arXiv:2301.00368v1 [math.AP] 1 Jan 2023

广义表面准地转方程的低速行波解

曹道民、赖善发、秦国林

Abstract. 本文系统研究广义表面准地转方程（gSQG 方程）中传播速度较小的行波解的存在性、渐近行为、唯一性和非线性轨道稳定性。首先，我们通过变分方法得到一族新的整体解。其次，我们证明了在本文的变分框架下极大化子的唯一性。再次，利用变分框架、极大化子的唯一性以及紧性原理，我们建立了若干稳定性定理。此外，经过适当变换后，这些解构成了运动点涡对的奇异性消解。

关键词：广义表面准地转方程；行波解；变分方法；极大化子的存在性与唯一性；非线性稳定性。

2020年MSC主分类：76B47；次分类：76B03，35A02。

1. Introduction and Main results

本文研究以下广义表面准地转（gSQG）方程

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,T), \\ \mathbf{u} = \nabla^\perp(-\Delta)^{-s}\theta & \text{in } \mathbb{R}^2\times(0,T), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$0<s<1$, $\theta(x,t):\mathbb{R}^2\times(0,T)\to\mathbb{R}$ 是由速度场 $\mathbf{u}(x,t):\mathbb{R}^2\times(0,T)\to\mathbb{R}^2$ 输运的主动标量，速度场由 θ 生成，且 $(a_1,a_2)^\perp=(a_2,-a_1)$。算子 $(-\Delta)^{-s}$ 定义为

$$(-\Delta)^{-s}\omega(x) = \mathcal{G}_s\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_s(x-y)\omega(y)dy,$$

其中，G_s 是 $(-\Delta)^s$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的基本解，定义为

$$G_s(z) = \frac{c_s}{|z|^{2-2s}}, \quad c_s = \frac{\Gamma(1-s)}{2^{2s}\pi\Gamma(s)}.$$

当 $s=1/2$ 时，(1.1) 对应于无黏表面准地转（SQG）方程，该方程描述了大气和大气流动中一般准地转系统的温度演化（参见例如 [26, 52]）。SQG 方程已

自 [26] 以来作为三维欧拉方程的简化模型受到广泛关注。至少在形式上，当 $s \uparrow 1$ 时，我们得到著名的涡量形式二维欧拉方程 [56]。对于一般的 $0 < s < 1$，(1.1) 由 C´ordoba 等人在 [29] 提出，作为欧拉方程与 SQG 方程之间的插值。

二维不可压欧拉方程（即 $s = 1$ in (1.1)）的柯西问题的整体适定性已得到充分研究。尤多维奇 [66]证明了初始数据属于 $L^1 \cap L^\infty$ 的柯西问题具有整体适定性。得益于 Elgindi 和 Jeong [36]的工作， L^1假设可以由适当的对称性条件取代。更多讨论请参阅 [36, 56] 及其参考文献。然而，据我们所知，广义表面准地转系统是否会出现有限时奇点，抑或经典解具有整体适定性，仍然是一个悬而未决的问题；更多详情请参阅 [20, 21, 46, 49, 50] 及其参考文献。

对于涡斑型整体解，第一个非平凡的例子是通过轮廓动力学方程和分岔理论，在 [44] 中为$\frac{1}{2} < s < 1$构造出来的。随后，人们在不同情形下获得了许多关于广义表面准地转方程涡斑型解的结果（例如参见 [18, 19, 28, 32, 39, 41, 45, 47]）。在 [20], 中，Castro 等人通过从一个特定的径向对称函数出发发展分岔论证，建立了广义表面准地转方程存在整体光滑解的首个结果。在 [43],中，Gravejat 和 Smets 首次证明了表面准地转方程存在光滑平移涡对。随后，Godard-Cadillac [40]将这一结果推广到$s \in$ (0, 1)的广义表面准地转方程。在 [5], 中，Ao 等人运用 Lyapunov-Schmidt约化法，成功构造了 $s \in$ (0, 1)的广义表面准地转方程的行波和旋转光滑解。

本文关注广义表面准地转方程的行波解。经过旋转，不失一般性，我们可以假设这些波在竖直方向上的速度为负 $-\mathcal{W}$，因此

$$\theta(x,t) = \omega(x_1, x_2 + \mathcal{W}t).$$

在这种情形下，(1.1) 中的第一个方程也化为一个定常方程

$$\nabla^\perp(\mathcal{G}_s\omega - \mathcal{W}x_1) \cdot \nabla\omega = 0, \tag{1.2}$$

其弱形式为

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega\nabla^\perp(\mathcal{G}_s\omega - \mathcal{W}x_1) \cdot \nabla\varphi dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{1.3}$$

在理想不可压流体的行波解研究中，平移涡对是主要关注对象。关于涡旋对的研究可以追溯到 Pocklington [59] 于1895年的工作。1906年，Lamb [51] 为欧拉方程建立了一个显式解，该解如今通常被称为 Lamb偶极子或 Chaplygin-Lamb 偶极子；另见 [58]。除了这些精确解之外，欧拉方程的平移涡对的存在性（及丰富性）也已在 [2, 8, 61, 64, 65]等文献中得到严格证明。如上所述，对于广义表面准地转方程，已有研究在 [5, 15, 16, 40, 43, 45, 47]中构造了一些行波解。

本文将获得一族新的广义表面准地转方程行波解，并进一步研究其渐近行为、唯一性和非线性轨道稳定性。

1.1. 主要结果。正如 Arnol'd [6], 所指出的，求解定常问题 (1.2) 的一种自然方法是要求 ω 和 $\mathcal{G}_s\omega - \mathcal{W}x_1$ （局部）函数相关。也就是说，可以要求

$$\omega = f(\mathcal{G}_s\omega - \mathcal{W}x_1),$$

存在某个博雷尔可测函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。

通常假设 f 满足以下条件

(H₁). $f(0) = 0$，且当 $t > 0$时， f 非负并严格递增；

(H₂). $\lim_{t\to 0_+} t^{-\frac{1}{1-s}} f(t) = +\infty$ 和 $\lim_{t\to+\infty} t^{-\frac{1}{1-s}} f(t) = 0$。

我们的第一个主要结果涉及慢速行波解的存在性，以及这些解的精细渐近行为。为方便起见，我们取 $\mathcal{W} = W\varepsilon^{3-2s}$，其中 $W > 0$ 为某个常数， $\varepsilon > 0$为某个小量。令 $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ 为沿 x_2方向的单位向量。令 $\mathbb{R}^2_+ := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ 为右半平面，且 1_S 表示集合 S的示性函数。用 $\mathrm{spt}(\omega)$ 表示函数 ω的支集。对于固定的 $W > 0$， $\kappa > 0$ 表示

$$d_0 = \left(\frac{(1-s)c_s\kappa}{2^{2-2s}W}\right)^{\frac{1}{3-2s}}. \tag{1.4}$$

我们的第一个结果如下。

定理 1.1. 设给定 $0 < s < 1$、 $W > 0$ $\kappa > 0$ 。假设 f 是满足 **(H₁)** 和 **(H₂)** 的可测函数，并且当$0 < s < \frac{1}{2}$ 时 $f \in C^{1-2s}$ 。那么存在一个较小的数$\varepsilon_0 > 0$ ，使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，(1.1) 都有一个形式为$\theta_\varepsilon(x, t) = \omega_{tr,\,\varepsilon}(x + W\varepsilon^{3-2s}t\mathbf{e}_2)$ 的行波解，其中某个函数$\omega_{tr,\,\varepsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足以下意义：$\omega_{tr,\,\varepsilon}$ 在 $\mathcal{W} = W\varepsilon^{3-2s}$ 条件下求解 (1.3)。此外，$\omega_{tr,\,\varepsilon}$ 具有以下性质：

(i) $\omega_{tr,\varepsilon}$ 关于 x_1 是奇函数，关于 x_2 是偶函数。也就是说，

$$\omega_{tr,\varepsilon}(-x_1, x_2) = -\omega_{tr,\varepsilon}(x_1, x_2), \quad \omega_{tr,\varepsilon}(x_1, -x_2) = \omega_{tr,\varepsilon}(x_1, x_2), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2;$$

(ii) 对某个常数 μ_ε，以下结论成立

$$\omega_{tr,\varepsilon} = f(\mathcal{G}_s\omega_{tr,\varepsilon} - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon), \quad in\ \mathbb{R}^2_+;$$

(iii) 令 $\omega_\varepsilon := \omega_{tr,\varepsilon}1_{\mathbb{R}^2_+}$ ，并将 ω_ε 的质心记为 $x_\varepsilon := \kappa^{-1}\int x\omega_\varepsilon$。则有

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_\varepsilon = \kappa \ and\ \varepsilon x_\varepsilon = (d_0, 0) + o(1), \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

其中 d_0 由 (1.4) 给出。此外，存在一个与ε 无关的常数 $R > 0$ ，使得 $\mathrm{spt}(\omega_\varepsilon)$ 包含于以 x_ε 为中心、半径为 R的圆盘内。

注 1.2. 在 $0 < s < \frac{1}{2}$ 的情形下，假设 $f \in C^{1-2s}$ 用于提高 $\mathcal{G}_s\omega_\varepsilon$ 的正则性（例如参见 [60]中的命题 2.8 和 2.9），从而使 (1.3) 中的积分有意义。

注 1.3. 满足定理 1.1 中假设的 f 的典型例子包括任意满足 $f(0) = 0$ 的$C^{0,1}$ 光滑有界严格递增函数，例如 $f(t) =$ 反正切函数(t_+)，以及一些无界函数，如 $f(t) = t_+^p$ 满足 $p \in (1, \frac{1}{1-s})$ 的函数。这里 t_+ 表示 $\max\{0, t\}$。我们将在后一种情形下得到更精细的渐近行为，并证明唯一性和稳定性。

注 1.4. 正如我们将在引理 2.21 的证明中看到的，经过某个平移后，ω_ε 在 $L^1 \cap L^{2-s}(\mathbb{R}^2)$ 中趋于一个非平凡函数 ω_0，它是第 2.1 小节所讨论的极限问题的极大化子。因此，定理 1.1 中得到的解的振幅不会随着 $\varepsilon \to 0$ 而消失。

令 $G_s^+(x,y) := \frac{c_s}{|x-y|^{2-2s}} - \frac{c_s}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}$，其中 $\bar{y} = (-y_1, y_2)$，并定义

$$\mathcal{G}_s^+\omega := \int_{\mathbb{R}^2_+} G_s^+(x,y)\omega(y)dy.$$

定理 1.1 的证明基于约束极大化方法。更具体地，取 J由 $J(t) = \int_0^t f^{-1}(\tau)d\tau$定义，并令 $B(x,r)$表示以 x为中心、半径为 r 的圆盘，且 $\kappa > 0$ 为常数。我们考虑如下泛函的极大化问题

$$E_\varepsilon(\omega) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega(x)G_s^+(x,y)\omega(y)dxdy - W\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\omega(x)dx - \int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega(x))dx, \quad (1.5)$$

在约束条件

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \left\{\omega \in L^1 \cap L^{2-s}(\mathbb{R}^2_+) \mid \omega \geq 0,\ \mathrm{spt}(\omega) \subset B\left((\frac{d_0}{\varepsilon}, 0), \frac{d_0}{2\varepsilon}\right),\ \int_{\mathbb{R}^2_+} \omega(x)dx = \kappa\right\}. \quad (1.6)$$

考虑以下极大化问题：

$$e_\varepsilon := \sup_{\omega\in\mathcal{A}_\varepsilon} E_\varepsilon(\omega). \quad (1.7)$$

对于上述极大化问题，我们有如下结果。

定理 1.5. 设 $0 < s < 1$ 和 $W > 0$。假设 f 是满足 (H_1) 和 (H_2) 的可测函数。那么存在一个足够小的数 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，均可达到 e_ε，也就是说，E_ε 在 $\mathcal{A}_\varepsilon$中存在一个极大化子 ω_ε。此外，ω_ε 具有以下性质：

(i) ω_ε 关于某个平面 $\{x_2 = const.\}$施泰纳对称；(ii) 存在一个常数 μ_ε，使得

$$\omega_\varepsilon = f\left(\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon\right), \quad in\ B(\varepsilon^{-1}(d_0,0), \varepsilon^{-1}d_0/2);$$

(iii) 能量满足

$$I_0 + O(\varepsilon^{2-2s}) \le E_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \le I_0,$$

其中 I_0 由 (2.8) 给出;

(iv) 存在一个与 ε 无关的常数 $0 < C < +\infty$ ，使得

$$\limsup \|\omega_\varepsilon\|_{L^\infty} \le C.$$

(v) 记 ω_ε 的质心为 $x_\varepsilon := \kappa^{-1} \int^{\varepsilon\to 0_+} x\omega_{\varepsilon\circ}$ 那么,

$$\varepsilon x_\varepsilon = (d_0, 0) + o(1), \quad as\ \varepsilon \to 0,$$

其中 d_0 由 (1.4) 给出。此外，存在一个与ε 无关的常数 $R > 0$ ，使得 spt(ω_ε) 包含于以 x_ε 为中心、半径为 R的圆盘中。

我们将看到，定理 1.1 可由定理 1.5 推出。事实上，我们将在引理 2.24 中证明，若在$0 < s < \frac{1}{2}$ 情形下进一步假设 $f \in C^{1-2s}$ ，则经过 x_2中的一次平移后， $\omega_\varepsilon(x) - \omega_\varepsilon(\bar{x})$ 就是定理 1.1 中所需的函数$\omega_{tr,\varepsilon}$。

接下来，我们将研究唯一性问题，这对稳定性研究至关重要。我们关注 $f = t_+^p$ 的情形，其中某个 $p \in$ 属于 $(1, \frac{1}{1-s})$。可以看出，这样的 f 满足定理 1.1 对 $s \in$ 属于 (0, 1) 的所有假设。因此，对每个足够小的 $\varepsilon > 0$ ，定理 1.1 都保证存在一个行波解，其具有 $\omega_{tr,\varepsilon}(x) = \omega_\varepsilon(x) - \omega_\varepsilon(\bar{x})$，且 ω_ε 是在约束 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 下使 E_ε 达到极大值的极大化子。受旋转恒星相关研究的启发[48], ，我们将证明 ω_ε 是唯一极大化函数，即任何使 E_ε 达到极大值的极大化子都是 ω_ε 的一个平移。

对于定理 1.5 中给定的 ε_0 ，我们用 Σ_ε 表示当 $\varepsilon \in$ 属于 $(0, \varepsilon_0)$ 时，在 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 上使 E_ε 达到极大值的所有极大化子的集合。我们的第二个主要结果如下。

定理 1.6. 假设对于某个 $p \in$(1,{v5}, $f(t) = t_+^p$。令 ε_0 如定理 1.5 中所述，并令 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$。令 $\omega_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$ 为定理 1.5 中得到的一个极大化子。那么存在一个数 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ ，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$,

$$\Sigma_\varepsilon = \{\omega_\varepsilon(\cdot + c\mathbf{e}_2) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

对于流体的相对平衡态，关于唯一性的数学结果较少。Amick 和 Fraenkel [3], 给出了首个结果，他们利用移动平面法证明，按照一种自然的弱形式表述，希尔球形涡旋是唯一解。随后，Amick 和 Fraenkel [4] 还证明了 Norbury 近球形涡的局部唯一性。Burton [10] 使用与 [3] 类似的方法证明了 Chaplygin-Lamb 偶极子的唯一性。近期，Jang 和 Seok [48] 证明了一个与旋转双星相关的变分问题的极大化子的唯一性，这启发了我们对定理 1.6 的证明。至于广义表面准地转方程，据我们所知，关于这一问题唯一的结果是近期的工作 [15], ，其中为应用移动平面法而考察了一个非常特殊的情形。我们的结果定理 1.6 在广泛的情形下给出了唯一性。

我们的最后一个主要结果涉及定理 1.1 中得到的行波解的轨道稳定性。首先，我们将以类似的思路证明一个一般的稳定性定理，正如

[13], 文中研究了二维欧拉方程中涡旋对的稳定性。具体而言，我们将考虑以下泛函的极大化问题

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+} \zeta(x)\mathcal{G}_s^+\zeta(x)dx - \mathcal{W}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\zeta(x)dx$$

在集合 $\mathcal{R}(\zeta_0)^w$ 上，其中该集合表示给定函数 ζ_0 的重排类的弱闭包。利用 Lions [55], 提出的集中紧性原理，我们证明了极大化序列的紧性，并在极大化者集合上得出一个一般性的非线性稳定性定理（见定理 4.8）。

在 $f = t_+^p$ 对于 $p \in (1, \frac{1}{1-s})$ 的情形下，定理 1.1 给出了一个行波解，其中$\omega_{tr,\varepsilon}(x) = \omega_\varepsilon(x) - \omega_\varepsilon(\bar{x})$，且 ω_ε 是 E_ε 的极大化子。为了应用极大化者集合的稳定性定理，我们需要考虑一个辅助变分问题：在集合 $\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$ 上，满足 $\mathcal{W} = W\varepsilon^{3-2s}$ 的条件下，使$\tilde{E}_{\mathcal{W}}$ 最大化。通过研究极大化子的渐近行为，并利用定理 1.6 中的唯一性结果，我们得以证明，第二个变分问题的所有极大化子实际上都是沿 x_2 方向对 ω_ε 作平移所得。由此，应用定理 4.8 中证明的极大化者集合上的非线性稳定性定理，我们得到 ω_ε 的轨道稳定性。

粗略地说，我们的稳定性结果如下。

定理1.7. 假设对于某个 $p \in (1, \frac{1}{1-s})$， $f(t) = t_+^p$。令 $\omega_{tr,\varepsilon}$ 表示定理 1.1 中得到的行波解。那么，对于固定但足够小的 ε ，$\omega_{tr,\varepsilon}$ 在以下意义下是轨道稳定的：对于任意 $M > 0$ 和 $\eta > 0$，存在 $\delta > 0$ ，使得对于满足 $||\xi_0||_\infty < M$ 的非负函数 $\xi_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2_+)$，以及

$$\begin{aligned}\inf_{c\in\mathbb{R}} \Big\{ &\|\xi_0 - \omega_{tr,\varepsilon}(\cdot + c\mathbf{e}_2)\|_{L^1(\mathbb{R}^2_+)} + \|\xi_0 - \omega_{tr,\varepsilon}(\cdot + c\mathbf{e}_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \\ &+ \|x_1(\xi_0 - \omega_{tr,\varepsilon}(\cdot + c\mathbf{e}_2))\|_{L^1(\mathbb{R}^2_+)} \Big\} \le \delta,\end{aligned} \tag{1.8}$$

如果存在一个 L^∞-正则解 $\xi(t)$，其初始数据为 $\xi_0(x)$，且对于 $t \in [0, T)$ 满足 $0 < T \le \infty$，那么所有 $t \in [0, T)$，

$$\begin{aligned}\inf_{c\in\mathbb{R}} \Big\{ &\|\xi(t) - \omega_{tr,\varepsilon}(\cdot + c\mathbf{e}_2)\|_{L^1(\mathbb{R}^2_+)} + \|\xi(t) - \omega_{tr,\varepsilon}(\cdot + c\mathbf{e}_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^2_+)} \\ &+ \|x_1(\xi(t) - \omega_{tr,\varepsilon}(\cdot + c\mathbf{e}_2))\|_{L^1(\mathbb{R}^2_+)} \Big\} \le \eta.\end{aligned} \tag{1.9}$$

注1.8. 关于 gSQG 方程中 L^∞-正则解的严格定义，请参见第4节。在建立其他解的唯一性之后，可以应用一般稳定性定理和本文的框架来获得它们的轨道稳定性。与 [13], 中的结果相比，我们允许具有非紧支集的扰动，这是通过在我们的定理中引入 L^1-范数实现的。

关于欧拉方程稳态解的稳定性，已有大量研究，感兴趣的读者可参阅 [1, 11, 12, 17, 23, 24, 25, 38, 63] 及其中的参考文献。

1.2. 对运动点涡进行去奇异化。定理 1.1 的结果还为广义表面准地转方程中的运动点涡提供了一族去奇异化解。事实上，取变换 $\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}(x)=\varepsilon^{-2}\omega_{tr,\varepsilon}(\varepsilon^{-1}x)$，由定理 1.1 可立即得到

推论 1.9. 设 $0<s<1$。假设 f 是满足 (H_1) 和 (H_2) 的函数，并且$f\in C^{1-2s}$ 若 $0<s<\frac{1}{2}$。那么存在一个足够小的常数 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，(1.1) 都有如下形式的行波解 $\theta_\varepsilon(x,t)=\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}(x+Wte_2)$，其中某个函数 $\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}\in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足 $\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}$ 在 $\mathcal{W}=W$ 的意义下解 (1.3)。此外，$\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}$ 具有以下性质：

(i) $\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}$ 关于 x_1 为奇函数，关于 x_2为偶函数。也就是说，

$$\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}(-x_1,x_2)=-\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}(x_1,x_2),\quad \hat{\omega}_{tr,\varepsilon}(x_1,-x_2)=\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}(x_1,x_2),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^2;$$

(ii) 有

$$\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}=f(\varepsilon^{2-2s}(\mathcal{G}_s\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}-Wx_1)-\mu_\varepsilon),\quad in\ \mathbb{R}^2_+,$$

对某个常数 μ_ε;

(iii) 以下结论在测度意义下成立

$$\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}(x)_1\rightharpoonup \kappa\delta(x-(d_0,0))-\kappa\delta(x+(d_0,0)),$$

其中 $d_0=\left(\frac{(1-s)c_s\kappa}{2^{2-2s}W}\right)^{\frac{1}{3-2s}}$. 此外，存在一个与$\varepsilon$ 无关的常数 $R>0$，使得 $spt(\hat{\omega}_\varepsilon)$ 包含于 $B((d_0,0)\ R\varepsilon)\cup B((-d_0,0)\ R\varepsilon)$。

推论 1.9 (iii) 表明，$\{\hat{\omega}_{tr,\varepsilon}\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ 是一列正则解，逼近广义表面准地转方程的运动点涡对。

在 [5], ，Ao 等人利用 Lyapunov-Schmidt约化法，构造了广义表面准地转方程的一族解，其轮廓函数为 $f(t)=t_+^p$，其中 $p\in(1,\frac{1+s}{1-s})$。可以看出，我们的结果推论 1.9 涵盖了剩余情形$p\in(0,1]$，其中$\frac{1}{2}\le s<1$。

在近期的论文 [16], 中，作者通过变分方法构造了带有$\frac{1}{2}\le s<1$ 的广义表面准地转方程的一族行波解。在[16]中得到的解 $\{\tilde{\omega}_{tr,\varepsilon}\}$ 满足积分方程

$$\tilde{\omega}_{tr,\varepsilon}=g(\mathcal{G}_s\tilde{\omega}_{tr,\varepsilon}-Wx_1-\tilde{\mu}_\varepsilon),\quad \text{in } \mathbb{R}^2_+,$$

其中 $\tilde{\mu}_\varepsilon$ 为某个常数，g 为有界非递减函数。显然，无法由 [16], 中的结果推出推论 1.9，因为推论 1.9 (ii) 中的轮廓函数 $f(\varepsilon^{2-2s}\cdot)$ 随着 ε 变化，且允许无界。因此，推论 1.9 为广义表面准地转方程提供了一族新的行波解。

本文组织如下。在第 2 节中，对于一大类 f，我们通过变分方法构造广义表面准地转方程的行波解。我们首先研究极限问题的极大化子的性质。基于这些性质，我们通过极大化能量泛函 E_ε，构造出行波速度较小的行波解。随后，我们分几个步骤仔细研究极大化子的渐近行为。在得到详细的渐近行为后，我们证明极大化子的

唯一性。第3节证明极大化子的唯一性。第4节致力于研究非线性稳定性。首先，我们结合变分方法与 Lions [55] 的集中紧性引理，证明极大化者集合的一个一般性轨道稳定性定理。随后，我们研究重排类中极大化子的渐近行为，并利用定理 1.6 中的唯一性结果，得到轨道稳定性定理1.7。

2. Proofs of Theorem 1.1 and Theorem 1.5

本节首先考虑极大化问题 (1.7)，并证明定理 1.5。定理 1.1 可立即推出。

我们假设 $J:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足

(H_1'). J 严格凸且非负；(H_2')。$\lim_{t\to 0_+} J'(t)t^{s-1}=0$ 且 $\liminf_{t\to+\infty} J'(t)t^{s-1}\geq K$。

这里 K 是一个较大的常数，稍后将确定其值。注意，如果对于某个满足 (H_1) 和 (H_2) 的 f，有 $J(t)=\int_0^t f^{-1}(\tau)d\tau$，那么可以验证 J 满足 (H_1') 和 (H_2')。

令 $E_\varepsilon(\omega)$ 和 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 如 (1.5) 和 (1.6) 中所定义。为了证明 (1.7) 的极大化子的存在性，我们首先需要考虑其极限问题。

2.1. 极限问题。我们首先给出与 (1.7) 对应的极限问题的能量泛函和约束集的定义。与 E_ε 相关的能量泛函为

$$E_0(\omega):=\frac{c_s}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\omega(x)\omega(y)}{|x-y|^{2-2s}}dxdy-\int_{\mathbb{R}^2}J(\omega(x))dx,$$

与 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 相关的约束为

$$\mathcal{A}_0:=\left\{\omega\in L^1\cap L^{2-s}(\mathbb{R}^2)\mid \omega\geq 0,\quad \int_{\mathbb{R}^2}\omega(x)dx=\kappa\right\}.$$

(1.7) 对应的极限极大化问题为

$$e_0:=\sup_{\omega\in\mathcal{A}_0}E_0(\omega). \tag{2.1}$$

在经典论文 [55], 中，在稍弱的假设 $\lim_{t\to 0_+}J(t)t^{-1}=0$ 下，Lions 证明了 E_0 在 $\mathcal{A}_0$ 上的极大化子的存在性（见 [55] 中的定理 II.2 和推论 II.1 ）。正如我们稍后将看到的，我们的假设 $\lim_{t\to 0_+}J'(t)t^{s-1}=0$ 确保每个极大化子都是紧支撑的，这是下一小节中所使用的一项重要性质（关于旋转恒星的类似结果，参见 [7, 53, 57]）。

下面我们将在假设 (H_1') 和 (H_2') 下，研究极大化子的一些基本性质。

回顾一下，$\mathcal{G}_s\omega:=\frac{c_s}{|x|^{2-2s}}*\omega$。为简便起见，记 $\|\cdot\|_p:=\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$。后续讨论需要用到以下两个关于卷积不等式的引理。

引理 2.1。假设对某个 $p>1$，有 $\omega\in L^1\cap L^p(\mathbb{R}^2)$。若 $1<p\le s^{-1}$，则对任意 $\frac{1}{1-s}<q<\frac{p}{1-sp}$，有 $\mathcal{G}_s\omega\in L^q(\mathbb{R}^2)$，且存在常数 $0<a、\ b<1$，

$$\|\mathcal{G}_s\omega\|_q\le C\left(\|\omega\|_1^a\|\omega\|_p^{1-a}+\|\omega\|_1^b\|\omega\|_p^{1-b}\right). \tag{2.2}$$

若 $p>s^{-1}$，则 (2.2) 在 $q=\infty$ 下成立。

证明。我们首先考虑 $1<p\le s^{-1}$ 的情形。将函数 $|x|^{2s-2}$ 分成两部分：$|x|^{2s-2}=|x|^{2s-2}1_{\{|x|<1\}}+|x|^{2s-2}1_{\{|x|\ge1\}}$。容易验证 $|x|^{2s-2}1_{\{|x|<1\}}\in L^r、\ \forall\ 1\le r<\frac{1}{1-s}$ 和 $|x|^{2s-2}1_{\{|x|\ge1\}}\in L^r\ \forall\ r>\frac{1}{1-s}$。假设 $\frac{1}{1-s}<q<\frac{p}{1-sp}$，则存在 $1\le r_1<\frac{1}{1-s}\ r_2>\frac{1}{1-s}$ 和 $1<p_1p_2<p$，使得 $1+q^{-1}=r_1^{-1}+p_1^{-1}$ 且$1+q^{-1}=r_2^{-1}+p_2^{-1}$。

接下来只需应用以下 Young不等式

$$\|f*g\|_r\le\|f\|_u\|g\|_v,\quad \forall f\in L^u,\ g\in L^v,$$

对于满足 $1+r^{-1}=u^{-1}+v^{-1}$ 的 $1\le r、\ u、\ v\le+\infty$，以及插值不等式

$$\|f\|_r\le\|f\|_u^a\|f\|_v^{1-a},\quad \forall f\in L^u\cap L^v, \tag{2.3}$$

其中 $1\le u<r<v\le+\infty$ 和 $a=\left(r^{-1}-v^{-1}\right)/\left(u^{-1}-v^{-1}\right)\in(0,1)$。

对于 $p>s^{-1}$，证明类似，因此略去细节，证明完毕。 □

引理 2.2. 设 $\omega\in L^1\cap L^{2-s}\left(\mathbb{R}^2\right)$，则有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\omega(x)\mathcal{G}_s\omega(x)dx\right|\le C\|\omega\|_1^s\int_{\mathbb{R}^2}|\omega|^{2-s}. \tag{2.4}$$

证明. 众所周知的 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式表明

$$\|\mathcal{G}_s\omega\|_q\le C\|\omega\|_p,\quad \forall 1<p<q<+\infty\ \text{with}\ \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-s. \tag{2.5}$$

应用 Hölder 不等式、带有 $q=\frac{2-s}{1-s}$ 的 (2.5) 以及插值不等式 (2.3)，对于任意 ω_1，$\omega_2\in L^1\cap L^{2-s}(\mathbb{R}^2)$，我们得到

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\omega_1(x)\mathcal{G}_s\omega_2(x)dx\right|\le\|\omega_1\|_{2-s}\|\mathcal{G}_s\omega_2\|_{\frac{2-s}{1-s}}\le C\|\omega_1\|_{2-s}\|\omega_2\|_{2-s}^{1-s}\|\omega_2\|_1^s, \tag{2.6}$$

取 $\omega_1=\omega_2=\omega$ 即可推出 (2.4)，并完成证明。 □

我们首先证明 (2.1) 的极大化子具有径向对称性，并推导其 Euler-Lagrange 方程。

引理 2.3. 设 $\omega_0\in\mathcal{A}_0$ 是 E_0 在 $\mathcal{A}_0$ 上的一个极大化子。那么 ω_0 必须关于某个点径向对称且非递增。此外，存在一个常数 $\mu_0\in\mathbb{R}$，使得

$$\begin{cases}\mathcal{G}_s\omega_0-J'(\omega_0)\le\mu_0, & on\ \ \{\omega_0=0\},\\ \mathcal{G}_s\omega_0-J'(\omega_0)=\mu_0, & on\ \ \{\omega_0>0\}.\end{cases} \tag{2.7}$$

证明. ω_0 的径向对称性和单调性是严格重排不等式的直接推论（参见 [54] 中的定理 3.7 和 3.9）。

注意，当 $\delta > 0$ 足够小时，由于 $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0 = \kappa > 0$，集合 $\{\omega_0 > \delta\} \neq \emptyset$。我们固定一个 $\delta > 0$, 使得 $\{\omega_0 > \delta\} \neq \emptyset$，并取一个函数 ϕ_0，使得 $\int_{\mathbb{R}^2} \phi_0 = 1$ 且 $\mathrm{spt}(\phi_0) \subset \{\omega_0 > \delta\}$。对于任意一个下有界的函数 ϕ，若其在集合 $\{\omega_0 \leq \delta\}$ 上满足 $\phi \geq 0$，我们取如下测试函数族:

$$\omega^t := \omega_0 + t(\phi - \phi_0 \int_{\mathbb{R}^2} \phi),$$

当 $|t|$ 足够小时，它们属于 $\mathcal{A}_0$。由于 ω_0 是一个极大化子，我们有

$$0 = \frac{dE_0(\omega^t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{G}_s\omega_0 - J'(\omega_0) - \mu_0)\phi dx,$$

其中 $\mu_0 := \int_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{G}_s\omega_0 - J'(\omega_0))\phi_0$。因此，由于 ϕ 的任意性，(2.7) 得证，证明完成。□

记

$$I_0 := \sup_{\omega \in \mathcal{A}_0} E_0(\omega). \tag{2.8}$$

则由 [55] 可得 $I_0 < +\infty$。

引理 2.4. 存在一个常数 $c_0 > 0$，使得若 $\omega_0 \in \mathcal{A}_0$ 是 E_0 在 $\mathcal{A}_0$ 上的极大化子，则有

$$\|\omega_0\|_{2-s} \leq c_0. \tag{2.9}$$

证明. 在假设 (H_2') 中取常数 $K = K = C\kappa^s + 2$，其中 C 是 (2.4) 中的常数。于是存在一个常数 $t_0 > 0$，使得对于 $t > t_0$，有 $J(t) > (C\kappa^s + 1)t^{2-s}$。一方面，根据 E_0 的定义及 (2.4)，我们推出

$$\int_{\mathbb{R}^2} J(\omega_0) \leq -I_0 + C\kappa^s \int_{\mathbb{R}^2} (\omega_0)^{2-s} dx.$$

另一方面，由 t_0 的选取可推得

$$\begin{aligned}(C\kappa^s + 1)\int_{\mathbb{R}^2} (\omega_0)^{2-s} dx &= (C\kappa^s + 1)\int_{\{\omega_0 \leq t_0\}} (\omega_0)^{2-s} dx + (C\kappa^s + 1)\int_{\{\omega_0 > t_0\}} (\omega_0)^{2-s} dx \\ &\leq (C\kappa^s + 1)t_0^{1-s}\kappa + \int_{\mathbb{R}^2} J(\omega_0).\end{aligned}$$

因此，取 $c_0 = (-I_0 + (C\kappa^s + 1)t_0^{1-s}\kappa)^{\frac{1}{2-s}}$，即可得到 (2.9)。□

引理 2.5. 设 $\omega_0 \in \mathcal{A}_0$ 是一个极大化子，μ_0 是引理 2.3 中定义的常数，则有

$$\mu_0 > 0. \tag{2.10}$$

证明. 取 $r_0 > 0$ 使得 $\int_{B(0,r_0)} \omega_0 \geq \frac{\kappa}{2}$。由于对于任意的 $r \geq 0$, $\int_{B(0,r)} \omega_0 \leq \kappa$，存在一点 $x^r \in B(0,r)$ 使得 $\omega_0(x^r) \leq \pi^{-1}\kappa r^{-2}$. 。于是我们由假设 (H_2') 推得

$$J'(\omega_0(x^r)) = o(r^{2s-2}), \quad \text{as } r \to +\infty.$$

另一方面，我们有

$$\mathcal{G}_s\omega_0(x^r) \geq \frac{c_s}{(2r)^{2-2s}} \int_{B(0,r)} \omega_0 \geq 4^{s-2}c_s\kappa r^{2s-2}, \quad \forall\, r \geq r_0.$$

因此，由 (2.7) 可得

$$\mu_0 \geq \mathcal{G}_s\omega_0(x^r) - J'(\omega_0(x^r)) \geq (4^{s-2}c_s\kappa + o(1))r^{2s-2} > 0,$$

当 r 足够大时，因此证明完成。 □

引理 2.5 将给出所有极大化子的一个统一有界性。

推论 2.6. 存在一个常数 $c_1 > 0$，使得若 $\omega_0 \in \mathcal{A}_0$ 是一个极大化子，则

$$\|\omega_0\|_\infty \leq c_1. \tag{2.11}$$

证明。由引理 2.3 和引理 2.5 可得

$$J'(\omega_0) = \mathcal{G}_s\omega_0 - \mu_0 \leq \mathcal{G}_s\omega_0, \quad \text{on } \{\omega_0 > 0\}.$$

设 $p_1 = 2 - s$。于是，由引理 2.1 和引理 2.4 可推出 $\|\mathcal{G}_s\omega_0\|_q \leq C$ 对于 $\frac{1}{1-s} < q < \frac{p_1}{1-sp_1}$。利用以下事实：由于假设 (H_2')，当t_1 为一个较大的常数时， $J'(t) \geq \frac{K}{2}t^{1-s}$对于 $t > t_1$，因此可得 $\|\omega_0\|_r \leq C$ 对于 $1 \leq r < p_2$，其中 $p_2 := {}_{(1-s)}{}_{1-sp_1}{}^{p_1}$。注意，$p_2 = p_1 + \frac{sp_1}{(p_1-1)(1-sp_1)}$ 和 $\frac{sp_1}{(p_1-1)(1-sp_1)} > 0$ 在 $p_1 \in (1, s^{-1})$ 上递增。因此，利用引理 2.1，通过一个简单的自举论证即可证明该引理。□

引理 2.7. 成立

$$I_0 > 0.$$

证明。取一个函数 $\rho := 1_{B(0,\sqrt{\kappa/\pi})}$ 并定义 $\rho_r(x) := (r^{-2})\rho(r^{-1}x)$。可以看出 $\rho_r \in \mathcal{A}_0$。

根据假设 (H_2')，可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} J(\rho_r) = o(1)\int_{\mathbb{R}^2} (\rho_r)^{2-s} = o(r^{2s-2}), \quad \text{as } r \to +\infty.$$

另一方面，经过变量替换可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_r\mathcal{G}_s\rho_r = r^{2s-2}\int_{\mathbb{R}^2} \rho\mathcal{G}_s\rho.$$

因此，我们可以取一个足够大的常数 r_1，使得

$$I_0 \geq E_0(\rho_{r_1}) \geq c_3 r_1^{2s-2} > 0.$$

□

推论 2.8. 若 $\omega_0 \in \mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}_0$ 上 E_0 的极大化子，则有

$$\|\mathcal{G}_s\omega_0\|_\infty \geq 2I_0\kappa^{-1}. \tag{2.12}$$

证明。由此可得

$$I_0 = E_0(\omega_0) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \omega_0\mathcal{G}_s\omega_0 dx \leq \frac{\kappa}{2}\|\mathcal{G}_s\omega_0\|_\infty,$$

这意味着 (2.12) 成立，并完成证明。 □

引理 2.9. 存在一个常数 $\eta > 0$，使得若 $\omega_0 \in \mathcal{A}_0$ 是 E_0 在 $\mathcal{A}_0$ 上的极大化子，则有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|<1} \omega_0(y)dy \geq \eta > 0. \tag{2.13}$$

证明。记 $\eta_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\int_{|x-y|<1}\omega_0(y)dy$。令 $r := (c_sI_0^{-1}\kappa^2)^{\frac{1}{2-2s}}$。对于任意 $x \in \mathbb{R}^2$，我们计算得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_s\omega_0(x) &= \int_{|x-y|<1}\frac{c_s\omega_0(y)}{|x-y|^{2-2s}}dy + \int_{1\leq|x-y|<r}\frac{c_s\omega_0(y)}{|x-y|^{2-2s}}dy + \int_{|x-y|\geq r}\frac{c_s\omega_0(y)}{|x-y|^{2-2s}}dy\\ &=: A_1 + A_2 + A_3.\end{aligned}$$

对于第一项 A_1，利用引理 2.1 和推论 2.6，可得

$$A_1 \leq C(\eta_0^a + \eta_0^b), \quad \text{for some } a, b \in (0,1).$$

对于第二项 A_2，注意到环域 $\{y \mid 1 < |x-y| < r\}$ 可以由 $\leq Cr^2$ 个半径为 1 的圆盘覆盖，我们得到

$$A_2 \leq Cc_sr^2\eta_0.$$

现在，根据 r 的选取，最后一个积分 A_3 可估计为

$$A_3 \leq c_sr^{2s-2}\kappa = I_0\kappa^{-1}.$$

因此，由于 x 的任意性以及推论 2.8，我们得到

$$C(\eta_0^a + \eta_0^b + \eta_0) \geq I_0\kappa^{-1},$$

这意味着 (2.13)，并完成证明。 □

现在我们证明拉格朗日乘子 μ_0 有一致的下界。

引理 2.10. 存在一个常数 $\mu_* > 0$，使得若 $\omega_0 \in \mathcal{A}_0$ 是 E_0 在 $\mathcal{A}_0$ 上的极大化子，则有

$$\mu_0 \geq \mu_*. \tag{2.14}$$

证明。根据前面的引理，可以找到一点 $x_\eta \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$\int_{|x_\eta-y|<1}\omega_0(y)dy \geq \frac{\eta}{2} > 0.$$

鉴于引理 2.3，我们可以假设 ω_0 关于原点径向对称且非递增。因此，我们得到

$$\int_{|y|<1}\omega_0(y)dy \geq \int_{|x_\eta-y|<1}\omega_0(y)dy \geq \frac{\eta}{2}.$$

对于任意大的 $r>1$，存在一点 $x^r \in B(0,r)$，使得 $\omega_0(x^r) \leq \pi^{-1}\kappa r^{-2}$.。于是，我们由假设 (H_2') 推得

$$J'(\omega_0(x^r)) = o(r^{2s-2}), \quad \text{as } r \to +\infty.$$

另一方面，我们有

$$\mathcal{G}_s\omega_0(x^r) \geq \frac{c_s}{(2r)^{2-2s}}\int_{B(0,1)}\omega_0 \geq 4^{s-2}c_s\eta r^{2s-2}.$$

因此，由 (2.7)，我们可以取一个足够大的常数 r_0，使得

$$\mu_0 \geq \mathcal{G}_s\omega_0(x^{r_0}) - J'(\omega_0(x^{r_0})) \geq (4^{s-2}c_s\eta_0 + o(1))r_0^{2s-2} \geq 4^{s-3}c_s\eta_0 r_0^{2s-2} =: \mu_* > 0.$$

证明至此完成。 □

引理 2.11。存在一个常数 $R_*>0$，使得若 $\omega_0 \in \mathcal{A}_0$ 是 $\mathcal{A}_0$ 上 E_0 的极大化子，则 ω_0 的支集直径小于 $2R_*$。也就是说，

$$diam(spt(\omega_0)) \leq 2R_*. \tag{2.15}$$

证明。不失一般性，我们可以假设 ω_0 关于原点径向对称且非递增。由于 $\int\omega_0 = \kappa < +\infty$ 和 $\omega_0(x) = \omega_0(|x|)$ 关于 $|x|$非递增，我们有

$$\int_{|x-y|<1}\omega_0(y) \leq C|x|^{-2}$$

当 $|x|$ 足够大时成立。然后，通过与引理 2.9 的证明类似的计算，对于足够大的 $|x|$和任意常数 r，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_s\omega_0(x) &= \int_{|x-y|<1}\frac{c_s\omega_0(y)}{|x-y|^{2-2s}}dy + \int_{1\leq|x-y|<r}\frac{c_s\omega_0(y)}{|x-y|^{2-2s}}dy + \int_{|x-y|\geq r}\frac{c_s\omega_0(y)}{|x-y|^{2-2s}}dy \\ &\leq C(|x|^{-2a} + |x|^{-2b} + r^2|x|^{-2}) + c_s\kappa r^{2s-2},\end{aligned}$$

若先取 $|x|\to+\infty$ 再取 $r\to+\infty$，则该式将趋于 0。固定 r，使得 $c_s\kappa r^{2s-2} \leq \frac{\mu_*}{2}$。于是，可以找到一个常数 R_*，使得当 $|x|>R_*$ 时，$\mathcal{G}_s\omega_0(x) < \mu_*$。取 $R_4 = \max\{R_3, c_1, R_*+1\}$。由引理 2.3 和引理 2.10 可推得，对于任意 $|x|>R_*$，$\omega_0(x) = 0$。至此，该引理的证明完成。□

接下来，我们进一步研究特殊情形下极大化子的性质：$J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$，其中 $L>0$ 和 $p\in$ 是某些常数，且 $p\in$ 属于 $(0, \frac{1}{1-s})$。我们首先确定拉格朗日乘子 μ_0。回忆一下，我们将 $I_0 = \sup_{\omega\in\mathcal{A}_0}E_0(\omega) \in (0,+\infty)$ 记为 E_0 的最大值。

引理 2.12. 假设 $J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$，其中 $L > 0$ 和 $p \in$ 是某些常数，且 $p \in$ 属于 $(0, \frac{1}{1-s})$。设 ω_0 是 E_0 在满足 (2.7) 的 $\mathcal{A}_0$ 上的一个极大化子，其中 μ_0 为某个参数。则有

$$\mu_0 \kappa = C_{s,p} I_0, \tag{2.16}$$

对某个常数 $C_{s,\ p}$ 它仅依赖于 s, p。

证明。令 $\gamma := 1 + 1/p$。我们取一个函数族 $(\omega_0)_t(x) := t^{-2}\omega_0(t^{-1}x)$。通过变量替换，我们得到

$$E_0((\omega_0)_t) = \frac{t^{2s-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0 \mathcal{G}_s \omega_0 - t^{2-2\gamma} \int_{\mathbb{R}^2} J(\omega_0).$$

由于 ω_0 是一个极大化子，我们有

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} E_0((\omega_0)_t) = (s-1) \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0 \mathcal{G}_s \omega_0 - (2-2\gamma) \int_{\mathbb{R}^2} J(\omega_0). \tag{2.17}$$

由 (2.7)，可得

$$L\gamma \omega_0^{\gamma-1} = (\mathcal{G}_s \omega_0 - \mu_0)_+.$$

将上面的方程乘以 ω_0 并积分，可得

$$\kappa \mu_0 = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0 \mathcal{G}_s \omega_0 - \gamma \int_{\mathbb{R}^2} J(\omega_0). \tag{2.18}$$

然后，利用 E_0 的定义、(2.17) 和 (2.18)，通过简单计算即可得到 (2.16)。常数 $C_{s,\ p} = A_\gamma := \frac{2-\gamma-s\gamma}{2-s-\gamma}$，其中 $\gamma = 1 + 1/p$。□

引理 2.12 指出，所有极大化子的拉格朗日乘子都相同。令$\psi_0 := \mathcal{G}_s \omega_0$。那么，根据引理 2.3，$\psi_0$ 是径向对称的，并满足以下方程。

$$\begin{cases} (-\Delta)^s \psi_0 = \left(\frac{p}{L(p+1)}\right)^p (\psi_0 - \mu_0)_+^p, \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ \psi_0(x) \to 0, \quad \text{as } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{2.19}$$

因此，[22] 中的唯一性结果适用于 $p \in (1, \frac{1}{1-s})$。此外，Ao 等人 [5] 证明了 $p \in (1, \frac{1+s}{1-s})$ 的线性化方程具有非退化性。注意，对于 $p \in (0, 1]$，极大化子的唯一性已在 [33] 中得到证明。综合这些结果，我们得到

命题 2.13. 假设对某些常数 $L > 0$ 和 $p \in (0, \frac{1}{1-s})$，$J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$。那么，除平移外，$E_0$ 在 $\mathcal{A}_0$ 上有一个唯一极大化函数 ω_0。此外，以下性质成立：

(i) ω_0 是紧支撑的，且关于某一点径向对称并递减；(ii) $\omega_0 = \left(L^{\ p\ (p+1)}\right)^p$ ($\mathcal{G}_s\omega_0 - \mu_0)_+^p$ 对于 $\mu_0 = \kappa^{-1} C_{s,p} E_0(\omega_0) > 0$；(iii) 如果进一步有 $p \in (1, \frac{1+s}{1-s})$，那么 $\omega_0 \in C^1$ 以及线性化算子的核

$$\omega \mapsto \omega - p\left(\frac{p}{L(p+1)}\right)^p (\mathcal{G}_s\omega_0 - \mu_0)_+^{p-1} \mathcal{G}_s \omega$$

在空间 $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 中为

$$span\{\partial_{x_1}\omega_0, \partial_{x_2}\omega_0\}.$$

证明。极大化子 ω_0 的存在性、(i) 和 (ii) 均可由上述引理得到。关于唯一性，请参见 [22, 33]。非退化性已在 [5] 的命题 3.2 中就 $\psi_0 = \mathcal{G}_s\omega_0$ 得到证明，由此可容易地得到 (iii)。□

2.2. 通过极大化存在行波解。在本小节中，我们将通过考虑极大化问题 (1.7) 来获得行波解的存在性，该问题所对应的极限问题已在前一小节中得到研究。

2.2.1. 极大化子的存在性。为了获得极大化序列的紧性，我们首先在由下式给出的一个小于 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 的集合上极大化 E_ε

$$\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma} := \left\{\omega \in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^2_+) \,\middle|\, 0 \le \omega \le \Gamma,\ \ \mathrm{spt}(\omega) \subset B(\varepsilon^{-1}(d_0,0), \varepsilon^{-1}d_0/2),\ \ \int_{\mathbb{R}^2_+} \omega(x)dx = \kappa\right\},$$

其中，$\Gamma > 0$ 是一个稍后确定的数。

引理 2.14。对于给定的 ε、$\Gamma > 0$，存在一个函数 $\omega_{\varepsilon,\,\Gamma} \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\,\Gamma}$，使得

$$E_\varepsilon(\omega_{\varepsilon,\Gamma}) = \sup_{\omega\in\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}} E_\varepsilon(\omega).$$

证明。令 $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\varepsilon,\,\Gamma}$ 为一个极大化序列。根据 $\mathcal{A}_{\varepsilon,\,\Gamma}$的定义，我们知道 $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ 在 $L^1 \cap L^\infty(B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2))$ 中一致有界。取一个子序列（仍记为 $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$），不妨设 $\omega_j \to \omega_{\varepsilon,\,\Gamma}$ 在 L^∞ 中弱星收敛。由弱星收敛可知

$$0 \le \omega_{\varepsilon,\Gamma} \le \Gamma, \quad \int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_{\varepsilon,\Gamma}(x)dx = \lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_j(x)dx = \kappa.$$

注意，对于 $1 \le r < \frac{1}{1-s}$，有 $G_s(x,y) \in L^r(B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2) \times B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2))$。我们有

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{c_s}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\omega_j(x)\omega_j(y)}{|x-y|^{2-2s}}dxdy = \frac{c_s}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\omega_{\varepsilon,\Gamma}(x)\omega_{\varepsilon,\Gamma}(y)}{|x-y|^{2-2s}}dxdy.$$

另一方面，由于 J 是凸的，根据下半连续性，我们得到

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_j(x))dx \ge \int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_{\varepsilon,\Gamma}(x))dx.$$

因此，

$$\sup_{\omega\in\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}} E_\varepsilon(\omega) = \lim_{j\to+\infty} E_\varepsilon(\omega_j) \le E_\varepsilon(\omega_{\varepsilon,\Gamma}) \le \sup_{\omega\in\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}} E_\varepsilon(\omega),$$

这意味着 $\omega_{\varepsilon,\,\Gamma}$ 是一个极大化子，并完成了证明。 □

对于非负函数 ζ，如果对任意固定的 x_1， ζ 都是关于 x_2 变量的唯一偶函数，使得 ζ 关于 x_2 变量是施泰纳对称的，我们就称 ζ 关于 x_2 变量是施泰纳对称的

$$\zeta(x_1,x_2)>\tau \quad \text{if and only if} \quad |x_2|<\frac{1}{2}\,|\,\{y_2\in\mathbb{R}\mid\ \zeta(x_1,y_2)>\tau\}\,|_{\mathbb{R}},$$

其中 $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ 表示 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。

对于定义在 D 上的函数 $0\le\zeta\in L^1(D)$，其中 D 是关于 x_1轴对称的区域，我们用 $\zeta^\star$ 表示 ζ的施泰纳对称化。它是重排类中唯一一个关于 x_2变量施泰纳对称的函数（有关重排的更多详情，请参见 [54] ）。施泰纳对称化的一个关键性质是重排不等式（例如参见 [54]中的定理 3.7 和 3.9）

$$\int\zeta^\star\mathcal{G}_s\zeta^\star\ge\int\zeta\mathcal{G}_s\zeta,\quad \int\zeta^\star\mathcal{G}_s^+\zeta^\star\ge\int\zeta\mathcal{G}_s^+\zeta,$$

除非对于某个 $c\in\mathbb{R}$， $\zeta(\cdot)\equiv\zeta^\star(\cdot+(0,c))$，否则不等式是严格的。

引理 2.15。给定 ε、$\Gamma>0$，设$\omega_{\varepsilon,\Gamma}\in\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$ 是 E_ε 在$\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$上的极大化子。那么$\omega_{\varepsilon,\Gamma}$ 关于某条直线 $\{x_2=const.\}$对称且非递增。此外，存在一个常数$\mu_{\varepsilon,\Gamma}\in\mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases}\mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma}-W\varepsilon^{3-2s}x_1-J'(\omega_{\varepsilon,\Gamma})\le\mu_{\varepsilon,\Gamma}, & on\ \ \{\omega_{\varepsilon,\Gamma}=0\},\\ \mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma}-W\varepsilon^{3-2s}x_1-J'(\omega_{\varepsilon,\Gamma})=\mu_{\varepsilon,\Gamma}, & on\ \ \{0<\omega_{\varepsilon,\Gamma}<\Gamma\},\\ \mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma}-W\varepsilon^{3-2s}x_1-J'(\omega_{\varepsilon,\Gamma})\ge\mu_{\varepsilon,\Gamma}, & on\ \ \{\omega_{\varepsilon,\Gamma}=\Gamma\}.\end{cases}\tag{2.20}$$

证明。由严格重排不等式可直接推出，$\omega_{\varepsilon,\Gamma}$ 关于某条直线 $\{x_2=const.\}$ 具有对称性和单调性。

对于任意 $\omega\in\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$，我们取如下的一族测试函数:

$$\omega_t:=\omega_{\varepsilon,\Gamma}+t(\omega-\omega_{\varepsilon,\Gamma}),\quad t\in[0,1].$$

由于 $\omega_{\varepsilon,\Gamma}$ 是极大化子，我们有

$$0\ge\left.\frac{dE_\varepsilon(\omega_t)}{dt}\right|_{t=0_+}=\int_{\mathbb{R}^2_+}(\mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma}-W\varepsilon^{3-2s}x_1-J'(\omega_{\varepsilon,\Gamma}))(\omega-\omega_{\varepsilon,\Gamma})dx.$$

也就是说,

$$\int_{\mathbb{R}^2_+}(\mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma}-W\varepsilon^{3-2s}x_1-J'(\omega_{\varepsilon,\Gamma}))\omega dx\ge\int_{\mathbb{R}^2_+}(\mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma}-W\varepsilon^{3-2s}x_1-J'(\omega_{\varepsilon,\Gamma}))\omega_{\varepsilon,\Gamma}dx.$$

然后，应用浴缸原理的一种改进形式（见[54]第 1.14 节）即可得到 (2.20)。证明至此完成。□

根据上一小节中 I_0 的定义（见 (2.8)），我们有

引理 2.16. 存在两个常数 $\varepsilon_0,\Gamma_0>0$，使得对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 和 $\Gamma>\Gamma_0$，都有

$$\sup_{\omega\in\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}}E_\varepsilon(\omega)\ge I_0+O(\varepsilon^{2-2s}),\quad as\ \varepsilon\to0.\tag{2.21}$$

证明. 令 ω_0 为 $\mathcal{A}_0$ 上 E_0 的极大化子。我们可以假设 ω_0 关于原点对称且非递增。由于 ω_0 的支集紧且有界，我们可以取足够大的 $\Gamma_0 > 0$ 和足够小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\bar{\omega}_0(x) := \omega_0(x - \varepsilon^{-1}(d_0, 0)) \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}.$$

直接计算可得

$$\sup_{\omega\in\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}} E_\varepsilon(\omega) \geq E_\varepsilon(\bar{\omega}_0) = E_0(\omega_0) + O(\varepsilon^{2-2s}),$$

这就推出了所需的估计，并完成了证明。 □

引理 2.17. 存在两个常数 $C_0, \varepsilon_1 > 0$，使得若 $\omega_{\varepsilon,\Gamma} \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$ 是 E_ε 在 $\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$ 上的极大化子，其中 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ 且 $\Gamma > \Gamma_0$，则有

$$\|\omega_{\varepsilon,\Gamma}\|_{2-s} \leq C_0. \tag{2.22}$$

证明. 注意到由引理 2.16，存在 $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ 使得 $E_\varepsilon(\omega_{\varepsilon,\Gamma}) \geq \frac{I_0}{2} > 0$，其中 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ 且 $\Gamma > \Gamma_0$。因此，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_{\varepsilon,\Gamma}) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_{\varepsilon,\Gamma}\mathcal{G}_s\omega_{\varepsilon,\Gamma} - E_\varepsilon(\omega_{\varepsilon,\Gamma}) < \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_{\varepsilon,\Gamma}\mathcal{G}_s\omega_{\varepsilon,\Gamma},$$

由此，根据引理 2.2 并采用与引理 2.4 证明中类似的论证，可得估计 (2.22)，从而完成证明。 □

引理 2.18. 存在常数 $\varepsilon_2 > 0$，使得如果 $\omega_{\varepsilon,\Gamma} \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$ 是 E_ε 在 $\mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$ 上关于 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ 和 $\Gamma > \Gamma_0$ 的极大化子，则有

$$\mu_{\varepsilon,\Gamma} > 0. \tag{2.23}$$

证明。固定 $\Gamma > \Gamma_0$，由引理 2.16 可知，$\{\omega_{\varepsilon,\Gamma}\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ 是 E_0 的极大化序列。于是，定理 II.2 和 [55] 中的推论 II.1 给出了一个子序列（为方便起见，仍记为 $\{\omega_{\varepsilon,\Gamma}\}$），在适当的平移之后，该子序列在 $L^1 \cap L^{2-s}(\mathbb{R}^2)$ 中收敛于 E_0 的一个极大化子 ω_0。因此，当 ε 足够小时，有 $\int_{B(p_\varepsilon,R_*)}\omega_{\varepsilon,\Gamma} \geq \frac{\kappa}{2}$，其中某点为 p_ε。这里，R_* 是引理 2.11 中的常数。由于 $\int \omega_{\varepsilon,\Gamma} = \kappa$，当 $R_* < r < \frac{d_0}{2\varepsilon}$ 足够大时，我们可以取一点 $x^r \in B(p_\varepsilon, r) \cap B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$，使得 $\omega_{\varepsilon,\Gamma}(x^r) \leq Cr^{-2}$。然后，利用 (2.20) 和假设（$\mathrm{H}_2'$），通过与引理 2.10 的证明类似的计算，我们得到

$$\mu_{\varepsilon,\Gamma} \geq \mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma} - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - J'(\omega_{\varepsilon,\Gamma}) \geq (4^{s-2}c_s\kappa + o(1))r^{2s-2} - O(\varepsilon^{2-2s}),$$

通过令 $r = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 和 ε 足够小，即可得到 (2.23)。 □

作为引理 2.15、2.17 和 2.18 的直接推论，通过与推论 2.6 的证明类似的论证，我们可以得到以下结果。证明细节留给读者。

推论 2.19。存在一个常数 $C_1 > 0$，使得若 $\omega_{\varepsilon,\,\Gamma} \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\,\Gamma}$ 是 E_ε在 $\mathcal{A}_{\varepsilon,\,\Gamma}$ 上的极大化子，其中 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ 且 $\Gamma > \Gamma_0$，则

$$\|\omega_{\varepsilon,\Gamma}\|_\infty \leq C_1. \tag{2.24}$$

此外，若 $\Gamma > \max\{\Gamma_0, C_1\}$，则

$$\omega_{\varepsilon,\Gamma} = (J')^{-1}\left((\mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon,\Gamma} - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_{\varepsilon,\Gamma})_+\right), \quad in\ B(\varepsilon^{-1}(d_0,0), \varepsilon^{-1}d_0/2). \tag{2.25}$$

完成必要的准备工作后，下面我们将证明 (1.7) 的极大化子的存在性及其性质。

2.2.2. 极大化子的存在性及其性质。我们首先陈述极大化子的一些基本性质。

引理 2.20. 对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$，存在 (1.7) 的一个极大化子。设 ω_ε 是 E_ε 在 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 上的一个极大化子。则以下断言成立：

(i) ω_ε 关于某个平面 $\{x_2 = const.\}$ 具有施泰纳对称性；(ii) 存在一个常数 μ_ε 使得

$$\omega_\varepsilon = (J')^{-1}\left((\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon)_+\right), \quad in\ B(\varepsilon^{-1}(d_0,0), \varepsilon^{-1}d_0/2); \tag{2.26}$$

(iii) 能量满足

$$I_0 + O(\varepsilon^{2-2s}) \le E_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \le I_0;$$

(iv) 存在一个与 ε 无关的常数 $0 < C < +\infty$，使得

$$\limsup_{\varepsilon\to 0_+} \|\omega_\varepsilon\|_\infty \le C. \tag{2.27}$$

证明。固定一个 $\Gamma > \max\{\Gamma_0, C_1\}$，则 $\omega_{\varepsilon,\Gamma} \in \mathcal{A}_{\varepsilon,\Gamma}$ 是 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ 上 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 内 E_ε 的一个极大化子。也就是说，对于每个足够小的 ε，我们都能得到 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 内 E_ε 的一个极大化子，为简便起见，记作 ω_ε。这些极大化子的性质可以通过与前一小节相当类似的论证推导出来，因此我们省略细节。□

我们注意到，(2.26) 尚不足以给出一个在动力学上可行的广义表面准地转方程定常涡流。这是因为存在截断函数$1_{B(\varepsilon^{-1}(d_0,\ 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)}$，这使得 ω_ε 和 $\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon$ 在整个空间 $\mathbb{R}^2$ 中可能并非泛函相关。为了得到所需的解，我们需要证明 ω_ε 的支集与 $B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$ 的边界相距一定距离。我们将证明，当 ε 足够小时，确实如此。其依据是这样的观察：为了使能量达到最大，极大化子的支集直径不能太大。我们将分几步得出这一结论。首先给出 μ_ε 的一个下界。

引理 2.21. 对于任意 $\delta > 0$，存在一个 $\varepsilon_\delta > 0$，使得

$$\mu_\varepsilon \ge \mu_* - \delta, \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta), \tag{2.28}$$

其中 $\mu_* > 0$ 是引理 2.10 中的常数

证明。反设存在常数 $\delta_0 > 0$ 和一个序列 $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$，满足$\varepsilon_j \to 0$，且 $j \to \infty$ 使得 $\limsup_{j\to+\infty} \mu_{\varepsilon_j} \le \mu_* - \delta_0$.。由引理 2.20 可知，$\{\omega_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^\infty$ 是 E_0的极大化序列。于是，[55] 中的定理 II. 2 和推论 II.1 表明，经过适当的平移后，存在一个子序列（为方便起见，仍记为 $\{\omega_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^\infty$）收敛到$E_0$在 $L^1 \cap L^{2-s}(\mathbb{R}^2)$中的一个极大化子 ω_0。由于 $|x|^{2s-2} \in L^{\frac{1}{1-s},\ \infty}$（弱 [42] 见

L^p 空间），由广义杨不等式（ [42]中的定理 1.4.25）$_{2-s}$可推出， $\mathcal{G}_s\omega_{\varepsilon_j}$ 在 $L^{\overline{(1-s)^2}}$ 中强收敛到 $\mathcal{G}_s\omega_0$。然后再取一个子序列，可设ω_{ε_j} 和 $\mathcal{G}_s\omega_{\varepsilon_j}$ 分别几乎处处收敛到 ω_0 和 $\mathcal{G}_s\omega_0$。

在 ω_{ε_j} 的支集上，Euler-Lagrange方程 (2.26) 表明

$$\mu_{\varepsilon_j} = \mathcal{G}_s^+\omega_{\varepsilon_j} - W\varepsilon_j^{3-2s}x_1 - J'(\omega_{\varepsilon_j}) \geq \mathcal{G}_s\omega_{\varepsilon_j} - J'(\omega_{\varepsilon_j}) + O(\varepsilon^{2-2s}).$$

令 $j \to +\infty$，几乎处处收敛以及关于 μ_{ε_j} 的假设表明

$$\mu_* - \delta_0 \geq \mathcal{G}_s\omega_0 - J'(\omega_0).$$

另一方面，由关于 ω_0 的 Euler-Lagrange 方程和引理 2.10 可得

$$\mathcal{G}_s\omega_0 - J'(\omega_0) = \mu_0,$$

对于某个 $\mu_0 \geq \mu_*$，这就构成了矛盾。至此，本引理的证明完成 . □

现在，我们确定 ω_ε的支集大小。

引理 2.22. 存在一个常数 $R > 0$，使得当 ε 充分小时，对于任意极大化子 ω_ε， ω_ε 的支集都包含在半径为 R的圆盘内。

证明. 根据前一个引理，我们可以取足够小的 ε，使得 $\mu_\varepsilon \geq \frac{\mu_*}{2}$。于是，欧拉–拉格朗日方程 (2.26) 蕴含

$$J'(\omega_\varepsilon) = (\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon)_+ \leq (\mathcal{G}_s\omega_\varepsilon - \frac{\mu_*}{2} + O(\varepsilon^{2-2s}))_+. \tag{2.29}$$

[55] 中的定理 II.2 和推论 II.1 给出一个子序列（仍记为 $\{\omega_\varepsilon\}$），经过平移后，该子序列在 $L^1 \cap L^{2-s}$ 中收敛到 E_0 的一个极大化子 ω_0。因此，对于任意 $\delta > 0$，我们都可以找到一个常数 $\varepsilon_\delta > 0$，使得

$$\|\omega_\varepsilon - \omega_0^\varepsilon\|_{2-s} \leq \delta, \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta),$$

其中 ω_0^ε 是 ω_0的一个平移。由引理 2.11，我们得出，对于某个点 $\tilde{x}_\varepsilon$，spt(ω_0^ε) $\subset B(\tilde{x}_\varepsilon, R_*)$。因此，利用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*)} \omega_\varepsilon &\geq \int_{B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*)} \omega_0^\varepsilon - \|\omega_\varepsilon - \omega_0^\varepsilon\|_{L^1(B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*))} \\ &\geq \kappa - C\|\omega_\varepsilon - \omega_0^\varepsilon\|_{2-s} \geq \kappa - C\delta,\end{aligned}$$

结合 $\int \omega_\varepsilon = \kappa$ 可得

$$\int_{B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*)^c} \omega_\varepsilon \leq C\delta, \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta). \tag{2.30}$$

取一个足够大的 $R \geq R_*$ 使得 $\frac{c_s\kappa}{|R-R_*|^{2-2s}} \leq \frac{\mu_*}{6}$。那么对于任意 $x \in B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)$ $\varepsilon^{-1}d_0/2)\backslash B(\tilde{x}_\varepsilon, R)$，利用引理 2.1 和 (2.27)，我们有

$$\mathcal{G}_s\omega_\varepsilon(x) = \int_{B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*)} \frac{c_s\omega_\varepsilon(y)}{|x-y|^{2-s}}dy + \int_{B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*)^c} \frac{c_s\omega_\varepsilon(y)}{|x-y|^{2-s}}dy$$

$$\leq \frac{c_s\kappa}{|R-R_*|^{2-2s}} + C\left(\left(\int_{B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*)^c}\omega_\varepsilon\right)^a + \left(\int_{B(\tilde{x}_\varepsilon,R_*)^c}\omega_\varepsilon\right)^b\right) \tag{2.31}$$
$$\leq \frac{\mu_*}{6} + C(\delta^a+\delta^b) \leq \frac{\mu_*}{3},$$

通过取足够小的 δ。(2.29) 表明，对于任意 $x \in B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2) \setminus B(\tilde{x}_\varepsilon, R)$，都有 $\omega_\varepsilon(x) = 0$。因此，我们找到常数 $R > 0$，使得当 ε 足够小时，ω_ε 的支集包含在半径为 R 的圆盘内，从而完成证明。□

为确定 ω_ε 的位置，令 $x_\varepsilon := \kappa^{-1}\int x\omega_\varepsilon$ 为质心。于是，对于某个 $d_\varepsilon > 0$，$x_\varepsilon = (\varepsilon^{-1}d_\varepsilon, 0)$。将 R 替换为 $2R$ 后，我们不妨假设，当 ε 足够小时，

$$\mathrm{spt}(\omega_\varepsilon) \subset B(x_\varepsilon, R).$$

引理 2.23. 有

$$d_\varepsilon \to d_0, \quad as\ \varepsilon \to 0. \tag{2.32}$$

证明。由于 $x_\varepsilon \in B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$，我们推得 $\frac{d_0}{2} < d_\varepsilon < \frac{3d_0}{2}$.。取一个子序列后，不妨假设

$$d_\varepsilon \to d_* \in \left[\frac{d_0}{2}, \frac{3d_0}{2}\right], \ \text{as } \varepsilon \to 0.$$

我们证明 $d_* = d_0$。事实上，取

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x) := \omega_\varepsilon(x + x_\varepsilon - (\varepsilon^{-1}d_0, 0)) \in \mathcal{A}_\varepsilon.$$

注意到 ω_ε 是极大化子，即 $E_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \geq E_\varepsilon(\bar{\omega}_\varepsilon)$，我们得到

$$\frac{c_s}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}\frac{\omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}dxdy + W\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+}x_1\omega_\varepsilon(x)dx$$
$$\leq \frac{c_s}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}\frac{\bar{\omega}_\varepsilon(x)\bar{\omega}_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}dxdy + W\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+}x_1\bar{\omega}_\varepsilon(x)dx.$$

将 $\varepsilon \to 0$ 代入上述不等式，得到

$$\frac{c_s\kappa}{2^{3-2s}d_*^{2-2s}} + Wd_* \leq \frac{c_s\kappa}{2^{3-2s}d_0^{2-2s}} + Wd_0,$$

这意味着 $d_* = d_0$，因为 d_0 是函数 $h(\tau) = \frac{c_s\kappa}{2^{3-2s}\tau^{2-2s}} + W\tau$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一极小化子。

注意，根据上述证明可知，$\{d_\varepsilon\}$ 中的每个序列都有一个收敛子序列，且该子序列收敛到同一个极限 d_0。于是，简单的反证法表明，$\{d_\varepsilon\}$ 本身收敛到 d_0。至此，引理的证明完成。□

现在我们可以证明定理 1.5 了。

定理 1.5 的证明：假设对于某个满足 (H_1) 和 (H_2) 的 f，有 $J(t) = \int_0^t f^{-1}(\tau)d\tau$。结合引理 2.20–2.23，即可完成定理 1.5 的证明。□

根据引理 2.22 和引理 2.23，当 ε 足够小时，ω_ε 的支集远离 $B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$ 的边界。我们通过定义

在 $\mathbb{R}^2_+ \setminus B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$ 中令 ω_ε 为 0。有了这一事实，我们现在可以证明$\omega_{tr,\ \varepsilon}(x) := \omega_\varepsilon(x) - \omega_\varepsilon(\bar{x})$ 是意义下的 (1.3) 中的稳态解。更准确地说，我们有

引理 2.24. 假设 $J(t) = \int_0^t f^{-1}(\tau)d\tau$对某个满足 (H_1) 和 (H_2) 的 f成立，且当 $0 < s < \frac{1}{2}$ 时$f \in C^{1-2s}$。令 ω_ε 为上述得到的一个极大化子，并且 $\omega_{tr,\ \varepsilon}(x) := \omega_\varepsilon(x) - \omega_\varepsilon(\bar{x})$，则只要 ε 充分小，就有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_{tr,\varepsilon}\nabla^\perp(\mathcal{G}_s\omega_{tr,\varepsilon} - W\varepsilon^{3-2s}x_1)\cdot\nabla\varphi dx = 0, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \tag{2.33}$$

证明. 利用分数阶拉普拉斯算子的正则性理论（[60]中的命题 2.8 和 2.9），对于 $s \neq \frac{1}{2}$，我们可以证明 $\mathcal{G}_s\omega_{tr,\ \varepsilon} \in C^{0,\ 1}$；这是基于关于 f 的假设、$\omega_\varepsilon \in L^1 \cap L^\infty$ 这一事实以及由引理 2.1 得到的 $\mathcal{G}_s\omega_{tr,\ \varepsilon} \in L^\infty$。对于 $s = \frac{1}{2}$，我们使用势的标准理论，推得 $\mathcal{G}_s\omega_{tr,\ \varepsilon} \in W^{2s,\ p}$ 对任意 $p > 1$ 均成立。因此，对于所有 $s \in (0, 1)$，(2.33) 中的积分都有意义。

根据$\omega_{tr,\ \varepsilon}$的定义，只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_\varepsilon\nabla^\perp(\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1)\cdot\nabla\varphi dx = 0, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+).$$

回顾

$$\omega_\varepsilon = (J')^{-1}\left((\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon)_+\right), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2_+.$$

令 $F(t) = \int_0^t (J')^{-1}(\tau)d\tau$。对于任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$，我们通过分部积分得到

n

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_\varepsilon\nabla^\perp(\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1)\cdot\nabla\varphi dx \\
&= -\int_{B(\varepsilon^{-1}(d_0,0),\varepsilon^{-1}d_0/2)} F((\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon)_+)(\partial_{x_2}\partial_{x_1}\varphi - \partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi)dx = 0,
\end{aligned}$$

其中用到了如下事实：$(\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon)_+ = 0$ 在 $\partial B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$上成立。证明完毕。□

现在我们准备证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明：令 $\omega_{tr,\ \varepsilon}(x) := \omega_\varepsilon(x) - \omega_\varepsilon(\bar{x})$。于是，定理 1.1 的陈述可由定理 1.5 和引理 2.24 推出。□

3. Uniqueness of maximizers

本节中，我们证明在某些 $L > 0$ 且 $p \in (0, \frac{1}{1-s})$ 的情形下，$J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$ 的极大化子的唯一性。首先，通过仔细分析，我们建立关于渐近行为的一些更精细估计。然后，利用线性化方程的非退化性（即命题 2.13 (iii)），得到唯一性。下文中，若不会引起混淆，我们有时省略积分符号中的区域，并将其简写为 $\int$。

3.1. 关于渐近行为的精细估计。在 $J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$ 的情形下，我们详细研究极大化子的渐近行为。

引理 3.1. 假设 $J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$，其中 $L > 0$，且 $p \in (0, \frac{1}{1-s})$。对每个足够小的 ε，设 ω_ε 是 E_ε 在 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 上的一个极大化子。定义 $\tilde{\omega}_\varepsilon(x) := \omega_\varepsilon(x + x_\varepsilon)$，其中 $x_\varepsilon = \kappa^{-1} \int x\omega_\varepsilon$ 是 ω_ε 的质心。设 ω_0 是满足 $\int x\omega_0 = 0$ 的 E_0 在 $\mathcal{A}_0$ 上的唯一极大化函数。则有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\tilde{\omega}_\varepsilon - \omega_0\|_\infty = 0.$$

证明. 我们首先证明能量的收敛性。一方面，由于 $\tilde{\omega}_\varepsilon \in \mathcal{A}_0$ 和 ω_0 是 E_0 在 $\mathcal{A}_0$ 上的一个极大化子，我们有

$$E_0(\omega_0) \geq E_0(\tilde{\omega}_\varepsilon).$$

另一方面，注意到 $\omega_0(\cdot - \varepsilon^{-1}(d_0, 0)) \in \mathcal{A}_\varepsilon$，我们推得

$$E_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \geq E_\varepsilon(\omega_0(\cdot - \varepsilon^{-1}(d_0, 0))).$$

容易看出，$E_\varepsilon(\omega_\varepsilon) = E_0(\tilde{\omega}_\varepsilon) + O(\varepsilon^{2-2s})$，且 $E_\varepsilon(\omega_0(\cdot - \varepsilon^{-1}(d_0, 0))) = E_0(\omega_0) + O(\varepsilon^{2-2s})$。因此，我们得到

$$E_0(\omega_0) \geq E_0(\tilde{\omega}_\varepsilon) \geq E_0(\omega_0) + O(\varepsilon^{2-2s}),$$

这意味着

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_0(\tilde{\omega}_\varepsilon) = E_0(\omega_0). \tag{3.1}$$

注意，对于任意 ε 小的数，都有 $\|\tilde{\omega}_\varepsilon\|_\infty = \|\omega_\varepsilon\|_\infty \leq C$，其中 $C > 0$ 与 ε 无关，并且根据前述引理，对于某个与 ε 无关的 R，有 $\mathrm{spt}(\tilde{\omega}_\varepsilon) \subset B(0, R)$。因此，不妨设经过取子序列，$\tilde{\omega}_\varepsilon \to \hat{\omega}_0$ 在 L^∞ 中弱星收敛于某个 $\hat{\omega}_0$。类似于引理 2.14 的证明可知，$E_0(\hat{\omega}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} E_0(\tilde{\omega}_\varepsilon) = E_0(\omega_0)$，因此 $\hat{\omega}_0$是 $\mathcal{A}_0$上的 E_0 的极大化子。此外，由弱星收敛可得

$$\int x\hat{\omega}_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int x\tilde{\omega}_\varepsilon = 0.$$

根据命题 2.13，E_0 的极大化子具有唯一性，因此这表明$\hat{\omega}_0 = \omega_0$。

我们已经证明了弱星收敛。现在证明强收敛。由于 ω_ε 在 $L^1 \cap L^\infty$中一致有界，因此由引理 2.1 和 [60],中的命题 2.9 可知，对于某个 $0 < \alpha < 1$，$\mathcal{G}_s\omega_\varepsilon$ 在 C^α 中一致有界。然后，由表示式 (2.26) 可推出 ω_ε 在 C^α中一致有界。因此，根据阿尔泽拉-阿斯科利定理，我们可以设在某个子序列上，$\{\tilde{\omega}_\varepsilon\}$ 在 L^∞ 中强收敛到 ω_0。

由于 $\{\tilde{\omega}_\varepsilon\}$ 中的每个序列都有一个收敛子序列，该子序列在L^∞ 中强收敛到同一个极限 ω_0，简单的反证法可得 $\{\tilde{\omega}_\varepsilon\}$ 本身在 L^∞ 中强收敛到 ω_0。至此，引理的证明完成。□

我们推导出拉格朗日乘子 μ_ε 关于 ω_ε 的积分表示。

引理 3.2. 假设 $J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$对于某个 $L > 0$ 和 $p \in (0, \frac{1}{1-s})$ 成立。令 ω_ε 为 E_ε 在 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 上的极大化子，并且对某个 μ_ε 满足 (2.26)。那么我们有

$$\mu_\varepsilon \kappa = A_\gamma E_0(\omega_\varepsilon) + B_\gamma W \varepsilon^{3-2s} \int_{\mathbb{R}^2_+} x_1 \omega_\varepsilon + C_\gamma \int_{\mathbb{R}^2_+} \int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{c_s \omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{2-2s}} dxdy, \tag{3.2}$$

其中常数 $A_\gamma = \frac{2-\gamma-s\gamma}{2-s-\gamma}$, $B_\gamma = \frac{2-s}{s-1} - \frac{2-\gamma-\gamma s}{(2-s-\gamma)(s-1)}$, $C_\gamma = -\frac{2-\gamma-\gamma s}{2(2-s-\gamma)}$ 和 $\gamma = 1 + \frac{1}{p}$。

证明。我们不妨假设 ω_ε 关于 x_2 对称且非递增。于是，引理 2.22 和引理 2.23 表明，ω_ε 的支集远离边界 $\partial B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$。因此，函数 $(\omega_\varepsilon)_t(x) := t^{-2}\omega_\varepsilon(t^{-1}x)$ 支撑于 $B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$，其中 $t \approx 1$，故属于 $\mathcal{A}_\varepsilon$。由于 ω_ε 是极大化子，我们推出

$$\left.\frac{dE_\varepsilon((\omega_\varepsilon)_t)}{dt}\right|_{t=1} = 0,$$

根据 E_ε 的定义和直接计算可得

$$(s-1)\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_\varepsilon \mathcal{G}_s^+ \omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\omega_\varepsilon - (2-2\gamma)\int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_\varepsilon) = 0.$$

于是，由上述恒等式可推得

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_\varepsilon \mathcal{G}_s \omega_\varepsilon = \frac{2-2\gamma}{s-1}\int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_\varepsilon) + \frac{W}{s-1}\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\omega_\varepsilon + c_s\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}dxdy. \tag{3.3}$$

由 E_0 的定义和 (3.3)，可推得

$$\begin{aligned} E_0(\omega_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_\varepsilon \mathcal{G}_s \omega_\varepsilon - \int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_\varepsilon) \\ &= \frac{2-s-\gamma}{s-1}\int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_\varepsilon) + \frac{W}{2(s-1)}\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\omega_\varepsilon + \frac{c_s}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}dxdy. \end{aligned} \tag{3.4}$$

另一方面，将方程 $(J')(\omega_\varepsilon) = (\mathcal{G}_s^+\omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \mu_\varepsilon)_+$ 乘以 ω_ε 并积分，得到

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon\kappa &= \int_{\mathbb{R}^2_+} \omega_\varepsilon \mathcal{G}_s^+ \omega_\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\omega_\varepsilon - \gamma\int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_\varepsilon) \\ &= \frac{2-\gamma-\gamma s}{s-1}\int_{\mathbb{R}^2_+} J(\omega_\varepsilon) + \frac{2-s}{s-1}W\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\omega_\varepsilon \\ &= \frac{2-\gamma-\gamma s}{2-s-\gamma}E_0(\omega_\varepsilon) + \left(\frac{2-s}{s-1} - \frac{2-\gamma-\gamma s}{2(s-1)(2-s-\gamma)}\right)W\varepsilon^{3-2s}\int_{\mathbb{R}^2_+} x_1\omega_\varepsilon \\ &\quad - \frac{2-\gamma-\gamma s}{2(2-s-\gamma)}\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{c_s\omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}dxdy, \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中我们在上述计算中使用了 (3.3) 和 (3.4)。因此得到 (3.2)，并完成了该引理的证明。□

由引理 3.2 可直接得到关于 μ_ε 的以下估计。

推论 3.3。可得

$$|\mu_\varepsilon - \mu_0| \to 0, \quad as\ \varepsilon \to 0_+.$$

接下来，我们为一般的 J 推导另一个积分恒等式，该恒等式确定了 ω_ε 的位置。

引理 3.4。设 J 满足 (H_1') 和 (H_2')。令 ω_ε 为 E_ε 在 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 上的一个极大化子。则以下恒等式成立。

$$2(1-s)c_s \int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{\omega_\varepsilon(x)(x_1+y_1)\omega_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{4-2s}}dxdy = W\varepsilon^{3-2s}\kappa. \tag{3.6}$$

证明。我们不妨假设 ω_ε 在 x_2 上对称且非递增。于是，引理 2.22 和引理 2.23 表明， ω_ε 的支集远离边界 ∂B（ε^{-1}（d_0, 0） $\varepsilon^{-1}d_0/2$）。因此，函数 $(\omega_\varepsilon)^t(x) := \omega_\varepsilon(x + (t, 0))$ 支撑于 B（ε^{-1}（d_0, 0） $\varepsilon^{-1}d_0/2$）内，其中 $t \approx 0$，因而属于 $\mathcal{A}_\varepsilon$。由于 ω_ε 是一个极大化子，我们推得

$$\left.\frac{dE_\varepsilon((\omega_\varepsilon)^t)}{dt}\right|_{t=0} = 0,$$

由 E_ε 的定义和直接计算可得（3.6）。因此，本引理的证明完成。□

利用恒等式（3.6），我们可以将引理 2.23 中 x_ε 的估计加强如下。

引理 3.5。假设 J 满足（H_1'）和（H_2'）。设 ω_ε 是 E_ε 在$\mathcal{A}_\varepsilon$上的一个极大化子。若 $x_\varepsilon = \kappa^{-1}\int x\omega_\varepsilon =$ （$\varepsilon^{-1}d_\varepsilon$, 0），则有

$$|d_\varepsilon - d_0| = O(\varepsilon^2).$$

证明。由引理 2.22 可知，对某个与 ε 无关的 R，有 spt（ω_ε） $\subset B$（x_ε, R），且 $x_\varepsilon =$ （$\varepsilon^{-1}d_\varepsilon$,0），其中 $d_\varepsilon \to d_0$ 为 $\varepsilon \to 0_+$。我们利用泰勒展开计算（3.6）的左端

$$\begin{aligned}
&\int\int \frac{\omega_\varepsilon(x)(x_1+y_1)\omega_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}|^{4-2s}}dxdy = \varepsilon^{3-2s}\int\int \frac{\tilde{\omega}_\varepsilon(x)(2d_\varepsilon+\varepsilon(x_1+y_1))\tilde{\omega}_\varepsilon(y)}{|(2d_\varepsilon,0)+\varepsilon(x-\bar{y})|^{4-2s}}dxdy\\
=&\varepsilon^{3-2s}\int\int \tilde{\omega}_\varepsilon(x)\tilde{\omega}_\varepsilon(y)\left[\frac{1}{(2d_\varepsilon)^{3-2s}} + \frac{(2s-3)\varepsilon(x_1+y_1)}{(2d_\varepsilon)^{4-2s}} + O(\varepsilon^2)\right]dxdy\\
=&\frac{\varepsilon^{3-2s}\kappa^2}{(2d_\varepsilon)^{3-2s}} + O(\varepsilon^{5-2s}).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里我们利用了 $\int x\tilde{\omega}_\varepsilon(x)dx = 0$，这是由 $\tilde{\omega}_\varepsilon$ 的定义得出的。

然后利用（3.6）和（3.7），我们得到

$$\frac{2(1-s)c_s\kappa^2}{(2d_\varepsilon)^{3-2s}} - W\kappa = O(\varepsilon^2),$$

这意味着

$$d_\varepsilon^{2s-3} = \frac{2^{2-2s}W}{(1-s)c_s\kappa} + O(\varepsilon^2) = d_0^{2s-3} + O(\varepsilon^2). \tag{3.8}$$

这里我们使用了 d_0 的定义。由于 $\left.\frac{d_{(t^{2s-3})}}{dt}\right|_{t=d_0} \neq 0$，由 (3.8) 可推得$|d_\varepsilon - d_0| = O(\varepsilon^2)$, 从而完成证明。□

3.2. 唯一性的证明。在本小节中，我们证明当 $J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$对某个 $L > 0$且 $p \in (1, \frac{1}{1-s})$ 成立时，极大化子的唯一性。设 ω_ε 是 E_ε 在 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 上的一个极大化子。回忆一下, $x_\varepsilon = \kappa^{-1}\int x\omega_\varepsilon = (\varepsilon^{-1}d_\varepsilon, 0)$ 且 $\tilde{\omega}_\varepsilon = \omega_\varepsilon(\cdot + \varepsilon^{-1}(d_\varepsilon, 0))$。令 $L_\gamma = \left(\frac{1}{L\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$，其中 $\gamma = 1 + \frac{1}{p}$。那么，由 (2.26)、(3.2) 和 (3.6)，我们得到 $\tilde{\omega}_\varepsilon$ 和 d_ε 的方程:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_\varepsilon(x) = L_\gamma\left(\mathcal{G}_s\tilde{\omega}_\varepsilon(x) - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\tilde{\omega}_\varepsilon) + S_\varepsilon(\tilde{\omega}_\varepsilon, d_\varepsilon)\right)_+^p, \\ 2(1-s)c_s\int\int \frac{\tilde{\omega}_\varepsilon(x)(2d_\varepsilon+\varepsilon(x_1+y_1))\tilde{\omega}_\varepsilon(y)}{|(2d_\varepsilon,0)+\varepsilon(x-\bar{y})|^{4-2s}}dxdy - W\kappa = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

其中，算子 $S_\varepsilon(\tilde{\omega}_\varepsilon, d_\varepsilon)$ 定义为

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(\tilde{\omega}_\varepsilon, d_\varepsilon) = &- W\varepsilon^{3-2s}(x_1 + \varepsilon^{-1}d_\varepsilon) - \int \frac{\varepsilon^{2-2s}c_s\tilde{\omega}_\varepsilon(y)}{|(2d_\varepsilon,0)+\varepsilon(x-\bar{y})|^{2-2s}}dy \\ &-\kappa^{-1}B_\gamma W\varepsilon^{2-2s}d_\varepsilon - \kappa^{-1}C_\gamma\int\int \frac{\varepsilon^{2-2s}c_s\tilde{\omega}_\varepsilon(x)\tilde{\omega}_\varepsilon(y)}{|(2d_\varepsilon,0)+\varepsilon(x-\bar{y})|^{2-2s}}dxdy. \end{aligned} \tag{3.10}$$

为简化记号，我们将算子 P_ε 和 Q_ε 记作如下形式。

$$P_\varepsilon(\omega, d) := L_\gamma\left(\mathcal{G}_s\omega(x) - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega) + S_\varepsilon(\omega, d)\right)_+^p,$$

and

$$Q_\varepsilon(\omega, d) := 2(1-s)c_s\int\int \frac{\omega(x)(2d+\varepsilon(x_1+y_1))\omega(y)}{|(2d,0)+\varepsilon(x-\bar{y})|^{4-2s}}dxdy - W\kappa.$$

注意到，对于 $d_\varepsilon \in (\frac{d_0}{2}, \frac{3d_0}{2})$、 x、$y \in B(0,R)$ 以及足够小的 ε，我们总有 $|(2d_\varepsilon, 0) + \varepsilon(x-\bar{y})|$ 下界为一个正常数。因此，我们很容易得到以下引理，其证明留给读者。

引理3.6. 对于 $(\omega, d) \in \mathcal{X}^1$：当$= L^1(B(0,R)) \times (\frac{d_0}{2}, \frac{3d_0}{2})$ 且 ε 足够小时，有

$$\|S_\varepsilon(\omega, d)\|_\infty + \|\nabla S_\varepsilon(\omega, d)\|_{\mathcal{X}^1\to L^\infty} + \|\nabla^2 S_\varepsilon(\omega, d)\|_{\mathcal{X}^1\times\mathcal{X}^1\to L^\infty} = O(\varepsilon^{2-2s}).$$

利用 E_0 的定义和式 (2.7)，可以看出

$$E_0'(\omega_0)\phi = \mu_0\int\phi.$$

若定义

$$P_0(\omega,d):=L_\gamma\left(\mathcal{G}_s\omega(x)-\kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega)\right)_+^p,$$

and

$$Q_0(\omega,d):=\frac{2(1-s)c_s}{(2d)^{3-2s}}\int\int\omega(x)\omega(y)dxdy-W\kappa.$$

通过直接计算，可以验证

$$\omega_0=P_0(\omega_0,d_0),\quad \nabla P_0(\omega_0,d_0)(\phi,l)=pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0-\kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\left(\mathcal{G}_s\phi-\kappa^{-1}A_\gamma\mu_0\int\phi\right)$$

and

$$Q_0(\omega_0,d_0)=0,\quad \nabla Q_0(\omega_0,d_0)(\phi,l)=\frac{(1-s)c_s\kappa}{2^{1-2s}d_0^{3-2s}}\int\phi-\frac{(1-s)(3-2s)c_s\kappa^2}{2^{2-2s}d_0^{4-2s}}l.$$

根据引理 2.23 和 3.1， $\tilde{\omega}_\varepsilon$ 和 d_ε 具有以下形式:

$$\tilde{\omega}_\varepsilon=\omega_0+\phi_\varepsilon,\quad d_\varepsilon=d_0+l_\varepsilon,$$

其中， $\phi_\varepsilon\in L^\infty(B(0,R))$满足 $\int x\phi_\varepsilon=\int\phi_\varepsilon=0$、 $\|\phi_\varepsilon\|_\infty=o(1)$，且 l_ε 是一个实数，当 $\varepsilon\to0$ 时满足 $|l_\varepsilon|=o(1)$。

然后由 (3.9) 可推出，$(\phi,l)=(\phi_\varepsilon,l_\varepsilon)$ 是以下方程组的解

$$\begin{cases}\phi-pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0-\kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\left(\mathcal{G}_s\phi-\kappa^{-1}A_\gamma\mu_0\int\phi\right)=\mathcal{R}_1(\phi,l),\\ \frac{(1-s)c_s\kappa}{2^{1-2s}d_0^{3-2s}}\int\phi-\frac{(1-s)(3-2s)c_s\kappa^2}{2^{2-2s}d_0^{4-2s}}l=\mathcal{R}_2(\phi,l),\end{cases}\tag{3.11}$$

其中，超线性项 $\mathcal{R}_1(\phi,l)$ 和 $\mathcal{R}_2(\phi,l)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(\phi,l)&=L_\gamma\left(\mathcal{G}_s(\omega_0+\phi)-\kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0+\phi)+S_\varepsilon(\omega_0+\phi,d_0+l)\right)_+^p\\&-L_\gamma\left(\mathcal{G}_s\omega_0-\kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0)\right)_+^p-pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0-\kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\left(\mathcal{G}_s\phi-\kappa^{-1}A_\gamma\mu_0\int\phi\right)\end{aligned}\tag{3.12}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2(\phi,l)&=2(1-s)c_s\int\int\frac{(\omega_0+\phi)(x)(2d_0+2l_\varepsilon+\varepsilon(x_1+y_1))(\omega_0+\phi)(y)}{|(2d_0+2l_\varepsilon,0)+\varepsilon(x-\bar{y})|^{4-2s}}dxdy-W\kappa\\&-\frac{(1-s)c_s\kappa}{2^{1-2s}d_0^{3-2s}}\int\phi+\frac{(1-s)(3-2s)c_s\kappa^2}{2^{2-2s}d_0^{4-2s}}l\end{aligned}\tag{3.13}$$

为研究线性化方程 (3.11)，我们设

$$\mathcal{L}_0\phi:=\phi-pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0-\kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\left(\mathcal{G}_s\phi-\kappa^{-1}A_\gamma\mu_0\int\phi\right).$$

利用非退化性命题 2.13 (iii)，我们得到关于 $\mathcal{L}_0$ 的以下关键估计。

引理 3.7. 存在一个常数 $C_0>0$ ，使得

$$\|\mathcal{L}_0\phi\|_2\geq C_0\|\phi\|_2,\quad\forall\ \phi\in L^2(B(0,R))\ with\ \int x\phi=\int\phi=0.$$

证明. 我们通过将 ϕ 替换为 $\phi/\|\phi\|_2$ 来对 ϕ 进行归一化，使得 $\|\phi\|_2 = 1$。现在反设存在一个序列 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(B(0,R))$，使得

$$\|\phi_n\| = 1, \int x\phi_n = \int \phi_n = 0,$$

而

$$\|\mathcal{L}_0\phi_n\| \to 0, \quad \text{as } n \to +\infty.$$

也就是说

$$\phi_n = pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\mathcal{G}_s\phi_n + o(1). \tag{3.14}$$

我们首先假设，经过选取一个子序列，有 $\phi_n \to \phi_\infty$ 在 L^2中弱收敛。注意，$(\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}$ 的支集包含于 $B(0,R)$。于是，根据势函数正则性理论以及分数阶索伯列夫空间的紧嵌入定理（例如参见[34, 62]），经过选取一个子序列，我们有 $pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\mathcal{G}_s\phi_n \to pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\mathcal{G}_s\phi_\infty$ 在 $L^2(B(0,R))$ 中强收敛，因此由（3.14）可得，$\phi_n \to \phi_\infty$在 L^2中强收敛。因此，我们有 ϕ_∞ 满足

$$\phi_\infty = pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\mathcal{G}_s\phi_\infty, \quad \|\phi_\infty\|_2 = 1, \quad \int x\phi_\infty = \int \phi_\infty = 0.$$

根据势函数正则性理论、索伯列夫嵌入和自举论证，可以证明 $\phi_\infty \in L^\infty(B(0,R))$。因此，由命题 2.13 (iii) 可推得 $\phi_\infty \in \text{span}\{\partial_{x_1}\omega_0, \partial_{x_2}\omega_0\}$，结合 $\int x\phi_\infty = 0$，由于 ω_0的径向对称性，可得 $\phi_\infty \equiv 0$。这与 $\|\phi_\infty\|_2 = 1$矛盾。因此，此引理必然成立。□

现在我们研究 (3.11) 的右端。

引理 3.8. 对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得若 ϕ_1、$\phi_2 \in L^\infty(B(0,R))$ 和 l_1、$l_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $\int \phi_1 = \int \phi_2 = 0$，并且

$$\|\phi_1\|_\infty + \|\phi_2\|_\infty + |l_1| + |l_2| \le \delta,$$

那么我们有

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}(\|\mathcal{R}_1(\phi_1,l_1) - \mathcal{R}_1(\phi_2,l_2)\|_2 + |\mathcal{R}_2(\phi_1,l_1) - \mathcal{R}_2(\phi_2,l_2)|) \le \epsilon(\|\phi_1-\phi_2\|_2 + |l_1-l_2|).$$

证明。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1(\phi_1,l_1) - \mathcal{R}_1(\phi_2,l_2)\\
=&L_\gamma\left(\mathcal{G}_s(\omega_0+\phi_1) - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0+\phi_1) + S_\varepsilon(\omega_0+\phi_1, d_0+l_1)\right)_+^p\\
&- L_\gamma\left(\mathcal{G}_s(\omega_0+\phi_2) - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0+\phi_2) + S_\varepsilon(\omega_0+\phi_2, d_0+l_2)\right)_+^p\\
&- pL_\gamma(\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\mathcal{G}_s(\phi_1-\phi_2)\\
=&pL_\gamma\int_0^1\Big[\left(\mathcal{G}_s(\omega_0+\phi(\tau)) - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0+\phi(\tau)) + S_\varepsilon(\omega_0+\phi(\tau), d_0+l(\tau))\right)_+^{p-1}\\
&-(\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0))_+^{p-1}\Big]\,d\tau\mathcal{G}_s(\phi_1-\phi_2) + O(\|\nabla S_\varepsilon(\omega_0,d_0)\|)\|\phi_1-\phi_2\|_2,
\end{aligned}$$

其中 $\phi(\tau) = \tau\phi_1 + (1-\tau)\phi_2$, $l(\tau) = \tau l_1 + (1-\tau)l_2$。接下来，我们将 $\mathcal{G}_s(\omega_0 + \phi(\tau)) - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0 + \phi(\tau)) + S_\varepsilon(\omega_0 + \phi(\tau), d_0 + l(\tau))$ 展开如下。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_s(\omega_0 + \phi(\tau)) - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0 + \phi(\tau)) + S_\varepsilon(\omega_0 + \phi(\tau), d_0 + l(\tau)) \\
=&\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0) \\
&+ \mathcal{G}_s\phi(\tau) + \int \phi(\tau)\mathcal{G}_s\omega_0 - \int (J(\omega_0 + \phi(\tau)) - J(\omega_0)) + \frac{1}{2}\int \phi(\tau)\mathcal{G}_s\phi(\tau) + O(\|S_\varepsilon\|_\infty) \\
=&\mathcal{G}_s\omega_0 - \kappa^{-1}A_\gamma E_0(\omega_0) + O(\|\phi(\tau)\|_\infty + \|\phi(\tau)\|_\infty^2 + \|S_\varepsilon\|_\infty),
\end{aligned}$$

其中我们使用了H¨older不等式、引理2.1和引理2.2。利用 $h(t) = t_+^{p-1} \in C^0$, α_p当 $\alpha_p = \min\{1, p-1\} \in (0, 1]$,时，我们继续计算 $\mathcal{R}_1(\phi_1, l_1) - \mathcal{R}_1(\phi_2, l_2)$。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1(\phi_1, l_1) - \mathcal{R}_1(\phi_2, l_2) \\
=&O((\|\phi(\tau)\|_\infty + \|\phi(\tau)\|_\infty^2 + \|S_\varepsilon\|)^{\alpha_p})\mathcal{G}_s(\phi_1 - \phi_2) + O(\|\nabla S_\varepsilon(\omega_0, d_0)\|)\|\phi_1 - \phi_2\|
\end{aligned}$$

因此，若 $\|\phi_1\|, \|\phi_2\| \le \delta$，则我们得到

$$\|\mathcal{R}_1(\phi_1, l_1) - \mathcal{R}_1(\phi_2, l_2)\|_2 \le C(\delta^{\alpha_p} + \varepsilon^{(2-2s)\alpha_p})\|\phi_1 - \phi_2\|_2 = o_{\delta,\varepsilon}(1)\|\phi_1 - \phi_2\|_2. \tag{3.15}$$

由于 $\mathcal{R}_2$ 是 C^2 光滑的，很容易看出

$$\|\mathcal{R}_2(\phi_1, l_1) - \mathcal{R}_2(\phi_2, l_2)\| \le C(\|\phi_1 - \phi_2\|^2 + |l_1 - l_2|^2) = o_{\delta,\varepsilon}(1)(\|\phi_1 - \phi_2\| + |l_1 - l_2|). \tag{3.16}$$

The proof of this lemma is thus finished. □

现在，我们准备证明唯一性。

定理 1.6 的证明:

反设存在两个不同的极大化子 $\omega_{1,\varepsilon} \ne \omega_{2,\varepsilon}$。于是，我们得到两对 $(\phi_{1,\varepsilon}, l_{1,\varepsilon})$ 和 $(\phi_{2,\varepsilon}, l_{2,\varepsilon})$，使得 $\|\phi_{1,\varepsilon} - \phi_{2,\varepsilon}\|_2 + |l_{1,\varepsilon} - l_{2,\varepsilon}| \ne 0$, $\int x\phi_{1,\varepsilon} = \int \phi_{1,\varepsilon} = \int x\phi_{2,\varepsilon} = \int \phi_{2,\varepsilon} = 0$ and $\|\phi_{1,\varepsilon}\|_\infty + \|\phi_{2,\varepsilon}\|_\infty + |l_{1,\varepsilon}| + |l_{2,\varepsilon}| = o(1)$ as $\varepsilon \to 0$。此外，$(\phi_{1,\varepsilon}, l_{1,\varepsilon})$ 和 $(\phi_{2,\varepsilon}, l_{2,\varepsilon})$ 均满足系统 (3.11)。

一方面，由引理 3.7，左端之差满足

$$\|\mathcal{L}_0(\phi_{1,\varepsilon} - \phi_{2,\varepsilon})\|_2 + \frac{(1-s)(3-2s)c_s\kappa^2}{2^{2-2s}d_0^{4-2s}}|l_{1,\varepsilon} - l_{2,\varepsilon}| \ge C_0\|\phi_{1,\varepsilon} - \phi_{2,\varepsilon}\|_2 + \frac{(1-s)(3-2s)c_s\kappa^2}{2^{2-2s}d_0^{4-2s}}|l_{1,\varepsilon} - l_{2,\varepsilon}|.$$

另一方面，根据引理 3.8，右端之差满足$\|\mathcal{R}_1(\phi_{1,\varepsilon}, l_{1,\varepsilon}) - \mathcal{R}_1(\phi_{2,\varepsilon}, l_{2,\varepsilon})\|_2 + |\mathcal{R}_2(\phi_{1,\varepsilon}, l_{1,\varepsilon}) - \mathcal{R}_2((\phi_{2,\varepsilon}, l_{2,\varepsilon})| = o(1)(\|\phi_{1,\varepsilon} - \phi_{2,\varepsilon}\|_2 + |l_{1,\varepsilon} - l_{2,\varepsilon}|)$，当 ε 足够小时，这将导致矛盾。因此，我们证明了当 ε 足够小时极大化子的唯一性，并完成了定理 1.6 的证明。□

4. Nonlinear orbital stability

本节旨在研究第 2 节中得到的行波解的非线性稳定性。我们首先证明一个一般性的稳定性定理，其思路与 [13], 相似；该文研究了二维欧拉方程中涡旋对的稳定性。在本节中，我们始终假设：若 $s > \frac{1}{2}$，则 $D \subset \mathbb{R}_+^2$ 是区域 $D = \mathbb{R}_+^2$；若 $0 < s \le \frac{1}{2}$，则 $D = \{x_1 \ge 1\}$。

4.1. 极大化者集合上的一般稳定性定理。设 ξ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的非负勒贝格可积函数，我们将 $\mathcal{R}(\xi)$ 记为 ξ 在 D 上的（等测）重排集合，其定义如下:

$$\mathcal{R}(\xi)=\Big\{0\le\zeta\in L^1(D)\Big||\{x:\zeta(x)>\tau\}|=|\{x:\xi(x)>\tau\}|,\forall\,\tau>0\Big\}.$$

注意，所有 函数在 $\mathcal{R}(\xi)$ 中具有相同的 L^q 范数。仿照 [13], ，我们还定义

$$\mathcal{R}_+(\xi)=\Big\{\zeta 1_S\big|\zeta\in\mathcal{R}(\xi),\ \ S\subset D\text{ measurable}\Big\},$$

and

$$\overline{\mathcal{R}(\xi)^w}=\left\{\zeta\ge 0\text{ measurable}\middle|\ \int_D(\zeta-\alpha)_+dx\le\int_D(\xi-\alpha)_+dx,\ \ \forall\alpha>0\right\}.$$

容易看出，包含关系 $\mathcal{R}(\xi)\subset\mathcal{R}_+(\xi)\subset\mathcal{R}(\xi)^w$ 成立。关键事实是，$\mathcal{R}(\xi)^w$ 是凸的，并且是 L^p 中 $\mathcal{R}(\xi)$ 的弱闭包（见 [13, 35]）。

我们将动能记为

$$E(\zeta)=\frac{1}{2}\int_D\zeta(x)\mathcal{G}_s^+\zeta(x)dx,$$

以及冲量

$$I(\zeta)=\int_D x_1\zeta(x)dx.$$

对于常数 $\mathcal{W}$，将能量泛函定义为

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta):=\frac{1}{2}\int_D\zeta(x)\mathcal{G}_s^+\zeta(x)dx-\mathcal{W}\int_D x_1\zeta(x)dx.$$

对于函数 ζ_0 和常数 $\mathcal{W}>0$，我们将考虑极大化问题

$$\sup_{\zeta\in\overline{\mathcal{R}(\zeta_0)^w}}\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta).$$

下面需要用到两个引理。

引理 4.1. 假设对于某个 $s^{-1}<r\le+\infty$， $\zeta\in L^1\cap L^r(D)$，若 $0<s\le\frac{1}{2}$ 且 $\frac{2}{2s-1}<r\le+\infty$，若 $\frac{1}{2}<s<1$。则有

$$|\mathcal{G}_s^+\zeta(x)|\le C\left(\|\zeta\|_r+\ \|\zeta\|_1\right)\min\{x_1,x_1^{2s-\frac{2}{r}}\},\ \ \forall\ x\in D.\tag{4.1}$$

证明. 我们首先考虑 $x_1\ge 1$ 的情形。由中值定理可得

$$G_s^+(x,y)\le\frac{4c_sx_1y_1}{|x-y|^{4-2s}},\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}_+.$$

因此，利用 H¨older 不等式以及 $y_1<x_1+|x-y|\le 2|x-y|$ if $|x-y|>x_1$，可得

$$|\mathcal{G}_s^+\zeta(x)|\le\int_{\mathbb{R}_+^2}G_s^+(x,y)|\zeta(y)|dy$$

$$\leq \int_{|x-y|\leq x_1} \frac{c_{2,s}}{|x-y|^{2-2s}}|\zeta(y)|dy + \int_{\{|x-y|>x_1\}} \frac{4x_1y_1}{|x-y|^{4-2s}}|\zeta(y)|dy$$
$$\leq C\left(x_1^{2s-\frac{2}{r}}\|\zeta\|_r + x_1^{2s-2}\|\zeta\|_1\right).$$

这就证明了 $0<s<1$ and $x_1>1$ 情形下的 (4.1)。现在，我们转向剩余情形$\frac{1}{2}<s<1$ and $0<x_1<1$。由 H¨older 不等式可得

$$|\nabla \mathcal{G}_s^+\zeta(x)| \leq C\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\zeta(y)|}{|x-y|^{3-2s}}dy$$
$$\leq \int_{|x-y|\leq 1} \frac{c_{2,s}}{|x-y|^{3-2s}}|\zeta(y)|dy + \int_{\{|x-y|>1\}} |\zeta(y)|dy$$
$$\leq C\left(\|\zeta\|_r + \|\zeta\|_1\right).$$

注意到 $\mathcal{G}_s^+\zeta(x)\Big|_{x_1=0} \equiv 0$，我们得出

$$|\mathcal{G}_s^+\zeta(x)| \leq x_1\|\nabla \mathcal{G}_s^+\zeta\|_\infty \leq C\left(\|\zeta\|_q + \|\zeta\|_1\right)x_1.$$

证明至此完成。 □

引理4.2. 设对于某个 r，有 $x_1\zeta \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$ 和 $\zeta \in L^1\cap L^r(D)$，其中若 $0<s\leq\frac{1}{2}$ 则 $s^{-1}<r<+\infty$，若 $\frac{1}{2}<s<1$ 则 $\frac{2}{2s-1}<r<+\infty$。若 ζ 关于 x_2 变量是施泰纳对称的，则对于 $x\in D$，有

$$|\mathcal{G}_s^+\zeta(x)| \leq C\left(\left(|x_2|^{-\frac{1}{2r}} + |x_2|^{-\frac{1}{2}}\right)(\|\zeta\|_r + \|\zeta\|_1)\min\{1, x_1^{2s-\frac{2}{r}-1}\} + |x_2|^{s-2}\|x_1\zeta\|_1\right)x_1. \tag{4.2}$$

证明. 固定 $x\in\mathbb{R}^2_+$，令

$$\zeta_1(y) = \begin{cases} \zeta(y), & \text{if } |y_2-x_2|<\sqrt{|x_2|},\\ 0, & \text{if } |y_2-x_2|\geq\sqrt{|x_2|}.\end{cases}$$

在 [8] 中使用方程（2.11）（另见 [12] 中的 (6)），容易看出，对于任意 $1\leq q\leq r$

$$\|\zeta_1\|_q \leq \left(\frac{|x_2|^{\frac{1}{2}}}{|x_2|}\right)^{\frac{1}{q}}\|\zeta\|_q = |x_2|^{-\frac{1}{2q}}\|\zeta\|_q.$$

因此，根据（4.1），我们有

$$|\mathcal{G}_s^+\zeta_1(x)| \leq C\left((\|\zeta_1\|_r + \|\zeta_1\|_1)\min\{1, x_1^{2s-\frac{2}{r}-1}\}\right)x_1$$
$$\leq C\left(\left(|x_2|^{-\frac{1}{2r}} + |x_2|^{-\frac{1}{2}}\right)(\|\zeta\|_r + \|\zeta\|_1)\min\{1, x_1^{2s-\frac{2}{r}-1}\}\right)x_1. \tag{4.3}$$

令 $\zeta_2 = \zeta - \zeta_1$，我们得到

$$|\mathcal{G}_s^+\zeta_2(x)| = c_s\int_{|x_2-y_2|>\sqrt{|x_2|}}\left(\frac{1}{|x-y|^{2-2s}} - \frac{1}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}\right)|\zeta(y)|dy$$

$$\begin{aligned} &\leq C\int_{|x-y|>\sqrt{|x_2|}}\frac{x_1y_1}{|x-y|^{4-2s}}\zeta(y)dy \\ &\leq \frac{Cx_1}{|x_2|^{2-s}}\|x_1\zeta\|_1, \end{aligned} \tag{4.4}$$

结合 (4.3)，可得 (4.2)，从而完成证明。 □

以下性质使我们能够控制极大化子的支集 s.

引理 4.3. 假设 $\zeta\in L^1\cap L^q(D)$，其中某个 $s^{-1}<q<\infty$ 和 $\mathcal{W}>0$ 是给定常数。令 $h=\zeta 1_V$，其中某个集合为 $V\subset\{\mathcal{G}_s^+\zeta-\mathcal{W}x_1\leq 0\}$，则

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta-h)\geq\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta)$$

除非 $h\equiv 0$，否则为严格不等式。

证明. 不难看出

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta-h)&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}(\zeta-h)(x)\mathcal{G}_s^+(\zeta-h)(x)d\nu-\mathcal{W}\int_{\mathbb{R}^2_+}(\zeta-h)(x)x_1dx \\ &=\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}h\mathcal{G}_s^+h-\int_{\mathbb{R}^2_+}h(x)\left(\mathcal{G}_s^+\zeta(x)-\mathcal{W}x_1\right)dx \\ &\geq\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2_+}h\mathcal{G}_s^+h, \end{aligned}$$

这意味着 $\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta-h)\geq\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta)$，因为 $\frac{1}{2}\int h\mathcal{G}_s^+h\geq 0$ 且 $\frac{1}{2}\int h\mathcal{G}_s^+h=0$ 当且仅当 $h\equiv 0$。证毕。□

引理 4.4. 设 $0\leq\zeta_0\in L^1\cap L^q(D)$ 满足某个 q，其中 $s^{-1}<q\leq+\infty$ 若 $0<s\leq\frac{1}{2}$ 且 $\frac{2}{2s-1}<q\leq+\infty$ 若 $\frac{1}{2}<s<1$，并且 $\mathcal{W}>0$ 是给定常数。则

$$\sup_{\zeta\in\overline{\mathcal{R}(\zeta_0)^w}}\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta)<+\infty,$$

任意极大化子（若存在）都支撑于 $[0,M_0]\times\mathbb{R}$，其中 M_0 是一个依赖于 $\|\zeta_0\|_1+\|\zeta_0\|_q$ 和 $\mathcal{W}$ 的常数。

˜证明. 根据引理 2.2，$E_{\mathcal{W}}$ 在 $\overline{\mathcal{R}(\zeta_0)^w}$ 上有上界。由引理 4.1 以及对任意 $r\in[1,q]$ 均有 $\zeta_0\in L^r$ 这一事实可知，存在一个依赖于 $\|\zeta_0\|_1+\|\zeta_0\|_q$ 和 $\mathcal{W}$ 的常数 M_0，使得对所有满足 $x_1\geq$ ~~M_0 的~~ $x\in D$ 以及任意 $\zeta\in\mathcal{R}(\zeta_0)^w$，均有 $\mathcal{G}_s^+\zeta(x)-\mathcal{W}x_1\leq 0$。假设 $\zeta^0\in\mathcal{R}(\zeta_0)^w$ 是一个极大化子，令 $h:=\zeta^0 1_{(M_0,\infty)\times\mathbb{R}}$，则由引理 4.3 可推得 $h\equiv 0$，因为 $(M_0,\infty)\times\mathbb{R}\subset\{\mathcal{G}_s^+\zeta^0-\mathcal{W}x_1\leq 0\}$。至此，引理得证。□

为了获得极大化序列的紧性，我们需要以下由 Lions 提出的浓缩紧性引理 [55]。

引理4.5 。设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^1(D)$ 中满足以下条件的非负函数序列

$$\limsup_{n\to\infty}\int_D u_n dx \to \mu,$$

对某个 $0 \le \mu < \infty$。然后，取一个子序列后，以下情形之一成立：(i)（紧性）存在一个序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，属于 $\overline{\mathbb{R}^2_+}$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，存在满足条件的 $R > 0$

$$\int_{D\cap B_R(y_n)} u_n dx \ge \mu - \varepsilon, \quad \forall n \ge 1.$$

(ii)（消失）对于每个 $R > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in D}\int_{D\cap B_R(y_n)} u_n dx = 0.$$

(iii)（二分性）存在一个常数 $0 < \alpha < \mu$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，存在$N = N(\varepsilon) \ge 1$ 和 $0 \le u_{i,\ n} \le u_n$, $i = 1, 2$ 满足

$$\begin{cases} \|u_n - u_{1,n} - u_{2,n}\|_{L^1(D)} + |\alpha - \int_D u_{1,n}dx| + |\mu - \alpha - \int_D u_{2,n}dx| < \varepsilon, \quad for\ n \ge N, \\ d_n := dist(spt(u_{1,n}), spt(u_{2,n})) \to \infty, \quad as\ n \to \infty. \end{cases}$$

此外，若 $\mu = 0$，则只会出现消失情形。

证明。该引理是对 [55], 中引理1.1的略微改写，因此我们省略证明。 □

对于函数 $0 \le \zeta_0 \in L^1 \cap L^q(D)$和常数 $\mathcal{W} > 0$，我们将$S_{\zeta_0,\ w} := \sup_{\zeta\in\mathcal{R}(\zeta_0)^w} E_{\mathcal{W}}(\zeta)$记为最大值，并将$\Sigma_{\zeta_0,\ w} := \{\zeta \in \mathcal{R}(\zeta_0)^w \mid E_{\mathcal{W}}(\zeta) = S_{\zeta_0,\ w}\}$记为所有极大化子的集合。接下来，我们首先利用引理4.5证明极大化序列的紧性。

命题 4.6。对于 q，若 $\max\{2, s^{-1}\} < q \le \infty$，则$0 < s \le \frac{1}{2}$；若 $\frac{2}{2s-1} < q \le +\infty$，则$\frac{1}{2} < s < 1$。设 $0 \le \zeta_0 \in L^q(D)$是一个满足 $0 < |spt(\zeta_0)| < \infty$ 的函数，且 $\mathcal{W} > 0$ 是给定常数。假设

$$\emptyset \ne \tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}} \subset \mathcal{R}(\zeta_0).$$

假设 $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}_+(\zeta_0)$ 是一个极大化序列，其含义是 t

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_n) \to S_{\zeta_0,\mathcal{W}}, \quad as \quad n \to \infty. \tag{4.5}$$

那么，存在 $\zeta^0 \in \tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}$、一个子序列 $\{\zeta_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$以及一个实数序列$\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得当 $k \to \infty$时,

$$\|\zeta_{n_k}(\cdot + c_k\mathbf{e}_2) - \zeta^0\|_2 \to 0. \tag{4.6}$$

证明。注意，由于 $0 \in \overline{\mathcal{R}(\zeta_0)^w} \setminus \mathcal{R}(\zeta_0)$，条件 $\emptyset \ne \Sigma_{\zeta_0,\ w} \subset \mathcal{R}(\zeta_0)$ 表明 0 不是极大化子，因此我们有 $S_{\zeta_0,\ w} > 0$。

取 $u_n = \zeta_n^2$。由于 $0 \le \int_D u_n dx \le \|\zeta_0\|_2^2 < \infty$，我们不妨假设，经过取子列（仍记为 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$）后，

$$\int_D u_n dx \to \mu$$

对某个 $0 \le \mu \le \|\zeta_0\|_2^2$。应用引理4.5，我们发现对于某个子序列（仍记为 $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$），引理4.5中的三种情形之一必然发生。下文将证明分为三个步骤。

步骤 1. 排除消失：假设对于每个固定的 $R > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in D} \int_{B_R(y)\cap D} \zeta_n^2 dx = 0. \tag{4.7}$$

根据重排性质和 Hölder 不等式，对于任意 $R > 0$ and$1 \le \tau \le 2$，我们有

$$\int_{B_R(y)\cap D} \zeta_n^\tau dx \to 0$$

当 $n \to +\infty$ 时，该式关于 $y \in D$ 一致成立。另一方面，我们有 $\mathcal{G}_s^+(\zeta_n(1 - 1_{B_R(y)}))(y) \le C\frac{\|\zeta_n\|_1}{R^{2-2s}}$。因此，我们得到

$$\int \zeta_n \mathcal{G}_s^+ \zeta_n \le \frac{C}{R^{2-2s}} + o_n(1),$$

˜对于任意 $R > 0$，因此 $\lim_{n\to\infty} E_{\mathcal{W}}(\zeta_n) \le 0$。这与 $S_{\zeta_0,\ \mathcal{W}} > 0$ 矛盾。因此，消失不可能发生。

步骤 2. 排除二分性：不妨设 ζ_n 支撑于 $[0, M_0] \times \mathbb{R}$，其中 M_0 是引理 4.4 中得到的常数。假设存在一个常数 $\alpha \in (0, \mu)$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N(\varepsilon) \ge 1$ 和 $0 \le \zeta_{i,\ n} \le \zeta_n$, $i = 1$，2，3 满足

$$\begin{cases} \zeta_n = \zeta_{1,n} + \zeta_{2,n} + \zeta_{3,n}, \\ \int_D \zeta_{3,n}^2 dx + |\alpha - \alpha_n| + |\mu - \alpha - \beta_n| < \varepsilon, \quad \text{for } n \ge N(\varepsilon), \\ d_n := \operatorname{dist}(\operatorname{spt}(\zeta_{1,n}), \operatorname{spt}(\zeta_{2,n})) \to \infty, \quad \text{as } n \to \infty, \end{cases}$$

其中 $\alpha_n = \int_D \zeta_{1,\ n}^2 dx$ 和 $\beta_n = \int_D \zeta_{2,\ n}^2 dx$。利用对角线论证，我们得到存在一个子序列，仍记为 $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\begin{cases} \zeta_n = \zeta_{1,n} + \zeta_{2,n} + \zeta_{3,n}, \quad 0 \le \zeta_{i,n} \le \zeta_n,\ i = 1, 2, 3 \\ \int_D \zeta_{3,n}^2 dx + |\alpha - \alpha_n| + |\mu - \alpha - \beta_n| \to 0, \quad \text{as } n \to \infty, \\ d_n = \operatorname{dist}(\operatorname{spt}(\zeta_{1,n}), \operatorname{spt}(\zeta_{2,n})) \to \infty, \quad \text{as } n \to \infty. \end{cases}$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned} &\int_D \zeta_n \mathcal{G}_s^+ \zeta_n = \int_D (\zeta_{1,n} + \zeta_{2,n} + \zeta_{3,n}) \mathcal{G}_s^+ (\zeta_{1,n} + \zeta_{2,n} + \zeta_{3,n}) \\ &= \int_D \zeta_{1,n} \mathcal{G}_s^+ \zeta_{1,n} + \int_D \zeta_{2,n} \mathcal{G}_s^+ \zeta_{2,n} + 2\int_D \zeta_{1,n} \mathcal{G}_s^+ \zeta_{2,n} + \int_D \zeta_{3,n} \mathcal{G}_s^+ (2\zeta_n - \zeta_{3,n}). \end{aligned}$$

由 (2.6) 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_D \zeta_{3,n}\mathcal{G}_s^+(2\zeta_n-\zeta_{3,n}) &\le C\|\zeta_{3,n}\|_{2-s}\|2\zeta_n-\zeta_{3,n}\|_{2-s}^{1-s}\|2\zeta_n-\zeta_{3,n}\|_1^s\\ &\le C|\mathrm{spt}(\zeta_0)|^{\frac{s}{2(2-s)}}\|\zeta_{3,n}\|_2(\|\zeta_0\|_1+\|\zeta_0\|_2)=o_n(1).\end{aligned}$$

显然,

$$\int_D\int_D \zeta_{1,n}(x)G_s^+(x,y)\zeta_{2,n}(y)dxdy \le \frac{C\|\zeta_0\|_1^2}{d_n^{2-2s}}=o_n(1).$$

因此，我们得到

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_n)=\frac{1}{2}\int_D \zeta_n\mathcal{G}_s^+\zeta_n-\mathcal{W}\int_D x_1\zeta_n dx \le \tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_{1,n})+\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_{2,n})+o_n(1).$$

对 x_2 变量进行施泰纳对称化 $\zeta_{i,\ n}^*$ 关于 $\zeta_{i,\ n}$ 对于 $i=1$，2，根据重排不等式，我们得到

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_n)\le \tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_{1,n}^*)+\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_{2,n}^*)+o_n(1).$$

根据引理4.2，存在一个依赖于 $\|\zeta_0\|_1+\|\zeta_0\|_q$、$\mathcal{W}$ 和 M_0 的常数 $N_0>0$，使得对于所有带有 $\mathrm{spt}(\zeta)\subset([0,M_0]\times\mathbb{R})\cap D$ 的 $\zeta\in\mathcal{R}_+(\zeta_0)$,

$$\mathcal{G}_s^+\zeta(x)-\mathcal{W}x_1\le 0,\quad \forall x \text{ with } |x_2|>N_0$$

Let

$$\zeta_{i,n}^{**}(x)=\zeta_{i,n}^*1_{[0,M_0]\times[-N_0,N_0]}(x+(-1)^iN_0\mathbf{e}_2),\quad i=1,2.$$

于是，我们得到

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_n)\le \tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_{1,n}^{**})+\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_{2,n}^{**})+o_n(1).$$

and

$$\mathrm{supp}(\zeta_{1,n}^{**})\subset[0,M_0]\times[0,2N_0],\quad \mathrm{supp}(\zeta_{2,n}^{**})\subset[0,M_0]\times[-2N_0,0].$$

我们不妨假设 $\zeta_{i,n}^{**}\to\zeta_i^{**}$在 $L^r(D)$ 中弱收敛，其中 $s^{-1}<r<q$且 $i=1,2$。于是，$\zeta^{**}:=\zeta_1^{**}+\zeta_2^{**}\in\overline{\mathcal{R}(\zeta_0)}^{w}$。此外，由弱收敛可得

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_{i,n}^{**})=\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_i^{**}),\ \text{for}\, i=1,2,$$

因此我们得到

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_1^{**})+\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_2^{**})\ge\limsup_{n\to\infty}\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_n)=S_{\zeta_0,\mathcal{W}}.$$

由此可见

$$\begin{aligned}&S_{\zeta_0,\mathcal{W}}\ge\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta^{**})=\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_1^{**}+\zeta_2^{**})\\ &=\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_1^{**})+\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_2^{**})+\int_D\int_D\zeta_1^{**}(x)G_s^+(x,y)\zeta_2^{**}(y)dxdy\\ &\ge S_{\zeta_0,\mathcal{W}}+\int_D\int_D\zeta_1^{**}(x)G_s^+(x,y)\zeta_2^{**}(y)dxdy,\end{aligned}$$

由此我们必须有

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta^{**}) = S_{\zeta_0,\mathcal{W}} \quad \text{and} \quad \int_D \int_D \zeta_1^{**}(x) G_s^+(x,y) \zeta_2^{**}(y) dxdy = 0. \tag{4.8}$$

由于根据假设有 $\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\ \mathcal{W}} \subset \mathcal{R}(\zeta_0)$，我们推得 $\zeta^{**} \in \mathcal{R}(\zeta_0)$ 和 $\mu = \|\zeta^{**}\|_2^2 = \|\zeta_1^{**}\|_2^2 + \|\zeta_2^{**}\|_2^2$。

另一方面，由于根据弱收敛有 $\|\zeta_1^{**}\|_2^2 \le \alpha$和 $\|\zeta_2^{**}\|_2^2 \le \mu - \alpha$，我们发现 $\|\zeta_1^{**}\|_2^2 = \alpha > 0$ 和 $\|\zeta_1^{**}\|_2^2 = \mu - \alpha > 0$，这意味着 ζ_1^{**}和 ζ_2^{**}都非零，因此 $\int_D \int_D \zeta_1^{**}(x) G_s^+(x,y) \zeta_2^{**}(y) dxdy > 0$，这与 (4.8) 矛盾。

步骤 3：紧性：假设存在一个序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\overline{D}$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在满足下式的 $R > 0$

$$\int_{D \cap B_R(y_n)} \zeta_n^2 dx \ge \mu - \varepsilon, \quad \forall\, n \ge 1. \tag{4.9}$$

经过对 x_2 变量作适当平移后，我们不妨设 $y_n = (y_{n,1}, 0)$。定义$\zeta_n^0 := \zeta_n 1_{(0,M_0)\times\mathbb{R}}$ 以及 $\zeta_n^R := \zeta_n 1_{(0,M)\times(-R,R)}$。由引理 4.3，$\{\zeta_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 $\mathcal{R}_+(\zeta_0)$ 中的一个极大化序列。此外，由 (4.9) 可推知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $R > 0$ 使得

$$\|\zeta_n^0 - \zeta_n^R\|_2^2 \le \varepsilon, \quad \forall\ n \ge 1.$$

也就是说，

$$\|\zeta_n^0 - \zeta_n^R\|_2 \to 0, \quad \text{as } R \to \infty, \quad \text{uniformly over } n. \tag{4.10}$$

我们不妨设 $\zeta_n^0 \to \zeta^0$在 $L^2(D)$ 中弱收敛于 $\cap L^r(D)$，其中 $s^{-1} < r < q$，因此 $\zeta_n^R \to \zeta^0 1_{(0,M_0)\times(-R,R)}$在 $L^2(D)$ 中弱收敛于$\cap L^r(D)$。由弱收敛以及 $\zeta_n \in \mathcal{R}_+(\zeta_0)$，我们得到

$$\|\zeta^0\|_2 \le \liminf_{n\to\infty} \|\zeta_n^0\|_2 \le \|\zeta_0\|_2. \tag{4.11}$$

利用引理 2.2 和 H¨older 不等式，我们得到 $|E(\zeta_n^0) - E(\zeta_n^R)| = o_R(1)$。也就是说，根据 (4.10)，当 $R \to \infty$ 时，$E(\zeta_n^R) \to E(\zeta_n^0)$ 在 n 上一致成立。另一方面，对于固定的 $n \to \infty$，由定义在有界区域上且支撑于其中的函数的弱连续性可知，$E(\zeta_n^R) \to E(\zeta^R)$；并且由单调收敛定理，$E(\zeta^R) \to E(\zeta^0)$。因此，我们得到

$$E(\zeta_n^0) \to E(\zeta^0).$$

至于冲量，我们将其拆分为

$$|I(\zeta_n^0) - I(\zeta^0)| \le |I(\zeta_n^0) - I(\zeta_n^R)| + |I(\zeta_n^R) - I(\zeta^R)| + |I(\zeta^R) - I(\zeta^0)|.$$

对于第一项，由 H¨older 不等式，我们推得

$$|I(\zeta_n^0) - I(\zeta_n^R)| \le M_0 |\mathrm{spt}(\zeta_n^0)|^{\frac{1}{2}} \|\zeta_n^0 - \zeta_n^R\|_2 \to 0,$$

当 $R \to \infty$ 时，n 上一致成立。对于固定的 R，由弱收敛可知，第二项 $|I(\zeta_n^R) - I(\zeta^R)| \to 0$当$n \to \infty$。由于由单调收敛定理，第三项 $|I(\zeta^R) - I(\zeta^0)| \to 0$当 $R \to \infty$，因此，先令 $R \to \infty$，再令 $n \to \infty$，可得 $|I(\zeta_n^0) - I(\zeta^0)| \to 0$。

因此，我们证明了以及根据我们的假设 $\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta_n^0) \to \tilde{E}_{\mathcal{W}}(\zeta^0)$，$\zeta_0 \in \mathcal{R}(\zeta_0)$而 $\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\ \mathcal{W}} \subset \mathcal{R}(\zeta_0)$。然后，根据.....的性质，我们推得 $\|\zeta^0\|_2 = \|\zeta_0\|_2$

重排，这意味着 $\lim_{n\to\infty}\|\zeta_n^0\|_2 = \|\zeta^0\|_2$。因此，根据 $L^2(D)$ 的一致凸性，我们得到强收敛 $\|\zeta_n^0 - \zeta^0\|_2 \to 0$。

现在我们要证明 $\zeta_n \to \zeta^0$ 强成立。事实上，由于 ζ_n^0 和 $\zeta_n - \zeta_n^0$ 的支集不相交，且 $\zeta_n \in \mathcal{R}(\zeta_0)$，我们得出

$$\|\zeta_n - \zeta_n^0\|_2^2 = \|\zeta_n\|_2^2 - \|\zeta_n^0\|_2^2 \le \|\zeta_0\|_2^2 - \|\zeta_n^0\|_2^2 \to \|\zeta_0\|_2^2 - \|\zeta^0\|_2^2 = 0.$$

因此，我们得到 $\|\zeta_n - \zeta^0\|_2 \to 0$ 并完成证明。 □

为了陈述我们的稳定性结果，按照 [13]，我们需要先引入一些定义 .

定义 4.7。设 $\xi_0 \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2_+)$ 是给定函数。 $\xi \in L^\infty_{loc}([0,T)\ L^1(\mathbb{R}^2_+)) \cap L^\infty_{loc}([0,T)\ L^p(\mathbb{R}^2_+))$ 称为方程 (1.1) 在 $(0,T)$ 上以初始数据 ξ_0 为初值的 L^p-正则解，当 (i) $\xi(x,t) := \xi(x,t) - \xi(\bar{x},t)$ 在分布意义下满足 (1.1)，其初始数据为 $\xi_0(x) := \xi_0(x) - \xi_0(\bar{x})$；(ii) $E(\xi(t,\cdot))$ 和 $I(\xi(t,\cdot))$ 为常数，且对于 $t \in [0,T)$， $\xi(t) \in \mathcal{R}(\xi_0)$；(iii) 若 ξ_0 非负，则对 $t \in (0,T)$， ξ 非负；(iv) 对于 $0 < s \le \frac{1}{2}$，若 ξ_0 支撑于 D，则要求对 $t \in (0,T)$， ξ 支撑于 D。

一般而言， L^p-正则解是方程 (1.1) 的弱解，且其动能、冲量和分布均守恒；对于充分正则的解，这一点成立。关于守恒律的讨论，见 [14] 。利用欧拉方程的输运性质，[13] 证明了欧拉方程的 L^p-正则解的存在性，另见 [1]。注意，广义表面准地转方程也是输运方程。因此，只要先验地知道广义表面准地转方程柯西问题存在充分光滑的解，就可以修改 [1, 13] 中的方法，证明前文定义的广义表面准地转方程 L^p-正则解存在。由此，基于局部适定性理论，当 T 较小时，可以证明广义表面准地转方程的 L^p-正则解存在。对于较大的 T，尽管广义表面准地转方程柯西问题的整体适定性的一般理论目前仍是一个颇具挑战的开放问题，但如引言所述，已经构造出多种称为相对平衡态的整体解，它们是 L^p-正则解的平凡例子。 [37] 也得到了表面准地转方程的不变测度和一大类整体解。此外，某些爆破解已在解析上被排除[30, 31] ，并在数值上被排除 [27]。因此，我们认为，对于较大的 T 以及一大类初始值， L^p-正则解的存在是合理的。

如果初始数据 ξ_0 满足以下条件，我们就称其为可容许的： ξ_0 非负，支撑于 D （若$0 < s \le \frac{1}{2}$），并且存在一个 L^∞-正则解，其初始数据为 ξ_0，对应于 $T = +\infty$。

现在，我们准备证明以下关于极大化者集合的稳定性定理。

定理 4.8. 对于 q，若 $0 < s \le \frac{1}{2}$ 且 $\frac{2}{2s-1} < q \le +\infty$，则 $\max\{2, s^{-1}\} < q \le \infty$；若 $\frac{1}{2} < s < 1$，令 $0 \le \zeta_0 \in L^q(D)$ 为满足 $0 < |\mathrm{spt}(\zeta_0)| < \infty$ 的函数，且 $\mathcal{W} > 0$ 是给定常数 ~ ~。假设 $\Sigma_{\zeta_0,\mathcal{W}}$， $E_{\mathcal{W}} := E - \mathcal{W}I$ 在 $\mathcal{R}(\zeta_0)^w$ 上的极大化者集合满足

$$\emptyset \ne \tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}} \subset \mathcal{R}(\zeta_0),$$

~ ~，且 $\Sigma_{\zeta_0,\mathcal{W}}$ 的所有元素均为可容许的。则 $\Sigma_{\zeta_0,\mathcal{W}}$ 在以下意义下是轨道稳定的:

对于任意的 $\eta>0$ 和 $M>0$，存在 $\delta>0$，使得如果在 $(0,T)$ 中存在一个具有初始数据 ξ_0、$\|\xi_0\|_\infty\le M$ 且满足 L^∞-正则性的解 $\xi(t)$，并且

$$\inf_{\zeta\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}}\{\|\xi_0-\zeta\|_1+\|\xi_0-\zeta\|_2+|I(\xi_0-\zeta)|\}\le\delta,$$

那么对于所有 $t\in(0,T)$，都有

$$\inf_{\zeta\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}}\{\|\xi(t)-\zeta\|_1+\|\xi(t)-\zeta\|_2\}\le\eta. \tag{4.12}$$

此外，如果

$$I(\zeta_1)=I(\zeta_2),\quad\forall\ \zeta_1,\zeta_2\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}},$$

那么对于所有 $t\in(0,T)$，都有

$$\inf_{\zeta\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}}\{\|\xi(t)-\zeta\|_1+\|\xi(t)-\zeta\|_2+I(|\xi(t)-\zeta|)\}\le\eta. \tag{4.13}$$

证明。根据引理 4.4，任何极大化子（如果存在）都支撑于 $[0,M_0]\times\mathbb{R}$。因此，我们得到 $\sup_{\zeta_1\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}} I(\zeta_1)\le M_0\|\zeta_0\|_1<\infty$。通过类似于引理 4.4 证明的方法，对于 ζ，其具有以下性质:

$$\zeta\ge0,\quad\|\zeta\|_1\le\|\zeta_0\|_1+1,\quad\|\zeta\|_\infty\le M,$$

存在一个与 ζ 无关的常数 $M_1\ge M_0$，使得

$$\mathcal{G}_s^+\zeta(x)-\mathcal{W}x_1<0,\quad\forall x\text{ with }x_1>M_1.$$

现在我们通过反证法完成证明。反设存在一个非负函数序列 $\{\omega_0^n\}_{n=1}^\infty$，其中每个函数都是可容许的，$\|\omega_0^n\|_\infty\le M$ 并且当 $n\to\infty$ 时，

$$\inf_{\zeta\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}}\{\|\omega_0^n-\zeta\|_1+\|\omega_0^n-\zeta\|_2+|I(\omega_0^n-\zeta)|\}\to0,$$

而

$$\sup_{t\in(0,T_n)}\inf_{\zeta\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}}\{\|\omega^n(t)-\zeta\|_1+\|\omega^n(t)-\zeta\|_2\}\ge c_0>0,$$

对于某个正常数 c_0，其中 $\omega^n(t)$ 是带有初始数据 ω_0^n（位于 $(0,T_n)$ 中）的 (1.1) 式的 L^∞-正则解。根据 ω_0^n 的选取，由引理 2.2 和 H¨older 不等式可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\omega_0^n)\to S_{\zeta_0,\mathcal{W}}. \tag{4.14}$$

我们选取 $t_n\in(0,T_n)$，使得对每个 n，

$$\inf_{\zeta\in\tilde{\Sigma}_{\zeta_0,\mathcal{W}}}\{\|\omega^n(t_n)-\zeta\|_1+\|\omega^n(t_n)-\zeta\|_2\}\ge\frac{c_0}{2}>0. \tag{4.15}$$

~取函数序列 $\zeta_0^n\in\Sigma_{\zeta_0,\ \mathcal{W}}\subset\mathcal{R}(\zeta_0)$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$\|\omega_0^n-\zeta_0^n\|_1+\|\omega_0^n-\zeta_0^n\|_2+|I(\omega_0^n-\zeta_0^n)|\to0. \tag{4.16}$$

由引理 2.2，$\{\zeta_0^n\}_{n=1}^\infty$ 是一个极大化序列。

对于函数 ω，我们用 $\bar{\omega} := \omega 1_{(0,M_1)\times\mathbb{R}}$ 表示 ω 的限制。由引理 4.3以及能量和冲量守恒，我们得出

$$\tilde{E}_{\mathcal{W}}(\overline{\omega}^n(t_n)) \geq \tilde{E}_{\mathcal{W}}(\omega^n(t_n)) = \tilde{E}_{\mathcal{W}}(\omega_0^n) \to S_{\zeta_0,\mathcal{W}}. \tag{4.17}$$

由于根据定义 4.7，$\omega^n(t_n)$ 是 ω_0^n 的重排，因此可以找到一个重排$\zeta_1^n \in \mathcal{R}(\zeta_0^n) = \mathcal{R}(\zeta_0)$，使得当 $n \to +\infty$ 时

$$\|\omega^n(t_n) - \zeta_1^n\|_1 + \|\omega^n(t_n) - \zeta_1^n\|_2 = \|\omega_0^n - \zeta_0^n\|_1 + \|\omega_0^n - \zeta_0^n\|_2 \to 0. \tag{4.18}$$

于是，由 (2.6)、(4.18) 和 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned} |I(\bar{\zeta}_1^n) - I(\bar{\omega}^n(t_n))| &\leq M_1\|\bar{\zeta}_1^n - \bar{\omega}^n(t_n)\|_1 \\ &\leq M_1\|\zeta_1^n - \omega^n(t_n)\|_1 \\ &= M_1\|\zeta_0^n - \omega_0^n\|_1, \end{aligned} \tag{4.19}$$

and

$$|E(\bar{\zeta}_1^n) - E(\bar{\omega}^n(t_n))| \leq C\|\bar{\zeta}_1^n - \bar{\omega}^n(t_n)\|_{2-s}^{1-s} \leq C\|\zeta_0^n - \omega_0^n\|_{2-s}^{1-s}. \tag{4.20}$$

因此，由 (4.16)–(4.20) 可推得 $\{\zeta_1^n\} \subset \mathcal{R}_+(\zeta_0)$ 是一个极大化序列，故根据命题 4.6，经过若干次平移后，我们有

$$\bar{\zeta}_1^n \to \zeta_{**} \ \text{ strongly in } \ L^2(D), \tag{4.21}$$

当 $n \to \infty$ 时，对于某个函数 $\zeta_{**} \in \Sigma_{\zeta_0,\ \mathcal{W}}$，这意味着 $\zeta_1^n \to \zeta_{**}$强收敛。事实上，由于 $\bar{\zeta}_1^n$和 $\zeta_1^n - \zeta_1^n$的支集互不相交，且 $\zeta_1^n \in \mathcal{R}(\zeta_0)$，我们得出

$$\|\zeta_1^n - \bar{\zeta}_1^n\|_2^2 = \|\zeta_1^n\|_2^2 - \|\bar{\zeta}_1^n\|_2^2 \leq \|\zeta_0\|_2^2 - \|\bar{\zeta}_1^n\|_2^2 \to \|\zeta_0\|_2^2 - \|\zeta_{**}\|_2^2 = 0,$$

由此可得

$$\|\zeta_1^n - \zeta_{**}\|_2 \leq \|\zeta_1^n - \bar{\zeta}_1^n\|_2 + \|\zeta_{**} - \bar{\zeta}_1^n\|_2 \to 0.$$

因此，由（4.18）和（4.21），我们推得

$$\begin{aligned} \|\omega^n(t_n) - \zeta_{**}\|_2 &\leq \|\zeta_1^n - \omega^n(t_n)\|_2 + \|\zeta_1^n - \zeta_{**}\|_2 \\ &= \|\zeta_0^n - \omega_0^n\|_2 + \|\zeta_1^n - \zeta_{**}\|_2 = o_n(1). \end{aligned}$$

接下来，我们将估计 $\|\omega^n(t_n) - \zeta_{**}\|_1$。由 L^1-范数的守恒性及 (4.21)，可得

$$\begin{aligned} &\|\omega^n(t_n) - \zeta_{**}\|_1 \leq \int_{\mathrm{spt}(\zeta_{**})} |\omega^n(t_n) - \zeta_{**}|dx + \int_{D\setminus\mathrm{spt}(\zeta_{**})} \omega^n(t_n)dx \\ &\leq \int_{\mathrm{spt}(\zeta_{**})} |\omega^n(t_n) - \zeta_{**}|dx + \int_D \omega^n(t_n)dx - \int_D \zeta_0^n dx + \int_D \zeta_{**}dx - \int_{\mathrm{spt}(\zeta_{**})} \omega^n(t_n)dx \\ &\leq 2\int_{\mathrm{spt}(\zeta_{**})} |\omega^n(t_n) - \zeta_{**}|dx + \int_D |\omega_0^n - \zeta_0^n|dx \\ &\leq 2|\mathrm{supp}(\zeta_0)|^{\frac{1}{2}}\|\omega^n(t_n) - \zeta_{**}\|_2 + \int_D |\omega_0^n - \zeta_0^n|dx = o_n(1), \end{aligned}$$

这与 (4.15) 中 t_n 的选取相矛盾，从而完成了 (4.12) 的证明。这里我们利用了 $\int_D \zeta_0^n dx = \int_D \zeta_{**} dx = \int_D \zeta_0 dx$ 和 $|\mathrm{spt}(\zeta_0^n)| = |\mathrm{spt}(\zeta_{**})| = |\mathrm{spt}(\zeta_0)|$，这是由重排的性质得到的。

此外，如果

$$I(\zeta_1) = I(\zeta_2), \quad \forall\, \zeta_1, \zeta_2 \in \tilde{\Sigma}_{\zeta_0, \mathcal{W}},$$

那么根据冲量守恒，我们得到

$$\begin{aligned} I(|\omega(t) - \zeta_1|) &\le \int_{\mathrm{spt}(\zeta_1)} x_1 |\omega(t) - \zeta_1| dx + \int_{D \setminus \mathrm{spt}(\zeta_1)} x_1 \omega(t) dx \\ &\le \int_{\mathrm{spt}(\zeta_1)} x_1 |\zeta_1 - \omega(t)| dx + \int_D x_1 \omega(t) dx - \int_D x_1 \zeta_2 dx + \int_D x_1 \zeta_1 dx - \int_{\mathrm{spt}(\zeta_1)} x_1 \omega(t) dx \\ &\le 2 \int_{\mathrm{spt}(\zeta_1)} x_1 |\zeta_1 - \omega(t)| dx + \int_D x_1 \omega_0 dx - \int_D x_1 \zeta_2 dx \\ &\le 2M_0 |\mathrm{spt}(\zeta_0)|^{\frac{1}{2}} \|\omega(t) - \zeta_1\|_2 + |I(\omega_0 - \zeta_2)|, \quad \forall\, \zeta_1, \zeta_2 \in \tilde{\Sigma}_{\zeta_0, \mathcal{W}}, \end{aligned}$$

由 (4.12) 并在必要时取更小的 δ，可推出 (4.13)。 □

注 4.9. 我们的证明同样适用于 $s = 1$ 的情形。与 [13], 中的定理1相比，我们允许扰动具有非紧支集。这是通过在定理中引入 L^1-范数实现的。注意，如果扰动 ω_0 的支集紧致，且其 ˜ 测度小于某个常数 A （如 [13] 中的定理1所示），并且 $\Sigma_{\zeta_0, \mathcal{W}}$ 在 L^2 中接近 $\Sigma_{\zeta_0, \mathcal{W}}$，那么由 H¨older 不等式可知， ω_0 在 L^1 中接近 $\tilde{\Sigma}_{\zeta_0, \mathcal{W}}$。因此，利用本文的论证可以得到 [13] 中定理1的推广。

4.2. 重排类中的极大化子与行波解的稳定性。在第 2 节和第 3 节中，对于 $J(t) = Lt^{1+\frac{1}{p}}$（其中某个 $L > 0$，且 $p \in (1, \frac{1}{1-s})$），我们已证明行波解 ω_ε 的存在性和唯一性。为应用稳定性结果定理 4.8 来证明 ω_ε 的稳定性，我们考虑以下极大化问题

$$\sup_{\zeta \in \overline{\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w}} \tilde{E}_\varepsilon(\zeta), \tag{4.22}$$

其中（为简便起见，记号略有滥用）

$$\tilde{E}_\varepsilon(\zeta) := \tilde{E}_{W\varepsilon^{3-2s}}(\zeta) = \frac{1}{2} \int_D \zeta \mathcal{G}_s^+ \zeta dx - W\varepsilon^{3-2s} \int_D x_1 \zeta dx.$$

˜ ˜我们将 Σ_ε 记作 E_ε 在重排类 $\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$上的极大化者集合。 本小节的主要结果如下定理所述。

˜定理 4.10. 当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，极大化者集合 Σ_ε 满足

$$\emptyset \neq \tilde{\Sigma}_\varepsilon \subset \mathcal{R}(\omega_\varepsilon).$$

˜此外，对于每个 $\zeta^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$，以下结论成立。

(i). 对于某个非负非减函数g_ε： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足 $g_\varepsilon(\tau) > 0$ 若 $\tau > 0$，且 $g_\varepsilon(\tau) = 0$ 若 $\tau \le 0$，以及某个常数μ_ε。

~ ~(ii). diam (spt(ζ^ε)) $< R\varepsilon$ 对于某个常数 $0 < R < \infty$，

并且沿 x_2 方向作适当平移后

$$\sup_{x\in \mathrm{spt}(\zeta^\varepsilon)} |\varepsilon x - (d_0, 0)| = o(1).$$

为证明定理 4.10，需要一系列引理。

引理 4.11. 能量满足

$$\max_{\zeta\in\overline{\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w}} \tilde{E}_\varepsilon(\zeta) \geq I_0 + O(\varepsilon^{2-2s}).$$

证明. 这是由事实 $\omega_\varepsilon \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$ 和引理 2.20 直接得到的。 □

~引理 4.12. E_ε 在 $\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$ 上于某个 ζ^ε处取得最大值，且关于 x_2变量是施泰纳对称的。

证明. 根据引理 4.1，存在一个常数 $1 < M_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$，它依赖于 ε、 ω_ε 和W ，使得

$$\mathcal{G}_s^+\zeta(x) - W\varepsilon^{3-2s}x_1 < 0, \quad \forall x \text{ with } x_1 > M_\varepsilon, \quad \forall \zeta \in \overline{\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w}.$$

~由引理 2.2 可知， E_ε 在 $\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$ 上有上界。取序列 $\{\zeta_j\} \subset \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$ ，使得当 $j \to +\infty$

$$\tilde{E}_\varepsilon(\zeta_j) \to \sup_{\overline{\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w}} \tilde{E}_\varepsilon.$$

由引理 4.3 可知，我们可以假设 ζ_j 支撑于 $(0, M_\varepsilon)\times\mathbb{R}$ 。我们还可以将 ζ_j 替换为其自身的施泰纳对称化，从而假设 ζ_j 关于 x_1轴施泰纳对称。由于 $\int_D x_1\zeta_j dx \leq R_\varepsilon\kappa$，存在常数 $N_\varepsilon > 0$，使得 $\mathcal{G}_s^+\zeta_j(x) - W\varepsilon^{3-2s}x_1 < 0$， $\forall x \in D$ ，其中 $|x_2| > N_\varepsilon$， $\forall\ j$ ；这是由引理4.2得出的。也就是说，我们假设 ζ_j 支撑于 $[0, M_\varepsilon]\times[-N_\varepsilon, N_\varepsilon]$。存在一个子序列（仍记为 $\{\zeta_j\}$），使得当 $j \to +\infty$时， $\zeta_j \to \zeta^\varepsilon \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$ 在 $L^\infty(D)$ 中弱星收敛。由于对任意$1 \leq r < \frac{1}{1-s}$， $G_s^+(\cdot,\cdot) \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$，我们推得

$$\lim_{j\to+\infty} \tilde{E}_\varepsilon(\zeta_j) = \tilde{E}_\varepsilon(\zeta^\varepsilon).$$

这意味着 ζ^ε 是一个极大化子，因此证明完毕。 □

为了研究极大化子的性质，我们需要以下来自 [9]的引理。

引理 4.13（ [9]中的引理 2.4 和 2.9）。设 $(\Omega\ \nu)$ 是一个有限正测度空间。设 $\xi_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ 和 $\zeta_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 ν-可测函数，并假设 ζ_0 的每个水平集的测度均为零。则存在一个非递减函数 f，使得 $f\circ\zeta_0$ 是 ξ_0的一个重排。此外，若对某个 $1 \leq q < +\infty$ 有 $\xi_0 \in L^q(\Omega\ \nu)$，且 $\zeta_0 \in L^{q'}(\Omega\ \nu)$，则 $f\circ\zeta_0$ 是线性泛函的唯一极大化函数

$$M(\xi) := \int_\Omega \xi(x)\zeta_0(x)d\nu(x)$$

相对于 $\mathcal{R}(\xi_0)^w$。

~引理 4.14。设 $\zeta^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$ 为一个极大化子。那么，除去沿 x_2 方向的平移，ζ^ε 必须关于 x_2变量施泰纳对称，且支撑于 $[0, M_\varepsilon] \times [-N_\varepsilon, N_\varepsilon]$。此外，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，有

$$0 \not\equiv \zeta^\varepsilon \in \mathcal{R}(\zeta_\varepsilon)$$

并且存在一个非负非减函数 $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足 $g_\varepsilon(\tau) > 0$，当 $\tau > 0$ 时；且 $g_\varepsilon(\tau) = 0$，当 $\tau \le 0$ 时，使得对于某个常数 $\tilde{\mu}_\varepsilon$,

$$\zeta^\varepsilon(x) = g_\varepsilon(\mathcal{G}_1\zeta^\varepsilon(x) - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \tilde{\mu}_\varepsilon), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2_+. \tag{4.23}$$

证明。对于 $\varepsilon > 0$ 足够小时，由引理 4.11 可知 $E_\varepsilon(\zeta^\varepsilon) > 0$，因而 $\zeta^\varepsilon \not\equiv 0$。

由于 $\overline{\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w}$ 是一个凸集（例如参见 [8, 13] 及其中的参考文献）。因此，对每个 $\zeta \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$，都有 $\zeta_\tau := \zeta^\varepsilon + \tau(\zeta - \zeta^\varepsilon) \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$，对任意 $\tau \in [0,1]$ 均成立。注意到 ζ^ε 是 E_ε 的一个凸极大化子，我们有

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0^+} \tilde{E}_\varepsilon(\zeta_\tau) = \int_D (\zeta - \zeta^\varepsilon)\left(\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1\right) dx \le 0,$$

由此得到

$$\int_D \zeta\left(\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1\right) dx \le \int_D \zeta^\varepsilon\left(\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1\right) dx, \quad \forall\, \zeta \in \overline{\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w}.$$

根据严格重排不等式，我们知道，沿 x_2 方向平移后，ζ^ε 必须关于 x_2变量施泰纳对称。接着，由引理 4.1– 4.3 可知，ζ^ε支撑于 $[0, M_\varepsilon] \times [-N_\varepsilon, N_\varepsilon]$。利用 ζ^ε关于 x_2变量施泰纳对称这一事实，可以验证 $\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon$ 是偶函数，且关于 x_2严格递减。因此，$\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1$的每个水平集都是零测集。由引理 4.13，存在一个非递减函数 $\tilde{g}_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得,

$$\tilde{\zeta}^\varepsilon(x) = \tilde{g}_\varepsilon\left(\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon(x) - W\varepsilon^{3-2s}x_1\right).$$

~ ~对某个 $\zeta^\varepsilon \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)$成立。根据引理 4.13 的结论，我们还知道，相对于 $\mathcal{R}(\omega_\varepsilon)^w$，$\zeta^\varepsilon(x)$是线性泛函 $\overline{\zeta \mapsto \int_{[0,M_\varepsilon]\times[-N_\varepsilon,N_\varepsilon]}}(\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon - W\varepsilon^{3-2s}x_1)\ \zeta dx$的唯一极大化子。因此必有 $\zeta^\varepsilon = \zeta^\varepsilon \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)$。现在，令

$$\tilde{\mu}_\varepsilon := \sup\left\{\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon(x) - W\varepsilon^{3-2s}x_1 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^2_+ \ \text{ s.t. } \zeta^\varepsilon(x) = 0\right\} \in \mathbb{R},$$

且 $g_\varepsilon(\cdot) = \max\{\tilde{g}_\varepsilon(\cdot + \tilde{\mu}_\varepsilon)\ 0\}$。我们有

$$\zeta^\varepsilon(x) = g_\varepsilon\left(\mathcal{G}_s^+\zeta^\varepsilon(x) - W\varepsilon^{3-2s}x_1 - \tilde{\mu}_\varepsilon\right) \quad \text{for any } x \in D.$$

至此证明完毕。 □

~引理 4.15。设 $\zeta^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon \subset \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)$ 为一个极大化子。则相应地存在 $z_\varepsilon \subset [-R, M_\varepsilon + R] \times \{0\}$，使得当 $\varepsilon > 0$ 足够小时

$$\|\zeta^\varepsilon - \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot - z_\varepsilon)\|_1 + \|\zeta^\varepsilon - \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot - z_\varepsilon)\|_{2-s} = o(1).$$

这里， $\tilde{\omega}_\varepsilon$ 是 ω_ε 在 $\int x\tilde{\omega}_\varepsilon = 0$ 下的平移，且 R 是一个一致常数，使得 spt($\tilde{\omega}_\varepsilon$) $\subset B$ (0, R)。

证明。注意， $\zeta^\varepsilon \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)$是 ω_ε的重排。因此，我们有 $\int \zeta^\varepsilon = \int \omega_\varepsilon = \kappa$and$\int J(\zeta^\varepsilon) = \int J$ (ω_ε)。于是，我们推得

$$E_\varepsilon(\zeta^\varepsilon) = \tilde{E}_\varepsilon(\zeta^\varepsilon) - \int J(\zeta^\varepsilon) \geq \tilde{E}_\varepsilon(\omega_\varepsilon) - \int J(\omega_\varepsilon) = E_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \geq I_0 + O(\varepsilon^{2-2s}),$$

这意味着 $\{\zeta^\varepsilon\}$ 是 $\mathcal{A}_0$上的 E_0 的极大化子序列。因此， [55] 中的定理 II.2 和推论 II.1 给出了 $\{\zeta^\varepsilon\}$ 的一个子序列以及一个点列 $\{z_\varepsilon\}$ ，使得

$$\|\zeta^\varepsilon - \omega_0(\cdot - z_\varepsilon)\|_1 + \|\zeta^\varepsilon - \omega_0(\cdot - z_\varepsilon)\|_{2-s} = o(1), \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

根据引理 3.1，我们得到

$$\|\zeta^\varepsilon - \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot - z_\varepsilon)\|_1 + \|\zeta^\varepsilon - \tilde{\omega}_\varepsilon(\cdot - z_\varepsilon)\|_{2-s} = o(1), \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

由于 ζ^ε和 $\tilde{\omega}_\varepsilon$在 x_2上均为偶函数且非递增，并且 ζ^ε支撑于 $[0, M_\varepsilon]\times[-N_\varepsilon, N_\varepsilon]$，我们可以取 $z_\varepsilon \in [-R, M_\varepsilon + R] \times \{0\}$。这就完成了该引理的证明。□

引理 4.16. 设 $z_\varepsilon = (z_{\varepsilon,1}, 0)$ 如引理 4.15 中所述。则当 $\varepsilon \to 0$ 时， $z_{\varepsilon,1} \to +\infty$ 。

证明。由引理 4.12 的证明中的不等式 $\tilde{E}_\varepsilon(\zeta^\varepsilon) \geq \tilde{E}_\varepsilon(\omega_\varepsilon)$ 和 $M_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$，可得

$$\int \zeta^\varepsilon \mathcal{G}_s^+ \zeta^\varepsilon \geq \int \omega_\varepsilon \mathcal{G}_s \omega_\varepsilon + o(1). \tag{4.24}$$

另一方面，由引理 4.15 可得

$$\begin{aligned}\int \zeta^\varepsilon \mathcal{G}_s^+ \zeta^\varepsilon &= \int\int \tilde{\omega}_\varepsilon(x - z_\varepsilon)\left(\frac{c_s}{|x-y|^{2-2s}} - \frac{c_s}{|x-\bar{y}|^{2-2s}}\right)\tilde{\omega}_\varepsilon(y - z_\varepsilon)dxdy + o(1)\\ &= \int \omega_\varepsilon \mathcal{G}_s \omega_\varepsilon - \int\int \frac{c_s\tilde{\omega}_\varepsilon(x)\tilde{\omega}_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}+2z_\varepsilon|^{2-2s}}dxdy + o(1),\end{aligned}$$

将其与 (4.24) 结合可推出

$$\int\int \frac{c_s\tilde{\omega}_\varepsilon(x)\tilde{\omega}_\varepsilon(y)}{|x-\bar{y}+2z_\varepsilon|^{2-2s}}dxdy = o(1).$$

因此，当 $\varepsilon \to 0$ 时，我们必有 $z_\varepsilon = (z_{\varepsilon,1}, 0)$，其中 $z_{\varepsilon,1} \to +\infty$ 。 □

记 $\psi_\varepsilon(x) = \mathcal{G}_s\zeta^\varepsilon$和 $\psi_0 = \mathcal{G}_s\omega_0$。由于 $\|\zeta^\varepsilon - \omega_0(\cdot - z_\varepsilon)\|_1 + \|\zeta^\varepsilon - \omega_0(\cdot - z_\varepsilon)\|_{2-s} = o(1)$ 且 $\|\zeta^\varepsilon\|_\infty \leq \|\omega_\varepsilon\|_\infty \leq C$，利用引理 2.1 以及与推论 2.6 证明中类似的自举论证，可得

$$\|\psi_\varepsilon - \psi_0(\cdot - z_\varepsilon)\|_\infty = o(1).$$

为继续 我们的讨论，接下来我们为拉格朗日乘子求一个下界 .

引理 4.17. 对某个常数 $\tilde{\mu} > 0$，有

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{\mu}_\varepsilon \geq \tilde{\mu} > 0.$$

证明. 令 R 为常数，使得对每个足够小的 ε，都有 $\mathrm{spt}(\tilde{\omega}_\varepsilon) \subset B(0,R)$。由于 ζ^ε 是 ω_ε 的重排，因此存在一点 $\tilde{x} \in B(z_\varepsilon, 2R) \setminus \mathrm{spt}(\zeta^\varepsilon)$。在点 $\tilde{x}$ 处，由引理 4.14 和引理 4.15，得到

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_\varepsilon &\geq \mathcal{G}_s\zeta^\varepsilon(\tilde{x}) - \int \frac{c_s\zeta^\varepsilon(y)}{|\tilde{x}-\bar{y}|^{2-2s}}dy - W\varepsilon^{3-2s}\tilde{x}_1 \\ &\geq \psi_0(\tilde{x}-z_\varepsilon) - \int \frac{c_s\omega_0(y)}{|\tilde{x}-\bar{y}+z_\varepsilon|^{2-2s}}dy + o(1) \\ &\geq \inf_{x\in B(0,2R)} \psi_0(x) + o(1),\end{aligned}$$

取 $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}\inf_{x\in B(0,2R)} \psi_0(x)$，即可证明此引理。 □

~推论 4.18. 存在常数 $R > 0$，使得对于任意小的 ε，$\mathrm{spt}(\zeta^\varepsilon)$ 都包含在半径为 R 的圆盘内。~

证明. 利用引理 4.14 和 4.17，可以通过类似于引理 2.22 的论证证明此引理，因此省略细节。□

令 $\tilde{x}_\varepsilon := \kappa^{-1}\int x\zeta^\varepsilon$ 为 ζ^ε 的质心。我们有以下位置估计。

推论 4.19. 有

$$|\varepsilon\tilde{x}_\varepsilon - (d_0, 0)| = o(1).$$

证明. 证明过程类似于引理 2.23，因此省略细节。 □

现在，我们可以证明定理 4.10。

定理 4 .10 的证明：定理 4.10 中的结论可由上述引理推出。 □

利用定理 4.10 和唯一性结果定理 1.6，我们得到关于极大化者集合的以下结论。

命题 4.20。对于充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \{\omega_\varepsilon(\cdot + c\mathbf{e}_2) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

证明。回忆一下，$\Sigma_\varepsilon \subset \mathcal{A}_\varepsilon$ 表示在 $\mathcal{A}_\varepsilon$ 上由 (1.5) 定义的 E_ε 的极大化者集合。唯一性结果定理 1.6 表明，$\Sigma_\varepsilon = \{\omega_\varepsilon(\cdot + c\mathbf{e}_2) \mid c \in \mathbb{R}\}$.

~于是，由定理 4.10 可得 $\emptyset \neq \Sigma_\varepsilon \subset \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)$，且对于任意的 $\zeta^\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$，都有 $\mathrm{spt}(\zeta^\varepsilon) \subset B(\varepsilon^{-1}(d_0, 0)\ \varepsilon^{-1}d_0/2)$。这意味着 $\tilde{\Sigma}_\varepsilon \subset \mathcal{A}_\varepsilon$。注意，由于重排的性质，$\int J(\zeta)dx = \int J(\omega_\varepsilon)dx$，$\forall \zeta \in \mathcal{R}(\omega_\varepsilon)$。由此可容易看出

$$\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon = \{\omega_\varepsilon(\cdot + c\mathbf{e}_2) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

□

完成所有准备工作后，我们现在可以证明定理1.7，并结束本文。

定理1.7的证明：结合定理 4.8 和命题 4.20 可得， ω_ε 的轨道稳定性成立。□致谢：本工作得到国家自然科学基金（项目编号：11831009）的资助。

References

[1] K. Abe and K. Choi，兰姆偶极子的稳定性，《理性力学与分析文档》，244 (2022)，877–917。https://doi.org/10.1007/s00205-022-01782-4[2] A. Ambrosetti，J. Yang，平面涡旋理论中的渐近行为，Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 1(4) (1990)，285–291。https://doi.org/10.1253/circj.CJ- 09-0694[3] C. J. Amick and L. E. Fraenkel，希尔球形涡旋的唯一性，《理性力学与分析文档》，92 (2) (1986)，91–119。https://doi.org/10.1007/BF00251252[4] C. J. Amick and L. E. Fraenkel，一族定常涡环的唯一性，《理性力学与分析文档》，100 (1988)，207–241。https://doi.org/10.1007/BF00251515[5] W. Ao, J. D´avila, M. Del. Pino, M. Musso and J. Wei，广义无黏表面准地转方程的行进解与旋转解，Trans. Amer. Math. Soc., 374 (2021)，第9期，6665–689。https://doi.org/10.1090/tran/8406.[6] V.I. Arnol'd，理想流体定常平面曲线流的非线性稳定性条件，Soviet Math. Doklady 162 (1965)，773–777；译自 Dokl. Akad. Nauk SSSR 162 (1965)，975–998。https://doi.org/10.1007/978-3-642-31031-7 4[7] J.F.G. Auchmuty, R. Beals，若干非线性自由边界问题的变分解，《理性力学与分析文档》43 (1971)，255–271。https://doi.org/10.1007/BF00250465[8] G. R. Burton，定常对称涡对与重排，Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, 108 (1988)，269–290。https://doi.org/10.1017/S0308210500014669[9]G. R. Burton，重排类上的变分问题与定常涡旋的多重构型，Ann. Inst. H. Poincar´e Anal. Non Lineair´e, 6 (1989)，第4期，295–319。https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30320-1[10] G. R. Burton，均匀流中的圆形涡对唯一性，Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 452 (1996)，2343–2350。https://doi.org/10.1098/rspa.1996.0125[11] G. R. Burton，有界平面区域中理想流体定常流动的整体非线性稳定性，《理性力学与分析文档》，176 (2005)，第1期，149–163。https://doi.org/10.1007/s00205-004-0339-0[12] G. R. Burton，给定冲量的平面涡对的紧性与稳定性，《微分方程杂志》，270 (2021)，547–572。https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.08.009[13] G. R. Burton, H. J. Nussenzveig Lopes and M. C. Lopes Filho，定常涡对的非线性稳定性，《数学物理通讯》，324 (2013)，445–463。https://doi.org/10.1007/s00220-013-1806-y[14] T. Buckmaster, S. Shkoller and V. Vicol，表面准地转方程弱解的非唯一性，《纯粹与应用数学通讯》，72 (2019)，1809–1874。https://doi.org/10.1002/cpa.21851[15] D. Cao, G. Qin, W. Zhan and C. Zou，广义表面准地转方程光滑行进圆形涡对的存在性与稳定性，《国际数学研究通知》，在线发表。https://doi.org/10.1093/imrn/rnab371[16] D. Cao, G. Qin, W. Zhan and C. Zou，广义表面准地转方程整体经典解的研究，《泛函分析杂志》283 (2022)，文章编号109523。https://doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109503[17] D. Cao, G. Wang，理想流体中平面涡斑的非线性稳定性，J. Math. Fluid Mech., 23 (2021)，第3期，论文编号58，共16页。https://doi.org/10.1007/s00021-021-00588-w[18] A. Castro, D. C´ordoba and J. G´omez-Serraon，广义表面准地转方程旋转整体解的存在性与正则性，Duke Math. J. 165 (2016)，第5期，935–984。https://doi.org/10.1215/00127094-3449673

[19] A. Castro, D. C´ordoba and J. G´omez-Serraon，主动标量的均匀旋转解析整体涡斑解，《Annals of PDE》2 (2016)，第1期，文章编号1。https://doi.org/10.1007/s40818-016-0007-3[20] A. Castro, D. C´ordoba and J. G´omez-Serrano，无黏表面准地转方程的整体光滑解，Mem. Amer. Math. Soc. 266 (2020)，第1292号。https://doi.org/10.1090/memo/1292[21]D. Chae, P. Constantin, D. Cordoba, F. Gancedo and J. Wu，具有奇异速度场的广义表面准地转方程，《纯粹与应用数学通讯》65 (2012)，第8期，1037–1066。https://doi.org/10.1002/cpa.21390[22] H. Chan, M. Gonz´alez, Y. Huang, E. Mainini and B. Volzone，分数阶等离子体问题整体基态的唯一性，《微积分变分与偏微分方程》59 (2020)，第6期，论文编号195，共42页。https://doi.org/10.1007/s00526-020-01845-y[23]K. Choi，希尔球形涡旋的稳定性，《纯粹与应用数学通讯》，即将发表。https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.06808[24]K. Choi and D. Lim，二维欧拉方程径向对称单调涡度的稳定性，《微积分变分与偏微分方程》61 (2022)，第4期，论文编号120，共27页。https://doi.org/10.1007/s00526-022-02231-6[25] K. Choi and I. J. Jeong，开尔文波的稳定性与不稳定性，《微积分变分与偏微分方程》61 (2022)，论文编号221。https://doi.org/10.1007/s00526-022-02334-0[26] P. Constantin, A.J. Majda and E. Tabak，二维准地转热活性标量中强锋面的形成，《非线性》7 (1994)，第6期，1495–1533。https://doi.org/10.1088/0951- 7715/7/6/001[27] P. Constantin, M.-C. Lai, R. Sharma, Y.-H. Tseng and J. Wu，表面准地转方程的新数值结果，J. Sci. Comput., 50 (1) (2012)，1–28。https://doi.org/10.1007/s10915- 011-9471-9[28] R. Coralie，表面准地转方程带空洞的相对平衡态，《微分方程杂志》263 (2017)，567–614。https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.02.050[29]D. C´ordoba, M.A. Fontelos, A.M. Mancho and J.L. Rodrigo，一族轮廓动力学方程存在奇点的证据，《美国国家科学院院刊》102 (2005)，5949–5952。https://doi.org/10.1073/pnas.0501977102[30] D. C´ordoba，准地转方程不存在简单双曲爆破，《数学年刊》(2)，148 (3) (1998)，1135–1152。https://doi.org/10.2307/121037[31] D. C´ordoba and C. Fefferman，准地转方程与二维欧拉方程解的增长，《美国数学会杂志》15 (3) (2002)，665–670。https://doi.org/10.1090/S0894-0347-02-00394-6[32]F. de la Hoz, Z. Hassainia and T. Hmidi，广义表面准地转方程的双连通V态，《理性力学与分析文档》220 (3) (2016)，1209–1281。https://doi.org/10.1007/s00205-015-0953-z[33]M. Delgadino, X. Yan and Y. Yao，聚集-扩散方程稳态的唯一性与非唯一性，《纯粹与应用数学通讯》75 (2022)，第1期，3–59。https://doi.org/10.1002/cpa.21950[34] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci，分数阶索伯列夫空间指南，《数学科学通报》136 (2012)，第5期，521–573。https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004[35] R. J. Douglas，无界区域上的函数重排，Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, 124 (1994)，621–644。https://doi.org/10.1017/S0308210500028572[36] T.M. Elgindi and I.-J. Jeong，流体中的对称性与临界现象，《纯粹与应用数学通讯》73(2) (2020)，257–316。https://doi.org/10.1002/cpa.21829[37] J. F¨oldes, M.Sy，表面准地转方程的不变测度与整体适定性，《理性力学与分析文档》241 (2021)，第1期，187–230。https://doi.org/10.1007/s00205-021-01650-7[38] T. Gallay, D. Smets，无粘柱状涡旋的谱稳定性。《偏微分方程分析》13 (2020)，第6期，1777–1832。[39] C. Garc´ıa，主动标量方程的涡斑编舞，《非线性科学杂志》31 (2021)，第5期，论文编号75，共31页。https://doi.org/10.1007/s00332-021-09729-x

[40] L. Godard-Cadillac, 《无黏表面准地转方程的光滑行波解》, Comptes Rendus. 《数学》 ´ematique, 359（2021）, 第1期, 85–98。https://doi.org/10.5802/crmath.159[41] L. Godard-Cadillac、P. Gravejat、D. Smets, 《无黏表面准地转方程中具有 N 重旋转对称性的共转涡旋》, 预印本。https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.08194[42] L. Grafakos, 《经典傅里叶分析》。第三版。《数学研究生教材》, 249。施普林格, 纽约, 2014年。[43] P. Gravejat 和 D. Smets, 《无黏表面准地转方程的光滑行波解》, 《国际数学研究通知》, （2019）, 第6期, 1744–1757。https://doi.org/10.1093/imrn/rnx177[44] Z. Hassainia 和 T. Hmidi, 《广义准地转方程的 V态》, 《数学物理通讯》337（2015）, 第1期, 321–377。https://doi.org/10.1007/s00220-015-2300-5[45] Z. Hassainia 和 M. H. Wheeler, 《主动标量方程的多极涡斑平衡态》, 预印本, 2021年。https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.06839[46] S. He 和 A. Kiselev, 《表面准地转方程解的小尺度生成》, 《杜克数学杂志》, 170(5)（2021）, 1027–1041。https://doi.org/10.1215/00127094-2020-0064[47] T. Hmidi 和 J. Mateu, 《主动标量方程中共转与反向旋转涡旋对的存在性》, 《数学物理通讯》, 350（2017）, 699–747。https://doi.org/10.1007/s00220-016-2784-7[48] J. Jang 和 J. Seok, 《关于匀速旋转双星和星系》, 《理性力学与分析文档》, 244（2022）, 第2期, 443–499。https://doi.org/10.1007/s00205-022-01766-4[49] A. Kiselev、L. Ryzhik、Y. Yao 和 A. Zlato, 《修正准地转涡斑方程的有限时间奇异性》, 《数学年刊》, 184 (2)（2016）, 第3期, 909–948。https://doi.org/10.2307/44072033[50] A. Kiselev、Y. Yao 和 A. Zlato, 《修正准地转涡斑方程的局部正则性》, 《纯粹与应用数学通讯》, 70（2017）, 第7期, 1253–1315。https://doi.org/10.1002/cpa.21677[51] H. Lamb, 《流体力学》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 第3版（1906年）[52] G. Lapeyre, 《表面准地转》, 《流体》, 2017；2(1):7。[53]Y.Y. Li, 《关于匀速旋转恒星》, 《理性力学与分析文档》, 115 (4)（1991）, 367–393。https://doi.org/10.1007/BF00375280[54] E.H. Lieb、M. Loss, 《分析学》。《数学研究生学习丛书》, 第14卷。美国数学会, 普罗维登斯, 第二版, RI（2001年）。[55]P.-L. Lions, 《变分法中的集中紧性原理：局部紧情形 I》, 《H. Poincar ´e 非线性分析研究所年刊》, 1（1984）, 第2期, 109–145。https://doi.org/10.1016/S0294-1449(16)30428-0[56] A.J. Majda 和 A.L. Bertozzi, 《涡量与不可压缩流》。《应用数学剑桥丛书》, 第27卷。剑桥大学出版社（2002年）[57] R.J. McCann, 《稳定旋转双星与管内流体》, 《休斯敦数学杂志》32 (2)（2006）, 603–631。[58]V.V. Meleshko 和 G.J.F. van Heijst, 《论恰普雷金对无黏流体中二维涡旋结构的研究》, 《流体力学杂志》, 272（1994）, 157–182。https://doi.org/10.1017/S0022112094004428[59] H.C. Pocklington, 《一对大小相等、方向相反、具有有限横截面的空心直涡旋在流体中稳定运动时的构型》, 《剑桥哲学学会会刊》, 8（1895年）, 178–187。[60] L. Silvestre, 《拉普拉斯算子的分数次幂之障碍问题的正则性》, 《纯粹与应用数学通讯》, 60（2007）, 第1期, 67–112。https://doi.org/10.1002/cpa.20153[61] D. Smets、J. Van Schaftingen, 《欧拉方程中涡旋的去奇异化》, 《理性力学与分析文档》, 198（2010）, 869–925。https://doi.org/10.1007/s00205-010-0293-y[62] E. M. Stein, 《奇异积分与函数的可微性》, 普林斯顿大学出版社, 1970年。[63] Y. H. Wan 和 M. Pulvirenti, 《圆形涡斑的非线性稳定性》, 《数学物理通讯》, 99（1985）, 第3期, 435–450。https://doi.org/10.1007/BF01240356

[64]B. Turkington, 《二维定常涡流 I、II》, 《部分微分方程通讯》, 8（1983）, 999–1030, 1031–1071。https://doi.org/10.1080/03605308308820293, https://doi.org/10.1080/03605308308820294
[65] J. Yang, 《平面涡旋理论中的存在性与渐近行为》, 《数学模型与方法应用科学》, 1（1991）, 461–475。https://doi.org/10.1142/S021820259100023X[66] V.I. 尤多维奇, 《理想不可压缩流体的非定常流动》, 《计算数学杂志》, 3（1963）, 1032–1106, 英文译本: 《苏联计算数学与数学物理》, 3（1963）, 1407-1456。Institute of Applied Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, andUniversity of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P.R. China电子邮箱: dmcao@amt.ac.cn

Institute of Applied Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, and University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P.R. China电子邮箱: laishanfa@amss.ac.cn

Institute of Applied Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, and University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P.R. China电子邮箱: qinguolin18@mails.ucas.ac.cn