Delta|, \aleph_0\}$，在基数为 $\leq \kappa$ 的标准集合上，向 w-标准集合进行理想化成立（参见命题 3.5）。现在可以大致按照第 4.1 小节中的方法，构造 (M, Δ) 的非标准壳。我们省略表示其对 w依赖关系的下标。

我们令 $B = {}^{\text{标准}}\{f \in M^I \mid f(w) \text{ 是 } M\}$的一个有限点，并且对于所有标准 $d \in \Delta\}$.，$E = {}^{\text{标准}}\{\langle f, g\rangle \in B \times B \mid d(f(w)\ g(w)) \simeq 0$

对于每个标准 $d \in \Delta$，$B \times B$上的标准函数 D，以及 M、D 和 c, 均按第 4.1 小节中的定义给出。每个 D 都是 M上的一个 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$伪度量。我们令 $\Delta = {}^{\text{标准}}\{D \mid d \in \Delta \cap \mathsf{S}\}$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$定理 4.8。结构 (M, Δ) 是一个完备的豪斯多夫一致空间，并且 c将 (M, Δ) 嵌入 (M, Δ)。

证明。证明思路与定理 4.7 的证明相同；主要区别在于必须用柯西网替代柯西序列。

设 $\langle \Lambda, \leq\rangle$ 是一个标准有向集，$\langle F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\rangle$ 是一个以 Λ 为指标的标准柯西网。利用选择公理可得一个标准网 $\langle f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\rangle$，使得对所有 λ都有 $f_\lambda \in F_\lambda$；于是$\langle f_\lambda(w) \mid \lambda \in \Lambda\rangle$ 是一个 w-标准网。

柯西性质意味着，对于每个标准的 $d \in \Delta$，都存在一个由 Λ 中的元素构成的标准序列 $\langle \lambda_k^d \mid k \in \mathbb{N}\rangle$，使得 $\lambda_k^d \leq \lambda_{k+1}^d$对所有 k 均成立，并且

$$\forall k\, \forall \lambda, \mu \in \Lambda \ \left(\lambda_k^d \leq \lambda \leq \mu \to \widehat{d}(F_\lambda, F_\mu) < \tfrac{1}{k+1}\right).$$

因此

$$\forall^{\mathrm{st}} k\, \forall^{\mathrm{st}} \lambda, \mu \in \Lambda \ \left(\lambda_k^d \leq \lambda \leq \mu \to d(f_\lambda(w), f_\mu(w)) < \tfrac{1}{k+1}\right).$$

我们得出结论：对于每个标准的 $k \in \mathbb{N}$、每个标准有限的$\Delta_0 \subseteq \Delta$ 以及每个标准有限的 $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$，都存在一个标准的 $\mu \in \Lambda$，使得对于所有 $\ell \leq k$、所有 $d \in \Delta_0$ 以及所有 $\lambda \in \Lambda_0$

$$\lambda_\ell^d \leq \mu \ \wedge \ \left(\lambda_\ell^d \leq \lambda \to d(f_\lambda(w), f_\mu(w)) < \tfrac{1}{\ell+1}\right).$$

通过理想化，针对基数为 $\leq \kappa = \max\{|\Delta|, \aleph_0\}$ 的集合上的 w-标准集合，我们得到一个 w-标准 $\mu \in \Lambda$，使得对于所有标准的 k、所有标准的 $d \in \Delta$ 以及所有标准的 $\lambda \in \Lambda$

$$\lambda_k^d \leq \mu \ \wedge \ \left(\lambda_k^d \leq \lambda \to d(f_\lambda(w), f_\mu(w)) < \tfrac{1}{k+1}\right).$$

固定这样一个 μ；如第4.7小节所示，对于每个标准的 $d \in \Delta$， $d(p, f_\mu(w))$ 都是有限的，即 $f_\mu(w)$ 是 M 中的一个有限点。

由可表示性可知，存在一个标准函数 $f \in M^I$，使得$\frown f(w) = f_\mu(w)$。由此可得 $f \in B$。令 $F = f/E \in M$。

对于所有标准的 $d \in \Delta$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\forall^{\mathrm{st}} \lambda \in \Lambda \ \left(\lambda_k^d \leq \lambda \to d(f_\lambda(w), f(w)) < \tfrac{1}{k+1}\right),$$

因此

$$\forall^{\mathrm{st}} \lambda \in \Lambda \ \left(\lambda_k^d \leq \lambda \to \widehat{D}(F_\lambda, F) \leq \tfrac{1}{k+1}\right).$$

这表明网 $\langle F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$ 收敛到 F。 □

4.4 内部赋范向量空间。在许多情况下，第4.1、4.3小节中进行的构造类型可以推广到内部结构。我们以赋范向量空间为例来说明。

设 M 是定义在 $\mathbb{R}$上的内部赋范向量空间。这意味着，M、加法运算 $+$ 在 $M \times M$ 上的运算以及数乘 $\cdot$在 $\mathbb{R} \times M$上的运算，以及 $\mathbb{R}$-值范数 $\|.\|$在 M上的运算，都是（内部）集合，并满足通常的性质。为了能够应用我们的编码技巧，我们固定一个标准集合 I 和一个良好的 $w \in I$，使得集合 M、上述运算和范数都属于 $\mathbf{S}_w$。与特定研究相关的其他参数也可以设为属于 $\mathbf{S}_w$。根据 $(\mathbf{V}, \mathbf{S}_w, \in)$ 中的迁移原理，这些对象中可用 $\in$- 公式表达的性质在 $\mathbf{S}_w$ 中仍然成立，因此我们可以在“$\mathbf{S}_w$之上”而非“$\mathbf{V}$之上”进行所需的构造。

我们首先描述外部构造。设$\mathbf{B}_w = \{x \in M \cap \mathbf{S}_w \mid \|x\| \text{是有限的且} \mathbf{E}_w = \{x \in M \cap \mathbf{S}_w \mid \|x\| \simeq 0\}$。显然，$\mathbf{B}_w$ 是外部域 $(\mathbb{R} \cap \mathbf{S}$ 上的外部向量空间，$\mathbf{E}_w$ 是它的子空间。定义一个外部等价关系

$\approx$ 在 $\mathbf{B}_w$ 上定义为 $x \approx y \longleftrightarrow x - y \in \mathbf{E}_w \longleftrightarrow \|x - y\| \simeq 0$。显然，对于 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{B}_w$ 和 $c \in \mathbb{R} \cap \mathbf{S}$，有 $x_1 \approx y_1 \wedge x_2 \approx y_2 \to x_1 + x_2 \approx y_1 + y_2, c \cdot x_1 \approx c \cdot y_1$ 和 $\|x_1\| \simeq \|y_1\|$。如果 BST 中存在外部集合的外部集合，那么现在就可以构造商空间 $\mathbf{B}_w/\mathbf{E}_w$，并赋予范数 $\|x_{\mathbf{E}_w}\| = \mathbf{sh}(\|x\|)$，从而得到一个外部域 $\mathbb{R} \cap \mathbf{S}$ 上的外部赋范向量空间。当然，无法直接在 BST 中进行这种构造，但第3.2小节中引入的编码使我们能够实现这一构造，并生成一个标准赋范度量空间；从标准观点来看，该空间与 $\mathbf{B}_w/\mathbf{E}_w$（外部）同构。

由可表示性可知，存在一个标准函数$\langle (M_i, +_i, \cdot_i) \mid i \in I \rangle$，使得 $(M_w, +_w, \cdot_w) = (M, +, \cdot)$，并且对所有$i \in I$，$(M_i, +_i, \cdot_i)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的向量空间。令

$$B_w = {}^{\mathrm{st}}\{f \in \Pi_{i \in I} M_i \mid \|f(w)\| \text{ is limited}\};$$

$$E_w = {}^{\mathrm{st}}\{f \in \Pi_{i \in I} M_i \mid \|f(w)\| \simeq 0\}.$$

B_w 上的加法和数乘逐点定义：

$$(f + g)(i) = f(i) +_i g(i) \qquad \text{and} \qquad (c \cdot f)(i) = c \cdot_i f(i)$$

对于 $f, g \in B_w$, $c \in \mathbb{R}$，以及所有 $i \in I$。根据标准化，存在一个标准函数 $\|.\|$，使得对所有标准的 $f \in B_w$，都有$\|f\| = \mathbf{sh}(\|f(w)\|)$。

不难验证，B_w 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的标准向量空间，$\|.\|$ 是 B_w 上的伪范数，并且 $f \in E_w \longleftrightarrow \|f\| = 0$。因此，商空间$\sim E_w = B_w/E_w$ 是一个定义良好的标准赋范向量空间。第4.2节中的$\widehat{\ }$证明表明，$E_w = B_w/E_w$ 是完备的。

4.5. Loeb测度。设 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mu)$ 是一个内有限可加测度空间，其中 $\Omega \subseteq O$ 对于某个标准集合 O。如第6.3节所述，在 BST 中尝试“在 V 上”构造其 Loeb扩张只能取得部分成功。我们固定一个标准集合 I 和一个良好$w \in I$，使得 $\Omega\ \mathcal{A}, \mu$ 是 w-标准的。根据迁移原理，$(\Omega\ \mathcal{A}, \mu)$ 是 $\mathbf{S}_w$意义下的内有限可加测度空间，因此我们“在 $\mathbf{S}_w$上”构造 Loeb扩张。通常我们不注明其对 w 选择的依赖。在这个例子中，采用定义3.10中的编码变体比较方便。

对于每个 $X \in \mathcal{A} \cap \mathbf{S}_w$，令

$$[X] = {}^{\mathrm{st}}\{f_w \mid f \in O^I \wedge f(w) \in X \cap \mathbf{S}_w\}. \tag{1}$$

若 $X, X_1, X_2 \in \mathcal{A} \cap \mathbf{S}_w$，则等价关系 $f_w \in [X_1 \cap X_2]$ 当且仅当 $f_w \in [X_1] \wedge f_w \in [X_2]$ 且 $f_w \in [\Omega \setminus X]$ 当且仅当 $f_w \in [\Omega] \wedge f_w \notin [X]$ 成立

对所有标准 $f \in O^I$ 均成立。根据迁移原理，$[X_1 \cap X_2] = [X_1] \cap [X_2]$ 且$[\Omega \setminus X] = [\Omega] \setminus [X]$。令

$$\mathcal{B} = {}^{\mathrm{st}}\{A \in \mathcal{P}(O^I) \mid A = [X] \text{ for some } X \in \mathcal{A} \cap \mathbf{S}_w\}.$$

再次运用迁移原理，可知 $\mathcal{B}$ 是 $[\Omega]$的标准子集代数。注意，$X_1, X_2 \in \mathcal{A} \cap \mathsf{S}_w$, $X_1 \neq X_2$蕴含$[X_1] \neq [X_2]$，因此对于标准的 $A \in \mathcal{B}$，存在唯一的 $X \in \mathcal{A} \cap \mathsf{S}_w$ 使得$A = [X]$。

代数 $\mathcal{B}$ 上的标准有限可加测度 m，其值取自区间 $[0, +\infty]$，由以下要求确定：对于标准的 $A = [X] \in \mathcal{B}$

$$m(A) = \mathrm{sh}(\mu(X)).$$

测度空间（$[\Omega], \mathcal{B}, m$）满足 Carathéodory 条件。

引理4.9。若 $\langle A_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ 是 $\mathcal{B}$中一列两两不相交的集合，且 $A \in \mathcal{B}$和 $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$，则 $m(A) = \Sigma_{k\in\mathbb{N}}\, m(A_k)$。

证明。根据迁移原理，只需在假设 $\langle A_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ 和 A 均为标准的情况下证明此断言。

设 $A = [X]$，其中 $X \in \mathcal{A} \cap \mathsf{S}_w$，且对每个标准的 k，$A_k = [X_k]$，其中 $X_k \in \mathcal{A} \cap \mathsf{S}_w$。显然，$X_k$ 两两不相交，并且对所有标准的 k，$X_k \subseteq X$。

假设对每个标准的 n，都存在一个 w-标准的 $x \in X$，使得对所有 $k \leq n$，$x \notin X_k$ 成立。通过将可数理想化应用于 S_w，存在一个 w- 标准的 $x \in X$，使得对所有标准的k，$x \notin X_k$ 成立。由可表示性，存在某个标准的 $g \in O^I$，使得 $x = g(w)$。于是$g_w \in A$，但 $\forall^{\mathrm{st}} k(g_w \notin A_k)$，并且由迁移原理，$\forall k(g_w \notin A_k)$。这就产生了矛盾。

因此，存在一个标准的 n，使得 $\forall^{\mathrm{st}_w} x \in X\, \exists k \leq n\, (x \in X_k)$。由此可得 $\forall^{\mathrm{st}} F \in A\, \exists k \leq n(F \in A_k)$。根据迁移原理，$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\leq n} A_k$，并利用 m 的有限可加性，我们得到 $m(A) = \Sigma_{k\leq n}\, m(A_k) = \Sigma_{k\in\mathbb{N}}\, m(A_k)$。□

我们得出结论：m 可以扩张为一个取值于 $[0, +\infty]$ 的 σ-可加测度 $\overline{m}$，定义在由 $\mathcal{B}$ 生成的 σ 代数 $\overline{\mathcal{B}}$ 上。$([\Omega], \overline{\mathcal{B}}, \overline{m})$ 的测度论完备化就是所需的 Loeb测度空间；$\widehat{\ }$我们将其记为 $([\Omega], \mathcal{B}, \widehat{m})$（当然，它取决于 w 的选择）。无需诉诸 Carath´eodory 定理，也可以沿着 [11] 的思路直接证明；另见 Albeverio等人 [1], 的注释 3.1.5 及其中的参考文献。

$\widehat{\ }$注记 4.10。为了阐明 $([\Omega], \mathcal{B}, \widehat{m})$ 与通常的外部洛布测度空间之间的关系，我们首先回顾一下，S_w 满足

命题：$(\Omega\ \mathcal{A}, \mu)$ 是一个有限可加测度空间。在 S_w 上进行的 Loeb 构造将从外部有限可加测度空间 (Ω, A, m) 开始，其中 $\Omega = \Omega \cap S_w$，$A = \{X \cap S_w \mid X \in \mathcal{A} \cap S_w\}$，而对于 $X \in A$，有 $m(X \cap S_w) = sh(\mu(X))$。利用 Carath´eodory 定理，这个空间将扩展为外部 σ-可加测度空间，然后再取其完备化。现在我们取 $V = \Omega \cup \mathbb{R}$，例如，并注意到对于 $X \in \mathcal{A} \cap S_w$，$[X]$ 是 $X \cap S_w$ 的一个 w-编码，因此 $\mathcal{B}$ 是 A 的一个 w-编码。由此可得，$([\Omega], \mathcal{B}, m)$ 是 (Ω, A, m) 的一个 w-编码。对于外部测度空间 (Ω, A, m)，上述构造无法直接在 BST 中进行，但对其 w-编码 $([\Omega], \mathcal{B}, m)$ 则没有困难；后者是一个标准有限可加测度空间。

注4.11。我们比较从相同的 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mu)$ 得到的 Loeb测度空间，其中参数 w 的取值不同。我们用下标表示对该参数的依赖，并固定良好的 $w \in I, z \in J$，使得 I, J 是标准的，且 $S_w \subseteq S_z$。

命题4.12。存在一个标准嵌入 $H = H_{w,\ z}$，将 $\mathcal{B}_w$ 嵌入 $\mathcal{B}_z$，并保持补集和可数并，且将 $\mathcal{B}_w$ 限制为 $\mathcal{B}_z$ 的同构。若 m_w 是 σ-有限的，则对所有 $B \in \mathcal{B}_w$，还有 $\widehat{m}_w(B) = \widehat{m}_z(H(B))$。

证明。由标准化，存在一个标准函数 $H : \mathcal{B}_w \to \mathcal{B}_z$，使得对于标准的 $B \in \widehat{\mathcal{B}}_w$，有 $\widehat{H}(B) = \widetilde{\Psi}_z(\widetilde{\mathbf{\Psi}}_w^{-1}(B))$。对于 $A \in \mathcal{B}_w \cap S$，若 $A = [X]_w$ 对 $X \in \mathcal{A} \cap S_w$ 成立，则 $H(A) = [X]_z \in \mathcal{B}_z \cap S$，反之亦然。这表明 H 将 $\mathcal{B}_w \cap S$ 映到 $\mathcal{B}_z \cap S$ 上，因此由迁移原理，$\mathcal{B}_w$ 映到 $\mathcal{B}_z$ 上。

第3.2小集和可数并，因此对 H 也同样成立。我们将对可数并给出一些细节。设 $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$，其中 $\langle B_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ 是标准的，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $B, B_n \in \mathcal{B}_w$。定义外部集合 $X = \{\langle n, x\rangle \mid x \in \widetilde{\mathbf{\Psi}}_w^{-1}(B_n) \subseteq (\mathbb{N} \cap S) \times O\}$，使得 $B_n = \widetilde{\Psi}_w(X_n)$。于是我们有 $B = \widetilde{\Psi}_w(\bigcup_{n\in\mathbb{N}\cap S} X_n)$，因此 $\widetilde{\mathbf{\Psi}}_w^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cap S} X_n$，并且 $\widehat{H}(B) = \widetilde{\Psi}_z(\widetilde{\mathbf{\Psi}}_w^{-1}(B)) = \widetilde{\Psi}_z(\bigcup_{n\in\mathbb{N}\cap S} X_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\Psi}_z(\widetilde{\mathbf{\Psi}}_w^{-1}(B_n)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{H}(B_n)$。

从 $m(A)$ 的定义可知，$m_w(A) = m_z(H(A))$ 对标准的 $A \in \mathcal{B}_w$ 成立，因此根据迁移原理，对所有 $A \in \mathcal{B}_w$ 都成立。如果 m_w 是 σ-有限的，那么完备的 Carath´eodory 测度 $\widehat{m}_w$ 是唯一确定的。如果对于某个 $B \in \mathcal{B}_w$，$\widehat{m}_w(B) \neq \widehat{m}_z(H(B))$，那么 $\widehat{m}_w$ 和 $\widehat{m}_z \circ H$ 将是从 $\mathcal{B}_w$ 到 $\mathcal{B}_w$ 的 m_w 的两个不同扩张，这就产生了矛盾。□

4.6. 从 Loeb测度得到勒贝格测度。众所周知，勒贝格测度可以由适当的 Loeb测度得到。[6]我们将在区间 $[0,1]$ 上，在我们的框架中概述这一论证。更多细节可参见 Albeverio 等人 [1] （采用模型论方法）。

对于 $n \in \mathbb{N}$ 令 $\mathcal{T}_n = \{i/n \mid 0 \le i \le n\}$。固定一个非标准整数 $w \in \mathbb{N}$，并令 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_w$ （在模型论框架中，与 $\mathcal{T}$ 等价的概念称为“超有限时间线”）。令 $O = [0,1]$，$\Omega = \mathcal{T}$，$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{T})$，并令 μ 为 $\mathcal{T}$ 上的计数测度，即对所有集合 $X \subseteq \mathcal{T}$，$\mu(X) = |X|/|\mathcal{T}|$。上一小节中的构造取 $I = \mathbb{N}$、$\widehat{\ }$时，得到 Loeb 测度 $([\Omega], \mathcal{B}, \widehat{m})$。

对于每个标准 $A \subseteq [0,1]$，定义

$$\bullet A = {}^{\mathrm{st}}\{f_w \in [\Omega] \mid f(w) \simeq c \text{ for some standard } c \in A\}.$$

这仅意味着 $\bullet A$ 是 $\mathrm{sh}^{-1}(A) \cap \mathcal{T} \cap \mathbb{S}_w$的一个 w-编码。集合 $\bullet A$ 的标准元素是那些 $f_w \in [\Omega]$，其“无穷远处”（即在 w处）的值无限接近 A中的一个标准实数。

$\widehat{\ }$令 $\mathcal{L} = {}^{\mathrm{st}}\{A \subseteq [0,1] \mid \bullet A \in \mathcal{B}\}$，并令 ℓ 为由以下条件确定的 $\mathcal{L}$ 上的标准函数：对于所有标准的$A \in \mathcal{L}$，$\ell(A) = \widehat{m}(\bullet A)$。

定理 4.13。三元组（$[0,1]$，$\mathcal{L}$，ℓ）是 $[0,1]$ 上的勒贝格测度空间。

证明。我们证明 $\mathcal{L}$ 是一个包含所有标准开区间（a，b）$\subseteq [0,1]$ 以及所有标准 $c \in [a,b]$对应的单点集 $\{c\}$ 的 σ-代数。我们还证明 ℓ 是 σ-可加的，并且对于所有标准开区间和单点集，分别有 $\ell((a,\ b)) = b - a$，$\ell(\{c\}) = 0$。这表明 $\mathcal{L}$ 包含 $[0,1]$ 的所有勒贝格可测子集，并且 ℓ是这些子集上的勒贝格测度。关于在（模型论框架下）证明 $\mathcal{L}$ 中的所有集合都是勒贝格可测的，参见 [1],命题 3.2.5；这一证明很容易改编到我们的框架中。

设 $\langle A_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ 为 $\mathcal{L}$ 的元素的标准序列，且$\widehat{\ }$令 $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$。那么，对于所有标准的 $k \in \mathbb{N}$，$\bullet A_k \in \mathcal{B}$ 均成立；由此可得 $\bullet A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bullet A_k$，因为若对于某个标准的 $\backsim a \in A$，$f(w) \simeq a$，那么根据迁移原理，对于某个标准的 $k \in \mathbb{N}$，$a \in A_k$。由于 $\mathcal{B}$

[6]不借助 Loeb测度作为中间步骤，也可以通过非标准方法构造勒贝格测度。在公理化方法中，Lyantse 和 Kudryk [24], 附录 A 在 IST 框架下提出了一种实现这一点的方法。另一种方法隐含于 Hrbacek [11] 的工作中，并由 Hrbacek 和 Katz [12] 在 SCOT 框架下明确阐述。SCOT 是 IST 和 BST 的一个子理论，对 ZF + 依赖选择作保守扩张。关于一种“极端初等”的方法，参见 Cartier 和 Perrin [2, 3]。

$\widehat{\ }$是一个 σ-代数， $^\bullet A \in \mathcal{B}$ ，因此我们得出 $A \in \mathcal{L}$。此外，$\ell(A) = \widehat{m}(^\bullet A) = \Sigma_{k\in\mathbb{N}}\ \widehat{m}(^\bullet A_k) = \Sigma_{k\in\mathbb{N}}\ \ell(A_k)$，从而确立了 ℓ 的 σ-可加性。

给定一个标准开区间 $(a,b) \subseteq [0,1]$，我们令 $X_{a,b} = \mathcal{T} \cap (a,b)$ 。我们有 $[X_{a,b}] \in \mathcal{B}$ 且 $m([X_{a,b}]) = \mathsf{sh}(\mu(X_{a,b})) = b-a$。

设 $A = (a,b)$ ；接下来只需注意，对于标准的 $f_w \in [\Omega]$， $f_w \in {}^\bullet A$ 当且仅当对于某个标准的 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，有 $f_w \in [X_{a+1/m,\, b-1/m}]$。标准化给出函数 $\langle A_m \mid m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\rangle$，其中对于标准的 m，有 $A_m = [X_{a+1/m,\, b-1/m}]$；迁移原理推出 $^\bullet A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_m$。由此可得 $^\bullet A \in \overline{\mathcal{B}}$，因为后者是一个 σ-代数；并且 $\overline{m}(\overline{A}) = b-a$，因为 $\overline{m}$ 是 m 的 σ-可加扩张。因此 $A \in \mathcal{L}$ 且 $\ell(A) = b-a$。

关于 $A = \{c\}$的论证类似，利用了以下事实： $^\bullet A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_m$ ，其中 $A_m = [X_{c-1/m,\, c+1/m}]$ 适用于标准的 m。□

4.7. 中性元与外部数。这是非标准分析的另一项应用，其中大量使用了外部集合；参见 Dinis 和 van den Berg [7]。中性元是$\mathbb{R}$的凸加法子群。除 $\{0\}$和 $\mathbb{R}$外，中性元都是外部集合；单子 M(0) 和星系 G(0) 是非平凡的例子。外部数是实数与中性元的代数和。外部数的加法和乘法由闵可夫斯基运算定义。令 $\mathcal{N}$ 表示所有中性元构成的集族，令 $\mathcal{E}$ 表示所有外部数构成的集族。即使在 HST 中， $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{E}$ 也是外部集合的（可定义）真类；它们“大得过头”，无法成为外部集合（参见 Kanovei 和 Reeken [14]）。

通过将这些概念相对化到$\mathbf{S}_w$（对于某个 w）可以解决这一困难。事实上，$\mathcal{N}_w = \{\mathbb{X}\cap\mathbf{S}_w \mid \mathbb{X} \in \mathcal{N}\}$和 $\mathcal{E}_w = \{a+\mathbb{X}\cap\mathbf{S}_w \mid a \in \mathbb{R}\cap\mathbf{S}_w \wedge \mathbb{X} \in \mathcal{N}\}$。集合族 $\mathcal{N}_w$ 和 $\mathcal{E}_w$ 在 HST 中是外部集合（由外部集合构成）。

由于由 $r \mapsto r+\{0\}$ 给出的 $\mathbb{R}\cap\mathbf{S}_w$ 到 $\mathcal{E}_w$ 的自然嵌入对于这些概念的应用至关重要，因此在大多数情况下，尽可能避免编码或许是最佳做法。例如，在 BST 中研究运算 $+$ 和 $\times$ 在 $\mathcal{E}_w$ 上的代数性质时，可以将外部数视为 $\mathbb{R}\cap\mathbf{S}_w$ 的外部子集。可是，对外部数的研究往往着眼于结构（$\mathcal{E}_w$、$+$、$\times$）、它的子集、取值于其中的函数等等。此时便可采用第3.2小节中的技巧；尤其可参见带有 $V=\mathbb{R}$ 的定义3.10，用标准结构对 $\mathcal{N}_w$ 和 $\mathcal{E}_w$ 进行编码。

首先，外部集合 $\mathbb{R}\cap\mathbf{S}_w$ 由标准集合 $\mathbb{R}^I/w$编码。如注 5.5 $\mathbb{R}^I/w = \mathbb{R}^I/U_w = {}^*\mathbb{R}$所示，作为 $\mathbb{R}$的标准超幂、由标准超滤子构造出的超实数

U_w 由 w生成。设 ${}^*<$、 ${}^*+$ 和 ${}^*\times$ 分别为超实数上的序、加法和乘法。编码给出了 $({}^*\mathbb{R}\cap \mathsf{S}\ {}^*<, {}^*+, {}^*\times)$ 与 $(\mathbb{R}\cap \mathsf{S}_w, <, +, \times)$ 之间的一个外部同构，因此我们可以非正式地将 ${}^*\mathbb{R}\cap \mathsf{S}$ 与 $\mathbb{R}\cap \mathsf{S}_w$视为相同。超实数 $({}^*\mathbb{R}, {}^*<, {}^*+, {}^*\times)$ 中的中性元和外部数可以用与 $\mathbb{R}$中相同的方式定义。 $\mathbb{R}\cap \mathsf{S}_w$ 中的外部数由超实数中的标准外部数${}^*\mathbb{R}$编码。该编码保留了外部数上的代数运算。集合 $\mathcal{N}_w$ 和 $\mathcal{E}_w$ 分别由标准集合 N 和 E 编码，它们分别由所有中性元和外部数组成，位于 ${}^*\mathbb{R}$.

诚然，这种方法相当笨拙。在 HST 中，宇宙 S_w 可以扩展为“外部宇宙”WF(S_w)（详情见 Kanovei 和 Reeken [15], 第 6.3、6.4 节）。处理外部数或许最实用的方式，是在这些宇宙中使用 $\mathcal{N}_w$ 和 $\mathcal{E}_w$，最后再按需将最终结果编码在 BST 中。

5. 子宇宙

5.1. 子宇宙 S_w 与超幂。宇宙 S_w 与标准宇宙关于标准超滤子的超幂密切相关。

标准化原理蕴含存在一个标准集合U_w，使得

$$\forall^{\mathrm{st}} X\,(X\in U_w \longleftrightarrow X\in \mathcal{P}(I)\ \wedge\ w\in X). \tag{2}$$

显然 (i) $\emptyset\notin U_w$，并且对于标准的 X， $Y\in \mathcal{P}(I)$ (ii) $X\in U_w\wedge X\subseteq Y\to Y\in U_w$; (iii) $X,Y\in U_w\to X\cap Y\in U_w$; (iv) $X\in U_w\vee (I\setminus X)\in U_w$。

根据迁移原理，(ii)–(iv) 对所有 $X,Y\in\mathcal{P}(I)$ 都成立，因此 U_w 是 I 上的超滤子。容易看出， U_w 是非主的，当且仅当 w 是非标准的。反过来，BST 的有界理想化意味着，对于每个定义在 I 上的标准超滤子 U，都存在（许多） $w\in I$ 使得 $U=U_w$。

全体集合构成的宇宙 V 关于标准超滤子U 的超幂按通常方式定义。在 V^I 上定义等价关系 $=_U$如下:

$$f=_U g\longleftrightarrow \{i\in I\mid f(i)=g(i)\}\in U, \tag{3}$$

以及一种隶属关系

$$f\in_U g\longleftrightarrow \{i\in I\mid f(i)\in g(i)\}\in U. \tag{4}$$

此时通常的做法是构造函数 $f \in \mathbf{V}^I$ 模 $=_U$ 的等价类 f_U，并使用“斯科特技巧”，只取冯·诺依曼秩最小的函数，以确保这些等价类是集合：令

$$f_U = \{g \in \mathbf{V}^I \mid g =_U f \text{ and } \forall h \in \mathbf{V}^I\,(h =_U f \to \operatorname{rank} h \geq \operatorname{rank} g)\};$$

参见 Jech [13], （9.3）和（28.15）。令 $\mathbf{V}^I/U$ 为所有 f_U关于 $f \in \mathbf{V}^I$ 的 f_U 所成的类，并定义

$$f_U \in_U g_U \longleftrightarrow f \in_U g. \tag{5}$$

$\mathbf{V}$ 关于 U 的超幂是结构（$\mathbf{V}^I/U$， $\in_U$）。宇宙 $\mathbf{V}$ 通过 $x \mapsto (c_x)_U$ 嵌入 $\mathbf{V}^I/U$，其中 c_x 是在 I 上取值为 x的常值函数。

我们注意到， f_U 是标准的，当且仅当对于某个标准的 $g \in \mathbf{V}^I$，有 $f_U = g_U$。从现在起，我们假设每当等价类 f_U 是标准的，就取其代表函数 f 为标准函数。

关键洞见在于，$\mathbf{V}$ 关于 U_w 的超幂的标准元素，与 $\mathbf{V}$ 的w-标准元素之间存在保持相等关系和隶属关系的对应。这由下面的命题表述，它是定义（3）—（5）的直接推论。

命题 5.1。对于任意标准函数 f、 $g \in \mathbf{V}^I$:

$$f =_{U_w} g \longleftrightarrow f_{U_w} = g_{U_w} \longleftrightarrow f(w) = g(w) \quad and$$

$$f \in_{U_w} g \longleftrightarrow f_{U_w} \in_{U_w} g_{U_w} \longleftrightarrow f(w) \in g(w).$$

对应关系 $\mathbf{\Phi}_w$ 定义在 $\mathbf{S}_w \times (\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S})$ 上，定义如下:

$$\mathbf{\Phi}_w(\xi, f_{U_w}) \longleftrightarrow f(w) = \xi.$$

用这种记号，命题 5.1 表述如下。

推论 5.2。类 $\mathbf{\Phi}_w$ 是结构 $(\mathbf{S}_w, \in)$ 与 $(\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S} \ \in_{U_w})$ 之间的一个同构。

注意，$(\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S} \ \in_{U_w})$ 是按照标准宇宙 $\mathbf{S}$ 的意义所说的宇宙的超幂。若 $\phi(v)$ 是一个 $\in$-公式，且 $\mathbf{V}^I/U_w = \{F \mid \phi(F)\}$，则 $\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S} = \{F \in \mathbf{S} \mid \phi^{\mathrm{st}}(F)\}$。若 $\psi(u, v)$ 是一个 $\in$-公式，且 $F \in_{U_w} G \longleftrightarrow \psi(F, G)$，则 $F \in_{U_w} G \longleftrightarrow \psi^{\mathrm{st}}(F, G)$ 对 $F, G \in \mathbf{S}$ 成立。

若 $\mathbf{\Phi}_w(\xi, f_{U_w})$ 成立，我们记作 $\mathbf{\Phi}_w(\xi) = f_{U_w}$。注意，对于 $x \in \mathbf{S}$,$\mathbf{\Phi}_w(x) = (c_x)_{U_w}$，其中 c_x 是 I 上取值为 x 的常值函数。按照惯例，我们将 $(c_x)_{U_w}$ 与 x 等同。这给出了推论 5.2 的一个更强版本。

推论 5.3。类 $\mathbf{\Phi}_w$ 是结构 $(\mathbf{S}_w, \mathbf{S}\ \in,)$ 与 $(\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S}, \mathbf{S}\ \in_{U_w})$ 之间的一个同构。

我们还注意到，$\mathbf{\Phi}_w(w) = Id_{U_w}$ 其中 $Id(i) = i$ 对所有 $i \in I$均成立。

回顾一下，上标为 st 的量词$_w$ 遍历 w-标准集合。若 ϕ 是一个 $\in$-公式，ϕ^{st_w} 就是将 ϕ中的所有量词都相对化到 st$_w$后得到的公式。Lo´s 定理对于 $\in$-公式的形式如下:

引理 5.4。对于标准的 f_1、……、 f_r,

$$\phi^{\mathrm{st}_w}(f_1(w), \ldots, f_r(w)) \longleftrightarrow \{i \in I \mid \phi(f_1(i), \ldots, f_r(i))\} \in U_w.$$

结构 $(\mathbf{V}^I/U_w, \in_{U_w})$ 和 $(\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S}\ \in_{U_w})$ 并非模型论意义上的模型，因为它们的组成部分都是真类；因此，满足关系 $\vDash$ 并不适用。给定一个参数取自 $\mathbf{V}^I/U_w$ 的 $\in$-公式 ϕ，我们用“ϕ 在 $(\mathbf{V}^I/U_w, \in_{U_w})$ 中成立”表示由 ϕ 替换其中所有 $u \in v$ 并将所有量词相对化到 $\mathbf{V}^I/U_w$后得到的公式；类似地，“ϕ 在 $(\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S}\ \in_{U_w})$ 中成立”也作相同理解。

引理 5.4 的证明。我们有

$$\phi^{\mathrm{st}_w}(f_1(w), \ldots, f_r(w)) \longleftrightarrow$$

$\phi((f_1)_{U_w}, \ldots, (f_r)_{U_w})$ 在 $(\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S}\ \in_{U_w})$ [中成立，由推论 5.2]

$\longleftrightarrow \phi((f_1)_{U_w}, \ldots, (f_r)_{U_w})$ 在 $(\mathbf{V}^I/U_w, \in_{U_w})$ [中成立，由迁移原理]

$\longleftrightarrow \{i \in I \mid \phi(f_1(i) \ldots, f_r(i))\} \in U_w$ [，根据通常的 Lo´s 定理]。 □

注 5.5。在第3.2小节中，我们固定一个全标准集合 V，并对标准的 $f \in V^I$ 定义 $f_{w,\ V}$（见定义3.10）。显然

$$f_{w,V} = {}^{\mathrm{st}}\{g \in V^I \mid g(w) = f(w)\} = {}^{\mathrm{st}}\{g \in V^I \mid g =_{U_w} f\}$$
$$= \{g \in V^I \mid g =_{U_w} f\},$$

其中最后一步依据迁移原理。因此，再由迁移原理可知，V^I/w 不过就是超幂 V^I/U_w。

5.2. 第 3.1 小节中各项断言的证明。

命题 5.6。集合 w 是良好的，当且仅当 U_w 是可数不完备的。

当然，在非标准分析中，我们关注的是基于可数不完备超滤子构造的超幂。

证明。由 $\mathbf{\Phi}$ w-内部集合的宇宙 $(\mathbf{S}_w, \in)$ 与超幂 $((\mathbf{V}^I/U_w) \cap \mathbf{S}\ \in_{U_w})$ 之间的同构立即可得（参见 Chang-Keisler [4],第 4.3 节）。□

命题 3.4 的证明

（1）的证明：假设 $\exists x\ \phi(x, p_0)$，其中 p_0 是（不妨设为唯一的）参数，且 $\mathrm{st}_w(p_0)$。固定一个标准集合 P，使得 $p_0 \in P$（有界性）。利用选择公理得到一个定义在 P 上的标准函数 F，使得 $\forall p \in P(\exists x\, \phi(x,p) \to \phi(F(p)\ p))$。因此，$\phi(F(p_0)\ p_0)$ 成立。由于 $F(p_0)$ 根据命题 3.2（c）是 w-标准的，我们得出 $\exists^{\mathrm{st}_w} x\ \phi(x, p_0)$。□

（2）的证明：众所周知，任意由可数不完备超滤子 U 生成的超幂都是 ω_1-饱和的（参见 Chang-Keisler [4], 定理 6.1.1）。因此，可数理想化可表示为

(6)
$$\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \exists x\ \forall m \in \mathbb{N}\ (m \le n\ \to \phi(m,x)) \longleftrightarrow \exists x\ \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \phi(n,x)$$

在 $(\mathbf{V}^I/U_w, \mathbf{V}\ \in_{U_w})$ 中成立。根据 BST 转移，(6) 在 $(\mathbf{V}^I/U_w \cap \mathbf{S}, \mathbf{S}\ \in_{U_w})$ 中成立；根据推论 5.3，它也在 $(\mathbf{S}_w, \mathbf{S}\ \in)$ 中成立。这转化为 $\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \exists^{\mathrm{st}_w} x\ \forall^{\mathrm{st}_w} m \in \mathbb{N}(m \le n\ \to \phi^{\mathrm{st}_w}(m,x)) \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st}_w} x\ \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \phi^{\mathrm{st}_w}(n,x)$。利用 w-迁移原理，我们得到所需形式

$$\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \exists x\ \forall m \in \mathbb{N}\ (m \le n\ \to \phi(m,x)) \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st}_w} x\ \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \phi(n,x). \quad \square$$

（3）的证明：回顾一下，$\mathrm{st}_w(x)$ 意味着对于某个定义在 I 上的标准 g，$x = g(w)$ 成立。设 $\phi(v)$ 是一个带有标准参数的 $\in$-公式。假设 $\phi(g(w))$；那么根据 w-迁移原理，$\phi^{\mathrm{st}_w}(g(w))$。由 $(\mathbf{S}_w, \in)$ 与 $(\mathbf{V}^I/U_w) \cap \mathbf{S}\ \in_{U_w})$ 之间的同构以及 Lo´s 定理，可推出 $X = \{i \in I \mid \phi(g(i))\} \in U_w$。取 $i_0 \in X$，并令 f 为由下式定义的标准函数

$$f(i) = g(i) \text{ for } i \in X;\ f(i) = f(i_0) \text{ otherwise.}$$

那么，对所有 $i \in I$，$f(w) = x$ 和 $\phi(f(i))$ 均成立。 □ □

定义 5.7. 设 κ 是一个标准无限基数。若集合 w 是一个 κ^+-良好的超滤子，当且仅当 U_w 是一个可数不完备的 κ^+-良好超滤子（特别地，w 是良好的，当且仅当它是 ω_1-良好的；参见命题 5.6。）

我们将以如下形式证明命题 3.5。

命题 5.8.（将理想化到基数为 $\le \kappa$ 的集合上的 w-标准集合）设 ϕ 是一个具有 w-标准参数的 $\in$-公式。若 w是 κ^+-良好的，那么对于每个基数为 $\le \kappa$ 的标准集合 A

$$\forall^{\mathrm{stfin}} a \subseteq A\ \exists y\ \forall x \in a\ \phi(x,y) \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st}_w} y\ \forall^{\mathrm{st}} x \in A\ \phi(x,y).$$

对于每个标准不可数基数 κ 和每个 z，都存在 κ^+- 良好的 w，使得 z 是 w-标准的。

命题 5.8 的证明

从而由 Chang and Keisler [4, 定理6.1.8）指出，任何由可数不完备的 κ^+-良超滤子 U 得到的超幂都是 κ^+-饱和的。如同（2）的证明所示，由此可得，在（$\mathbf{S}_w, \mathbf{S} \in$）中，对基数为 $\leq \kappa$ 的集合成立有界理想化，其中 κ^+ 是良的 w。

为了也得到 $z \in \mathbf{S}_w$ 我们使用 Keisler [16] 证明的以下事实：

若 U 是定义在 I 上的可数不完备 κ^+-良超滤子，且 V 是定义在 J 上的超滤子，则由下式定义的定义在 $I \times J$ 上的超滤子 $U \otimes V$

$$X \in U \otimes V \longleftrightarrow \{i \in I \mid \{j \in J \mid \langle i, j\rangle \in X\} \in V\} \in U$$

是可数不完备且 κ^+-良好的。

$\otimes$ 的定义意味着，对于每个标准的 $X \in U \otimes U_z$，都存在一个标准的 $i \in I$，使得 $\{j \in J \mid \langle i, j\rangle \in X\} \in U_z$，因此 $\langle i, z\rangle \in X$。由有界理想化可得 $w \in I$，使得对所有标准的 $X \in U \otimes U_z$，$\langle w, z\rangle \in X$ 成立；换言之，$U_{\langle w,\ z\rangle} = U \otimes U_z$。于是 $z \in \mathbf{S}_{\langle w,\ z\rangle}$，并且 $\langle w, z\rangle$ 是 κ^+-良好的，因此 $\mathbf{S}_{\langle w,\ z\rangle}$满足关于基数为 $\leq \kappa$的集合的有界理想化。□

注5.9. 更一般的宇宙。第 3.1 小节中 w-标准集合的定义可以推广。设 $w : S \to I$，其中 S, I是标准集合。我们定义

$$\mathbf{S}_w = \{f(w(s_1), \ldots, w(s_k)) \mid k, f \in \mathbf{S},\ \operatorname{dom} f = I^k \text{ and } s_1, \ldots, s_k \in S \cap \mathbf{S}\}.$$

结果表明，这些宇宙恰好对应于标准宇宙的标准极限超幂。证明类似于模型论证明：每个内宇宙 ${}^*V(X)$都是超结构 $V(X)$的一个有界极限超幂；参见 Chang and Keisler [4],定理 4.4.19 和 6.4.10。经过适当修改，本文所述的所有结果对于这一更一般的w-标准集合概念仍然成立。

6. Some earlier constructions

已有若干较早的出版物讨论了内部框架中的非标准壳和 Loeb测度的构造。下面我们总结这些工作，并作出一些批判性评估。

6.1. “完整的”非标准壳。设 (M, d) 是一个标准度量空间。在 BST 中尝试对 (M, d) 进行非标准壳构造，可以从以下步骤开始。令

对于某个标准的 $a \in M$，$\mathbf{B}_{\max} = \{x \in M \mid d(x, a) \text{ 是有限的}\}$

令 $\mathbf{E}_{\max}$ 为 $\mathbf{B}_{\max}$ 上的等价关系，其定义为

$$\mathbf{E}_{\max} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbf{B}_{\max} \times \mathbf{B}_{\max} \mid d(x, y) \simeq 0\}.$$

最后，定义函数 $\mathrm{D}_{\max}$，其取值为标准实数：

$$\mathbf{D}_{\max} = \{\langle x, y, r\rangle \in \mathbf{B}_{\max} \times \mathbf{B}_{\max} \times \mathbb{R} \mid r = \mathrm{sh}(d(x,y))\}.$$

类 $\mathrm{B}_{\max}$、$\mathrm{E}_{\max}$ 和 $\mathrm{D}_{\max}$ 是（可定义的）外部集合。对于每个 $x \in \mathrm{B}_{\max}$，等价类 $\mathrm{M}(x) = \{z \in \mathrm{B}_{\max} \mid d(x,z) \simeq 0\}$ 都是一个外部集合。然而，构造 (M, d) 的非标准壳的最后一步，即形成商空间 $(\mathrm{B}_{\max}/\mathrm{E}_{\max}, \mathrm{D}_{\max}/\mathrm{E}_{\max})$，无法在 BST 中完成（这需要一个“类的类” $\{\mathrm{M}(x) \mid x \in \mathrm{B}_{\max}\}$）。

有几种方法可以绕过这一困难。或许最直接的方法是放弃形成商空间，转而使用等价类的代表元（即 $\mathrm{B}_{\max}$ 的元素），并用同余关系 $\mathrm{E}_{\max}$ 代替实际的等号。这类似于使用分数而非有理数。但这种方法无法将非标准壳构造为 BST 中的一个实际对象。

商空间 $(\mathrm{B}_{\max}/\mathrm{E}_{\max}, \mathrm{D}_{\max}/\mathrm{E}_{\max})$ 可以在 HST 中构造（使用其针对 st-$\in$-公式的替换公理）。HST 的一种解释可以在 BST 中进行编码（参见 [15], 定义 5.1.2、定理 5.1.4 和推论 5.1.5），因此，通过这种间接方式，“完整的”非标准壳可以在 BST 中编码。遗憾的是，所涉及的编码远非任何意义上的“态射”，因此所得的不透明编码不适合将关于非标准壳的直觉迁移到其编码版本上。使用子宇宙的一个原因在于，它们具有自然的编码方式（通过标准集合）。

或许，采用这种方式构造非标准壳最严重的缺点，是 $(\mathrm{B}_{\max}/\mathrm{E}_{\max}, \mathrm{D}_{\max}/\mathrm{E}_{\max})$ 实在“太大了”。显然，第 4.1 小节中考察的 (M, d) 的每个非标准壳 $(\mathrm{B}_w/\mathrm{E}_w, \mathrm{D}_w/\mathrm{E}_w)$ 都能等距嵌入 $(\mathrm{B}_{\max}/\mathrm{E}_{\max}, \mathrm{D}_{\max}/\mathrm{E}_{\max})$（注意，$\mathrm{B}_w = \mathrm{B}_{\max} \cap \mathrm{S}_w$、$\mathrm{E}_w = \mathrm{E}_{\max} \cap \mathrm{S}_w$，以及 $\mathrm{D}_w = \mathrm{D}_{\max} \cap \mathrm{S}_w$）。在许多有趣的情形下，度量空间 (M, d) 拥有基数任意大的非标准壳，因此 $\mathrm{B}_{\max}/\mathrm{E}_{\max}$ 不具有标准大小。若采用这种方法，之后很难继续研究非标准壳，例如将它们与其他标准度量空间进行比较、取它们的积，或构造其上的连续函数空间。它们类似于通过对所有群取直和（或积）而构造的“泛群”。在 ZFC 中，这个“对象”是真类，除了用于分类记账之外，几乎从未派上用场。使用子宇宙进行研究的另一个重要之处在于，所得到的对象是标准集合（或标准大小的外部集合）。

6.2. Vakil 的构造。在 [31], Vakil 提出了一种在 IST 中构造一致空间的非标准壳的方法。其方法无需固定某个特定的子宇宙，而且对标准化的运用方式与本文类似。但 Vakil 的方法只适用于某一类一致空间，即所谓的 Henson-Moore 空间。值得注意的是，这些空间恰好是其非标准壳与非标准宇宙的选择无关的空间；也就是说，其非标准壳在同构意义下唯一，且具有标准大小；参见 Henson-Moore [9] 和 Vakil [33]。

6.3. IST 中的勒布测度。Diener 和 Stroyan [6], 第 274 页概述了一种在 IST 中构造勒布测度的可能方法，并引用 Stroyan 和 Bayod [30], 第 2.2 节以了解更多细节。这里我们简要考察这一方法。

设 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mu)$ 是一个内有限可加测度空间，其中 $\Omega\ \subseteq O$ 是一个标准集合 O。为简单起见，我们取 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$，并从 BST 的角度分析 Loeb 的构造。第一步是将代数 $\mathcal{A}$ 扩展为一个外部 σ-代数。BST 中的有界理想化意味着，外部可数个（内部）集合的并，要么等于有限个集合的并，要么不是内部的。因此，从一开始，构造就必须处理外部集合。在 BST 中，将外部集合作为对象处理的唯一方法，是以某种方式用集合对其进行编码。例如，每个由（内部）集合构成的外部序列 $X_n \mid n \in \mathbb{N} \cap \mathbf{S}$都有一个扩展 $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$，使其成为一个（内部）序列，[7] 可将其视为该序列的编码（当然，一个外部序列有许多种编码）。这种编码可以扩展到代数中 Ω 的（内部）子集所构成的博雷尔层级的更高层级。文献 [6, 30], 提出了一种更简单的解决方案，即借助苏斯林图式对勒布可测集合进行编码。可以在 BST 中将一个 苏斯林图式 定义为一个函数 $S:\ \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathcal{P}(\Omega)$。令 $\mathcal{F} = \mathbb{N}^{\omega}$。核 S 是外部集合

$$\mathbf{ker}S = \bigcup_{f \in \mathcal{F} \cap \mathbf{S}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cap \mathbf{S}} S_{f\restriction n}.$$

可由苏斯林图式的核获得的外部集合称为 Henson 集，而在 Ω 中其补集也是 Henson 集的 Henson 集则是 Loeb 集。Loeb 集构成包含 $\mathcal{P}(\Omega)$ 的最小外部 σ-代数 $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{A})$；参见 [30], 定理 2.2.3（卢津分离定理）。设 L 是所有满足 $\mathbf{ker}S_1 \cap \mathbf{ker}S_2 = \emptyset \mathbf{and}\ \mathbf{ker}S_1 \cup \mathbf{ker}S_2 = \Omega$ 的有序对 $\langle S_1, S_2 \rangle$ 所组成的外部集合。那么，L 可被视为 Loeb 集的编码

[7]这由 BST 的延拓原理得出；参见 Kanovei 和 Reeken [15],第3.2e节。

集合。代数运算（并集、补集、外部可数并）可以通过 L 上的外部关系进行编码，而 Loeb 测度本身则可以通过 L 上的外部关系进行编码 $\times(\mathbb{R}\cap S)$。

第6.1小节中针对“完整”非标准壳提出的异议，同样适用于上述 Loeb 测度方法。具体而言，无法将 L 按照这样的关系取商：当两个编码编码的是同一个外部集合时，它们等价；而集合论运算的编码也不是一个“态射”（例如，两个集合之并的编码绝非其编码的并）。通过编码来处理 L 上的随机变量会很不方便，而随机变量的集合更是难以处理。此外，文献中（参见 Albeverio等人 [1], Kanovei 和 Reeken [15]）通常将其完备化 $\boldsymbol{L}(\mathcal{A})$ 而非 $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{A})$ 视为 Loebσ-代数。通常无法将 L 扩展为一个包含 $\boldsymbol{L}(\mathcal{A})$ 编码的外部集合（即使在 HST 中也不行，因为那里不满足外部集合的幂集公理）。基于这些理由，这种方法是否确实表征了 Loeb测度空间，值得商榷。

6.4. 有界内部集合论。承接 Lind- strøm 的思想，Diener 和 Stroyan 致力于“描述 Robinson 理论两种方法之间的共同基础”。他们以公理化的方式研究多饱和的非标准宇宙（ [17], （ [6]）[8] （$\mathfrak{N}=$）V）中的情况。他们提出了有界内部集合论（bIST），并证明其公理在这类宇宙中成立。该理论不应与 BST 混淆。主要区别如下：

- bIST 的语言与结构 $\mathfrak{N}$ 密切相关。它为 V（$^*S$）中的每个内部集合都包含一个常量符号，此外还有其他符号；特别是，它是不可数的。
- 公理模式 T、I 和 S 经过了修改，仅适用于所有量词均有界的公式。
- ZFC 的公理并未被设为公设（事实上，替换公理在 V（S）中不成立）。

bIST 能证明许多在 IST 或 BST 中熟知的结果，但与这些理论一样，其变量的取值范围是内部集合。若不进行某种编码，它无法处理高阶外部集合。当然，非标准宇宙 $\mathfrak{N}$ 确实提供了可用于按通常方式构造非标准壳与 Loeb 测度的外部集合，但此时采用的是模型论方法，而非公理化方法

[8] $\mathfrak{N}$ 是多饱和的，当且仅当它对 $\kappa=|V(^*S)|$ 是 κ-饱和的。

。总的来说，bIST 更像是研究超结构的一种实用工具，而非一套独立的非标准分析公理体系。

6.5. 有限集上的测度与积分。Nelson 的彻底初等概率论 [26]只研究（超）有限概率空间。它只需要非常初等的公理（见 [26],第 4 章），这些公理很容易由 IST 公理推出，甚至也可由更弱、效力更强的 SCOT 理论推出（见脚注 6）。关于这种方法的进一步发展，可参见 Cartier 和 Perrin [2, 3], 的研究；他们既研究有限测度空间上的 Nelson 的 S 积分（他们称之为 Loeb-Nelson 积分），也研究其改进形式，并将其称为勒贝格积分。“彻底初等”的方法简单而优雅，并由此取得了许多有趣的成果。

本文不打算比较“彻底初等”方法与基于 Loeb 工作的非标准测度论。Nelson 证明（[26], A.1），对每个随机过程，都存在一个与之相近的初等过程；而且，传统随机过程理论中的定理可以由其初等类比定理推导出来。文献 [26, 2, 3] 并未讨论这样一个问题：Loeb测度空间能否（在同构意义下）由这些构造得到。

7. 结论

本文基于这样一个事实：BST 这类内集理论能够提供一系列结构，这些结构类似于模型论非标准宇宙的内部部分。借助一种自然的编码方式和标准化原理，我们可以用标准集合来模拟外部集合。非标准壳与 Loeb 测度可以在“同构”的意义上获得其外部对应对象。在 BST 中，它们是在共同框架下的标准对象，因此原则上很容易对它们进行比较。归根结底，它们与通过 BST 中的超结构方法所能得到的结构相同，但我们采用的构造方法更适合内在公理框架。

BST 理论是 HST 的内部部分。HST 对外部集合以及标准集合和内部集合进行了公理化。在这一理论中，可以像在非标准宇宙中那样进行外部构造，无需编码。之后可以引入编码，将由此得到的外部结构转换为标准结构。

我们得出结论：基于 BST 的内部公理化方法几乎能够实现模型论方法所采用的所有技术，并且还具有一些优势：它可以让在 IST 或其他公理化框架中学过非标准方法的数学工作者更容易掌握非标准壳与 Loeb测度，因为它不要求事先了解超滤子、超幂或模型论。它建立了一个统一的框架，在其中，标准“世界”和非标准“世界”都得到了充分的公理化。它还可以无缝扩展为一种也涵盖外部集合的理论。最后，它能够对选择公理（参见 Hrbacek 和 Katz [12]）以及非标准分析实践中使用的其他公理进行逆向数学分析。

References

[1] S. Albeverio、R. Høegh-Krohn、J. Fenstad、T. Lindstrøm，《随机分析与数理物理中的非标准方法》，《纯粹与应用数学》122，Academic Press，奥兰多，佛罗里达州，1986年，xi + 514 页。[2]P. Cartier 和 Y. Feneyrol-Perrin，《非标准分析中各种积分理论的比较》，巴黎科学院纪要，307，I辑（1988年），297 - 301。[3] P. Cartier 和 Y. Perrin，《有限集上的积分》，载于：F Diener 和 M Diener，《实践中的非标准分析》，Springer-Verlag，1995年，185-204。[4] C. C. Chang 和 H. J. Keisler，《模型论》，第3版，《逻辑学与数学基础研究》73，North Holland Publ.，阿姆斯特丹，1990年，649页。[5] N. Cutland，《非标准分析及其应用》（赫尔，1986年），《伦敦数学学会研究文本》10，剑桥大学出版社，1988年，xiii+345 页。[6] F. Diener 和 K. D. Stroyan，《无穷小分析中的句法方法》，载于 [5], 258-281。[7] B. Dinis 和 I. van den Berg，《中性元与外部数：灵活数系》，Chapman and Hall/CRC，Taylor and Francis Group，博卡拉顿，佛罗里达州，2019年，360 页。[8] P. Fletcher、K. Hrbacek、V. Kanovei、M. Katz、C. Lobry 和 S. Sanders，《沿袭 Robinson、Nelson 等人的无穷小分析方法》，《实分析交流》42(2)（2017年），193 - 252。https://arxiv.org/ abs/1703.00425, http://msupress.org/journals/issue/?id=50-21D-61F[9] C. W. Henson 和 L. C. Moore, Jr.，《一致空间非标准壳的不变性》，载于《维多利亚非标准分析研讨会》，维多利亚大学，1972年，A. Hurd 和 P. Loeb 编，《数学讲义》369，Springer-Verlag，1974年，85 - 98。[10]K. Hrbacek，《非标准分析的公理化基础》，Fundamenta Mathematicae 98，1（1978年），1-19。[11] K. Hrbacek，《非标准集合论》，Amer. Math. Monthly 86，8（1979年），659 - 677。

[12] K. Hrbacek 和 M. G. Katz，《不借助选择公理的无穷小分析》，Ann. Pure Appl. Logic 172（2021年），第6期，102959，https://doi.org/10.1016/j.apal.2021.102959，https://arxiv.org/abs/2009.04980[13] T. Jech，《集合论》，Academic Press，纽约，1978年，621页。[14] V. Kanovei 和 M. Reeken，《外部集合与宇宙的内部方法 III：部分饱和宇宙》，《逻辑学研究》56（1996年），第3期，293 – 322。[15] V. Kanovei 和 M. Reeken，《公理化的非标准分析》，Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，2004年，408页。[16] H. J. Keisler，《具有预定良好度的理想》，Ann. of Math. 81，1（1965年），112 - 116。[17] T. Lindstrøm，《非标准分析导论》，载于 [5], 1 - 105。[18] P. Loeb，《从非标准测度空间到标准测度空间的转换及其在概率论中的应用》，Trans. Amer. Math. Soc. 211（1975年），113 - 122。[19] P. Loeb，《通过现代无穷小进行实分析》 [Vakil 著作书评2011], SIAM Rev. 55，2（2013年），407-410。[20] P. A. Loeb 和 M. P. H. Wolff 编，《供数学工作者使用的非标准分析》，《数学及其应用》510，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，2000年，xiv+311 页。[21] P. A. Loeb 和 M. P. H. Wolff 编，《供数学工作者使用的非标准分析》，第二版，Springer，多德雷赫特，2015年，xv+481页。[22] W. A. J. Luxemburg，《非标准分析》，讲义，数学系，加州理工学院，帕萨迪纳，加利福尼亚州，1962年，150页。[23] W. A. J. Luxemburg，《单子的一般理论》，载于《模型论在代数、分析和概率中的应用》，W. A. J. Luxemburg 编，Holt, Rinehart and Winston，纽约，1969年，18 - 86。[24]W. Lyantse 和 T. Kudryk，《非标准分析导论》，《数学研究专著丛书》第3卷，VNTL出版社，利沃夫，1997年，255 页。[25] E. Nelson，《内集理论：非标准分析的一种新方法》，Bull. Amer. Math. Soc. 83（1977年），1165 - 1198。[26] E. Nelson，《彻底初等概率论》，《数学年刊研究》117，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987年，ix ＋ 97 页。[27] A. Robinson，《非标准分析》，《逻辑学与数学基础研究》，North-Holland，阿姆斯特丹，1966年。[28] A. Robinson 和 E. Zakon，《扩张的集合论刻画》，载于：W.A.J. Luxemburg 编，《模型论在代数、分析和概率中的应用》，Holt, Rinehart and Winston，1969年，109-122。[29] A. Robert，《非标准分析》，Wiley，纽约，1988年。[30] K. D. Stroyan 和 J. M. Bayod，《无穷小随机分析基础》，North-Holland，阿姆斯特丹，1986年。[31]N. Vakil，《IST 中某些一致空间的非标准壳表示》，Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.，37（1991年），201 - 205。[32] N. Vakil，《通过现代无穷小进行实分析》，剑桥大学出版社，剑桥，英国，2011年，xx+ 565 页。[33] N. Vakil，《具有不变非标准壳的一致空间》，《逻辑与分析杂志》6:1（2014年），1 - 13。doi: 10.4115/jla.2014.6.1[34] P. Zlatoˇs，《Kanovei–Reeken 著作书评》[14] 《数学评论》，1996年。
https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1397485

Department of Mathematics, City College of CUNY, New York, NY 10031,
电子邮箱地址：khrbacek@icloud.com

Department of Mathematics, Bar Ilan University, Ramat Gan 5290002Israel,

电子邮箱地址：katzmik@math.biu.ac.il