arXiv:2301.00381v1 [math.AG] 1 Jan 2023

黎曼曲面与纤维化复曲面的通用退化

Tadashi Ashikaga 和 Yukio Matsumoto

谨以此文献给 Norbert A'Campo 教授，祝贺他八十岁寿辰

目录

§1 **引言**
§1.1 M_g^{orb} 的精确轨形结构§1.2 本文的结果 §2**稳定曲线的映射类群**§2.1 稳定曲线的提升与无穷远处的 Fenchel-Nielsen 扭转 §2.2 同胚的提升障碍 §2.3 作为映射类群的外尔群 §3**稳定曲线的 Kuranishi 族与对数结构**§3.1 稳定曲线的变形与 Kuranishi 族 §3.2 Kuranishi 族的对数结构与实膨胀

§4**普遍退化族的构造**
§4.1 韦伊标记与受控变形空间 §4.2 受控变形空间上的 Kuranishi 族 §4.3 Deligne-Mumford 紧化上的轨形纤维空间

§5 **稳定曲线的自同构与 M_g^{orb} 上的循环等对称分层**
§5.1 黎曼曲面的自同构与等对称分层 §5.2 自同构的对数二次表示 §5.3 M_g^{orb} 的轨形图中的小 Teichmüller 空间 §5.4 稳定曲线的自同构与循环分歧覆盖 §5.5 M_g^{orb} 的边界图册处的等对称分层 §5.6 等对称分层附近的 Harris-Mumford 坐标

§6**黎曼曲面退化的单值化与轨形模映射**
§6.1 伪周期映射与稳定曲线的自同构 §6.2 黎曼曲面退化的轨形结构 §6.3 局部轨形模映射与 Kodaira 周期性 §6.4 退化的实例及其不变量

§7**从普遍退化族恢复纤维化复曲面**
§7.1 从万能族中退化的局部恢复 §7.2 纤维化复曲面的全局轨形模映射 §7.3 纤维化复曲面基本成员的全局恢复**参考文献**

1 引言

Kodaira [46] 以规范方式构造了椭圆曲面，其依据是给定的单值化和J-不变量，并将其称为椭圆曲面的基本成员。我们的目标是将这一结果推广到亏格为 $g \geq 2$的纤维化复曲面。

在我们先前的论文 [54], 中，我们通过对 Teichm¨uller 空间作某种边界化，在 Deligne–Mumford 紧化上构造了一种新的轨形结构 M_g^{orb} 。本文中，我们将构造一个轨形纤维空间

$$\overline{\pi} : \overline{Y}_g^{orb} \to \overline{M}_g^{orb}$$

使得任何具有不稳定纤维的纤维化复曲面，都可以通过我们将构造的轨形模映射 J^{orb} 从 π拉回。纤维空间 π: $Y_g^{orb} \to M_g^{orb}$将通过拼接稳定曲线的 Kuranishi族构造。映射 J^{orb} 与 Kodaira 的 J-不变量性质相似，因为它受到单值化的微妙影响，并具有伪周期性 这一性质，下面我们将对此作出解释。

在 §1.1 中，我们将确定 Teichm¨uller 理论中的记号，并回顾 M_g^{orb} 的结构。随后，我们将在 §1.2 中陈述本文的结果。

1.1 M_g^{orb} 的精确轨形结构

在本文中，我们固定一个亏格为 g（> 1）的闭定向拓扑曲面 Σ_g。黎曼曲面 S 通常被视为带标记的黎曼曲面（S, w），也就是说，固定了一个保定向同胚映射 w: $\Sigma_g \to S$（称为标记）的黎曼曲面。若存在全纯映射 f: $S_1 \to S_2$，使得 $f \circ w_1 \simeq w_2$，则称两个带标记曲面（S_1, w_1）和（S_2, w_2）等价，其中 $\simeq$ 表示“同伦于”（或者等价地，对于闭曲面而言，“同伦于”）。这些等价类的集合就是以 Σ_g 为模型的$Teichm¨\ddot{u}ller$ 空间，记作 T_g。根据 Teichm¨uller 定理， T_g 是一个与$\mathbf{R}^{6g-6}$ 同胚的度量空间（见 [41],第 5 章）。

Teichm¨uller [70],[69] 构造了空间 T_g 及其上的泛曲线。他发现 T_g 是一个维数为 $3g-3$的复流形。格罗滕迪克 [28] 从函子观点深入洞察了 T_g 。关于 Teichm¨uller–Grothendieck 理论的综述，参见[4], [3]。阿尔福斯–贝尔斯 [5], [6] 从解析的角度重新发现了 T_g 上的复结构。

亏格为 g、 Γ_g的映射类群定义为

$$\Gamma_g = \{\varphi : \Sigma_g \to \Sigma_g \mid \text{orientation preserving homeomorphisms}\}/\simeq .$$

Γ_g 的群结构由通常的映射复合给出：对于 $[\varphi], [\psi] \in \Gamma_g$，我们有 $[\varphi][\psi] = [\varphi \circ \psi]$。映射类群 Γ_g 作用于 Teichm¨uller 空间 T_g，其作用方式为

规则如下：对于 $[\varphi] \in \Gamma_g$ 和 $[S, w] \in T_g$，我们定义

$$\varphi_*([S, w]) = [S, w \circ \varphi^{-1}].$$

这个作用适当不连续，并且保持 Teichm¨uller 度量和复结构（见 [41]）。商空间 $M_g = T_g/\Gamma_g$ 就是模空间。它是一个正规复代数簇（见 [17]）。模空间 M_g 参数化了亏格为 g的闭黎曼曲面的所有同构类，但它并不紧致。通过添加与“稳定曲线”（即带有节点且具有有限自同构的黎曼曲面）对应的边界点，可以对其进行紧化。这就是模空间 M_g 的*Deligne–Mumford* 紧化 M_g （简称 DM 紧化）（见 [21]）。许多作者尝试从 Teichm¨uller 理论的角度重构 M_g。Bers [14] 开启了这一研究方向，Harvey [32] 则运用离散群论从拓扑角度重构了 M_g。Hubbard 和 Koch 的论文 [37] 简要介绍了有关模空间 DM 紧化的历史。关于“Teichm¨uller 空间的紧化”的最新进展，参见 Ohshika [62], 、Miyachi [56] 或 Masai [52]。

根据 Kra 在这一领域的综述 [48]，DM 紧化的解析构造直到二十一世纪 Hubbard 和 Koch 的工作 [37] 才得以实现。不过，正如我们在 [54]中所解释的（定理 6.5 后的几句话以及注 6.3），Hubbard–Koch 的轨形图表中包含一些点，这些点不足以作为 M_g的轨形图。另一方面，我们为模空间 M_g 的 DM 紧化给出了一套完整的轨形图表 [54, （§6]）。

—

Harvey 曲线复形

在我们的构造中，*Harvey* 曲线复形 $\mathcal{C}_g$ 发挥着重要作用。给定一个曲面 Σ_g，Harvey [33] 引入了一种称为曲线复形$\mathcal{C}_g = \mathcal{C}$的抽象单纯复形 Σ_g。

根据定义， $\mathcal{C}_g$ 的一个顶点 是 Σ_g上的一条本质（即非零伦）简单闭曲线的同伦类。一个单形 $\sigma \in \mathcal{C}_g$ 是 Σ_g上彼此不相交、互不同伦的本质简单闭曲线所组成的集合：

$$\sigma = \langle C_1, \ldots, C_k \rangle.$$

包含在 σ 中的简单闭曲线数量 k 记为 $|\sigma|$。已知 $|\sigma| \leq 3g - 3$。我们有 dim $\sigma = |\sigma| - 1$。

令 $[S, w]$ 为 T_g中的一点，并令 $\sigma \in \mathcal{C}_g$ 为一个单形： $\sigma = \langle C_1, C_2, \ldots, C_k \rangle$。我们用一条测地线表示黎曼曲面 S 上的每条简单闭曲线 $w(C_i)$，并将它们各自收缩为一点。这样便得到一条稳定曲线。因此，稳定曲线的拓扑类型由曲线复形 $\mathcal{C}_g$中的一个单形 σ 描述，而稳定曲线的拓扑模型记为 $\Sigma_g(\sigma)$。

魏尔群

与单形 $\sigma \in \mathcal{C}_g$ 相关的另一个重要对象是*Weyl* 群 $W(\sigma)$，其定义如下：

令 $\Gamma(\sigma)$ 为映射类群 Γ_g 的一个子群，它由 Σ_g 上简单闭曲线 C_i、$i = 1$、……、k 周围的德恩扭转生成。令 $N\Gamma(\sigma)$ 为 Γ_g 中 $\Gamma(\sigma)$ 的正规化子。那么我们可以证明，映射类 $\varphi \in \Gamma_g$ 属于正规化子$N\Gamma(\sigma)$ 当且仅当 φ 置换曲线 C_i、 $i = 1$……、k 的同伦类 σ（ [54]中的定理 4.5）。

现在，*Weyl* 群 $W(\sigma)$ 的定义如下：

$$W(\sigma) := N\Gamma(\sigma)/\Gamma(\sigma).$$

注意，我们所说的 Weyl 群 $W(\sigma)$ 不一定是有限群。在 §2 中，我们将证明*Weyl* 群 $W(\sigma)$ 是一个（拓扑）带节点曲面的映射类群 $\Sigma_g(\sigma)$。

小 Tichm¨uller 空间 $T(\sigma)$

正如通过使用带标记黎曼曲面 (S, w) (w 其中为保向同胚 $w : \Sigma_g \to S$) 构造 Teichm¨uller 空间 T_g 一样，小 *Teichm¨uller* 空间 $T(\sigma)$ 使用带标记稳定曲线 (S, w) 构造（其中 $w : \Sigma_g(\sigma) \to S$ 为保向同胚， S 为稳定曲线）。 $T(\sigma)$ 是 $\mathbf{C}^{3g-3-|\sigma|}$ 的有界域。

受控变形空间 $D_\varepsilon(\sigma)$。

设 M 为一个（2 维）*Margulis*常数：在任意黎曼曲面 S 上，若两条不同的简单闭测地线的长度小于 M，则它们互不相交。当然，任何小于 M 的正数也具有相同的性质。因此，Margulis 常数并不唯一。设 ε 为一个小于某个 Margulis 常数 M的正数。本文中我们将始终固定这样一个 ε 。

设 σ 是 $\mathcal{C}_g$ 的一个单形。在 §4.1 中，我们将给出受控变形空间 $D_\varepsilon(\sigma)$ 的定义（定义 4.3）。 $D_\varepsilon(\sigma)$ 是一个复维数为 $3g - 3$ 的复流形，并且同胚于一个开 $(6g - 6)$ 胞（见 [54] 中的引理 6.7）。 $D_\varepsilon(\sigma)$ 包含 $T(\sigma)$。Weyl 群 $W(\sigma)$ 作用于 $D_\varepsilon(\sigma)$。此作用是适当不连续且全纯的（见 [54] 中的引理 6.4 和 6.6）。我们可以证明，紧化模空间 M_g 被 $D_\varepsilon(\sigma)/W(\sigma)$ 覆盖，其中 σ 遍历 $\mathcal{C}_g$ 的各个单形，且其可能为空（见 [54] 中的引理 6.9）。因此，我们有

定理（定理 6.11 [54]）在 Deligne–Mumford 紧化 M_g 中，有限

族

$$\{(D_\varepsilon(\sigma), W(\sigma))\}_{\sigma\in\mathcal{C}_g/\Gamma_g\cup\emptyset}$$

构成一个复（$3g-3$）轨形的轨形图表图册。

我们将带有此轨形图表图册的紧化模空间 $\overline{M_g}$ 记作 M_g^{orb} 。

1.2 本文的结果

主要结果由以下三部分组成 (A) $\sim$ (C)。

(A) Arbarello-Cornalba [8] 通过拼接黎曼曲面的 Kuranishi 族，重构了 Teichm¨uller [70]和 Bers [14] 在 Teichm¨uller 空间上的黎曼曲面万能族。受他们工作的启发，我们通过拼接稳定曲线的 Kuranishi 族，构造了受控变形空间上的稳定曲线族（定理 4.4），这可视为对 Hubbard–Koch 族 [37,定理 10.1]的重构。通过在 M_g^{orb} 的所有轨形图表上拼接这些族，我们得到；

主定理 I（定理 4.8 和定义 4.9）存在一个（强）轨形纤维化

$$\overline{\pi} : \overline{Y}_g^{orb} \to \overline{M}_g^{orb}$$

它是通过拼接稳定曲线的标准 Kuranishi 族得到的。

我们称之为 π 黎曼曲面的万能退化族。这一命名源于其泛性质：任何纤维化复曲面都可以通过从 π 拉回而得到。（我们将在(C)中解释这一点。）此外，我们也受到 Arbarello–¯Cornalba–Griffiths 在 [9, 第十五章 §8]中关于利用实爆破对 Teichm¨uller 空间进行边界化的描述，以及 Kato-Nakayama [42] 和 Usui[72]的对数几何方法的启发。关于相关工作，我们还可参见 Hinich-Vaintrob [34] 。从思想上说，我们也受到 Catanese [19]研究多种代数簇的 Kuranishi 族与 Teichm¨uller 理论之间关系这一计划的启发。

(B) 对于一个映射类 $\varphi\in\Gamma_g$，我们用 $[\varphi]$ 表示 φ 的共轭元素集合。Harvey [31] 描述了有限（椭圆或周期）元素 $\varphi\in\Gamma_g$ 在 T_g 中的不动点轨迹 $T_g^{[\varphi]}$：它由与 φ 相关的循环覆盖的基黎曼曲面空间（以分支点为标记）来刻画。 $T_g^{[\varphi]}$ 称为 φ 的等对称分层。Broughton [16] 描述了 M_g 中类似的集合 $M_g^{[\varphi]}$。我们将这些结果推广到 T_g 和 M_g 的边界，即小 Teichm¨uller 空间 $T(\sigma)$ 及其在 M_g 上的像。

主定理 II（定理 5.17 和定义 5.15）设 $T^{[\varphi]}(\sigma)$ 是 $T(\sigma)$ 中由具有自同构数值数据 $\mathrm{Num}(\varphi)$ 的带标记稳定曲线构成的集合。那么，$T^{[\varphi]}(\sigma)$ 的一个连通分支是一个复流形，且同构于若干带标记 Teichmüller 空间的直积。

$M^{[\varphi]}(\sigma)$ 在 $M_g \setminus M_g$ 中的像 $T^{[\varphi]}(\sigma)$ 是一个不可约子簇。

$T^{[\varphi]}(\sigma)$ 可以视为 Γ_g 中某个抛物（伪周期）元素的不动点轨迹。$T_g^{[\varphi]}$ 结构的直因子表现为带标记点的黎曼曲面空间，这些曲面分别来自与 φ 相关的循环覆盖的基底节点黎曼曲面的各个分支（参见 §5.4 中的讨论及定理 5.17 的精确表述）。我们的讨论与黎曼曲面分歧覆盖的模空间构造类似（参见 [73], [57] 等）。我们也受到 Terasoma 的论证 [71] 的启发。值得注意的是，Takamura、Hirakawa-Takamura [67], [35] 等人最近通过各种群作用发展了关于 M_g 的等对称理论。

(C) Kodaira [46] 以规范方式根据单值化数据和 J-不变量构造了椭圆曲面的基本成员（不含重纤维）。我们将把这一结果推广到亏格为 $g \geq 2$ 的任意纤维化复曲面（参见注 7.9）。

我们从局部观点出发。设 $f\colon M \to \Delta$ 是亏格为 $g \geq 2$、在小圆盘 Δ上的退化，其退化纤维为 $F = f^{-1}(0)$，且 μ_f 是 f的拓扑单值化。那么，对于某个 $\sigma \in \mathcal{C}_g$，μ_f 属于负扭转伪周期映射的共轭类 $\hat{\mathcal{P}}_g^{(-)}(\sigma) \subset \hat{\Gamma}_g$（参见 [61], [55]）。现在，作为局部 J-不变量的扩展概念，我们定义局部轨形模空间映射

$$\{\widetilde{J} : \widetilde{\Delta} \to B \subset D_\epsilon(\sigma),\ J : \Delta \to M_\epsilon(\sigma) \subset \overline{M}_g; G = \langle \mu \rangle \simeq \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\}$$

如下。这里，J 是 f 的通常全纯延拓模空间映射（参见 [39]），$\widetilde{\Delta} \to \Delta$ 是圆盘之间的全分歧覆盖，其覆盖次数为 N，即单值化 μ_f的伪周期；$f\colon M \to \Delta$ 是 f 的精确稳定约化（[10, §2]），而 J 是与变形 f 相关联的自然映射，它映至稳定曲线 $F = f^{-1}(0)$的 Kuranishi 空间 $\widetilde{B}$（作为 $D_\epsilon(\sigma)$的一个图表）。于是，J 可以看作是 J 在循环群 G 作用下的提升映射，其生成元 μ 本质上来自 F的自同构。为了显式描述映射 J，我们定义如下：

定义（定义 6.8、6.11）若全纯函数 $\varphi(u)$ 在原点处的泰勒展开为 $\varphi(u) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u^{\gamma+iL}$ $(c_0 \neq 0)$，则称其为重数为 $\gamma \in \mathbf{N}$、周期为 $L \in \mathbf{N}$ 的伪周期函数。我们称 $\gamma/L \in \mathbf{Q}$ 为$\varphi(u)$的解析螺旋数。

主定理 III (定理 6.12) 设 $(z_1, \cdots, z_k, z_{k+1}, \cdots z_{3g-3})$ 是 $B \subset D_\epsilon(\sigma)$ 在 $J(0)$ 处的 Harris–Mumford 坐标，其中 z_i $(1 \leq i \leq k)$ 是一个节点处的平滑坐标

~ ~，而 z_j ($k+1 \le j \le 3g-3$) 是 F 的一个分支的变量坐标（见定义 5.21）。设

$$\widetilde{J} : \widetilde{\Delta} \ni u \longmapsto (z_1, \cdots, z_{3g-3}) = (\varphi_1(u), \cdots, \varphi_{3g-3}(u)) \in B \subset D_\epsilon(\sigma)$$

~是映射 J 在这些坐标下的表达式。

(i) 若 $1 \le i \le k$，则 $\varphi_i(u)$ 是一个伪周期函数，其重数和周期可由拓扑单值化 μ_f 的数值数据明确表示。特别地，$\varphi_i(u)$ 的解析螺旋数等于 σ 中切割曲线 μ_f 的 Nielsen 扭转数的绝对值。

(ii) 若 $k+1 \le j \le 3g-3$，且 $\varphi_j(u)$ 不恒为零，则 $\varphi_j(u)$ 是一个伪周期函数，其周期以及解析螺旋数的小数部分可由 μ_f 的数值数据明确表示。

注意，根据 §5.2 中的讨论，$\varphi_j(u)$ ($k+1 \le j \le 3g-3$) 的解析螺旋数的小数部分可由 μ_f 的总赋值所诱导的对数二次特征表示。但是，$\varphi_j(u)$ 的解析螺旋数的整数部分不是单值变换不变量，而纯粹是纤维芽的解析不变量（见注 6.14）。

伪周期性已出现在 Kodaira 对椭圆曲线退化的局部描述中：在该描述里，J-不变量在 SL(2,Z) 中某个元素的作用下变化，而此元素正是该退化的同调单值变换。

现在我们从整体角度进行讨论。设 $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbf{B}$ 是一个亏格为 $g \ge 2$、判别轨迹为 $\mathbf{Disc_f(B)} = \{Q_1, \cdots, Q_s\} \subset \mathbf{B}$的全局纤维化复曲面。令 $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B} \setminus \mathbf{Disc_f(B)}$，并令

$$\mu_{\mathbf{f}} : \pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0) \longrightarrow \Gamma_g, \quad (b_0 \in \mathbf{B}^{(0)})$$

为f的单值表示。令

$$\mathbf{B}^{\mathrm{orb}} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}^{(0)}, \pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0), \varphi_{\widetilde{\mathbf{B}}^{(0)}}, \mathbf{B}^{(0)}\right) \bigcup_{1 \le i \le s} \left(\widetilde{\Delta}_i, \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}, \varphi_{\widetilde{\Delta}_i}, \Delta_i\right)$$

为B上的自然轨形结构，其中 ~$\mathbf{B}^{(0)}$ 是$\mathbf{B}^{(0)}$ 的万有覆盖，而~$\Delta_i \to \Delta_i$ 是以 Q_i 为中心的圆盘的覆盖，其次数等于 Q_i处局部单值变换的伪周期。则轨形模映射

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{orb}} : \mathbf{B}^{\mathrm{orb}} \longrightarrow \overline{M}_g^{orb}$$

由局部轨形模映射与从 ~$\mathbf{B}^{(0)}$到 T_g 的自然映射（定义 7.7）拼接而良定义。

主定理 IV （定理 7.8，定义 4.10）任意纤维化复曲面$\mathbf{f}:\ \mathbf{M}\ \to\ \mathbf{B}$ 都可以通过轨形意义下的拉回，从黎曼曲面的万能退化族 $\pi:\ Y_g^{orb}\longrightarrow M_g^{orb}$ 得到，其所经由的是轨形模映射$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{orb}}$。

上述定理可视为 Imayoshi[39]和 [53]研究成果的总结。

2 稳定曲线的映射类群

本节将定义并研究亏格为 g的稳定曲线 S 的映射类群。我们已在 [54, Cor.4.7] 中将其描述为黎曼曲面映射类群某个子群的一个商群，并称之为亏格的 *Weyl* 群。不过，当时省略了部分论证。本节旨在补充这些内容。

在 §2.1 中，我们通过带有若干参数的实爆破，定义从 S 到黎曼曲面 Σ_g 的提升映射。研究 Teichm¨uller 空间边界时，将黎曼曲面上的简单闭曲线收缩为节点的收缩映射至关重要（参见[15], [1]等）。然而，这种收缩会丢失 Fenchel– Nielsen 坐标中沿着与这些曲线同伦的测地线所对应的扭转参数。通过这种提升，我们可以恢复上述丢失的扭转参数，从而能够讨论边界处的 Fenchel–Nielsen 变形（或扭转）。这一论证主要归功于 [42],[72] 和[9], ，将在 §3.2 中详细讨论。

在 §2.2 中，我们讨论将稳定曲线的连续映射 $f: S_1 \to S_2$ 提升为两个黎曼曲面之间映射的可能性。如果 f 是全纯映射或实解析映射，这是可行的。然而，当 f 是连续映射时，存在一种障碍：某个映射在节点周围表现为无限角旋转。

在 §2.3 中，我们将说明，借助 Alexander技巧 [7], ，这一障碍在保向同胚的同伦类中会被消除，因此我们可以用黎曼曲面的映射类群来讨论稳定曲线的映射类群。随后，定理 2.10 将阐明魏尔群的几何意义。

2.1 稳定曲线的提升与无穷远处的 Fenchel–Nielsen 扭转

在本小节中，我们将定义并讨论通过带有一些参数的实爆破，将稳定曲线映射到黎曼曲面的提升映射 。

令 S 为C上的**稳定曲线**，即至多以节点（普通双重点）为奇点的完备代数曲线，并且每个非奇异有理分支都有

至少三个 S的节点。假设 S的亏格为 $g>1$，并且有 k个节点 P_1，$\cdots$，P_k。若S 非奇异（即紧黎曼曲面），则 $k=0$。令 $S=\sum_{i=1}^{r}S_i$ 为$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$的不可约分解，并令 $h:\ S=\coprod_{i=1}^{r}S_i\longrightarrow S$ 为在$\widehat{\quad}$函数域中的正规化。从拓扑上说，分支 S_i 由 S 的节点补集中的一个连通分支S_i 得到：将节点经$\curvearrowleft h$ 拉回到该分支所得的穿孔补齐，记为$\mathbf{P}_i:=\sum_{j=1}^{r_i}P_{i,\ j}$。若 S_i 是射影直线，则 $r_i\geq 3$。我们称 r_i点标记黎曼曲面

$$(\widehat{S}_i,\mathbf{P}_i) \tag{1}$$

该正规化标记分支的 S。令

$$\widehat{\pi}_i:Bl_{\mathbf{P}_i}(\widehat{S}_i)\longrightarrow\widehat{S}_i$$

为在 $P_{i,1},\cdots,P_{i,r_i}$ 处的实爆破。利用 $P_{i,j}=(z=0)$ 处的复局部坐标 (U,z)，$Bl_{\mathbf{P}_i}(\widehat{S}_i)$ 在局部由 $\{(z,\theta)\in U\times S^1\mid z=|z|e^{\sqrt{-1}\theta}\}$ 定义，而 $\widehat{\pi}_i$ 由第一投影诱导。整体而言，$\widehat{\pi}_i$ 在 $P_{i,j}$'s 的逆像的补集上是实解析同构，并且每个纤维 $\widehat{\pi}_i^{-1}(P_{i,j})$ $(1\leq j\leq r_i)$ 都是圆 S^1，称为 $\widehat{\pi}_i$ 的例外圆。节点$\curvearrowleft$ $\curvearrowleft P_j$ 在复合映射 $h=(\coprod_{i=1}^{r}\widehat{\pi}_i)\circ h:\ \coprod_{i=1}^{r}Bl_{\mathbf{P}_i}(S_i)\longrightarrow S$ 下的逆像由两个例外圆组成，记作

$$(\widehat{h})^{-1}(P_j)=C_j^{(1)}\coprod C_j^{(2)}\qquad(1\leq j\leq k) \tag{2}$$

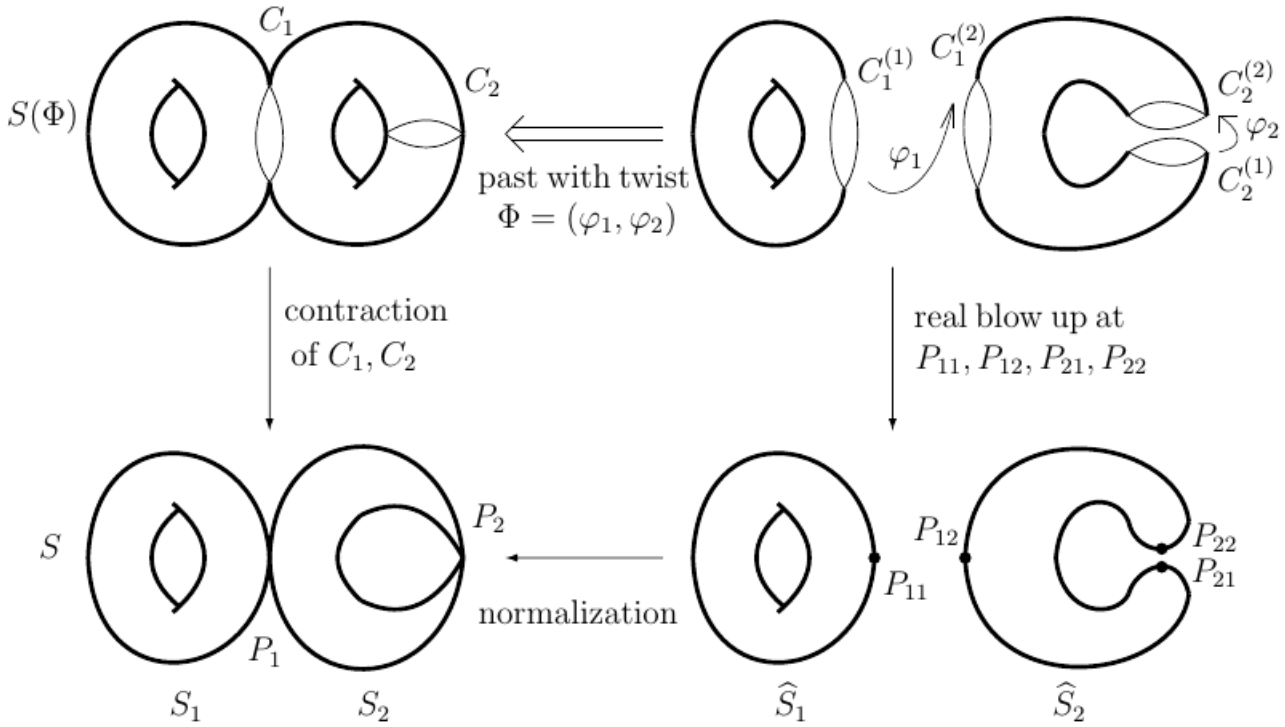
其中两个圆的阶 $C_j^{(1)},C_j^{(2)}$ 任意。我们考虑一个映射

$$\Phi=\bigoplus_{j=1}^{k}\varphi_j\ :\ \bigoplus_{j=1}^{k}\left(C_j^{(1)}\longrightarrow C_j^{(2)}\right) \tag{3}$$

其中每个 $\varphi_j:\ C_j^{(1)}\longrightarrow C_j^{(2)}$ 都是圆周同胚。令 $S(\Phi)$ 为将带边界的黎曼曲面 $Bl_{\mathbf{P}_1}(S_1)\ \cdots,Bl_{\mathbf{P}_r}(S_r)$ 中对应的边界（2）（即例外圆）通过（3）的粘合映射 Φ 粘合后得到的拓扑曲面。我们得到自然的连续映射

$$\pi(\Phi):S(\Phi)\longrightarrow S \tag{4}$$

使得节点的纤维 $\pi(\Phi)^{-1}(P_j)$ 是一个圆，记作 C_j；它由 $C_j^{(1)}$ 和 $C_j^{(2)}$ 通过识别 φ_j 得到，并且 $\pi(\Phi)$ 在去掉节点 $S(\Phi)$ 的逆像 $\setminus\coprod_{1\leq j\leq k}C_j\longrightarrow S\setminus\coprod_{1\leq j\leq k}P_j$ 后的补集上的限制是一个同胚。图 I 给出了 $g=k=r=2$ 时的一个简单例子。



(Figure 1) The composition of real modifications of a stable curve

定义 2.1. 我们称式 (4) 中的映射 $\pi(\Phi)$ 为 S 的提升，并称 $S(\Phi)$ 为带有扭转 Φ 的 S 的提升黎曼曲面。我们也称 $\{C_1, \cdots, C_k\}$ 为 $\pi(\Phi)$ 的例外圆。

例 2.2。（一个典型的提升示例）我们通过映射 S^1 将其识别为 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 。

$$\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \in x \longmapsto \exp(\sqrt{-1}x) \in S^1. \tag{5}$$

令 $\varphi_\theta \colon S^1 \longrightarrow S^1$ 为角度为 θ 的旋转映射，其定义为 $x \mapsto x + \theta$。根据实爆破的定义，我们有一个典范粘合 $C_j^{(1)} = C_j^{(2)} = S^1$。因此，对于由角度 $\Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in (S^1)^k$构成的 k 重组，映射

$$\Phi(\Theta) = \bigoplus_{j=1}^{k} \varphi_{\theta_j} \ : \ \bigoplus_{j=1}^{k} \left(C_j^{(1)} \longrightarrow C_j^{(2)} \right) \tag{6}$$

是有定义的。以 $\Phi(\Theta)$ 作为粘合映射，即可构造提升 $\pi(\Phi(\Theta)) : S(\Phi(\Theta)) \longrightarrow S$。我们称其为具有旋转角 S 的提升，旋转角为 Θ。

我们选取元素 $\mathbf{o} = (0, \cdots, 0) \in (S^1)^k$。通过重新设定 $S(\Phi(\mathbf{o})) = \Sigma_g$和$\pi(\Phi(\mathbf{o})) = \pi_S$，我们将旋转角为 $\mathbf{o}$ 的 S 的提升写为

$$\pi_S : \Sigma_g \longrightarrow S, \tag{7}$$

并称其为 S的典范提升。由于 S 是稳定曲线， π_S对应的 Σ_g上的例外圆 $\{C_1, \cdots, C_k\}$ 彼此不同伦。因此，它们的同伦类确定了 Harvey 曲线复形 $\mathcal{C}_g$中的一个（$k-1$）单形（见 §3.1 及 [33]），其中 Σ_g，记作

$$\sigma_{\pi_S} = \langle C_1, \cdots, C_k \rangle \in \mathcal{C}_g, \tag{8}$$

并称其为 π_S的例外单形。

任意扭转 Φ 的提升黎曼曲面 $S(\Phi)$，可通过利用（3）改变沿例外圈的粘合参数，从 Σ_g 重构而得。我们自然得到一个同胚

$$\tau_{\widehat{\Phi}} : \Sigma_g \longrightarrow S(\Phi) \tag{9}$$

它满足 $\pi_S = \pi(\Phi)^\circ \tau_{\widehat{\Phi}}$。如果我们在 Σ_g 上取一个双曲度量，使例外圆 $C_1, \cdots, C_k$ 相对于此度量都是测地线，那么映射（9）传统上称为沿C_j的***Fenchel–Nielsen***变形或***Fenchel–Nielsen***扭转 （参见 [77, 第24], [41, 章8]）。我们也称$\tau_{\widehat{\Phi}}$ 为无穷远处的 ***Fenchel–Nielsen*** 扭转，因为正如我们随后将要讨论的， S 本身位于模空间的边界上。

注意，作为同胚，无法仅由 Φ唯一确定$\tau_{\widehat{\Phi}}$ 。由于（3）中的 Φ是在构造 $S(\Phi)$时沿圆周的粘合映射，因此每个圆周的整数旋转都被忽略了。然而，若以某种方式固定 $S(\Phi)$与 Σ_g 之间的一个识别，则可将同胚$\tau_{\widehat{\Phi}}$ 视为 Σ_g 的映射类群 Γ_g中的一个元素，具体如下。将 $S(\Phi)$与 Σ_g识别后，（3）中的粘合映射 φ_j 自然定义了 C_j的一个环形邻域 $\mathcal{A}(C_j)$上的自同胚 $\varphi_j : \mathcal{A}(C_j) \longrightarrow \mathcal{A}(C_j)$。在环带 $\mathcal{A}(C_j)$的映射类群中， φ_j 同伦于一个旋转映射φ_{θ_j} ，其角度 $\theta_j \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$为实数。然而，如果 θ_j是 2π的整数倍，那么映射$\tau_{\widehat{\Phi}} : \Sigma_g \longrightarrow \Sigma_g = S(\Phi)$同伦于沿例外圆作若干次积分德恩扭转的复合。

令 $\Gamma(\sigma_{\pi_S})$ 为由沿例外圆的德恩扭转生成的 Γ_g 的子群，并令 $[\tau_{\widehat{\Phi}}]$ 为 $\tau_{\widehat{\Phi}}$ 的同伦类。根据上述论证，如果 θ_j's 是 2π 的整数倍，我们有

$$[\tau_{\widehat{\Phi}}] \in \Gamma(\sigma_{\pi_S}). \tag{10}$$

2.2 提升同胚的障碍

这里我们讨论带有扭转的稳定曲线同胚提升为提升黎曼曲面同胚的可能性。

我们先在局部对其作示意说明。令 $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ 为单位圆盘之间的一个映射，满足 $f(0) = 0$，且 f 是到其像上的同胚。令 $L_\theta = \{z \in \Delta \mid \arg\ z = \theta\}$ 为 Δ 中的一条径向线段，其固定角度为 $\theta \in \mathbf{R}$。如果极限

$$f|_{L_\theta}(0) := \lim_{z \in L_\theta, |z| \mapsto 0} \frac{f(z)}{|f(z)|} \tag{11}$$

若对每个 $\theta \in \mathbf{R}$ 都存在，则称 f 为有限角的。否则，称 f 为无限角的。在无限角的同胚下， L_θ 的像会绕原点无限多次。我们先给出一个此类例子，然后陈述我们的结论。

例 2.3. 设 $[r,\theta]$ 是 Δ 的极坐标； $z = re^{\sqrt{-1}\theta}$。我们定义 $f[r,\widehat{\theta}] = [r,\theta+2\pi/r]$，其中 $[r,\theta] \neq [0,0]$，且 $f[0,0] = [0,0]$。则 f 是 Δ 的一个无限角同胚。

引理 2.4. 设 $f\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ 是单位圆盘之间到其像的有限角同胚，且满足 $f(0) = 0$，并设 $\pi_0\colon Bl_0(\Delta) \longrightarrow \Delta$ 是对 $0 \in \Delta$的实爆破。那么存在唯一一个到其像的同胚 $\widehat{f}\colon Bl_0(\Delta) \longrightarrow Bl_0(\Delta)$，使得它是 f的提升，即满足 $\pi_0 \circ \widehat{f} = f \circ \pi_0$。

证明 我们将源圆盘重新记为 $\Delta_1 = \Delta$，将目标圆盘记为 $\Delta_2 = \Delta$，并令 z_i 为 Δ_i $(i = 1,2)$的复坐标。根据定义，有 $Bl_0(\Delta_i) = \{(z_i,\theta_i) \in \Delta_i \times S^1 \mid z_i = |z_i|e^{\sqrt{-1}\theta_i}\}$，其中 S^1 的坐标 θ_i 通过识别 $(\widehat{5})$ 来表示。利用（11），我们定义映射 $\widehat{f}\colon Bl_0(\Delta_1) \longrightarrow Bl_0(\Delta_2)$ 为

$$(z_1,\theta_1) \longmapsto (z_2,\theta_2) = (f(z_1), \arg(f(z_1)) \quad \text{if } z_1 \neq 0,$$

$$(0,\theta_1) \longmapsto (z_2,\theta_2) = (0, f|_{L_{\theta_1}}(0)).$$

那么， $\widehat{f}$ 满足所需的性质。 □

定义 2.5. 稳定曲线的一个同胚 $f\colon S_1 \longrightarrow S_2$ 称为有限角的，如果将 f 限制到 S_1 每个节点两侧（局部分支）的小圆盘邻域后，所得映射都是有限角的。

命题 2.6. 设 $f\colon S_1 \longrightarrow S_2$ 是稳定曲线之间的有限角同胚。我们选取一个提升 $\pi(\Phi_1)\colon S_1(\Phi_1) \longrightarrow S_1$，并施加任意扭转 Φ_1。

那么，存在唯一的提升 $\pi(\Phi_2)\colon S_2(\Phi_2) \longrightarrow S_2$，它带有某个扭转 Φ_2；并且存在唯一的同胚 $\widehat{f}\colon S_1(\Phi_1) \longrightarrow S_2(\Phi_2)$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} S_1(\Phi_1) & \xrightarrow{\widehat{f}} & S_2(\Phi_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi(\Phi_1)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi(\Phi_2)} \\ S_1 & \xrightarrow{f} & S_2. \end{array}$$

证明 设 P_1 是 S_1的一个节点，且 $P_2 = f(P_1)$ 是 P_1的像，其中 P_1是S_2的一个节点。设 $\Delta_i^{(j)}$ $(i = 1,2, j = 1,2)$ 是 P_i 两侧的较小圆盘邻域，使得对于 $j = 1,2$，限制映射 $f|_{\Delta_1^{(j)}}\colon \Delta_1^{(j)} \longrightarrow \Delta_2^{(j)}$ 是到其像上的同胚。令$\pi_{P_i}^{(j)}\colon Bl_{P_i}(\Delta_i^{(j)}) \longrightarrow \Delta_i^{(j)}$ 为原点 P_i 处的实爆破，其例外圆为$C_i^{(j)} = (\pi_{P_i}^{(j)})^{-1}(P_i)$。由假设， $f|_{\Delta_1^{(j)}}$ 是有限角的，因此由引理 2.4 可知，存在唯一的同胚 $\widehat{f}|_{\Delta_1^{(j)}}\colon Bl_{P_1}(\Delta_1^{(j)}) \longrightarrow Bl_{P_2}(\Delta_2^{(j)})$，满足

$$\pi_{P_2}^{(j)} \circ \widehat{f}|_{\Delta_1^{(j)}} = f|_{\Delta_1^{(j)}} \circ \pi_{P_1}^{(j)}. \tag{12}$$

令 $\varphi_1 : C_1^{(1)} \longrightarrow C_1^{(2)}$ 为与 Φ_1相关联的粘合同胚。于是我们定义同胚 $\varphi_2 : C_2^{(1)} \longrightarrow C_2^{(2)}$ 为

$$\varphi_2 = \widehat{f}|_{\Delta_1^{(2)}} \circ \varphi_1 \circ (\widehat{f}|_{\Delta_1^{(1)}})^{-1}|_{C_2^{(1)}}. \tag{13}$$

通过经由 φ_2 将 $C_2^{(1)}$ 和 $C_2^{(2)}$ 粘合起来，所需的 S_2（Φ_2）和 $\widehat{f}$ 由 (12) 和 (13) 在局部良定义。我们在 S_1 和 S_2 的所有节点的圆盘邻域上进行相同的构造，并将所得结果平凡地粘合到它们在 S_1 和 S_2 中的补集上。然后，我们在整体上$\widehat{}$得到所需的 S_2（Φ_2）和 f。由构造可知其唯一性。 □

2.3 作为映射类群的魏尔群

这里我们将稳定曲线的映射类群刻画为魏尔群。

首先，我们讨论稳定曲线 S 的定向。由于 S 的一个节点的局部方程在 $\mathbf{C}^2$，中为 $xy = 0$，奇点的链环是一个正霍普夫链环。因此， S 具有自然定向 ∇_S，使得其正规化分支作为黎曼曲面所具有的定向与节点处霍普夫链环的正性相容。

另一方面，我们考虑式（7）中描述的典范提升 $\pi_S : \Sigma_g \longrightarrow S$。我们比较自然定向 ∇_{Σ_g} 与 ∇_S。于是:

Lem引理 2.7. 定向 ∇_{Σ_g} 和 ∇_S 通过映射 π_S相容。

证明 由于根据定理 3.1（见下一节）， Σ_g 和 S 可实现为一个保向流形中的纤维，因此结论显然成立。 □

设 S_i ($i = 1,2$) 是带有定向 ∇_{S_i}的定向稳定曲线。若同胚$f : S_1 \longrightarrow S_2$ 将 $f_*(\nabla_{S_1})$ 推下后所定义的 S_2 上的定向与 ∇_{S_2}等价，则称该同胚为保向的。若存在同伦 $\{f_t : S_1 \longrightarrow S_2\}_{0\le t\le 1}$，使得每个 f_t 都是保向同胚，则称两个保向同胚 $f_i : S_1 \longrightarrow S_2$ ($i = 0,1$)彼此同伦。保向同胚$f : S_1 \longrightarrow S_2$ 的同伦类称为 f的映射类，记作 $[f]$。对于固定的稳定曲线 S，映射类的集合在映射复合运算下构成一个群，称为 S的映射类群，记作 $\Sigma(S)$。我们有如下结论:

命题 2.8。 任意稳定曲线的保向同胚 $f : S_1 \longrightarrow S_2$ 都同伦于一个有限角定向同胚 $f' : S_1 \longrightarrow S_2$。

证明 假设到某个节点 P的 S_1中岸 $f|_{\Delta_P^{(1)}} : \Delta_P^{(1)} \longrightarrow f(\Delta_P^{(1)}) \subset \Delta_{f(P)}^{(1)}$的圆盘邻域的限制同胚是无限角的。我们选择另一个映射 $h : \Delta_P^{(1)} \longrightarrow \Delta_{f(P)}^{(1)}$，使得

(i) $h(\Delta_P^{(1)}) = f|_{\Delta_P^{(1)}}$ ($\Delta_P^{(1)}$)作为集合相同，且限制映射在边界上重合：$h|_{\partial\Delta_P^{(1)}} \equiv f|_{\partial\Delta_P^{(1)}}$；(ii) h 是到其像上的有限角同胚，使得 h 和 $f|_{\Delta_P^{(1)}}$ 定义相同的定向。

注意，我们有无穷多个 h 可供选择。由于复合同胚$h^{-1} \circ f|_{\Delta_P^{(1)}}$： $\Delta_P^{(1)} \longrightarrow \Delta_P^{(1)}$ 在边界 $\partial\Delta_P^{(1)}$ 上彼此重合，根据 Alexander技巧（[7]），它们在整个圆盘 $\Delta_P^{(1)}$ 上同伦于恒等映射 $\mathrm{id}^{\Delta_P^{(1)}}$。也就是说， h 同伦于 $f|_{\Delta_P^{(1)}}$，且不移动边界上的点。我们定义一个保向同胚 f'： $S_1 \longrightarrow S_2$，使得

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in S \setminus \Delta_P^{(1)} \\ h(x) & \text{if } x \in \Delta_P^{(1)}. \end{cases}$$

那么 f' 同伦于 f。如果 f'在某个节点处是无限角的，那么我们重复上述过程。经过有限步后，我们得到一条新的 f'，它满足所需的性质。

□

推论 2.9。稳定曲线 S 的任意映射类 $[f]$ 都可提升为黎曼曲面 Σ_g的映射类 $\widehat{\ }[f]$，使得 $(\pi_S)_*(\widehat{[f]}) = [f]$成立。

证明 按照 §2.1 中的方法，将黎曼曲面 $S(\Phi)$ 与 $\Sigma_g = S(\Phi(\mathbf{o}))$ 等同后，该断言由命题 2.8 和 2.6 得出。 □

$\widehat{\ }$提升后的同伦类 $[f]$并不能由 $[f]$唯一确定。这种歧义源于在节点 P 附近选择映射 h 时存在的歧义，如命题 2.8 的证明所示。按照与式 (10) 相同的论证，该歧义在模去沿例外圆的积分德恩扭转$\widehat{\ }$后消失，因此提升 $\widehat{[f]}$ 作为$\widehat{\ }\Gamma_g/\Gamma(\sigma_{\pi_S})$ 的一个元素便被唯一确定。另一方面，由于 f置换 S 的节点 $P_1, \cdots, P_k$， $[f]$置换例外圆的环境同痕类 $[C_1], \cdots, [C_k]$。根据 [54, 定理 4.5],， Γ_g 中由置换 $[C_1], \cdots, [C_k]$ 的元素构成的子群，恰好是 $\Gamma(\sigma_{\pi_S})$ 的正规化子 $N\Gamma(\sigma_{\pi_S})$。我们定义

$$W(\sigma_{\pi_S}) = N\Gamma(\sigma_{\pi_S})/\Gamma(\sigma_{\pi_S})$$

并将其称为例外单形的 *Weyl* 群 σ_{π_S}。注意，我们的 $W(\sigma_{\pi_S})$不一定是有限群。

定理 2.10. ([54,推论 4。7]) 稳定曲线 S 的映射类群 $\Gamma(S)$ 同构于 *Weyl* 群

$$\Gamma(S) \cong W(\sigma_{\pi_S}).$$

3 稳定曲线的 Kuranishi 族与对数结构

这里我们回顾稳定曲线的 Kuranishi 族的一些众所周知的事实，这些事实将在后文中用到。我们主要参考 Arbarello–Cornalba–Griffiths [9]。

在 §3.1 中，我们首先回顾稳定曲线的标准 Kuranishi 族的形式性质，其次回顾它们的上同调性质。特别地，我们讨论平滑（管状化）变形的参数空间，即通过将节点变形为环带而得到的参数空间；还讨论变动变形的参数空间，即通过改变不可约分支的复结构并移动节点位置而得到的参数空间。

在 §3.2 中，我们先简要回顾 Kato–Nakayama[42] 和 Usui [72], 所采用的对数几何概念，然后在定理 3.1 中回顾：稳定曲线 Kuranishi 族的对数提升之边界刻画了在无穷远处可能出现的 Fenchel–Nielsen 扭转，这一点已在 §2.1 中讨论。 [9] 的方法不使用对数几何这一术语，而是通过实爆破直接证明这一事实。

3.1 稳定曲线的变形与 Kuranishi 族

在本小节中，我们回顾稳定曲线的 Kuranishi 族的标准结果。

我们回顾黎曼曲面的 Harvey 曲线复形 $\mathcal{C}_g$ （见 [33]）。根据定义，$\mathcal{C}_g$是一个（$3g-3-1$）维单纯复形，其（$k-1$）单形 $\sigma = \langle C_1, \cdots, C_k \rangle$由 Σ_g上的彼此不相交且不同伦的简单闭曲线的同伦类C_j（$1 \leq j \leq k$）组成。若 $\{C_{i_1}, \cdots, C_{i_\ell}\}$ 作为同伦类是 $\{C_1, \cdots, C_k\}$ 的子集，则（$\ell - 1$）单形 $\rho = \langle C_{i_1}, \cdots, C_{i_\ell} \rangle$ 是 σ 的一个面，记作$\rho < \sigma$。我们记

$$\mathrm{cont}_\sigma : \Sigma_g \longrightarrow \Sigma_g(\sigma) \tag{14}$$

σ的收缩映射，即将每个 C_j 收缩为一点，并且在 C_j之外是同胚的连续映射。这里， Σ_g **(**σ**)**是一个有 k 个节点的节点黎曼曲面。映射 **(14)** 在拓扑上与映射 **(7)** 等同。

设 S 是一个稳定曲线，其拓扑类型与 Σ_g**(**σ**)**一致。我们将 S的***Kuranishi***族定义为如下纤维化

$$\psi : X \longrightarrow B \tag{15}$$

它具有以下性质（参见 [9, 第 XI 章，第 4 节、第6]节）：
(i) B（分别地， X）是一个维数为（$3g-3$）（分别为（$3g-2$））的复流形，带有 $S = \psi^{-1}$**(**b_0**)** **(**$b_0 \in B$**)**，其中 b_0 为一个固定点，

(ii) ψ 具有关于局部变形的泛性质。换言之，对于任意变形 $\varphi: V \longrightarrow Z$，若 $\varphi^{-1}(e_0) = S$，则将限制族 $\varphi_W: V_W \longrightarrow W$限制到 e_0 的任意充分小的连通邻域 $W(\subset Z)$ 上，都存在唯一的全纯映射 $f: W \longrightarrow B$ 和 $f: V_W \longrightarrow X$，满足 $f(e_0) = b_0$，使得 $\psi \circ f = f \circ \varphi_W$；(iii) 对于任意 $b \in B$，Kodaira-Spencer 映射

$$T_{B,b} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_b}}(\Omega^1_{X_b}, \mathcal{O}_{X_b})$$

是一个同构，其中 $T_{B,\,b}$ 是 B 在 b 处的切空间，而 $\Omega^1_{X_b}$ 是 $X_b = \psi^{-1}(b)$ 的 K$\ddot{a}$hler 微分形式层,

(iv) ψ 的判别轨迹 D 是 B 上的正规交叉除子，并且 D 中余维为 ℓ的开分层的不可约分支 $D_{i_1\cdots i_\ell}$ 上的ψ 的纤维，是拓扑类型为 Σ_g(ρ)、对应于面 $\rho = \langle C_{i_1}, \cdots, C_{i_\ell}\rangle < \sigma$的稳定曲线。

此外，若 ψ 满足附加条件 (v)，则称 ψ 为 S的标准 ***Kuran- ishi*** 族：

(v) S 的解析自同构的作用扩展为与 X及 B 相容的作用（它们的全体记作 Aut(X/B)）。反之， ψ 的纤维之间的任一同构都由 S 的解析自同构诱导（它们的全体记作 G）。也就是说，若存在纤维同构 $h_{b_1b_2}$:$\psi^{-1}(b_1) \to \psi^{-1}(b_2)$（对于两点 b_1，$b_2 \in B$），则存在某个 $h_0 \in G$ 及其扩张 $h_0 \in$ Aut(X/B) ($h_0|_{\psi^{-1}(b_0)} = h_0$)，使得限制映射 $h_0|_{\psi^{-1}(b_1)}$与 $h_{b_1b_2}$一致。

(vi) 在将基底 B 于 b_0 ([9]) 附近缩小后， S 的 Kuranishi 族和标准 Kuranishi 族在族同构的意义下存在。

现在我们总结关于 S 的平滑（或管状化）变形和非平滑变形的刻画的众所周知的事实（参见 [9, 第 XI 章], [29, §1]）。设 $S = \sum_{i=1}^r S_i$ 为一条稳定曲线，并且 ($\hat{}S_i$，$\mathbf{P}_i$) 和 $P_j (1 \le j \le k)$ 如 §2.1 所述。由于 B 在 b_0 处的切空间同构于 Ext$^1_{\mathcal{O}_S}$(Ω^1_S，$\mathcal{O}_S$)，我们可以选取 B 在 b_0 处的一个局部坐标邻域 B_{loc}，使其成为该向量空间原点的一个开邻域;

$$B_{loc} \subset \mathrm{Ext}^1{}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S, \mathcal{O}_S) \cong \mathbf{C}^{3g-3}. \tag{16}$$

由谱序列 H^q(S, Ext^p($\Omega^1_S, \mathcal{O}_S$)) $\Longrightarrow$ Ext^{p+q}($\Omega^1_S, \mathcal{O}_S$)，可得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(S,\ Hom_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S,\ \mathcal{O}_S)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S,\ \mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathrm{H}^0(S,\ Ext^1(\Omega^1_S,\ \mathcal{O}_S)) \longrightarrow 0. \tag{17}$$

利用 Grothendieck–Serre对偶性，(17) 中每个空间的对偶向量空间为

$$\mathrm{H}^1(S, Hom_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S, \mathcal{O}_S))^* \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{H}^1(\hat{S}_i, T_{\hat{S}_i}(-\mathbf{P}_i))^* \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{H}^0(\hat{S}_i, 2K_{\hat{S}_i} + \mathbf{P}_i), \tag{18}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S,\mathcal{O}_S)^*\cong \mathrm{H}^0(S,\Omega^1_S\otimes\omega_S),\quad \mathrm{H}^0(S,Ext^1(\Omega^1_S,\mathcal{O}_S))^*\cong\bigoplus_{j=1}^{k}\tau_{P_j},$$

其中， ω_S是 S的对偶化层， $T_{\hat{S}_i}$和 $K_{\hat{S}_i}$分别是 S_i 的切层和典范层，而τ_{P_j} 是支集在 P_j 上的挠层，其描述如下（参见 [29, 第33]页）： 若 S 在节点 P_j附近由 $xy=0$局部定义，则微分形式$\omega_1=dx^{\otimes 2}/x,\ \omega_2=dy^{\otimes 2}/y$ 满足关系 $y\omega_1=x\omega_2$。因此

$$y\omega_1=\frac{ydx^{\otimes 2}}{x}=\frac{xdy^{\otimes 2}}{y} \tag{19}$$

生成了一个在$\mathbf{C}$上的一维子模，它正是τ_{P_j}的生成元。因此，(17)的对偶正合列为

$$0\longrightarrow\bigoplus_{j=1}^{k}\tau_{P_j}\longrightarrow \mathrm{H}^0(S,\Omega^1_S\otimes\omega_S)\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{r}\mathrm{H}^0(\hat{S}_i,2K_{\hat{S}_i}+\mathbf{P}_i)\longrightarrow 0 \tag{20}$$

那么，(17)和(20)的变形理论含义如下；

(I) 空间 $\mathrm{H}^1(S_i,T_{\hat{S}_i}(-\mathbf{P}_i))$ 或 $\mathrm{H}^0(S_i,2K_{S_i}+\mathbf{P}_i)$ 参数化可变的变形，即改变 S_i 的复结构而不平滑粘接节点；(II) 挠层τ_{P_j} 参数化节点 P_j 平滑为环带的平滑变形。特别地，τ_{P_j} 由在 P_j 处的管状化 生成。（请注意，此处“管状化”的含义不同于微分拓扑中的含义。关于本语境中的含义，参见 [47, §2，§3], [9, 第184–186]页。）

上述事实(I)和(II)也可由正规交叉簇变形的一般理论推出（参见[26]）。

3.2 Kuranishi 族的对数结构与实爆破

在本小节中，我们将对数几何中的一部分标准论证应用于 Kuranishi 族 $\psi: X\to B$ 的 S。关于术语，请参见 [42, §1], [72, §1], [43, 第2]章等。

由于判别轨迹 D 是 B 上的正规交叉除子，有限生成饱和幺半群 $M=\{f\in\mathcal{O}_B\mid f\text{ 的层在 }D\}$ 之外可逆，嵌入 $\mathcal{O}_B$ 中后定义如下对数结构。令

$$B^{\log}=\left\{(b,h)\mid b\in B, h\in\mathrm{Hom}(M^{\mathrm{gp}}_{B,b},S^1), h(f)=\frac{f(x)}{|f(x)|},\ \forall f\in\mathcal{O}^*_{B,b}\right\},$$

其中 M作为 B上的一个层嵌入在阿贝尔群 $M^{\mathrm{gp}}=\{a/b\mid a,b\in M\}$中，而$\mathcal{O}^*_{B,\ b}$ 是非零全纯函数在 b 处的茎。第一个投影（b， h） $\mapsto b$ 诱导出一个映射

$$\tau_B: B^{\log}\longrightarrow B. \tag{21}$$

于是， $B^{\log}$ 具有带角实解析流形的结构，使得映射 (21) 可视为沿着 D对 B进行的实爆破。具体而言，设（U， z_1， $\cdots$， z_{3g-3}）是 B 在 b_0 附近的一组局部坐标，使得 $z_i=0$ $(1\leq i\leq k)$局部定义了 D的一个不可约分支 D_i 。 U上 D的 ℓ余维开分层中的一个分支 $D_{i_1,\ \cdots,\ i_\ell}$ 由 $z_{i_1}=\cdots z_{i_l}=0$, $z_j\neq 0$ $(j\in\{1,\cdots,3g-3\}\setminus\{i_1,\cdots,i_\ell\})$定义。于是， $B^{\log}$ 在 $D_{i_1,\ \cdots,\ i_\ell}\cap U$ 的一点附近定义为

$$\{(z_1,\cdots,z_{3g-3},\theta_1,\cdots,\theta_\ell)\in U\times(S^1)^\ell\ ;\ z_{i_j}=|z_{i_j}|e^{\sqrt{-1}\theta_j},\ 1\leq j\leq\ell\}$$

通过识别 $S^1=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$。 $B^{\log}$ 的例外集 E 具有如下分层，使得分支 $E_{i_1,\ \cdots,\ i_\ell}=\tau_B^{-1}($ $D_{i_1,\ \cdots,\ i_\ell})$ 可局部写为

$$\{z_{i_1}=\cdots z_{i_l}=0,\ (z_{j_1},\cdots,z_{j_{3g-3-\ell}},\theta_1,\cdots,\theta_\ell)\in(\mathbf{C}^*)^{3g-3-\ell}\times(S^1)^\ell\}\tag{22}$$

其中 j_1， $\cdots$， $j_{3g-3-\ell}\in\{1,\cdots,3g-3\}\setminus\{i_1,\cdots,i_\ell\}$。特别地， τ_B的限制$E_{i_1,\ \cdots,\ i_\ell}\longrightarrow D_{i_1,\ \cdots,\ i_\ell}$是一个 $(S^1)^\ell$-丛。

另一方面，由于 $\psi^{-1}(D)$ 是 X 上的正规交叉除子，我们可以构造与 (21) 类似的 $\tau_X:X^{\log}\longrightarrow X$ 。于是，由 [42, 引理 1.3], 可得 ψ 的对数提升 $\psi^{\log}:X^{\log}\to B^{\log}$，利用它，图表

$$\begin{array}{ccc} X^{\log} & \xrightarrow{\tau_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^{\log}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ B^{\log} & \xrightarrow{\tau_B} & B \end{array}\tag{23}$$

是可交换的。 [72] 在更一般的情形下阐明了对数提升的几何意义。对于稳定曲线的 Kuranishi 族，它是一个实解析的黎曼曲面族，包含无穷远处可能出现的 Fenchel–Nielsen扭转（[9,第149–156]页）：

定理 3.1. ([9], [72], [42]) 设 $\psi:X\longrightarrow B$ 是稳定曲线的一个 *Kuranishi*族S。那么 $\psi^{\log}:X^{\log}\to B^{\log}$ 是一个实解析的黎曼曲面族，使得
(i) $\psi^{\log}$ 在$(\tau_B\circ\psi^{\log})^{-1}(B\setminus D)\longrightarrow\tau_B^{-1}(B\setminus D)$ 上的限制与 ψ在$(B\setminus D)\longrightarrow B\setminus D$ 上的限制同构。
(ii) 设 Q 是纤维 $\tau_B^{-1}(P)$ 中的一点，该纤维属于 $(S^1)^\ell$-丛 $E_{i_1,\cdots,i_\ell}\longrightarrow D_{i_1,\cdots,i_\ell}(P\in D_{i_1,\cdots,i_\ell})$，且 $\Theta=(\theta_1,\cdots,\theta_\ell)$ 是式（22）中给出的 Q 的纤维坐标。那么，纤维 $(\psi^{\log})^{-1}(Q)$ 同构于由旋转角 Θ 提升稳定曲线$\psi^{-1}(P)$ 所得的黎曼曲面。也就是说，按记号（6），有

$$(\psi^{\log})^{-1}(Q)\cong\psi^{-1}(P)(\Phi(\Theta)).\tag{24}$$

注释 3.2. *Hubbard–Papadopol–Veselov [38, §5]* 也构造了通过实爆破提升实解析流形之间实解析映射的提升映射，并将其用于其他目的进行讨论。

4 普遍退化族的构造

从 Hubbard-Koch 的结果出发 [37], ，我们在 [54]构造了 Deligne-Mumford 紧化上的一种新轨形结构，此处记作 M_g^{orb} 。本节将利用这一结构构造一个轨形纤维空间 $\pi^{\mathrm{orb}}: Y^{\text{轨形}}_{g} \longrightarrow M_g^{\mathrm{orb}}$，它是一个具有某些普遍性质的稳定曲线族。

在 §4.1 中，我们回顾了 M_g^{orb} 的轨形结构，并作了一些评论。 M_g^{orb} 的“最大图册”是模空间 $\overline{\mathcal{M}}_g$ ，它是 Teichmüller 空间除以映射类群所得的商（$M_g; T_g, \Gamma_g$）。“边界图册”由 $\sigma \in \mathcal{C}_g$（Harvey 的曲线复形）索引，每个边界图册都是一个开集 $M_\epsilon(\sigma)$, 包含拓扑类型为 $\Sigma_g(\sigma)$ 的稳定曲线轨迹 $V(\sigma)$。$M_\epsilon(\sigma)$ 是受控变形空间 $D_\epsilon(\sigma)$ 除以外尔群 $W(\sigma)$ 所得的商。这里， $D_\epsilon(\sigma)$ 是由σ-标记稳定曲线构成的空间，其广义 Fenchel–Nielsen 坐标受到“控制”，从而使 $W(\sigma)$ 在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上适当不连续地作用。

在 §4.2 中，我们证明 $D_\epsilon(\sigma)$ 可通过拼接 σ 标记稳定曲线的 Kuranishi 族的基底来表示。由此，我们通过拼接稳定曲线的 Kuranishi 族，构造一个稳定曲线族$\pi_\sigma: X_\sigma \longrightarrow D_\epsilon(\sigma)$。这个族是 Hubbard–Koch 的族 $[37, \text{Th.10.1}]$, 的细化，也是 Arbarello– Cornalba 定理 $[8]$ 的推广；该定理指出，Teichm¨uller 空间上的泛曲线 $C_g \longrightarrow T_g$ 可通过拼接黎曼曲面的 Kuranishi 族来表示。作为定理证明的主要工具, 我们使用 §3.2 中讨论的 Kuranishi 族的对数提升。

在 §4.3 中，通过自然地拼接各族 π_σ ，我们构造所需的轨形纤维空间 π^{orb}。我们称之为纤维化复曲面的黎曼曲面万能退化族，因为任何具有不稳定纤维的纤维化复曲面都可以从 π^{orb} 拉回。我们将在 §7 中讨论这一点。

4.1 韦伊标记与受控变形空间

在本小节中，我们介绍定义 $[54, \text{Def.6.2}]$, 中的韦伊标记和受控变形空间的概念，并补充一些说明，回顾 $[54]$ 中证明的相关结果。

我们固定 $\mathcal{C}_g$ 的一个单形 $\sigma = \langle C_1, \cdots, C_k \rangle$ ，并令 S 为一条拓扑类型与 (14) 中的 $\Sigma_g(\sigma)$ 相同的稳定曲线。我们将 S 的一个预标记定义为保向同胚的同伦类 $[w]$

$$w : \Sigma_g(\sigma) \longrightarrow S. \tag{25}$$

若存在解析同构 $f: S_1 \longrightarrow$, 则称这两个预标记稳定曲线 $(S_1, [w_1])$ 和 $(S_2, [w_2])$ 等价（记作 $(S_1, [w_1]) \sim (S_2, [w_2])$ ）

S_2 使得 $f\circ w_1$ 与 w_2同伦。我们将等价类记作 b y

$$[S,w]=(S,[w])/\sim$$

并称其为带外尔标记的稳定曲线（或 σ-标记稳定曲线）。此处标记的概念不同于 [37, 第270] 页和 [9, 第490], 页中给出的概念，因为在我们的情形中忽略了 $\Gamma(\sigma)$ 的作用。于是，刚性，即带外尔标记的稳定曲线没有自同构性，可表述如下:

引理 4.1. 设 $w:\ \Sigma_g(\sigma)\ \to S$ 为一个韦伊标记，且 $f:\ S\to S$ 是一个解析自同构，使得 $[S,f\circ w]=[S,w]$。则 f 是恒等映射。

证明 若 f 非平凡地置换了 S 的某个真子集的节点，则将 f 提升到Γ_g会置换 $C_1,\cdots,C_k$的一个非平凡子集的同伦类，而 $f\circ w$ 不可能与 w同伦。因此， f 稳定了 S的每个不可约分支，并将其每个正规化分支作为带标记点的黎曼曲面予以稳定。由 Teichm¨uller 标记通常的刚性即可得出结论（参见 [36, 命题 6.8.1]）。

□

以下是标记等价性的判据:

引理 *4.2.* 两个保向同胚 $w_i:\ \Sigma_g(\sigma)\ \longrightarrow S_i\ (i=1,2)$ 给出相同的σ-外尔标记，即 $[S_1,w_1]=[S_2,w_2]$，当且仅当存在一个保向同胚 $f:S_1(\Phi_1)\ \longrightarrow S_2(\Phi_2)$，它是解析同构 $f:\ S_1\longrightarrow S_2$ 的提升；存在保向同胚 $\widehat{w}_i:\ \Sigma_g\longrightarrow S_i(\Phi_i)\ (i=1,2)$，以及德恩扭转 $\Sigma_g\longrightarrow\Sigma_g\ (\alpha\in\Gamma(\sigma))$ 的一个作用 α，使得下图是同伦交换的

$$\begin{array}{ccccc}\Sigma_g & \xrightarrow{\widehat{w}_1} & S_1(\Phi_1) & \xrightarrow{\pi(\Phi_1)} & S_1\\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\widehat{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ \Sigma_g & \xrightarrow{\widehat{w}_2} & S_2(\Phi_2) & \xrightarrow{\pi(\Phi_2)} & S_2.\end{array}$$

证明 由（10）和推论 2.9，断言显然成立。 □

我们用 $T(\sigma)=\bigcup_{w:\ \sigma\text{-}Weyl\ marking}[S,w]$ 表示 σ标记稳定曲线的集合。对于一个面 $\rho<\sigma$，类似地，我们用 $T(\rho)=\bigcup_{w:\ \rho\text{-}Weyl\ marking}[S,w]$ 表示 ρ标记稳定曲线的集合。若 $\rho=\emptyset$，则 $T(\emptyset)=T_g=\bigcup_{w:\ \emptyset\text{-}Weyl\ marking}[S,w]$ 就是 Teichm¨uller 空间，因为 $\emptyset$-$Weyl\ marking\ [S,w]$ 不过是带有通常 Teichm¨uller 标记的黎曼曲面 S。

我们在增广的 $\widehat{}$Teichm¨uller 空间 T_g （参见 [77, 第4]章）中，将 $T_g\bigcup_{\rho<\sigma}T(\rho)$ 视为子空间，并在其上定义如下实结构。我们固定一个包含 $T_g\bigcup_{\rho<\sigma}T$ 的极大单形

$$\tilde{\sigma}=\langle C_1,\cdots,C_k,C_{k+1},\cdots,C_{3g-3}\rangle$$

，并令 $(\ell_1,\ \cdots,\ \ell_{3g-3},\ \tau_1,\ \cdots,\ \tau_{3g-3})$ 为相应的 Fenchel-Nielsen 坐标。Wolpert [76] 证明，除前面的扭转坐标 $\tau_1,\ \cdots,\ \tau_k$ 外，这些坐标都连续延拓到 $T_g \cup T(\sigma)$

$$((\ell_j,\tau_j),\ell_i) : T_g \bigcup_{\rho<\sigma} T(\rho) \longrightarrow \prod_{j=k+1}^{3g-3} (\mathbf{R}_{>0}\times\mathbf{R}) \times \prod_{j=1}^{k} (\mathbf{R}_{\geq 0}). \tag{26}$$

此外，若我们考虑面 $\rho = \langle C_{i_1},\cdots,C_{i_s}\rangle$ 的点 $p=[S,w]\in T(\rho)$，那么 S 的节点对应于 $1\leq j\leq s$ 的 $\ell_{i_j}(p)=0$。

设 M 为一个普适常数，使得在亏格为 g 的任意黎曼曲面上，若两条不同的简单闭测地线的长度小于 M ([44], [1, §3.3])，则它们互不相交；这个常数有时称为二维 *Margulis*常数。取一个数 $0<\epsilon\leq M$，并在整个讨论过程中固定它。利用扩展 Fenchel–Nielsen 坐标 (26)，我们定义 $T_g\bigcup_{\rho<\sigma} T(\rho)$ 的子空间 $\mathcal{U}_\epsilon(\sigma)$ 如下：

$$\mathcal{U}_\epsilon(\sigma) = \{\, 0\leq \ell_i<\epsilon\ (1\leq i\leq k),\ \max\{\ell_1.\cdots,\ell_k\}<\ell_j\ \ (k+1\leq j\leq 3g-3)\,\}. \tag{27}$$

由于 $T(\sigma)$ 由 $\ell_j=0 (1\leq j\leq k)$ 定义，因此我们有一个自然包含 $T(\sigma)\ \subset \mathcal{U}_\epsilon(\sigma)$，且 $\Gamma(\sigma)$ 自然作用于 $\mathcal{U}_\epsilon(\sigma)$。

定义 4.3。 ([54,定义 6。2]) 商空间

$$D_\epsilon(\sigma) = \mathcal{U}_\epsilon(\sigma)/\Gamma(\sigma)$$

称为相对于单形 σ 的受控变形空间 。

这些空间被视为 Bers 变形空间（[15]）的细化，并具有以下性质：

(I)（拓扑性质） $D_\epsilon(\sigma)$ 是一个豪斯多夫拓扑空间，Weyl 群$W(\sigma)$ 作为标记的改变作用于 $D_\epsilon(\sigma)$

$$[S,w]\longrightarrow [S,w\circ\varphi^{-1}] \quad \text{ for } \varphi\in W(\sigma). \tag{28}$$

此作用是适当不连续的（[54,引理 6.1 $\sim$ 6.4]）。
(II)（解析性质） $D_\epsilon(\sigma)$ 带有一个复结构， $W(\sigma)$ 在其上全纯作用，并且商空间 $M_\epsilon(\sigma) = D_\epsilon(\sigma)/W(\sigma)$ 解析开嵌入到M_g ([54, 引理 6.5 $\sim$ 6.8])。

性质 (I) 依赖于实解析的增广 Teichmüller 理论（参见 [1]）以及某些魏尔-彼得森几何（参见 [76], [78]）。请注意，关于测地线长度 ℓ_i 的精细条件 (27) 源于对区域的确定，在该区域上 $W(\sigma)$ 不连续地适当作用（见 [54, 备注 6.3]）。性质 (II) 本质上源自 Hubbard–Koch 定理 [37, 定理 10.1]。在下一小节中，我们将补充一个更强的解析性质。

4.2 受控变形空间上的 Kuranishi 族

在本小节中，我们首先通过一种独立于 Hubbard-Koch 定理 [37, 定理 10.1], 的方法，在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上引入复结构，并通过拼接稳定曲线的 Kuranishi 族，在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上构造一个解析族。这里所用方法的基本思想源自 Arbarello–Cornalba [8, §§3,4] 和 Arbarello–Cornalba–Griffiths [9, §8], ，但我们将利用 §4.1 中 $D_\epsilon(\sigma)$ 的拓扑性质 (I)，以相当直接的方式证明下述定理。

定理 4.4。 存在一个 $(3g-2)$维复流形 $X_\epsilon(\sigma)$、一个复结构 $D_\epsilon(\sigma)=\bigcup_{i\in\mathfrak{I}}B_i$ 以及一个全纯映射

$$\pi_\sigma : X_\epsilon(\sigma) \longrightarrow D_\epsilon(\sigma)$$

使得每个限制族 $\pi_\sigma|_{X_i}$： $X_i=(\pi_\sigma)^{-1}(B_i) \longrightarrow B_i$ 都与某个稳定曲线 $(\pi_\sigma)^{-1}(b_i)$ 的标准 *Kuranishi* 族重合，其中 $b_i \in B_i$。

外尔群 g 群 $W(\sigma)$ 在 π_σ 上全纯地且适当不连续地作用，使得

$$\begin{array}{ccc} X_\epsilon(\sigma) & \xrightarrow[\psi_\sigma]{} & Y_\epsilon(\sigma)\cong X_\epsilon(\sigma)/W(\sigma) \\ \pi_\sigma\downarrow & & \downarrow\overline{\pi}_\sigma \\ D_\epsilon(\sigma) & \xrightarrow[\varphi_\sigma]{} & M_\epsilon(\sigma)\cong D_\epsilon(\sigma)/W(\sigma). \end{array}$$

这是一个交换图，其中 φ_σ 和 ψ_σ 是到正规解析空间 $Y_\epsilon(\sigma)$ 和 $M_\epsilon(\sigma)$的商全纯映射，而 π_σ 是诱导的全纯映射。

此外， $M_\epsilon(\sigma)$ 到 M_g有一个全纯开嵌入。

我们需要以下结果:

引理 4.5。 设 $p=[S,w]\in D_\epsilon(\sigma)\cap T(\sigma)$ 为一点，并设 $\psi\colon X\longrightarrow B$ 是 $\psi^{-1}(b_0)=S$ 的一个标准 *Kuranishi* 族，其底空间 B充分小。则存在一个自然的拓扑开嵌入

$$\iota_B : B \longrightarrow D_\epsilon(\sigma).$$

证明 步骤 *1* 令 $S=\psi^{-1}(b_0)$。设 $\widehat{w}:\Sigma_g\longrightarrow S(\Phi_0)$ 是 w 经某个扭转 Φ_0后的提升。根据定理 3.1，存在一点 $e_0\in\tau_B^{-1}(b_0)$，使得 $S(\Phi_0)$ 与纤维典范同构

$$(\psi^{\log})^{-1}(e_0)=S(\Phi_0). \tag{29}$$

对于任意 $P\in B$，我们考虑稳定曲线 $X_P=\psi^{-1}(P)$，并选取一点 $e_P\in\tau_B^{-1}(P)$。于是有

$$(\psi^{\log})^{-1}(e_P)=X_P(\Phi_P) \tag{30}$$

带有某种扭转 Φ_P。根据 $B^{\log}$ 的连通性，我们可以选取一条连接 $B^{\log}$ 上的点 e_0 和 e_P 的光滑路径 $L_{e_0e_P}$。族 $\psi^{\log}\colon X^{\log} \longrightarrow B^{\log}$ 是一个以带角流形为底空间的黎曼曲面微分族。Usui 定理 [72] 是 Ehresmann 定理（[24]）在此情形下的推广，它指出存在一个微分同胚

$$\varphi_{e_0e_P} : (\psi^{\log})^{-1}(e_0) \longrightarrow (\psi^{\log})^{-1}(e_P) \tag{31}$$

通过沿着 $L_{e_0e_P}$ 连接纤维的微分同胚。由 (29)、(30) 和 (31)，我们得到一个微分同胚

$$\widehat{w}_P := \varphi_{e_0e_P} \circ \widehat{w} \ : \ \Sigma_g \longrightarrow X_P(\Phi_P). \tag{32}$$

注意，$\widehat{w}_P$ 在模去 $\Gamma(\sigma)$ 的作用后是唯一确定的，且与 Φ_0、e_P 和 $L_{e_0e_P}$ 的选择无关。因此，由引理 4.2 和 (32)，我们得到一个 ρ-韦伊标记

$$w_P \ : \ \Sigma_g(\rho) \longrightarrow X_P \tag{33}$$

其中，面 ρ（可能是 $\rho = \emptyset,\ \sigma$）由包含 P 的 B 的层确定。由于扩展 Fenchel–Nielsen 坐标 (26) 连续变化（[76]），长度条件 (27) 对于 $[X_P, w_P]$ 成立。因此，连续映射

$$\iota_B : B \ni P \longmapsto [X_P, w_P] \in D_\epsilon(\sigma) \tag{34}$$

是良定义的。

步骤 *2* 我们将证明映射 ι_B 是单射。设对于某些 $P_1,\ P_2 \in B$，有 $\iota_B(P_1) = \iota_B(P_2)$。根据定义，稳定曲线 $X_{P_i} = \psi^{-1}(P_i)$ $(i = 1,\ 2)$ 带有ρ-韦伊标记 $w_i\colon\ \Sigma_g(\rho) \longrightarrow X_{P_i}$，其中存在某个 ρ，使得存在一个同构$g_{P_1P_2}\colon X_{P_1} \longrightarrow X_{P_2}$，满足 $w_2 \simeq g_{P_1P_2} \circ w_1$（同伦）。

由 §3.1 中陈述的标准 Kuranishi 族的性质 (v) 可知，存在一个自同构 $g_{b_0}\colon X_{b_0} \longrightarrow X_{b_0}$ $(X_{b_0} = S)$，以及该族的一个相对自同构

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ B & \xrightarrow{g_B} & B \end{array} \tag{35}$$

使得 g_{b_0} 和 $g_{P_1P_2}$ 是由自同构g_X在纤维上的限制所诱导的。稳定曲线 X_{P_1} 和 X_{P_2} 具有相同的拓扑类型 $\Sigma_g(\rho)$。设 $B(\rho)$ 是 B 中的层，使得 ψ 在 $B(\rho)$ 上方的纤维属于类型 $\Sigma_g(\rho)$。

设$\mathbf{L}_1$ 是 B 上的一条实光滑路径，连接点 P_1 和 b_0，且$\mathbf{L}_1^* = \widetilde{\mathbf{L}}_1 \setminus \{b_0\}$ 包含于 $B(\rho)$ 中。于是，实严格变换 $\mathbf{L}_1$ 是$\mathbf{L}_1$ 在 $B^{\log}$ 上经由映射 $\tau_B\colon B^{\log} \to B$ 得到的，其定义如下。

设 $\dim\ \rho = k_0 - 1$ 和 $\dim\ \sigma = k - 1\,(k_0 \le k)$。令$(U;\ z_1,\cdots,z_{3g-3})$为 B 在 b_0 处的局部坐标，使得 $B(\rho) \cap U = \{z_1 = \cdots = z_{k_0} = 0, z_{k_0+1} \neq 0,\cdots, z_{3g-3} \neq 0\}$ 且 $b_0 = \{(z_1,\cdots,z_k, z_{k+1},\cdots,z_{3g-3}) = (0,\cdots,0,c_{k+1},\cdots,c_{3g-3})\}$，其中 $c_{k_1+1},\cdots,c_{3g-3} \in$属于$\mathbf{C}^*$。设$\mathbf{L}_1 \cap U$由下式定义

$$z_i = 0,\quad z_j = (1-t)r_j(t)\exp(\sqrt{-1}\alpha_j(t)),\quad z_\ell = c_\ell$$

对于 $1 \le i \le k_0,\quad k_0+1 \le j \le k,\quad k+1 \le \ell \le 3g-3$，其中 $r_j(t)$ 是处处非零的光滑函数，而 $\alpha_j(t)$ 是关于变量 $t \in [\delta,1](0 \le \exists\delta < 1)$ 的光滑函数。另一方面，如 §3.2 中所述，$\tau_B^{-1}(U)$ 定义为

$$\{(z_1,\cdots,z_{3g-3},\theta_1,\cdots,\theta_k) \in U \times (S^1)^k\ ;\ z_j = |z_j|e^{\sqrt{-1}\theta_j},\ 1 \le j \le k\}$$

通过识别 $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$。我们定义光滑截面 $(\mathbf{s}_1)|_{\mathrm{loc}}\colon \mathbf{L}_1 \cap U \to \tau_B^{-1}(U)$ 如下:

$$\theta_j = 0\ \ (1 \le j \le k_0),\quad \theta_j = \alpha_j(t)\ \ (k_0+1 \le j \le k)$$

利用 $U \times (S^1)^k \to U$ 的纤维坐标。对 B 上的其他坐标图作类似论证并将它们拼接起来，可得光滑截面 $\mathbf{s}_1 : \mathbf{L}_1 \to B^{\log}$。于是令$\widetilde{\mathbf{L}_1} = \mathbf{s}_1(\mathbf{L}_1)$。根据定义，限制映射 $(\tau_B)|_{\widetilde{\mathbf{L}}_1} : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_1$ 是微分同胚。

现在我们设

$$\mathbf{L}_2 = g_B(\mathbf{L}_1). \tag{36}$$

于是，$\mathbf{L}_2$ 是 B 上一条连接 P_2 与 b_0 的实光滑路径，使得$\mathbf{L}_2^* = \mathbf{L}_2 \setminus \{b_0\}$包含于 $B(\rho)$ 中。令 $\varphi_i\colon [0,1] \to \mathbf{L}_i$（$i = 1,\ 2$）为参数化，使得$\varphi_i(0) = P_i,\ \varphi_i(1) = b_0$，且 $\varphi_2(t) = g_B \circ \varphi_1(t)$（$t \in [0,1]$）。将（35）中的 $g_X\colon X \to X$限制到纤维上，得到同构族

$$\{g_t = (g_X)|_{X_{\varphi_1(t)}} : X_{\varphi_1(t)} \longrightarrow X_{\varphi_2(t)}\}_{0 \le t \le 1} \tag{37}$$

使得 $g_0 = g_{P_1P_2}$ 与 $g_1 = g_{b_0}$。

$\mathbf{L}_2 = \mathbf{s}_2(\mathbf{L}_2)$是$\mathbf{L}_2$ 经由 τ_B 得到的实严格变换，其中 τ_B 由光滑截面$\mathbf{s}_2 : \mathbf{L}_2 \to B^{\log}$给出。令 $\widetilde{\varphi}_i = \mathbf{s}_i \circ \varphi_i\colon [0,1] \xrightarrow{\varphi_i} \mathbf{L}_i \xrightarrow{i} \widetilde{\mathbf{L}}_i$ 为参数化。根据实严格变换的定义，或根据命题 2.6 和定理 3.1 中的论证，存在同胚 $\widetilde{g}_t : X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_1\,t()} = (\psi^{\log})^{-1}(\widetilde{\varphi}_1(t)) \longrightarrow X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_2\,t()} = (\psi^{\log})^{-1}(\widetilde{\varphi}_2(t))$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_1(t)} & \xrightarrow{\widetilde{g}_t} & X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_2(t)} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \tau_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau_X} \\ X_{\varphi_1(t)} & \xrightarrow{g_t} & X_{\varphi_2(t)} \end{array} \tag{38}$$

其中，我们用同一符号 τ_X 表示 $\tau_X\colon X^{\log} \to X$ 在纤维上的限制。

首先考虑 $t = 0$ 属于 (38) 的情形。根据上述相同的推理，ρ-标记 $w_i : \Sigma_g(\rho) \to X_{P_i}$ 和同伦关系 $w_2 \simeq g_0 \circ w_1$ 被提升为同胚 $\widetilde{w}_i : \Sigma_g \to X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_i\ (0)}$，而同伦关系 $\widetilde{w}_2 \simeq \widetilde{g}_0 \circ \widetilde{w}_1$。

其次，对任意 $t \in [0,1]$，我们考虑 (38)。通过将 [24] 应用于族 $\psi^{\log}$，我们得到沿路径 $\widetilde{\mathbf{L}}_i$ 的微分同胚 $f_{\widetilde{\varphi}_i(0)\widetilde{\varphi}_i(t)} : X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_i\ (0)} \to X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_i\ (t)}$，该路径连接 $\widetilde{\varphi}_i(0)$ 和 $\widetilde{\varphi}_i(t)$。令 $\widetilde{w}_i(t) = f_{\widetilde{\varphi}_i(0)\widetilde{\varphi}_i(t)} \circ \widetilde{w}_i : \Sigma_g \to X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_i\ (t)}$ 为复合同胚。由 (38) 的交换性，我们得到同伦关系族

$$\{\widetilde{w}_2(t) \simeq \widetilde{g}_t \circ \widetilde{w}_1(t)\}_{0 \le t \le 1}. \tag{39}$$

最后，我们考虑 $t = 1$ 的情形。同胚 $\widetilde{w}_i(1) : \Sigma_g \to X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_i\ 1()}$ 经收缩映射 $\mathrm{cont}_\sigma : \Sigma_g \to \Sigma_g(\sigma)$ 和 $(\tau_X)\big|_{X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_i\ (1)}} : X^{\log}_{\widetilde{\varphi}_i\ 1()} \to X_{b_0}$，下降为同胚 $w_i(1) : \Sigma_g(\sigma) \to X_{b_0}$。于是，$t = 1$ 的关系 (39) 下降为

$$w_2(1) \simeq g_{b_0} \circ w_1(1) \quad (\text{homotopic}). \tag{40}$$

由引理 4.1 和 (40)，自同构 g_{b_0} 是 S 的恒等映射。因此，$P_1 = P_2$，即映射 ι_B 的单射性，得证。

步骤 3 通过缩小 $B' \subset B$ 并保持 §3.1 中的性质 (i) ∼(v)，我们可以假设映射 $\iota_{B'} : B' \longrightarrow D_\epsilon(\sigma)$ 在 B 中闭包 $\overline{B'}$ 上的限制是单射。由于 $\overline{B'}$ 是紧致的，且 $D_\epsilon(\sigma)$ 是豪斯多夫的，$\iota_{B'}$ 是到其像上的同胚。因此，引理 4.5 的断言对 B' 成立。

□

定理 *4.4* 的证明：

步骤 1 设 $p = [S, w] \in D_\epsilon(\sigma)$ 是一点，并设 $\psi : X \longrightarrow B$ 是 S 的标准 Kuranishi 族。由与引理 4.5 相同的论证，存在 $D_\epsilon(\sigma)$ 中 p 的一个开邻域 U_p，以及一个同胚 $\iota_B : B \longrightarrow U_p$。令

$$D_\epsilon(\sigma) = \bigcup_{p \in D_\epsilon(\sigma)} U_p \tag{41}$$

是由此类 U_p 构成的开覆盖。通过将 U_p 与 B 识别，复结构 $\{B\}$ 在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上诱导出一个复结构。

事实上，坐标变换是双全纯的，具体如下。设 $U_q = B'$ 是 $q = [S', w'] \in D_\epsilon(\sigma)$ 的标准 Kuranishi 族的另一个基底，且满足 $U_p \cap U_q \neq \emptyset$。由于根据 §3.1 中所述 Kuranishi 族的性质 (iii)，任意点 $r \in U_p \cap U_q = B \cap B'$ 处的 Kodaira-Spencer 映射都是同构，故 $B \cap B'$ 是稳定曲线 $\psi^{-1}(r)$ 的 Kuranishi 族的基底（参见 [9, Chap.XI, Cor.(4.6)]）。根据 Kuranishi 族在同构意义下的唯一性，坐标变换正是这些同构。注意，$D_\epsilon(\sigma)$ 是豪斯多夫空间。因此，(41) 定义了 $D_\epsilon(\sigma)$ 上所需的复结构。

这些标准 Kuranishi 族 $\{\psi_p : V_p = X^{(p)} \longrightarrow U_p = B^{(p)}\}_{p\in D_\epsilon(\sigma)}$ 拼接在一起，定义了一个复流形 $X_\epsilon(\sigma)$ 和一个全纯映射

$$\pi_\sigma = \cup\psi_p \ : \ X_\epsilon(\sigma) = \bigcup V_p \longrightarrow \bigcup U_p = D_\epsilon(\sigma).$$

根据 Kuranishi 族模同构的唯一性，这些也能很好地拼接起来。因此，我们构造出了所需的族。

由于 $\varphi \in W(\sigma)$ 在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上的作用由 (28) 给出， φ 将作为 S 的标准 Kuranishi 族基底的 $p = [S, w]$ 的开邻域$U_p = B^{(p)}$ 映射到 $\varphi(p) = [S, w \circ \varphi^{-1}]$ 的 $U_{\varphi(p)} = B^{(\varphi(p))}$ 的一个开邻域。这无非是 Kuranishi 族基底之间的同构，并且是全纯的。因此， φ 全纯地作用在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上。

步骤 *2* 只需证明 $W(\sigma)$ 在 $X_\epsilon(\sigma)$ 上适当不连续地作用，即：(i) 设 $x', x'' \in X_\epsilon(\sigma)$ 是满足 $g(x') \neq x''$ 的点，其中 $g \in W(\sigma)$ 是一个元素。那么分别存在 x' 和 x'' 的开邻域 U' 和 U''，使得 $g(U') \cap U'' = \emptyset$；(ii) 点 $x \in X_\epsilon(\sigma)$ 的各向同性子群 $G_x\ (\subset W(\sigma))$ 是有限的；(iii) 存在一个 G_x-不变邻域 U，其中包含 x，使得如果对于某个 $g \in W(\sigma)$ 有 $g(U) \cap U \neq \emptyset$，那么 $g \in G_x$。

由于根据引理 6.4], , $W(\sigma)$ 在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上适当不连续地作用，因此当 x' 和 x'' 属于 π_σ 的不同纤维时，断言 (i) 显然成立。假设 x' 和 x'' 属于 π_σ 的同一纤维，记为 $x' = [[S], w']$ 和 $x'' = [[S], w'']$，它们具有同构类 $[S] \in M_g$，且标记不同。那么，忘掉标记后，$\overline{W}(\sigma)$ 在 S 上作为 S 的解析自同构群作用，而该群是有限的。因此断言 (i) 成立。

断言 (ii) 显然成立，因为根据 [54, 引理 6.4], G_x 是 $W(\sigma)$ 在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上的作用所对应的 $\pi_\sigma(x)$ 的各向同性子群的子群，而该群是有限的。

根据此定理的前半部分，存在一个开邻域 V，它是 $D_\epsilon(\sigma)$ 中 $\pi_\sigma(x)$ 的开邻域，并且 $\pi_\sigma^{-1}(V) \longrightarrow V$ 是稳定曲线 $\pi_\sigma^{-1}(\pi_\sigma(x))$ 的标准 Kuranishi 族。因此，断言 (iii) 可由 §3.1 中所述的性质 (v) 得出。于是， $W(\sigma)$ 在 $X_\epsilon(\sigma)$ 上适当不连续地作用，而商空间 $X_\epsilon(\sigma)/W(\sigma)$ 根据 Cartan定理（[18]）是正规解析空间。

$D_\epsilon(\sigma)/W(\sigma)$ 到 M_g 的全纯嵌入，可由上述全纯性以及 §4.1 中所述的性质 (II) 得出。 □

4.3 Deligne-Mumford紧化上的轨形纤维空间

在本小节中，作为定理 4.4 的全局化，我们构造一个轨形纤维空间（简称轨形纤维化） $\pi_g : X_g^{orb} \longrightarrow M_g^{orb}$，使得其上的 Bers 纤维空间（[14]）

Teichm¨uller 空间包含为 π_g 的一个开图。

这里所说的复轨形 M，是指 M 为正规复空间，且 M 由（一个轨形图表）轨形图 $\{(U_i,\ G_i,\ \varphi_i,\ U_i)\}_{i\in\mathbf{I}}$ 覆盖，并满足以下条件：

(i) 每个图表由一个复流形 U_i、一个（不一定有限的）群 G_i、其在 U_i 上的全纯且适当不连续的作用（允许非有效作用）、 M 的一个开集 U_i 以及一个折叠映射 $\varphi_i:\ U_i \longrightarrow U_i$ 组成；该映射诱导一个自然的解析同构isomorphism $U_i/G_i \longrightarrow U_i$。

(ii)（相容条件）对于满足 $\varphi_i(x) = \varphi_j(y) \in U_i \cap U_j$的 $x \in U_i$ 和 $y \in U_j$，存在一个双全纯映射$\varphi_{x,\ y}:\ U'_x \longrightarrow U'_y$，它将 U_i中 x 的一个开邻域映到 U_j 中 y 的一个开邻域，使得$\varphi_{x,\ y}(x) = y$ 且$\varphi_j \circ \varphi_{x,\ y} = \varphi_i$。

为简单起见，如果不会引起混淆，我们有时将此轨形结构记作 $M = \{(U_i; U_i,\ G_i)\}_{i\in\mathbf{I}}$或$M = \bigcup_{i\in\mathbf{I}} U_i/G_i$。

设 M' 是另一个复轨形，其轨形图表为 $\{(V_k,\ H_k,\ \phi_k,\ V_k)\}_{k\in\mathbf{K}}$。所谓一个轨形映射 *orbifold map* $h:\ M' \to M$，是指 h 是一个正规复空间之间的全纯映射，并满足以下条件：

(i) 对任意点 $p \in M'$ 和 $h(p) \in M$，设 $(V_k,\ H_k,\ \phi_k,\ V_k)$ 是 M' 的一个小轨形图，满足 $p \in V_k$；而 $(U_i,\ G_i,\ \varphi_i,\ U_i)$ 是 M 的一个小轨形图，满足 $h(p) \in U_i$。那么存在一个全纯映射 $h_{ki}:\ V_k \to U_i$，使得 $\varphi_i \circ h_{ki} = h|_{V_k} \circ \phi_k$。

(ii)（相容条件）假设 $x \in V_k, y \in V_\ell, h_{ki}(x) \in U_i, h_{\ell j}(y) \in U_j$使得 $\phi_k(x) = \phi_\ell(y)$，且 $\varphi_i(h_{ki}(x)) = \varphi_j(h_{\ell j}(y))$。那么，存在 $x, y, h_{ki}(x)\ h_{\ell j}(y)$ 在 V_k, V_ℓ, U_i, U_j 中分别的开邻域V_x, V_y, $U_{\tilde{h}_{ki}(x)}, U_{\tilde{h}_{\ell j}(y)}$，以及双全纯映射 $\phi_{x,y}:\ V_x \to V_y$ 和 $\varphi_{h(x),h(y)}: U_{\tilde{h}_{ki}(x)} \to U_{\tilde{h}_{\ell j}(y)}$，使得 $\varphi_{h(x),h(y)} \circ h_{ki}|_{\tilde{V}_x} = h_{\ell,j}|_{\tilde{V}_y} \circ \phi_{x,y}$。

此外，我们定义如下：

定义 4.6。设 $f:\ X \longrightarrow M$ 是一个相对维数为 ≥ 1 的复轨形之间的轨形映射（即 $dim_{\mathbf{C}}X \geq dim_{\mathbf{C}}M + 1$）。如果满足以下条件，我们称 f 具有轨形纤维化的结构。

（i）设 $\{(U_i、\ G_i、\ \varphi_i、\ U_i)\}_{i\in\mathbf{I}}$是 M 的轨形图表。对于每个 $i \in \mathbf{I}$，存在一个正规复空间 W_i 和一个全纯映射 $f_i:\ W_i \longrightarrow U_i$，且 G_i 在 f_i 上全纯地并相对地作用，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W}_i & \xrightarrow{\quad\psi_i\quad} & f^{-1}(U_i) \cong \widetilde{W}_i/G_i \\ \widetilde{f}_i \downarrow & & \downarrow f \\ \widetilde{U}_i & \xrightarrow{\quad\varphi_i\quad} & U_i \cong \widetilde{U}_i/G_i. \end{array}$$

是可交换的，其中 ψ_i 是由 G_i给出的投影映射。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ (ii) 每个 W_i 在以下意义下都是 X 的开复子轨形： W_i 具有轨形图表 $\{(W_{i,j}, H_{i,j}, \varphi_{i,j}, W_{i,j})\}_{j\in\mathbf{J}(i)}$（后缀的集合 $\mathbf{J}(i)$ 取决于 i），并且存在一个群 $G_{i,j}$，它包含 $H_{i,j}$ 作为正规子群，以及一个群的正合列

$$1 \longrightarrow H_{i,j} \longrightarrow G_{i,j} \longrightarrow G_i \longrightarrow 1,$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$使得 X 的轨形图由 $\{(W_{i,j}, G_{i,j}, \psi_i\circ\varphi_{i,j}, \psi_i\circ\varphi_{i,j}(W_{i,j}))\}_{i\in\mathbf{I}, j\in\mathbf{J}(i)}$ 给出。

轨形纤维化的典型例子将在 §6.2 中给出。注意集合

$$\{(\widetilde{W_i}, G_i, \psi_i, f^{-1}(U_i))\}_{i\in\mathbf{I}} \tag{42}$$

$\widetilde{\ }$ 通常不是 X 的轨形图表，因为 W_i 可能具有奇点。尽管如此，它在我们 §6.2 的讨论中仍然很重要。参见定义 4.7 (i)。

定义 4.7. (i) 我们称 *(42)* 为相对于轨形纤维化 f 的 X 的伪轨形图表: $X \to M$。

$\widetilde{\ }$(ii) 如果对每个 i，W_i 都是非奇异的，也就是说，如果集合 *(42)* 给出了 X 的轨形图表，那么我们称 $f: X \to M$ 为强轨形纤维化。

现在，定理（[54, 定理 6.11]）指出，Deligne-Mumford 紧化 M_g具有以下轨形图表$\overline{\ }$

$$\{(D_\epsilon(\sigma), W(\sigma), \varphi_\sigma, M_\epsilon(\sigma))\}_{\sigma\in\mathcal{C}_g/\Gamma_g}, \tag{43}$$

其中，σ 在曲线复形上模去映射类群 Γ_g的作用而变化。从现在起，由于这一轨形结构不同于 M_g的通常结构（参见 [9, 第 XII 章]），我们使用符号 M_g^{orb} 来指明它。在这一基$\overline{底}$结构上，我们有以下强$\overline{轨}$形纤维空间。

定理 4.8. 存在一个强轨形纤维化

$$\overline{\pi}: \overline{Y}_g^{orb} \longrightarrow \overline{M}_g^{orb} \tag{44}$$

使得 M_g^{orb} 的轨形图表由 *(43)*$\overline{\ }$给出，而 Y_g^{orb} 的轨形图表 $\overline{\ }$

$$\{(X_\epsilon(\sigma), W(\sigma), \psi_\sigma, Y_\epsilon(\sigma))\}_{\sigma\in\mathcal{C}_g/\Gamma_g} \tag{45}$$

由定理 *4.4* 给出。

证明 只需证明定义 4.7 的相容条件 (ii)。设 $[S] \in M_g$ 是一个同构类，并设 $\overline{\ }$ $p_i = [S, w_i]$, $w_i: \Sigma_g(\sigma) \longrightarrow S (i = 1, 2)$ 是两条带标记稳定曲线，使得对于 $\rho_i \le \sigma$，点 p_i 属于 $D_\epsilon(\rho_i)$。由定理 4.4,

存在 p_i 的一个开邻域 $U_i \subset D_\epsilon(\rho_i)$，使得 π_σ： $X_\epsilon(\rho_i) \longrightarrow D_\epsilon(\rho_i)$ 在 U_i 上的限制族 $\pi_i : X_i \longrightarrow U_i$ 与 S 的标准 Kuranishi 族重合。根据标准 Kuranishi 族在同构意义下的唯一性，经过适当缩小 U_i 后，存在双全纯映射 h： $X_1 \longrightarrow X_2$ 和 h： $U_1 \longrightarrow U_2$，满足 $h \circ \pi_1 = \pi_2 \circ h$。因此，所需的相容条件成立。

强轨形纤维化所需的其他性质见定理 4.4。特别地， Y_g^{orb} 的正规解析结构是通过拼接$Y_\epsilon(\sigma)$的正规解析结构得到的；这些结构由Cartan定理经由上述局部双全纯映射获得。 □

定义4.9。 我们称 π： $Y_g^{orb} \longrightarrow M_g^{orb}$为亏格为 g的黎曼曲面的万能退化族。

我们认为，族 π 在以下意义下具有泛性质：每个以亏格为 g 的黎曼曲面作为一般纤维的轨形纤维化，都可以从这个万能轨形纤维化拉回得到。然而，我们目前取得的成果相当有限；我们仅对纤维化复曲面证明了π 的泛性质，即仅对底空间维数为1的轨形纤维化证明了这一点。参见§7。关于“轨形拉回”的精确定义，请见下文。

定义4.10。 设 f： $X \to M$和 f'： $X' \to M'$为轨形纤维化，且 h： $M' \to M$为轨形映射。如果满足以下条件，我们称 f'为从经由得到的轨形拉回：

(i) 设 $\{(U_i, G_i, \varphi_i, U_i)\}_{i\in\mathbf{I}}$ 和 $\{(V_j, H_j, \phi_j, V_j)\}_{j\in\mathbf{J}}$ 分别是 M 和 M' 的轨形图。对于任意 $j \in J$，都存在某个取决于 j 的 $i \in I$ 以及一个全纯映射 $h_{ji} = h|_{V_j}$： $V_j \to U_i$。设 $\widetilde{h}_{ji}$： $\widetilde{V}_j \to \widetilde{U}_i$ 是 h_{ji} 的提升，且 $\varphi_i^{(j)} = \varphi_i|_{\widetilde{U}_i^{(j)}}$： $\widetilde{U}(j)_i = \widetilde{h}_{ji}(\widetilde{V}_j) \longrightarrow U_i^{(j)} = h_{ji}(V_j)$ 是到像的限制映射，即

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{V}_j & \xrightarrow{\widetilde{h}_{ji}} & \widetilde{U}_i^{(j)} \subset \widetilde{U}_i \\ \phi_j \downarrow & & \downarrow \varphi_i^{(j)} \\ \widetilde{V}_j/H_j \cong V_j & \xrightarrow{h_{ji}} & U_i^{(j)} \subset U_i \cong \widetilde{U}_i/G_i \end{array}$$

这是一个交换图。因此存在一个单射群同态

$$H_j \hookrightarrow G_i \tag{46}$$

使得 G_i 的子群 H_j 在 $\widetilde{U}_i^{(j)}$ 上全纯地作用。

(ii) 存在一个提升的轨形映射 k： $X' \to X$ of h, 即 $f \circ k = h \circ f'$, 它具有以下性质：设 $\{(W_i, G_i, \psi_i, f^{-1}(U_i))\}_{i\in\mathbf{I}}$ 和 $\{(T_j, H_j, \omega_j, (f')^{-1}(V_j))\}_{j\in\mathbf{J}}$ 分别为 X 和 X' 的伪轨形图表。设 $k_{ji} : T_j \to W_i$ 为 $k_{ji} = k|_{(f')^{-1}(V_j)} : (f')^{-1}(V_j) \longrightarrow f^{-1}(U_i)$ 的提升，且 $\psi_i^{(j)} = \psi_i|_{\widetilde{W}_i^{(j)}}$： $\widetilde{W}(j)_i = \widetilde{k}_{ji}(\widetilde{T}_j) =$

$\psi_i^{-1}(\widetilde{U}_i^{(j)}) \longrightarrow \widetilde{U}_{(j)i}$ 为限制映射。则群 H_j 相对作用于 $\psi_i^{(j)}$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{T}_j & \xrightarrow[\widetilde{k}_{ji}]{} & \widetilde{W}_i^{(j)} \subset \widetilde{W}_i \\ {\scriptstyle \omega_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_i^{(j)}} \\ \widetilde{V}_j & \xrightarrow[k_{ji}]{} & \widetilde{U}_i^{(j)} \subset \widetilde{U}_i \end{array}$$

$\widetilde{\ }$表示与 H_j的作用相容的纤维积，即T_j 同构于$\widetilde{W}_i^{(j} \times_{\widetilde{U}_i^{(j)}} \widetilde{V}_j^{)}$，使得对任意 $\alpha \in H_j$，都有 $\alpha \circ \widetilde{k}_{ji} = k_{ji} \circ \alpha$。

5 稳定曲线的自同构与 M_g^{orb} 上的循环等对称分层

我们从多个角度研究稳定曲线 S 的自同构 φ 及其相关的循环分歧覆盖。特别地，我们定义数值数据 Num(φ)，它由两类数据组成，即 S 对偶图上的作用，以及 S 的每个不可约分支自然具有的循环分歧覆盖的分歧数据系统。我们研究 M_g^{orb} 的边界图册上的轨迹 $T_\sigma^{[\varphi]}$，该轨迹由具有此类数值数据的自同构的带标记稳定曲线构成，并用较低属数的带点 Teichm¨uller 空间描述其结构（定理 5.18）。这一结果将 Harvey–Broughton 关于 T_g 和 M_g上等对称分层的定理推广到了循环群的边界情形。

在 §5.1 中，我们回顾黎曼曲面自同构的一些已知结果。首先，我们回顾 Nielsen [59] 和 Harvey[30], 提出的总赋值概念；该概念能精确提供与自同构相关的循环覆盖的分歧数据。其次，我们回顾循环群情形下，Harvey–Broughton 在 T_g 和 M_g （[31], [16]）上的等对称分层。

在 §5.2 中，作为对 Eichler迹公式的修正讨论，我们提出一种方法，用以确定带标记点的黎曼曲面自同构在对数二次微分形式空间上的表示的特征。

在增广 Teichm¨uller 理论的术语中， M_g^{orb} 的边界图表上的真边界 T（σ）应称为小 ***Teichm¨uller*** 空间。在 §5.3 中，我们用稳定曲线 Kuranishi 空间的上同调术语来阐释这一概念。

§5.4 的目的是自然地定义 Num(φ)。关键在于分析与 φ 相关的循环分歧覆盖 π_φ : $S \to W$ 。尽管底空间 W 是节点黎曼曲面， W 的对偶图并不是 S 的对偶图的简单商图。事实上，我们将图的概念推广到允许有开放边的图，并据此定义

所需的紧商图概念。结合这些图的数据以及 S 的每个分支自然具有的总价数系统，我们便得到了 Num(φ) 的定义。

在 §5.5 中，我们证明了 $T_\sigma^{[\varphi]}$上 $T(\sigma)$ 的等对称分层结构定理。$T_\sigma^{[\varphi]}$空间在局部由 W各正规化分支的 Kuranishi 空间描述，在整体上则由带标记的 Teichm¨uller 空间描述。对于黎曼曲面，我们的基本方法与 [73] 或 [57, §§4,5]中的方法密切相关。对于稳定曲线，Terasoma [71] 的开创性工作已通过使用层结构，证明了用我们的术语来说模空间 $M_g^{[\varphi]}$ 的连通性。

在 §5.6 中，我们定义了 $T_\sigma^{[\varphi]}$中一点附近的一组特殊局部坐标。这些坐标由 S的 Kuranishi 空间标准图上的 φ 作用的特征向量构成。Harris–Mumford [29, §1] 在对 M_g进行某种局部分析时，曾系统地以内在方式使用这类坐标。

5.1 黎曼曲面的自同构与等对称分层

本小节回顾黎曼曲面自同构、Teichm¨uller 空间 T_g 以及模空间 M_g ([31],[16]) 上的等对称分层的一些结果。

考虑一个 Fuchsian群 F，即 Aut($\mathcal{H}$) $\cong$PSL(2, $\mathbf{R}$) 的离散子群，其中 $\mathcal{H}$ 为上半平面，且 $\mathcal{H}/F$ 是紧致的。作为一个抽象群，F 由以下元素生成：$a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, x_1, \cdots, x_s$，并满足以下关系– –

$$x_1 \cdots x_s \prod_{i=1}^{\bar{g}} [a_i, b_i] = 1, \quad x_i^{\lambda_i} = 1 \ (1 \le i \le s).$$

有序集 (g; $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$) 称为 F的签名 。假设存在一个签名为 (g, –) 的 Fuchsian群 K（其中 – 表示 $\{x_1, \cdots\}$ 为空），并且有正合列

$$1 \to K \xrightarrow{i_*} F \xrightarrow{j_*} G_\varphi \to 1 \tag{47}$$

使得 $G_\varphi = \langle\varphi\rangle \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 是由 φ 和 i_*生成的、阶为 n 的循环群，K 是 F 的正规子群。在这种情况下，G_φ 的几何特征如下。亏格为 g 的黎曼曲面 $S \cong \mathcal{H}/K$ 具有一个阶为 n 的解析自同构 φ： $S \longrightarrow S$，使得相应的分歧覆盖 $\pi_\varphi : S \longrightarrow W = S/G_\varphi$ 具有以下性质：W 的亏格与 g 一致。令 $P_1, \cdots .P_s \in W$ 为 $\sim^{\pi_\varphi}$的分支点。则 λ_i ($1 \le i \le s$) 与点 $P_i \in \pi_\varphi^{-1}(P_i)$ 处的分歧指数一致。映射 φ^{n/λ_i} 固定 $\widetilde{P}_i$，并将 $\widetilde{P}_i$ 的圆盘邻域旋转角度 $2\pi\delta_i/\lambda_i$。令 $1 \le \sigma_i \le \lambda_i - 1$ 为满足 $\sigma_i\delta_i \equiv 1$ (模 λ_i) 的自然数。三元组 (m_i, λ_i, σ_i)

~称为 φ 在 P_i 处的赋值 （[59], [55, 定义 1.5]），有时记作 σ_i/λ_i。于是:

(a1)（Hurwitz公式）$2(g-1)/n = 2(g-1) + \sum_{i=1}^{s}(1-1/\lambda_i)$, （a2）（Nielsen [59, (4.6)]）$\sum_{i=1}^{s}\sigma_i/\lambda_i$ 是一个整数, （a3）（Wiman [74]）$n \leq 4g+2$, （a4）（Harvey [30, 定理4]）令 $M = \mathrm{lcm}(\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$。那么

^ ^
(a4-1) $\mathrm{lcm}(\lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots, \lambda_s) = M$对所有 i成立, 其中 λ_i 表示省略 λ_i。(a4-2) M 整除 n, 且若 $g=0$, 则 $M=n$。(a4-3) $s \neq 1$, 且若 $g=0$, 则 $s \geq 3$。(a4-4) 若2|M, 则被最大次幂整除的 λ_1、 $\cdots$、 λ_s的数量

of

2 整除 M 是偶数。

我们用符号形式将这些数据记作

$$\mathrm{TV}(\varphi) = \left(g, \overline{g}, n : \frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\sigma_s}{\lambda_s}\right), \ \mathrm{TV}^c(\varphi) = \left(g, \overline{g}, n : \left\{\frac{\delta_1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{\delta_s}{\lambda_s}\right\}\right) \tag{48}$$

并称 TV(φ)（分别地, TV^c(φ)）为 φ 的总赋值（分别地, 总余赋值）。注意, 总（余）价由 [31,Th.7, Lem.6] 中的（47）式的 j_* 确定。

注5.1。(i) 赋值由 ***Nielsen*** *[59]* 引入, 作为 Γ_g 中周期映射（即有限自同构）的唯一本质共轭不变量。通过标准论证, 或作为 ***Kerchoff*** *[45]* 的推论, 周期映射可实现为 Σ_g 上某种复结构的解析自同构。因此, 总赋值可视为 Γ_g 中周期映射和解析自同构共同的不变量。

(ii) 即使 $g=0$,1, 有限自同构 φ 满足条件 $(\mathrm{a1}) \sim (\mathrm{a3})$, 我们在这些情况下也使用相同的术语（*48*）。
(iii) 关于$\mathrm{TV}(\varphi)$ 在 $g=2$ 的情形下的分类, 参见例如 *[11,* 第*199]*页。

如 [31], 所述, (47) 中包含映射 i_* 的选取决定了 Teichmüller 标记, 而满射 j_* 的选取决定了 G_φ 的生成元, 进而决定了数值数据 (a2)。

条件 (a1) $\sim$ (a4) 不仅是必要条件, 也是自同构存在的充分条件。Harvey 和 Broughton 从模空间理论观点对此进行了广泛讨论, 具体如下。我们固定 $g \geq 2$的数值数据 (48), 并考察 T_g （或 M_g）中具有此类自同构的黎曼曲面的轨迹。注意, 在以下结果 (I) 和 (II) 中, $g=2$和 φ 为双曲 involution 的情形作为例外情形予以排除:

(I)（[31, 定理2及第392], [16, 页5]命题2中的（6））设 $\varphi: S \to S$ 是Γ_g中的一个周期映射。设 T_g^φ为 T_g的子集, 由满足以下条件的点 $p = [S, f] \in T_g$组成: 这些点被[31, 的作用固定

。我们将两个周期映射 φ 和 ψ 定义为等价，当且仅当它们的总价数相同：TV(φ) = TV(ψ)。正如我们在注5.1 (i)中所述，Nielsen [59]证明，这等价于说 φ 和 ψ 共轭。令 $[\varphi]$ 表示 φ 所属的等价类，并将 $T_g^{[\varphi]}$定义为

$$T_g^{[\varphi]} = \bigcup_{\psi \in [\varphi]} T_g^{\psi}.$$

回顾：$\pi_\varphi : S \to W = S/G_\varphi$ 是与阶为 n的解析作用 $\varphi : S \to S$相关联的分歧覆盖，而 g是 W的亏格。 $P_1, \cdots, P_s \in W$是π_φ的分歧点。于是， T_g^φ与亏格为 g的s点带标记的黎曼曲面的 Teichmüller 空间$T_{g,s}$ 在实解析意义下同构。由于 T_g^φ是$T_g^{[\varphi]}$的一个连通分支（$T_g^{[\varphi]}$）$^{(0)}$，我们有

$$T_g^\varphi \cong (T_g^{[\varphi]})^{(0)} \cong T_{\bar{g},s} \quad \text{(real analytically)}.$$

$T_g^{[\varphi]}$的每个连通分支都是某个 $\psi \in [\varphi]$的 T_g^ψ，对 T_g^ψ也可以作同样的陈述。因此，空间 $T_g^{[\varphi]}$是可数个（$3g-3+s$）维复流形的并，且其中每一个都与（$T_g^{[\varphi]}$）$^{(0)}$在实解析意义下同构。

（II）（[16, Th.2.2]）同构类的轨迹 $M_g^{[\varphi]}$由那些具有自同构且其总价数与TV（φ）相同的黎曼曲面构成，它是 M_g的一个闭不可约代数子簇。

称集合 $T_g^{[\varphi]}$和 $M_g^{[\varphi]}$分别为 T_g和 M_g的 $[\varphi]$的等对称分层。注意，在被排除的情形下， $g = 2$ 和 φ 是双曲 involution，我们有 $T_2^{[\varphi]} = T_2$和 $M_2^{[\varphi]} = M_2$。

注 5.2。研究 T_g上的等对称分层时，*Kuribayashi*方法（*[50]*）利用不变二次微分，这一点十分重要。近年来，*Takamura*（*[67]*）以及 *Hirakawa* 和 *Takamura*（*[35]*）发展了这类论证，并提出了一种方法，可对黎曼曲面上各种群作用的分层进行细致分析。

5.2 对数自同构的对数二次表示

这里我们讨论带标记点的黎曼曲面的自同构到对数二次微分的表示，以备后用。

令 $\varphi : S \longrightarrow S$ 为亏格 $g \geq 0$ 的黎曼曲面的一个自同构，其给定的总（余）价为(48)，并令$\pi_\varphi : S \longrightarrow W = S/G_\varphi$ 为相应的循环分歧覆盖（另见注5.1 (ii)）。我们考虑向量空间

$$V = H^0(S, 2K_S + \sum_{i=1}^{s'} \pi_\varphi^{-1}(P_i) + \sum_{i=1}^{t} \pi_\varphi^{-1}(P_{s+i})) \tag{49}$$

其中 $\{P_1,\cdots,P_{s'}\}$ 是分歧点集合 $\{P_1,\cdots,P_{s'},P_{s'+1},\ \cdots,\ P_s\}$ $(s'\le s)$的一个子集（可以为空），对应于π_φ；而 $\{P_{s+1},\cdots,P_{s+t}\}$ 是π_φ 的非分支点集合的一个子集（该集合意在表示可能的极点，也可以为空）。我们假设

$$2\overline{g}-2+s+t>0. \tag{50}$$

元素 $v\in V$ 被视为定义在 S 上的对数二次微分，其极点至多位于 $\sum_{i=1}^{s'}\pi_\varphi^{-1}(P_i)$ $+\sum_{i=1}^{t}\pi_\varphi^{-1}(P_{s+i})$。由于 φ 在 π_φ 的每个纤维上：$S\to W$作为点的置换作用，φ 自然地在微分形式 v 上作用为

$$\varphi(v)=v\circ\varphi^{-1}\in V \tag{51}$$

（类似于 [25, 第269]页），而 φ 诱导出 V的线性自同构。我们称之为到对数二次型 V的表示。文献 [25, §V2] 中讨论的全纯微分形式表示的基本事实，很容易推广到这种对数形式表示。例如，其特征值是 n次单位根。

以下命题的证明是对 I. Guerrero 在 [25, 第274–277]页所写论证的稍作修改。对于有理数 x，我们用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，用 $\{x\}=x-[x]$ 表示其小数部分。我们还使用符号$\mathbf{e}(x)=e^{2\pi ix}$。

命题 5.3. 设 $\varphi:S\longrightarrow S$ 是一个阶为 n 的黎曼曲面S 的自同构，且其总（余）价为 *(48)*。那么，在假设 *(50)* 下，由 *(51)* 定义的 V上作用 φ对应于特征值$\mathbf{e}(\alpha/n)$ ($0\le\alpha\le n-1$) 的特征子空间维数如下。

$$\begin{aligned}&h^0\left(S,2K_S+\sum_{i=1}^{s'}\pi_\varphi^{-1}(P_i)+\sum_{i=1}^{t}\pi_\varphi^{-1}(P_{s+i})\right)_{\mathbf{e}(\alpha/n)}\\&=3\overline{g}-3+2s+t-\sum_{i=1}^{s'}\left(\left\{\frac{-\alpha\sigma_i-1}{\lambda_i}\right\}+\frac{1}{\lambda_i}\right)-\sum_{i=s'+1}^{s}\left(\left\{\frac{-\alpha\sigma_i-2}{\lambda_i}\right\}+\frac{2}{\lambda_i}\right).\end{aligned}$$

证明 若 $1\le i\le s'$ 或 $s+1\le i\le s+t$，则令 $r_i=1$。若 $s'+1\le i\le s$，则令 $r_i=0$。为简便起见，我们将特征值$\mathbf{e}(\alpha/n)$对应的特征子空间记为 $V_\alpha=H^0(S,$ $2K_S+\sum_{i=1}^{s+t}r_i\pi_\varphi^{-1}(P_i))_{\mathbf{e}(\alpha/n)}$。此外，令

$$\lambda_i=1,\delta_i=\sigma_i=0,\quad \text{for } s+1\le i\le s+t. \tag{52}$$

对于 $1\le i\le s+t$，我们将纤维记为

$$\pi_\varphi^{-1}(P_i)=\coprod_{1\le j\le n/\lambda_i}P_j^{(i)}.$$

假设 $V_\alpha \neq \emptyset$，我们固定一个元素 $v_0 \in V_\alpha$。那么对于任意 $v \in V_\alpha$，元素 v/v_0是 φ-不变的，并且它是 $W = S/G_\varphi$上的一个亚纯函数。因此，存在一个除子 D_α 在 W 上，使得

$$V_\alpha \cong H^0(W, D_\alpha). \tag{53}$$

我们可以明确地确定 D_α。利用 $P_j^{(i)}$ 附近的局部坐标 z，将 v 的洛朗展开写作 $v = \sum_{k\geq 0} A_k z^{k-r_i} dz^2$，其中 $A_k \in \mathbf{C}$。由于此处的映射φ^{-n/λ_i} 写作 $z \mapsto \mathbf{e}(-\delta_i/\lambda_i)z$，因此我们有

$$(\varphi^{n/\lambda_i})^* v = \sum_{k\geq 0} A_k \mathbf{e}\left(\frac{-\delta_i(k+2-r_i)}{\lambda_i}\right) z^{k-r_i} dz^2$$

根据定义，这与 $\sum_{k\geq 0}\mathbf{e}(\alpha/\lambda_i)A_k z^{k-r_i}dz^2$ 一致。因此，对于 $-\delta_i(k+2-r_i)$，有 $A_k = 0$ $\neq \alpha$ （模 λ_i），即 $k \not\equiv -\alpha\sigma_i - 2 + r_i$ （模 λ_i）。由此可得

$$v = \sum_{k\in \mathbf{Z}_K} A_k z^{k-r_i} dz^2, \quad \text{where } \mathbf{Z}_K = \{k = \lambda_i a - \alpha\sigma_i - 2 + r_i \geq 0 \mid \exists a \in \mathbf{Z}\}.$$

令 b_i 为 v_0 在 $P_j^{(i)}$ 处的消失阶，它显然与 j无关。~那么存在某个 $b_i \in \mathbf{Z}$ 使得

$$b_i = \lambda_i \widetilde{b}_i - \alpha\sigma_i - 2 + r_i \geq 0. \tag{54}$$

令 $Q_1, \cdots, Q_u$为 v_0的零点（除 $P_1, \cdots, P_{s+t}$外）经 π_φ映射所得的像。设 $\pi_\varphi^{-1}(Q_i) = \coprod_{1\leq j\leq n} Q_j^{(i)}$。令 β_i 为 v_0 在 $Q_j^{(i)}$ 处的消失阶。对于定义在 ~ ~ ~ ~W上的亚纯函数 $\widetilde{h}$，元素 $(h\circ\pi_\varphi)\cdot v_0$属于 V_α，当且仅当 h 满足 $\mathrm{ord}_{P_i} h \geq -b_i/\lambda_i$，$\mathrm{ord}_{Q_i} h \geq -\beta_i$，并且在 P_i 及 Q_i之外全纯。由于 $-\alpha\sigma_i - 2 + r_i < 0$，满足这些条件的整除子应为 $D_\alpha = \sum_{i=1}^{s+t} (\widetilde{b}_i + [(-\alpha\sigma_i - 2 + r_i)/\lambda_i])P_i + \sum_{i=1}^{u} \beta_i Q_i$。特别地，

$$\deg D_\alpha = \sum_{i=1}^{s+t} \left(\widetilde{b}_i + \left[\frac{-\alpha\sigma_i - 2 + r_i}{\lambda_i}\right]\right) + \sum_{i=1}^{u} \beta_i. \tag{55}$$

我们将 $\deg D_\alpha$ 的表达式 (55) 改写为不依赖于 v_0 的选择。首先显然有 $\deg v_0 = \sum_{i=1}^{s+t} (n/\lambda_i) b_i + n\sum_{i=1}^{u} \beta_i$。另一方面，由于 v_0 属于 V_α，我们有 $\deg v_0 = \deg \left(2K_S + \sum_{i=1}^{s+t} r_i \pi_\varphi^{-1}(P_i)\right) = 4(g-1) + \sum_{i=1}^{s+t} (n/\lambda_i) r_i$。因此，由 (54) 可得

$$\frac{\deg v_0}{n} = \sum_{i=1}^{s+t} \left(\widetilde{b}_i + \frac{-\alpha\sigma_i - 2 + r_i}{\lambda_i}\right) + \sum_{i=1}^{t} \beta_i = \frac{4(g-1)}{n} + \sum_{i=1}^{s+t} \frac{r_i}{\lambda_i}. \tag{56}$$

覆盖π_φ 的黎曼–赫尔维茨公式表明

$$\frac{2g-2}{n} = 2\overline{g} - 2 + \sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right). \tag{57}$$

因此，由（52）、（55）、（56）和（57）可得

$$\begin{aligned}\deg D_\alpha &= \sum_{i=1}^{s+t}\left(\widetilde{b}_i+\frac{-\alpha\sigma_i-2+r_i}{\lambda_i}\right)+\sum_{i=1}^{t}\beta_i-\sum_{i=1}^{s+t}\left\{\frac{-\alpha\sigma_i-2+r_i}{\lambda_i}\right\}\\ &= 4\overline{g}-4+2\sum_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{\lambda_i}\right)+\sum_{i=1}^{s+t}\left(\frac{r_i}{\lambda_i}-\left\{\frac{-\alpha\sigma_i-2+r_i}{\lambda_i}\right\}\right)\\ &= 4\overline{g}-4+2s+t-\sum_{i=1}^{s}\left(\left\{\frac{-\alpha\sigma_i-2+r_i}{\lambda_i}\right\}+\frac{2-r_i}{\lambda_i}\right). \end{aligned} \tag{58}$$

由 (50) 和 (58)，我们有 $\deg(K_W\otimes D_\alpha^{-1})\le 2-2g=s-t<0$。因此

$$H^0(W,K_W\otimes D_\alpha^{-1})=0. \tag{59}$$

由黎曼–罗赫公式、塞尔对偶以及 (53)、(58)、(59)，我们有

$$\dim V_\alpha=\dim H^0(W,D_\alpha)=\deg D_\alpha-\overline{g}+1=3\overline{g}-3+2s+t-\sum_{i=1}^{s}\left(\left\{\frac{-\alpha\sigma_i-2+r_i}{\lambda_i}\right\}+\frac{2-r_i}{\lambda_i}\right).$$

这个等式与所需的等式一致。 □

我们将 $(S,\ \mathbf{P})$ 视为一个 k' 点带标记点的黎曼曲面，其中 $\mathbf{P}=\sum_{i=1}^{s'}\pi_\varphi^{-1}(P_i)+\sum_{i=1}^{t}\pi_\varphi^{-1}(P_{s+i})$ 在 (49) 中，且 $k'=\sharp(\mathbf{P})$（基数），并将 φ 对 $(3g-3+k')$ 维向量空间 $V=H^0(S,\ 2K_S+\mathbf{P})$ 的作用的特征值集合记为

$$\left\{\mathbf{e}\left(\frac{\theta_1}{n}\right),\mathbf{e}\left(\frac{\theta_2}{n}\right),\cdots,\mathbf{e}\left(\frac{\theta_{3g-3+k'}}{n}\right)\right\}\quad(0\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_{3g-3+k'}\le n-1). \tag{60}$$

这里每个特征值 nvalue 按其特征子空间的维数计数。于是 :

定义 5.4. 利用 *(60)*，我们将带标记点的黎曼曲面 $(S,\mathbf{P})$ 上自同构 φ 的对数二次特征的有序集定义为

$$\mathrm{Ch}_\varphi H^0(S,2K_S+\mathbf{P})=\left\{\frac{\theta_1}{n},\frac{\theta_2}{n},\cdots,\frac{\theta_{3g-3+k'}}{n}\right\}. \tag{61}$$

我们还将 V 的特征基 $\{v_1.\cdots,v_{3g-3+k'}\}$ 定义为由 $\mathrm{Ch}_\varphi H^0(S,2K_S+\mathbf{P})$ 各自的特征向量组成的基，即

$$\varphi^*(v_i)=\mathbf{e}\left(\frac{\theta_i}{n}\right)v_i\quad(1\le i\le 3g-3+k'). \tag{62}$$

备注 5.5。 由于某个特征值对应的特征子空间的维数可能严格大于 1，因此一般而言，V 的特征基并不唯一。

例5.6。 设 $\varphi:(S,P)\to(S,P)$ 是一个带一个标记点、亏格为 3 的黎曼曲面上的一个 7 阶自同构，其总赋值为$(\mathbf{6/7}+6/7+2/7,\bar{g}=0)$，其中 $\mathbf{6/7}$ 附着于 P。由于 $s=3$、$s'=1$ 和 $t=0$，由命题*5.3*可得

$$h^0\left(C,2K_C+P\right)_{\mathbf{e}(\nu/7)}=3-\left(\left\{\frac{-6\nu-1}{7}\right\}+\frac{1}{7}\right)-\left(\left\{\frac{-2\nu-2}{7}\right\}+\frac{2}{7}\right)-\left(\left\{\frac{-6\nu-2}{7}\right\}+\frac{2}{7}\right)$$
$$=0,1,2,1,1,1,1\quad(\nu=0,1,2,3,4,5,6,\ \text{respectively}).$$

因此 $\mathrm{Ch}_\varphi H^0(S,2K_S+P)=\{1/7,2/7,2/7,3/7,4/7,5/7,6/7\}$。

其他例子请参见例 6.15 或 [29, §1]。

5.3 M_g^{orb} 的轨形图中的小 Teichm¨uller 空间

在本小节中，我们使用 Kuranishi 族的语言，结合 §3.1 中的结果，诠释增广 Teichm¨uller 理论中的小 Teichm¨uller 空间（参见 [37, §7]）。

我们沿用 §4.1 的记号。最大余维分层 $T(\sigma)\subset D_\epsilon(\sigma)\setminus T_g$ 可由扩展 Fenchel–Nielsen 坐标 (26) 表示为

$$\ell_1=\cdots=\ell_k=0,\ \ell_j>0\ \ (k+1\le j\le 3g-3).$$

空间 $T(\sigma)$ 称为*the little Teichm¨uller space for* σ，它在复解析意义下同构于带标记点的黎曼曲面对应的低维 Teichm¨uller 空间的乘积（参见 [37, p.289]）。这里我们先回顾 $T(\sigma)$ 的实解析结构，然后从 §3.1 的角度说明其复解析结构。

令 $\Sigma_g(\sigma)=\sum_{i=1}^r R_i$ 为源稳定曲线的不可约分解，令 $\hat{}\,\hat{}(R_i,\mathbf{P}_i)$ $(1\le i\le r)$ 为按照 §2.1 对 $\hat{}\,\hat{}\Sigma_g(\sigma)$ 进行正规化后得到的带标记点的黎曼曲面。令 g_i 为 R_i 的亏格，$k_i=\sharp(\mathbf{P}_i)$ 为点的个数。根据正合列 (20) 中向量空间维数的计算，我们有

$$\sum_{i=1}^r(3g_i-3+k_i)=3g-3-k.$$

现在，曲线系 $\tilde{\sigma}\setminus\sigma=\langle C_{k+1},\cdots,C_{3g-3}\rangle$ 中的每个元素都可以通过正规化映射视为这些带标记点的黎曼曲面中唯一一个曲面上的简单闭曲线。令

$$\{k+1,\cdots,3g-3\}=\coprod_{i=1}^r\mathbf{I}_i,\quad\sharp(\mathbf{I}_i)=3g_i-3+k_i$$

是后缀的分解，使得 $\{C_{i_j}\}_{i_j\in\mathbf{I}_i}$ 是 $(R_i,\mathbf{P}_i)$ 上一组极大简单闭曲线，它诱导出该曲面的裤子分解。令 $[S,w]$ 为

一个带 σ 个标记点的稳定曲线，其标记为 $w:\Sigma_g(\sigma)\longrightarrow S$，并令 $S=\sum_{i=1}^r S_i$ 为其不可约分解；通过正规化得到的带标记点的黎曼曲面为 $(S_i,\mathbf{P}_i)$ $(1\leq i\leq r)$。然后，w 在每个分支上的限制都通过正规化提升为一个 Teichm¨uller 标记

$$w_i:(\hat{R}_i,\hat{\mathbf{P}}_i)\longrightarrow(\hat{S}_i,\mathbf{P}_i). \tag{63}$$

于是，Fenchel–Nielsen 坐标 $(l_{i_j}(p)\,\tau_{i_j}(p))\in(\mathbf{R}_{>0})^{3g_i-3+k_i}\times\mathbf{R}^{3g_i-3+k_i}$ 便为带标记 Teichmüller 空间中点 $p=[(S_i,\mathbf{P}_i)\ w_i]$ 定义。它们分别是 $w_i(C_{i_j})$ 的同伦类 $(i_j\in\mathbf{I}_i)$ 中唯一测地线的双曲长度 $l_{i_j}(p)$，以及沿 C_{i_j} 的扭转参数 $\tau_{i_j}(p)$。于是，实解析同构 $T(\sigma)\cong\prod_{1\leq i\leq r}T_{g_i,k_i}$ 通过这些 Fenchel–Nielsen 坐标诱导得到：

$$\{\ell_i([S,w]),\tau_i([S,w])\}_{k+1\leq i\leq 3g-3}\longmapsto\prod_{1\leq i\leq r}\{(l_{i_j}([(\hat{S}_i,\mathbf{P}_i),w_i]),\tau_{i_j}([(\hat{S}_i,\mathbf{P}_i),w_i])\}_{i_j\in\mathbf{I}_i}.$$

在 $T(\sigma)$ 的这一实结构上，复结构描述如下。通过缩小标准 Kuranishi 族的底空间，由定理 4.4 和 (16) 可知，存在复坐标粘合 $D_\epsilon(\sigma)=\cup_{\alpha\in\mathbf{I}}B_\alpha$，，其中每个 $B_\alpha:=B_{S_\alpha}$ 都是一个标准 Kuranishi 族的基空间，对应于一个 σ-标记的稳定曲线 $[S_\alpha,w_\alpha]$，该基空间嵌入 $\mathrm{Ext}^1{}_{\mathcal{O}_{S_\alpha}}(\Omega^1_{S_\alpha},\mathcal{O}_{S_\alpha})$ 中。然后，根据 (17)、(18) 以及 §3.1 中的性质 (I)，$T(\sigma)\cap B_\alpha$ 同构于 $\mathrm{H}^1(S_\alpha,Hom^{\mathcal{O}_{S_\alpha}}(\Omega^1_{S_\alpha},\mathcal{O}_{S_\alpha}))\cap B_\alpha$。

设 $S_\alpha=\sum_{i=1}^r S_{\alpha,i}$ 是不可约分解，而 $(\hat{}S_{\alpha,i},\mathrm{P}_{\alpha,i})$ 是 $S_{\alpha,i}$ 经正规化得到的带标记点的黎曼曲面。于是，$T(\sigma)$ 的直因子 T_{g_i,k_i} 来自 (18) 中 $\mathrm{H}^1(S_\alpha,\mathrm{Hom}^{\mathcal{O}_{S_\alpha}}(\Omega^1_{S_\alpha},\mathcal{O}_{S_\alpha}))$ 的直因子 $\mathrm{H}^1(\hat{}S_{\alpha,i},T_{\hat{S}_{\alpha,i}}(-\mathrm{P}_{\alpha,i}))$；也就是说，根据 §3.1 中的性质 (I)，$T_{g_i,k_i}\cap B_\alpha$ 同构于 $\mathrm{H}^1(\hat{}S_{\alpha,i},T\hat{}_{S_{\alpha,i}}(-\mathrm{P}_{\alpha,i}))\cap B_\alpha\cong\mathrm{H}^0(\hat{}S_{\alpha,i},2K\hat{}_{S_{\alpha,i}}+\mathrm{P}_{\alpha,i})^*\cap B_\alpha$。根据第 XV 章 §2] 中的论证，这些空间全局良好粘合。因此：

引理 5.7.用上述记号，小 *Te- ichm¨uller* 空间 $T(\sigma)$ 的复解析结构由以下坐标粘合描述

$$T(\sigma)=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{I}}\left(\mathrm{H}^1(S_\alpha,Hom_{\mathcal{O}_{S_\alpha}}(\Omega^1_{S_\alpha},\mathcal{O}_{S_\alpha}))\cap B_\alpha\right),\quad T(\sigma)\cong\prod_{1\leq i\leq r}T_{g_i,k_i}\ (\text{analytically}),$$
$$T_{g_i,k_i}=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{I}}\left(\mathrm{H}^1(\hat{S}_{\alpha,i},T_{\hat{S}_{\alpha,i}}(-\mathbf{P}_{\alpha,i}))\cap B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{I}}\left(\mathrm{H}^0(\hat{S}_{\alpha,i},2K_{\hat{S}_{\alpha,i}}+\mathbf{P}_{\alpha,i})^*\cap B_\alpha\right).$$

5.4 稳定曲线的自同构与循环分歧覆盖

在本小节中，我们研究稳定曲线的自同构，以及从稳定曲线到节点黎曼曲面的相应循环分歧覆盖。

我们从讨论图及其自同构开始。图 $\mathcal{G}=\{v_i,\vec{e}_j\}_{1\le i\le r,1\le j\le k}$ 是嵌入欧几里得三维空间 E^3 中的一维有限定向“开”胞腔复形，其含义如下。零胞腔 v_i 是一个顶点。一胞腔 $\vec{e}_j$ 是有向边，有以下两种类型。第一种是普通边$\vec{e}_j=\vec{e}_j(v_{h_1(j)}\ v_{h_2(j)})$，它沿此方向将顶点 $v_{h_1(j)}$与顶点 $v_{h_2(j)}$连接起来。（注意，$v_{h_1(j)}=v_{h_2(j)}$可能出现。这种情况对应于一个不可约分支的自交。）第二种是开放边，它从顶点$v_{h_1(j)}$延伸出来，其端点是 E^3 中的一点，且该点不属于顶点集合；我们用符号 $\vec{e}_j=\vec{e}_j(v_{h_1(j)}\ *)$表示它。无向边 $|\vec{e}_j|$ 是忽略 $\vec{e}_j$的定向后得到的通常意义上的边。如果 $\mathcal{G}$ 的所有有向边都是普通边，我们就称 $\mathcal{G}$ 为紧图。

我们定义 $\mathcal{G}$的收缩映射

$$\mathrm{cont}:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}^c$$

为在开放边补集上的恒等映射，并将任意开放边 $\vec{e}_j(v_{h_1(j)}\ *)$ 收缩到顶点 $v_{h_1(j)}$。于是，$\mathcal{G}^c$ 是一个紧图。

紧图 $\mathcal{G}$ 的自同构 $\bar{\varphi}:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 是指一个关于欧几里得拓扑的同胚 $\bar{\varphi}$，它保持顶点集和无向边集不变，且对于某个 n，$\bar{\varphi}^n$ 是恒等映射。满足上述性质的最小自然数 n 称为 $\bar{\varphi}$的阶 。

对于一个顶点 v_i（分别地，对于一条边 $\vec{e}_j$），存在满足 $\bar{\varphi}^{m(v_i)}(v_i)=v_i$（分别地，$\bar{\varphi}^{m(\vec{e}_j)}(\vec{e}_j)=\vec{e}_j$）的最小自然数 $m(v_i)$（分别地，$m(\vec{e}_j)$）。如果 $m(\vec{e}_j)$ 是偶数，且 $\bar{\varphi}^{m(\vec{e}_j)/2}$ 通过反转 $|\vec{e}_j|$ 的定向来稳定 $|\vec{e}_j|$，即 $\bar{\varphi}^{m(\vec{e}_j)/2}(\vec{e}_j)=-\vec{e}_j$，那么 $\vec{e}_j$ 称为 $\bar{\varphi}$的一条双向边 。否则，$\vec{e}_j$ 称为一条非双向边。令$\mathbf{V}$, $\mathbf{NE}$, $\mathbf{AE}$ 分别表示 $\bar{\varphi}$的$\mathcal{G}$ 的顶点集、非双向边集和双向边集。令

$$\mathbf{V}=\coprod_{1\le i\le\bar{r}}\ \coprod_{0\le\ell\le m(v_i)-1}\bar{\varphi}^{\ell}(v_i),$$

$$\mathbf{NE}=\coprod_{1\le j\le\bar{k}_1}\ \coprod_{0\le\ell\le m(\vec{e}_j)-1}\bar{\varphi}^{\ell}(\vec{e}_j),\quad \mathbf{AE}=\coprod_{\bar{k}_1+1\le j\le\bar{k}_1+\bar{k}_2}\ \coprod_{0\le\ell\le m(\vec{e}_j)/2-1}\bar{\varphi}^{\ell}(\vec{e}_j)$$

是 $\bar{\varphi}$ 的轨道分解。这里假设 $\{v_1,\cdots,v_r\}$、$\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_{k_1}\}$ 和 $\{\vec{e}_{k_1+1},\cdots,\vec{e}_{k_1+k_2}\}$ 分别属于 $\mathbf{V}$、$\mathbf{NE}$ 和 $\mathbf{AE}$ 中互不相同的轨道。我们有 $r=\sum_{1\le i\le r}m(v_i)$，$k=\sum_{1\le j\le k_1}m(\vec{e}_j)+\sum_{k_1+1\le j\le k_1+\bar{k}_2}m(\vec{e}_j)/2$。

令 $G_{\bar{\varphi}}\cong\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 为由 $\bar{\varphi}$ 生成的循环群。

定义 5.8。(i) $\mathcal{G}$ 的商映射和商图由以下两个条件定义

$$\pi_{\bar{\varphi}}:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{W}:=\mathcal{G}/G_{\bar{\varphi}}$$

由以下两个条件定义；
(ia) 顶点和边由 $\mathcal{W}=\{v_i^\sharp,(\vec{e}_j)^\sharp\}_{1\le i\le r,1\le j\le k_1+k_2}$ 给出，因此 $\pi_{\bar\varphi}(\bar\varphi^\ell(v_i))=v_i^\sharp$ 和 $\pi_{\bar\varphi}(\bar\varphi^\ell(\vec{e}_j))=(\vec{e}_j)^\sharp$ 对任意 i、j、ℓ 均成立。
(ib) 假设 $\vec{e}_j=\vec{e}_j(v_{h_1(j)}\ v_{h_2(j)})$。若 $1\le j\le k_1$，则 $(\vec{e}_j)^\sharp$ 是由 $(\vec{e}_j)^\sharp(\pi_{\bar\varphi}(v_{h_1(j)})\ \pi_{\bar\varphi}(v_{h_2(j)}))$ 给出的普通边。若 $k_1+1\le\bar{j}\le k_1+k_2$，则 $(\vec{e}_j)^\sharp$ 是由下式给出的开放边

$$(\vec{e}_j)^\sharp(\pi_{\bar\varphi}(v_{h_1(j)}),*). \tag{64}$$

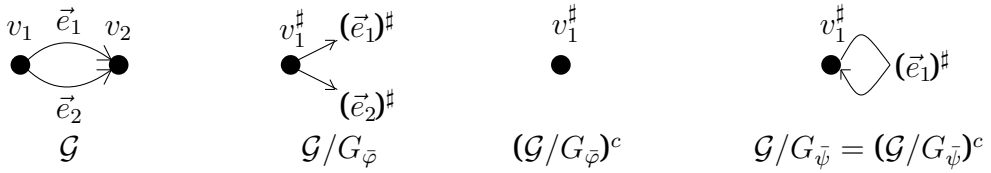
（ii）紧　　致商映射和 $\mathcal{G}$ 在 $G_{\bar\varphi}$ 作用下的紧商图定义如下

$$\pi_{\bar\varphi}^c=\mathrm{cont}\circ\pi_{\bar\varphi}:\mathcal{G}\longrightarrow(\mathcal{W})^c=(\mathcal{G}/G_{\bar\varphi})^c.$$

根据（64），我们可以写成（$\vec{e}_j$）$^\sharp$（$\pi'_{\bar\varphi}$（$v_{h_2(j)}$）$*$），因为在这种情况下，$\vec{e}_j$ 是双向边，而$v_{h_1(j)}$ 和$v_{h_2(j)}$ 位于同一轨道上。

例*5.9*。我们考虑紧图 $\mathcal{G}=\{v_i,\vec{e}_j\ (v_1,v_2)\ \}_{1\le i,j\le 2}$。设 $\bar\varphi,\psi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ 是两个阶为*2*的自同构，定义如下。第一个 $\bar\varphi$ 交换 v_1 和 v_2，并通过反转它们的定向来稳定 $|\vec{e}_j|$。使用置换的常用记号，$\bar\varphi$ 写作（v_1,v_2）、（$\vec{e}_1,-\vec{e}_1$）、（$\vec{e}_2,-\vec{e}_2$）。第二个 ψ 交换 v_1 和 v_2，也交换 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$，即 ψ 写作（v_1,v_2）、（$\vec{e}_1,-\vec{e}_2$）。

于是，$\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 对于 $\bar\varphi$ 是双向（分别对于 ψ是非双向），并且我们有 $\mathcal{G}/G_{\bar\varphi}=\{v_1^\sharp,(\vec{e}_1)^\sharp(v_1^\sharp,*),(\vec{e}_2)^\sharp(v_1^\sharp,*)\}$, $(\mathcal{G}/G_{\bar\varphi})^c=\{v_1^\sharp\}$(空边)，$\mathcal{G}/G_{\bar\psi}=(\mathcal{G}/G_{\bar\psi})^c=\{v_1^\sharp,(\vec{e}_1)^\sharp(v_1^\sharp,v_1^\sharp)\}$，如图*II*所示。



（图II）例5.9中的商图和紧商图

现在设 S 是亏格为 $g\ge 2$的稳定曲线，其不可约分解为$S=\sum_{i=1}^r S_i$，且设$\mathbf{P}=\{P_1,\cdots,P_k\}$是其节点集。根据这一配置，可定义紧致图 $\mathrm{rg}(S)=\{v_{S_i},\vec{e}_{P_j}\}_{1\le i\le r,\ 1\le j\le k}$如下：每个不可约分支$S_i$ 对应一个顶点 v_{S_i}。如果一个节点 P_j 是不可约分支$S_{h_1(j)}$和$S_{h_2(j)}$的交点，那么它就表示为一条普通边$\vec{e}_{P_j}=\vec{e}_{P_j}(v_{S_{h_1(j)}},v_{S_{h_2(j)}})$（定向任意）。我们称 $\mathrm{rg}(S)$ 为 S的约化对偶图。

设 φ：$S\to S$ 是一个阶为 N 的解析自同构，且 $G=\langle\varphi\rangle\cong\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$是由 φ 生成的 $\mathrm{Aut}(S)$ 的子群。于是 φ 显然诱导出自同构$\varphi_{\mathrm{rg}(S)}:\mathrm{rg}(S)\to\mathrm{rg}(S)$。我们将为 $(\mathrm{rg}(S)\ \varphi_{\mathrm{rg}(S)})$ 定义的术语转用于 $(S,\ \varphi)$。也就是说，

$m(S_i)$ 和 $m(P_j)$ 是满足 $\varphi^{m(S_i)}(S_i) = S_i$ 以及 $\varphi^{m(P_j)}(P_j) = P_j$ 的最小自然数；并且，对于 φ ，若 $\vec{e}_{P_j}$ 是 $\varphi_{\mathrm{rg}(S)}$ 的双向边（分别为非双向边），则 P_j 是一个双向节点（分别为非双向节点）。S 关于 φ 的轨道不可约分解 定义为

$$S = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{j=0}^{m(S_i)-1} \varphi^j(S_i), \tag{65}$$

其中每个 S_i 对于 $1 \le i \le r$ 都有互不相同的轨道，且 $r = \sum_{i=1}^{r} \bar{m}(S_i)$。

令 $\varphi^j(S_i)$ 是正规化映射 $\sum_{j=1}^{m(S_i)}$ 而 $\varphi_{i,\,j} : \widehat{\varphi^j\ S_i}() \longrightarrow \widehat{\varphi^j\ S_i}()$ 是 $\varphi^{m(S_i)}|_{\varphi^j(S_i)} : \varphi^j(S_i) \longrightarrow \varphi^j(S_i)$ 的提升。由于 $\widehat{\varphi^j\ S_i}() \cong \widehat{S}_i$ 且 $\varphi_{i,\,j}$ 与 $\varphi_{i,\,0}$ 模同余，其中 $0 \le j \le m(S_i) - 1$，我们可以考虑

$$\varphi_i := \varphi_{i,0} : \widehat{S}_i \longrightarrow \widehat{S}_i \qquad (1 \le i \le \bar{r}) \tag{66}$$

作为 $\varphi_{i,\,j}$ 的代表元。令 n_i 为 φ_i 的阶。我们有一个黎曼曲面之间的 n_i 重循环分歧覆盖

$$\pi_{\varphi_i} : \widehat{S}_i \longrightarrow \widehat{W}_i \cong \widehat{S}_i / G_{\varphi_i}, \quad G_{\varphi_i} = \langle \varphi_i \rangle \cong \mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z}. \tag{67}$$

注意，φ_i 也定义了带标记点的黎曼曲面的一个自同构

$$\varphi_i : (\widehat{S}_i, \mathbf{P}_i) \longrightarrow (\widehat{S}_i, \mathbf{P}_i). \tag{68}$$

我们将集合 $\mathbf{P}_i$ 和集合 $\mathbf{Q}_i = \pi_{\varphi_i}(\mathbf{P}_i)$ 在 W_i 上分为

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^{\mathbf{N}} \coprod \mathbf{P}_i^{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}} \coprod \mathbf{Q}_i^{\mathbf{A}} \tag{69}$$

其中 $\mathbf{P}_i^{\mathbf{N}}$（分别地，$\mathbf{P}_i^{\mathbf{A}}$）由满足以下条件的点组成：$P$ 中的节点 h（P）相对于 φ 是非双向边（分别地，是双向边）；而 $\mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}} = \pi_{\varphi_i}(\mathbf{P}_i^{\mathbf{N}})$、$\mathbf{Q}_i^{\mathbf{A}} = \pi_{\varphi_i}(\mathbf{P}_i^{\mathbf{A}})$。

对偶图 $dg() = \{(v_{S_i}, g(S_i))\ \vec{e}_{P_j}\}_{1 \le i \le r, 1 \le j \le k}$ 是通过给约化对偶图 $\mathrm{rg}(S)$ 的每个顶点 v_{S_i} 赋予权重 g（S_i）而得到的赋权图；该权重 是 S_i 的亏格。（如果 g（S_i）$= 0$，有时会省略此权重。）自同构 $\varphi : S \to S$ 也诱导出一个自同构 $\varphi_{\mathrm{dg}(S)} : \mathrm{dg}(S) \to \mathrm{dg}(S)$，因为 φ 保持了 g（S_i）。

下面两个引理保证存在一个由 G 对 S 取商所得的自然商空间，它是一个结点黎曼曲面。

引理 5.10。存在一个有限全纯映射

$$\pi_\varphi : S \longrightarrow W \tag{70}$$

到具有以下性质的节点黎曼曲面 W：

(i) W 具有不可约分解 $\sum_{i=1}^{r} W_i$，使得 $W_i = \pi_\varphi(\varphi^j(S_i))$ 对于任意 j均成立。(ii) S 和 W 的正规化自然诱导出循环分歧覆盖

$$\pi_{\varphi_{i,j}} : \widehat{\varphi^j(S_i)} \longrightarrow \widehat{W_i} \qquad (1 \le i \le \bar{r},\ 0 \le j \le m(S_i) - 1)$$

使得对于任意 j，$\pi_{\varphi_{i,j}}$ 与 *(67)* 中的 π_{φ_i} 同构。
(iii) 约化对偶图 $\mathrm{rg}(W)$ 与紧商图 $(\mathrm{rg}(S\ /G_{\varphi_{\mathrm{rg}(S)}}{}^{c}))$重合，因此对偶图可写为 $\mathrm{dg}(W) = \{(v_{W_i}, g(W_i))\ \widehat{\vec{e}_{Q_j}}\}_{1\le i\le r, 1\le j\le k_1}$。特别地，$S$ 中的非反向节点经 π_φ 映到 W 的一个节点，而反向节点则映到一个非奇异点。

证明 利用 (67)、(69) 中的 $\{(\widehat{W_i}, \mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}})\}_{1\le i\le r}$ 作为拼接的构件，可以构造所需的节点曲面 W，使得 $\mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}}$ 拼接成 W 的节点。此拼接过程通过将 $xy = 0$ 在 $\mathbf{C}^2$ 原点处的两个局部分支，与 $\widehat{W_i}$ 的圆盘邻域在$\mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}}$ 中适当点处识别起来实现。

□

引理 5.11 。 W （在引理 *5.10* 中）同构于商解析空间 S/G。

证明 我们考虑 $\mathcal{O}_{S,\ P}$在 S 的节点 P 处的局部环，并令 $\mathcal{O}_{S,\ P} \cong \mathbf{C}[[x, y]]/(xy)$ 为其关于 $\mathcal{O}_{S,\ P}$ 的极大理想的完备化。若 P 是非双向的，且其两条边上的共价度分别为 $\delta^{(1)}/\lambda^{(1)}$ 和 $\delta^{(2)}/\lambda^{(2)}$，则该作用表示为

$$\varphi^{m(P)} : (x, y) \longmapsto (\mathbf{e}(\delta^{(1)}/\lambda^{(1)})x, (\mathbf{e}(\delta^{(2)}/\lambda^{(2)})y). \tag{71}$$

不妨设 $\lambda^{(1)} \ge \lambda^{(2)}$。则 $\widehat{\mathcal{O}}_{S,\ P}$ 关于 $\varphi^{m(P)}$ 的不变子环为

$$(\widehat{\mathcal{O}}_{S,P})^{\varphi^{m(P)}} \cong \mathbf{C}[[z, w]]/(zw),$$

其中 $z = x^{\lambda^{(1)}}$、 $w = y^{\lambda^{(2)}}$ 和 $zw = x^{\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}}(xy)^{\lambda^{(2)}} = 0$。若 P 对于共价度为 δ/λ 的 $\varphi^{m(P)}$是双向边，则

$$\varphi^{m(P)/2} : (x, y) \longmapsto (\mathbf{e}(\delta/2\lambda)y, (\mathbf{e}(\delta/2\lambda)x). \tag{72}$$

因此

$$(\widehat{\mathcal{O}}_{S,P})^{\varphi^{m(P)}} \cong \mathbf{C}[[z]],$$

其中 $z = x^{m(P)} = y^{m(P)}$。如果 P 是 S 的非奇异点，则相应的不变子环显然是正则的。

由此可知， S/G 是一条至多只有节点的复曲线。自然态射 $S \to S/G$ 具有引理 5.10 中所述的相同性质。因此， W 与 S/G 同构。

□

定义5.12。 我们将 *(70)* 写作 $\pi_\varphi : S \longrightarrow W = S/G$，并称其为与 φ 相关联的循环分歧覆盖。

例*5.13*。设 S 是一条亏格*3*的稳定曲线，具有两个不可约分支和两个节点；$S=\sum_{i=1}^{2}S_i$、$S_1\cap S_2=\{P_1,P_2\}$。假设每个 S_i 都同构于周期为 $\sqrt{-1}$ 的椭圆曲线；$S_i\simeq \boldsymbol{C/(Z+\sqrt{-1}Z)}$。我们考虑以下两个 *8* 阶自同构 φ、ψ：$S\to S$，使得自同构 $\varphi_{\mathrm{rg}(S)}$ 和 $\psi_{\mathrm{rg}(S)}$ 如例*5.9*所示。首先，φ 固定 P_1 和 P_2，并交换 S_1 和 S_2，使得 $\varphi^2|_{S_i}$ 的总价数 *($i=1,2$)* 为 $\mathbf{3/4}+\mathbf{3/4}+1/2$（其中 $\mathbf{3/4}$ 附着在 P_1 和 P_2 上）。其次，ψ 交换 P_1 和 P_2，并交换 S_1 和 S_2，使得 $\psi^2|_{S_i}$ 的总价数为 $\mathbf{3/4}+\mathbf{3/4}+1/2$。

那么，对于 φ（分别对于 ψ），P_1 和 P_2 是双向节点（分别是非双向节点）。令 $\pi_\varphi:\ S\to W_\varphi$，$\pi_\psi:\ S\to W_\psi$ 为与 φ 和 ψ 相关联的循环分歧覆盖。那么，W_φ 同构于 $\mathbf{P}^1$，，而 W_ψ 是一条亏格为 *1* 、具有一个节点的稳定曲线。它们的约化对偶图见例*5.9*。

注5.14。将 $\pi_\varphi:\ S\longrightarrow W$ 改写为 $\pi_\varphi:\ S\longrightarrow W=\sum_{i=1}^{r}m_iW_i$ 也许更自然，其中 W 是一个非约化概形，满足 $W_{\mathrm{red}}=W$。这一点也将在 *§6.1* 中讨论（另见 *[55,* 第*3]*章）。

令 $\mathbf{B}_i\subset W_i$ 为 (67) 中 $\pi_{\varphi_i}:S_i\to W_i$ 的分支点集合。通过与 (69) 比较，我们定义这些集合的基数如下：

$$\sharp(\mathbf{B}_i)=s_i,\ \ \sharp(\mathbf{B}_i\cap\mathbf{Q}_i)=s_i',\ \ \sharp(\mathbf{B}_i\cap\mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}})=(s_i')^{(1)},\sharp(\mathbf{B}_i\cap\mathbf{Q}_i^{\mathbf{A}})=(s_i')^{(2)},\ s_i'=(s_i')^{(1)}+(s_i')^{(2)},$$

$$\sharp(\mathbf{Q}_i\setminus\mathbf{B}_i)=t_i,\ \ \sharp(\mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}}\setminus\mathbf{B}_i)=t_i^{(1)},\ \ \sharp(\mathbf{Q}_i^{\mathbf{A}}\setminus\mathbf{B}_i)=t_i^{(2)},\ \ t_i=t_i^{(1)}+t_i^{(2)}. \tag{73}$$

我们将 $\mathbf{Q}_i\setminus\mathbf{B}_i$ 中每个非分歧点的赋值 **1** 加到 φ_i 的总赋值（48）上，并将 φ_i 的修饰总赋值 定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{DTV}(\varphi_i)=\Bigg(g_i,\overline{g}_i,n_i:\ &\frac{\sigma_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{i})}}{\lambda_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{i})}}+\cdots+\frac{\sigma_{(\mathbf{s}_\mathbf{i}')^{(\mathbf{1})}}^{(\mathbf{i})}}{\lambda_{(\mathbf{s}_\mathbf{i}')^{(\mathbf{1})}}^{(\mathbf{i})}}+\Big(\Big(\frac{\sigma_{(s_i')^{(1)}+1}^{(i)}}{\lambda_{(s_i')^{(1)}+1}^{(i)}}\Big)\Big)+\cdots+\Big(\Big(\frac{\sigma_{s_i'}^{(i)}}{\lambda_{s_i'}^{(i)}}\Big)\Big)\\&+\frac{\sigma_{(s_i')+1}^{(i)}}{\lambda_{s_i'+1}^{(i)}}+\cdots\frac{\sigma_{s_i}^{(i)}}{\lambda_{s_i}^{(i)}}+\underbrace{\mathbf{1}+\cdots+\mathbf{1}}_{t_i^{(1)}}+\underbrace{((\mathbf{1}))+\cdots+((\mathbf{1}))}_{t_i^{(2)}}\Bigg)\end{aligned} \tag{74}$$

其中，赋值依次排列为 $\mathbf{B}_i\cap\mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}}$、$\mathbf{B}_i\cap\mathbf{Q}_i^{\mathbf{A}}$、$\mathbf{B}_i\setminus\mathbf{Q}_i$、$\mathbf{Q}_i^{\mathbf{N}}\setminus\mathbf{B}_i$ 和 $\mathbf{Q}_i^{\mathbf{A}}\setminus\mathbf{B}_i$。这些符号（非双向分歧点的粗体赋值、双向分歧点的软双括号赋值等）借自 [11,§2]。于是：

定义5.15. 我们将稳定曲线（阶为 N）的自同构 φ：$S\longrightarrow S$ 的数值数据 定义为

$$\mathrm{Num}(\varphi)=\left(N,\varphi_{\mathrm{dg}(S)},\coprod_{i=1}^{\overline{r}}\mathrm{DTV}(\varphi_i)\right). \tag{75}$$

注5.16. 这些数值数据本质上与负扭转伪周期映射的数值数据相同（见 *§6.1*）。从这个角度来看， $g = 3$的$\mathrm{Num}(\varphi)$ 分类见 *[11,* 表*2*、引理*3.4*、命题*3.8]*。

5.5 M_g^{orb} 边界图册上的等对称分层

我们证明一个结构定理，描述由具有相同自同构数值不变量的带标记稳定曲线所组成的等对称分层。

设 $w : \Sigma_g(\sigma) \longrightarrow S$ 是一个 σ-标记，且 S 具有一个自同构 φ，其预先指定的数值数据为 Num(φ)，如 (75) 所示。根据 (65) 中的轨道不可约分解$S = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} \varphi^j(S_i)$ ($\bar{m_i} = m(S_i)$)，包含点 $[S, w]$ 的小 Teichm¨uller 空间 $T(\sigma)$ 同构于

$$T(\sigma) \cong \prod_{i=1}^{\bar{r}} \underbrace{(T_{g_i,k_i} \times \cdots \times T_{g_i,k_i})}_{m_i}, \tag{76}$$

其中 $g_i = g(S_i)$ $k_i = \sharp(\mathbf{P}_i)$。参见引理 5.7。

在 §5.1 中，我们结合说明 (I) 定义了周期映射 $\varphi : S \to S$ 的子空间 T_g^{φ}和 $T_g^{[\varphi]}$。当时 S 是一个黎曼曲面。这里我们针对稳定曲线 S考虑类似的定义。

与上一小节 §5.4 中一样，设 $\varphi : S \to S$ 是稳定曲线 S 的一个 N 阶解析自同构。设 T_σ^{φ}为 $T(\sigma)$中在 $\varphi_* : T(\sigma) \to T(\sigma)$的作用下保持不动的点 $p = [S, w]$ 的集合。（通过 σ-标记 $w : \Sigma_g(\sigma) \to S$，解析自同构 φ 被视为外尔群 $W(\sigma)$的一个元素 $w^{-1} \circ \varphi \circ w$。作用 φ_* 是作为 $W(\sigma)$中元素的作用。见 (28)。）与黎曼曲面的情形一样，我们将等价类 $[\varphi]$ 定义为具有与 φ 相同数值数据 (75) 的解析自同构$\psi : S \to S$ 的集合，即 Num(ψ) =Num(φ)。于是$T_\sigma^{[\varphi]}$定义如下：

$$T_\sigma^{[\varphi]} = \bigcup_{\psi \in [\varphi]} T_\sigma^{\psi}.$$

$M_g^{[\varphi]}$ M_g的子空间定义为 $T_\sigma^{[\varphi]}$按 Weyl 群取商得到的商空间：$M_g^{[\varphi]} = T_\sigma^{[\varphi]}/W$({v5)。

注5.17。 正如我们将在*§6.1*中证明的，稳定曲线S 的解析自同构 φ可提升为某个黎曼曲面 $\tilde{\varphi}$ 上的负扭转伪周期映射，使得$\mathrm{Num}(\varphi)$ 可与定理*6.1*中 $\tilde{\varphi}$ 的不变量(a)、(c) 相对应。因此，根据 *[61], [55]*的结果，$\mathrm{Num}(\varphi)$确定了稳定曲线 S 的解析自同构 φ 的共轭类。

定理 m 5.18。(i)存在有标记点的 *Teichm ¨uller* 空间的解析嵌入 s

$$\psi_{i,j}: T_{\overline{g}_i,s_i+t_i} \longrightarrow T_{g_i,k_i} \ (1 \le i \le \overline{r},\ 0 \le j \le m_i - 1),$$

其中 t_i 由式 *(73)* 给出，此外还有一个解析嵌入

$$\Phi: \prod_{i=1}^{\overline{r}} T_{\overline{g}_i,s_i+t_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{\overline{r}} \underbrace{(T_{g_i,k_i} \times \cdots \times T_{g_i,k_i})}_{m_i} \cong T(\sigma), \tag{77}$$

$$\Phi: (x_1, \cdots, x_{\overline{r}}) \longmapsto (\underbrace{\psi_{1,0}(x_1), \cdots, \psi_{1,m_i-1}(x_1)}_{m_1}, \cdots, \underbrace{\psi_{\overline{r},0}(x_{\overline{r}}), \cdots, \psi_{\overline{r},m_{\overline{r}-1}}(x_{\overline{r}})}_{m_{\overline{r}}}), \tag{78}$$

使得包含点 $[S, w]$ 的 $T_\sigma^{[\varphi]}$ 的连通分支 $(T_\sigma^{[\varphi]})^{(0)}$ 与像 $\Phi(\prod_{i=1}^r T_{g_i,s_i+t_i})$ 解析同构。特别地，$(T_\sigma^{[\varphi]})^{(0)}$ 是 $\sum_{i=1}^r (3g_i - 3 + s_i + t_i)$ 维复子流形 $T(\sigma)$。空间 $T_\sigma^{[\varphi]}$ 本身是这类连通分支的子流形的可数并。

(ii) $\overline{M}_g^{[\varphi]}$ 是局部闭的不可约子簇 M_g，它与 $\prod_{i=1}^r \overline{M}_{g_i,s_i+}$ 同构 t_i.

证明 步骤 *1* 设 S 是一条稳定曲线，其不可约分解为 $S = \sum_{i=1}^r S_i$，且 S 具有一个自同构 φ，其数值数据预先指定为 (75)。设 $\psi: X \to B$ 是 $S = \psi^{-1}(b_0)$ $(b_0 \in B)$ 的标准 Kuransihi 族。我们可以假设 B 是向量空间 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S, \mathcal{O}_S)$ 原点 $(= b_0)$ 周围的一个小开球；若要强调这一环境空间，我们将其记作 $B = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S, \mathcal{O}_S) \cap B$。由 (18) 和 §3.1 的 (I)，我们将 B 限制到参数化可变形变的子空间

$$\mathrm{H}^1(S, Hom_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S, \mathcal{O}_S)) \cap B \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i, \ \text{where } V_i := \mathrm{H}^0(\hat{S}_i, 2K_{\hat{S}_i} + \mathbf{P}_i)^* \cap B. \tag{79}$$

现在 φ 相对地作用于 ψ，并令 $B^\varphi = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_S}(\Omega^1_S, \mathcal{O}_S)^\varphi \cap B$ 为不变子空间。由于 φ 在 S 上的作用保持节点集合不变，φ 在 B 上的作用也保持子空间 $\bigoplus_{i=1}^r V_i$ 不变。令 $m_i = m(S_i)$。由于 φ 在直因子 V_i 上的作用迭代同构地映射 $V_i \to \varphi(V_i) \to \varphi^2(V_i) \to \cdots$，并稳定 $\varphi^{m_i}(V_i) = V_i$，因此 φ- 不变子空间 $(\bigoplus_{i=1}^r V_i)^\varphi$ 同构于 φ^{m_i}- 不变子空间的直和

$$\left(\bigoplus_{i=1}^r V_i\right)^\varphi \cong \bigoplus_{i=1}^{\overline{r}} \bigoplus_{j=0}^{m_i-1} \left(\varphi^j(V_i)\right)^{\varphi_i}, \ \text{where } \varphi_i := \varphi^{m_i}. \tag{80}$$

(80) 的直因子 $V_i^{\varphi_i}$ 描述如下。我们考虑 (67) 中的覆盖 $\pi_{\varphi_i}: S_i \longrightarrow W_i$，并令 $\mathbf{B}_i = \{Q_1, \cdots, Q_{s_i}\}$、$\mathbf{Q}_i \setminus \mathbf{B}_i = \{Q_{s_i+1}, \cdots, Q_{s_i+t_i}\}$，取自 (73)。通过

将命题 5.3 应用于零特征空间， $V_i^{\varphi_i}$ 的维数等于 $3g_i-3+s_i+t_i$。更确切地说，命题 5.3 的证明中的讨论表明

$$V_i^{\varphi_i} \cong H^0(\widehat{W}_i, 2K_{\widehat{W}_i} + \sum_{j=1}^{s_i+t_i} Q_j)^* \cap \overline{B}, \tag{81}$$

其中，$\overline{B}$ 是 $H^0(\widehat{W}_i, 2K_{\widehat{W}_i} + \sum_{j=1}^{s_i+t_i} Q_j)^*$在原点（$=\overline{b}_0$）附近的一个小开球。

步骤 *2* 我们证明，在$V_i^{\varphi_i}$上存在一个自然的带标记点的黎曼曲面族。限制族 $\psi^{-1}(V_i) \to V_i$ 的正规化的连通分支自然诱导出一个带标记点的黎曼曲面族

$$\psi_i : (\mathcal{S}, \mathcal{P}) \longrightarrow V_i, \tag{82}$$

根据 $H^1(\widehat{S}_i, T_{\widehat{S}_i}(-\mathbf{P}_i)) \cong H^0(\widehat{S}_i, 2K_{\widehat{S}_i} + \mathbf{P}_i)^*$(参见 [9, 第177]页)，它应当是带标记点的黎曼曲面 $\psi_i^{-1}(b_0) = (\widehat{S}_i, \mathbf{P}_i)$的标准 Kuranishi 族。因此，稳定子 $G_{\varphi_i} = \mathrm{Stab}(S_i) = \langle\varphi_i\rangle$ 在 S_i 上的自然作用相对地延拓到族ψ_i。我们考虑相对商映射

$$\overline{\psi}_i : \mathcal{W} = \mathcal{S}/G_{\varphi_i} \longrightarrow \overline{V_i} = V_i/G_{\varphi_i} \cong V_i^{\varphi_i}. \tag{83}$$

（83）的中心纤维 $\psi_i^{-1}(b_0)$ 与 $\widehat{S}_i/G_{\varphi_i} = \widehat{W}_i$ 同构。对于任意 $b \in V_i$，纤维$\overline{\psi_i}^{-1}(b)$ 如下所述。由于（82）是一个标准 Kuranishi 族，其基本性质（参见 [9, 第 XI 章（6.13）]）指出，纤维 $\psi_i^{-1}(b)$（$b \in V_i$）含有一个子群$G_{\varphi_i,\, b} \subset \mathrm{Aut}(\psi_i^{-1}(b))$，该子群与 G_{φ_i} 同构。于是

$$\overline{\psi}_i^{-1}(\overline{b}) \cong \psi_i^{-1}(b)/G_{\varphi_i,b} := \widehat{W}_{i,b}.$$

换言之，族（83）是 $\widehat{W}_i = \psi_i^{-1}(b_0)$ 的一个变形，使得 $\overline{\psi}_i$ 的每个纤维都是（82）中 ψ_i 的每个纤维除以本质上相同的伽罗瓦群 G_{φ_i} 所得的商曲面。此外， W_i 上的每个点 $Q_j \in \{Q_1, \cdots . Q_{s_i}, Q_{s_i+1}. \cdots, Q_{s_i+t_i}\}$ 都延拓为 ψ_i 的一个截面$\mathcal{Q}_j : V_i \to \mathcal{W}$。

事实上，我们令 $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{W} = \mathcal{S}/G_{\varphi_i}$ 和 $\pi_{\mathcal{S},\, b_0} = \pi_{\mathcal{S}}|_{(\pi_{\mathcal{S}})^{-1}(b_0)} : S_i \to W_i = S_i/G_{\varphi_i}$。那么 Q_j 满足以下两个条件之一：
(i) 在 $\mathbf{P}_i$ 的支集中存在一点 $P_{i,\, j}$，使得 $Q_j = \pi_{\mathcal{S},\, b_0}(P_{i,\, j})$。(ii) Q_j是覆盖 $\pi_{\mathcal{S},\, b_0}$的分歧点。

在情形 (i) 中，由于 ψ_i 是（S_i，$\mathbf{P}_i$）的 Kuranishi族，存在一个截面 $\mathbf{s}$： $V_i \to \mathcal{S}$, 使得 $\mathbf{s}(V_i)$ 经过 $P_{i,\, j}$。于是， $\pi_{\mathcal{S}}(\mathbf{s}(V_i))$ 的像定义了所需的截面$\mathcal{Q}_j$。在情形 (ii) 中，由于 $\overline{G}_{\varphi_i}$和 $G_{\varphi_i,\, b}$具有相同的签名（$\lambda_1^{(i)}$， $\cdots$， $\lambda_{s_i}^{(i)}$），根据 [31],， $\psi_i : \mathcal{W} \to V_i$ 的判别轨迹的各个分支都是截面。其中一个就是所需的 $\mathcal{Q}_j$。

$\widehat{\ }$因此，族 ψ_i是带标记点的黎曼曲面（W_i； Q_1， $\cdots$， $Q_{s_i+t_i}$）的变形。更强地，由 (81) 可知， ψ_i 实际上正是$\widehat{\ }$（W_i； $\overline{Q}_1$， $\cdots$， $Q_{s_i+t_i}$）的标准 Kuranishi 族。

步骤 *3* 我们固定一点 $[S,w]\in T(\sigma)\subset D_\epsilon(\sigma)$。我们可以假设韦伊标记 $w:\Sigma_g(\sigma)\to S$ 的源空间$\Sigma_g(\sigma)$是某个稳定曲线的拓扑模型，且该曲线具有一个自同构 φ，其数值数据为 (74)、(75)。

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 我们考虑 (63) 中的 Teichm¨uller 标记 $w_i:(R_i,\ \mathbf{P}_i)\longrightarrow(S_i,\ \mathbf{P}_i)$。那么，存在一个分歧覆盖 $\hat{}\pi_i$，其覆盖于亏格为 g_i 的黎曼曲面 Σ_{g_i} 上，且 $\hat{}\pi_i$ 的覆盖变换群与 (67) 中的 G_{φ_i} 一致。由 $\hat{}\pi_i$ 的分支点和 $\hat{}\pi_i(\mathbf{P}_i)$ 组成的点集的基数为 s_i+t_i，我们将该集合记为$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\{Q_1,\cdots,Q_{s_i+t_i}\}$。通过 w_i 的自然下降，我们得到一个带标记定向同胚

$$\hat{w}_i:(\Sigma_{\overline{g}_i};\widehat{Q}_1,\cdots,\widehat{Q}_{s_i+t_i})\longrightarrow(\widehat{W}_i;Q_1,\cdots,Q_{s_i+t_i}).\tag{84}$$

我们可以将(84)视为族(83)的纤维 ψ_i^{-1} (b_0)的Teichm¨uller标记。由于(83)是一个标准 Kuranishi 族，根据 Arbarello–Cornalba–Griffiths [9, Chap.XV, §2] 中的讨论，这一标记可以扩展到整个族(83)。也就是说，(83)诱导出一个带 Teichm¨uller 标记的带标记点的黎曼曲面族。

步骤 *4* 通过采用根据 [9, Chap.XV, §2] ，利用拼接带标记点的黎曼曲面的标准 Kuranishi 族的底空间来表示带标记点的Teichm¨uller空间的方法，并运用作用于 Kuranishi 族的基本性质，我们将步骤 $1\sim3$中的讨论整体化。

令 $T^{\varphi}_{\sigma}(p)$为包含点 $p=[S,w]$的 T^{φ}_{σ}的连通分支，其中标记 w 是在步骤 3中定义的标记。该标记诱导出φ^j-像的正规化分支($\hat{}S_i,\mathbf{P}_i$)的标记，即： $(\hat{}R_i,\hat{}\mathbf{P}_i)\to(\varphi^j(\hat{}S_i)\ \varphi^j(\mathbf{P}_i))$，其中 w_i 也在步骤 3中给出。于是该点

$$p_{i,j}=[(\varphi^j(\hat{S}_i),\varphi^j(\mathbf{P}_i)),\varphi^j\circ w_i],\quad(1\le i\le\overline{r},\ 0\le j\le m_i-1)$$

包含于 $\varphi_i(=\varphi^{m_i})$-不变轨迹 $T^{\varphi_i}_{g_i,k_i}$ of T_{g_i,k_i} 中。对于固定的 i，包含 $p_{i,j}$ ($0\le j\le m_i-1$) 的 $T^{\varphi_i}_{g_i,k_i}$ 的连通分支 $T^{\varphi_i}_{g_i,k_i}(p_{i,j})$ 显然彼此同构，为方便起见，我们记作 $(T^{\varphi_i}_{g_i,k_i})^{(0)}:=T^{\varphi_i}_{g_i,k_i}(p_{i,0})$。于是，由 (80) 和引理 5.7 可得解析嵌入的复合

$$\prod_{i=1}^{\overline{r}}(T^{\varphi_i}_{g_i,k_i})^{(0)}\longrightarrow\prod_{i=1}^{\overline{r}}T^{\varphi_i}_{g_i,k_i}(p_{i,0})\times\cdots\times T^{\varphi_i}_{g_i,k_i}(p_{i,m_i-1})\longrightarrow\prod_{i=1}^{\overline{r}}\underbrace{T_{g_i,k_i}\times\cdots\times T_{g_i,k_i}}_{m_i}.\tag{85}$$

Fr由 (83) 以及步骤 3 和 §5.1 中的讨论，我们得到一个同构

$$(T^{\varphi_i}_{g_i,k_i})^{(0)} \cong T_{\overline{g}_i, s_i+t_i}. \tag{86}$$

于是，(i) 的第一个断言由 (85) 和 (86) 得出。由于 $T^{\varphi_i}_{g_i,k_i}$ 的每个连通分支集合都可数，采用同样的论证可知，[31], 中 T^{φ}_{σ} 的连通分支集合也可数。因此，断言 (i) 成立。

由于 T^{φ}_{σ} 的各个连通分支彼此同构，且这些同构由标记变换给出，因此它们经遗忘映射$T(\sigma) \to M_g$标记后映到同一个像；根据断言 (i)，该像与 $\prod_{i=1}^{r} M_{g_i,s_i+t_i}$ 同构。该像是不可约的，因为每个 M_{g_i,s_i+t_i} 都是不可约的。仿照 [16, p.106] 中的论证，将遗忘映射分解为无限无分歧覆盖与有限伽罗瓦覆盖的复合，可知它是 M_g 上的闭子簇。因此，断言 (ii) 成立。

—

□

推论 5.19。([71]) M^{φ}_{g} 是连通的。

注 5.20。 边界处的等对称分层 T^{φ}_{σ} 与其在 M_g 或 T_g 上的极限之间的关系似乎很有趣。例如参见 *[22],* 等。

5.6 Harri 等对称分层附近的 s–Mumford 坐标

在本小节中，我们按照 [29,§1]的方法，在任意选取的点 p 附近，为受控变形空间 $D_\epsilon(\sigma)$ 定义一组特殊的局部坐标，该点属于等对称分层。

我们固定一点 $p = [S, w] \in T^{\varphi}_{\sigma} \subset T(\sigma) \subset D_\epsilon(\sigma)$。由于 p在$D_\epsilon(\sigma)$中的一个开邻域是 S的标准 Kuranishi 族的基 B ，由 (16)、(17) 和 (18) 可知， $H^0(S, \Omega^1_S \otimes \omega_S)$ 的对偶基给出了 p 在$D_\epsilon(\sigma)$中的一组局部坐标。根据 (20)，它可以分解为可变形变 (I) 的参数和 §3.1 中所述的平滑变形 (II) 的参数。通过考察 φ 对$H^0(S, \Omega^1_S \otimes \omega_S)$ 的作用，我们选择如下的基:

(I) 令 $S = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} \varphi^j(S_i)$ 为 (65) 中的轨道不可约分解，
$\widehat{S} = \coprod_{i=1}^{\bar{r}} \coprod_{j=0}^{m_i-1} \widehat{\varphi^j\ S_i}$ ( ) 为正规化的自然分解。作为 (79) 的对偶，我们考虑变动变形的参数空间 $\bigoplus_{i=1}^{\bar{r}} \bigoplus_{j=0}^{m_i-1} \varphi^j(V_i^*)$，其中 $V_i^* = H^0(\widehat{S}_i, 2K_{\widehat{S}_i} + \mathbf{P}_i)$。现在，我们选取定义 5.4 中相对于 φ^{m_i}- 作用的向量空间 V_i^* 的特征基

$$\{v_{i,1}, \cdots, v_{i,q_i}\} \in V_i^*, \quad (\varphi^{m_i})^*(v_{i,j}) = \mathbf{e}\Big(\frac{\theta_{i,j}}{n_i}\Big) v_{i,j}, \quad (1 \le j \le q_i) \tag{87}$$

^其中 $q_i =$ 维数为 V_i^*，而 n_i 是 φ^{m_i} 在 S_i上的作用的阶。

关于 $1 \le j \le m_i - 1$对应的向量空间 $\varphi^j(V_i^*)$，我们选取基$\{\varphi^j(v_{i,1}) \cdots, \varphi^j(v_{i,q_i})\}$。于是有 $(\varphi^{m_i})^*(\varphi^j(v_{i,j})) = \mathbf{e}(\theta_{i,j}/n_i)\varphi^j(v_{i,j})$。

(II) 设 $\sum_{i=1}^{\bar{k}} \sum_{j=0}^{m(P_i)} {}^{-1} \varphi^j(P_i)$ 为 S 的节点集合，使得稳定子 $\mathrm{Stab}_G(P_i) = \langle \varphi^{m(P_i)} \rangle$，且 $k = \sum_{i=1}^{\bar{k}} m(P_i)$。设 v_{P_i} 为式 (19) 中给出的挠层 τ_{P_i} 的生成元。那么，平滑变形的参数空间的基为

$$\{\varphi^j(v_{P_i})\}_{1\le i\le \bar{k}, 0\le j\le m(P_i)-1} \in \bigoplus_{i=1}^{\bar{k}} \bigoplus_{j=0}^{m(P_i)-1} \tau_{\varphi^j(P_i)}. \tag{88}$$

关于特征值，我们有如下结果。为简便起见，这里记 $P = \varphi^j(P_i)$、$v_P = \varphi^j(v_{P_i})$、$(\delta^{(1)}/\lambda^{(1)})(P) = \delta^{(1)}/\lambda^{(1)}$ 等。

引理 5.21. 若 P 是一个非反向节点，且两侧的共价度分别为$\delta^{(1)}/\lambda^{(1)}$ 和 $\delta^{(2)}/\lambda^{(2)}$，则 $(\varphi^{m(P)})^* v_P = \mathbf{e}\left(-\delta^{(1)}/\lambda^{(1)} - \delta^{(2)}/\lambda^{(2)}\right) v_P.$

如果 P 是一个 协价为 δ/λ 的反向节点，则 $(\varphi^{m(P)/2})^* v_P = \mathbf{e}(-\delta/\lambda)\ v_P.$

证明 假设 P 是非双向的。注意，由 (19) 可知，v_P 可写为模 $xy = 0$ 的 $ydx^{\otimes 2}/x = xdy^{\otimes 2}/y$。由 (71)，我们有

$$(\varphi^{m(P)})^* v_P = \frac{\mathbf{e}\left(-\frac{\delta^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\right) y \cdot \mathbf{e}\left(-\frac{2\delta^{(1)}}{\lambda^{(1)}}\right) dx^{\otimes 2}}{\mathbf{e}\left(-\frac{\delta^{(1)}}{\lambda^{(1)}}\right) x} = \mathbf{e}\left(-\frac{\delta^{(1)}}{\lambda^{(1)}} - \frac{\delta^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\right) v_P.$$

类似地 在 P 是双向的情形下，由 (72) 可得所需结果。 □

基于上述讨论，我们通过注意到 $k = \sum_{i=1}^{\bar{k}} m(P_i)$ 和 $3g - 3 - k = \sum_{i=1}^{\bar{r}} m_i q_i$，来定义 p 处 $D_\epsilon(\sigma)$ 的局部坐标。

定义 5.22. $D_\epsilon(\sigma)$ 在$p = [S, w] \in T^{\widetilde{\mu}}_\sigma$处的哈里斯–芒福德坐标系$(z_1, \cdots, z_{3g-3})$ 定义如下：

(i) $p = \{(z_1, \cdots, z_{3g-3}) = (0, \cdots, 0)\}$.

(ii) 我们按关于 i、j、α、β、γ 的字典序将其改写为

$$(z_1, \cdots, z_{3g-3}) = (z_1^{(0)}, \cdots, z_i^{(j)}, \cdots, z_{\bar{k}}^{(m(P_k)-1)}, z_{1,1}^{(0)}, \cdots, z_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}, \cdots, z_{\bar{r},q_{\bar{r}}}^{(m_{\bar{r}}-1)}) \tag{89}$$

对于 $1 \le i \le k$、$0 \le j \le m(P_i) - 1$、$1 \le \alpha \le \bar{r}$、$1 \le \beta \le q_\alpha$、$0 \le \gamma \le m_\alpha - 1$。那么，坐标 $z_i^{(j)}$ 是 $\varphi^j(v_{P_i})$ 的对偶向量，其中 v_{P_i} 由式 *(88)* 给出。坐标 $z_\alpha^{(\gamma)}{}_{,\beta}$是 $\varphi^\gamma(v_{\alpha,\beta})$的对偶向量，其由式 *(87)* 给出。

对于 p 附近 $B \subset D_\epsilon(\sigma)$ 上的坐标 (89)，$\widetilde{\mu}$ 在 B 上的作用写作如下形式。由引理 5.21 和 (87) 可直接得出引理 5.23 的证明。

引理 5.23。 $\widetilde{\mu}$ 在 p 附近对 B 的作用可用坐标 *(89)* 表示为

$$\widetilde{\mu} : z_i^{(j)} \longmapsto z_i^{(j+1)} = \mathbf{e}\left(\frac{1}{N}\left(\frac{\delta^{(1)}}{\lambda^{(1)}}(P_i) + \frac{\delta^{(2)}}{\lambda^{(2)}}(P_i)\right)\right) z_i^{(j)},\ z_{\alpha,\beta}^{(\gamma)} \longmapsto z_{\alpha,\beta}^{(\gamma+1)} = \mathbf{e}\left(-\frac{\theta_{\alpha,\beta}}{N}\right) z_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$$

by identifying $z_i^{(m(P_i))} = z_i^{(0)}$ *and* $z_{\alpha,\beta}^{(m_\alpha)} = z_{\alpha,\beta}^{(0)}$.

6 黎曼曲面的退化的单值化与轨形模映射

我们从多个角度探讨亏格为 $g \geq 2$ 的黎曼曲面退化的单值化和模空间映射的基本性质。

在 §6.1 中，我们研究负扭转 μ 的伪周期映射，其全体记为$\mathbf{P}_g^{(-)}$。我们之所以关注 $\mathbf{P}_g^{(-)}$，是因为黎曼曲面退化的拓扑单值化属于这一类。在本小节中，我们证明， μ 是通过实爆破从稳定曲面的解析自同构 μ^{an} 提升得到的。因此， μ ([61], [55]) 的基本不变量实质上来自 μ^{an} 的基本不变量，除了螺旋数 ([55, 定义 2.4]) 之外；螺旋数表示沿例外圆的分数德恩扭转。我们还回顾了广义商空间 Σ_g/μ 的概念，该空间由核心和非核心分支 组成，构造见 [55, 第 3]章。这为正规极小退化的中心纤维提供了重要信息，其拓扑单值化与 μ 一致。

在 §6.2 中，我们通过收缩中心纤维的非核心分支来定义退化的轨形模型 f : $S \to \Delta$，该中心纤维在拓扑上与广义商（[55]）相对应。这里， S 是一个至多具有商奇点的正规复空间，其轨形结构 f 明确地由 [10, §2]中给出的精确稳定约化 f : $S \to \Delta$ 诱导而来。请注意，从 Teichmüller 理论的观点来看，这种轨形模型在历史上源自 Imayoshi [39]¨。

§6.3 中的讨论是本节的主要部分。我们定义退化的轨形模型 f 的轨形模映射 J_f : $\Delta \to M_g^{orb}$ 这一概念，并证明J_f 具有*Kodaira* 周期性性质，具体如下。对于椭圆纤维化，Kodaira [46] 借助椭圆模函数，将函数不变量 J 定义为从底空间到上半平面 $\mathcal{H}$（=的 Teichmüller 空间）的映射。由于 $SL(2, \mathbf{Z})$（=的映射类群）在退化纤维周围作用于 J， J 的局部表达式具有某种“周期性”。这一性质推广到了 $g \geq 2$ ，表现为轨形模映射 J_f 及魏尔群的作用。

在§6.4中，我们给出两个黎曼曲面退化及其轨形结构的例子，并同时给出相应的轨形模映射。

6.1 伪周期映射与稳定曲线的自同构

我们通过§2.1中给出的提升，对比一个负扭转的伪周期映射与稳定曲线的一个自同构。基本术语请参见 [55], [10, §1], [40, §5]。

保向同胚的同伦类 μ : $\Sigma_g \to \Sigma_g$ 称为关于单形 （Harvey 的

曲线复形，*[33]*）若
(i) μ 保持不变 σ，且其限制 $\mu|_B$ 在补集 $B = \Sigma_g \setminus \coprod_{1\le i\le k} C_i$ 上是一个周期映射，也就是说，某个幂次（$\mu|_B$）^{N} 与恒等映射 id_B同伦。

(ii) 令 $m(C_i)$ $(1 \le i \le k)$ 为满足 $\mu^{m(C_i)}(\vec{C_i}) = \vec{C_i}$ 作为定向曲线。于是 $\mu^{m(C_i)}$ 在 C_i 的环形邻域 $\mathcal{A}_i$ 上作用为右手分数德恩扭转。

将 $B = \sum_{i=1}^{r} B_i$ 分解为连通分支，我们称 B_i 主体分支（[55, 定义 4.8]），另见 [55]图 4.1。我们也将满足 (i) 中所述性质的最小自然数 N 称为 μ的伪周期。具有性质 (i) 的映射 μ 称为伪周期映射（[55, 定义 1.1]），或用 Bers 的术语称为椭圆型或抛物型映射（见 [40, §3]）。我们将 Γ_g 中相对于 σ 具有负扭转的伪周期映射所构成的子集记为

$$\mathbf{P}_g^-(\sigma) \subset \Gamma_g. \tag{90}$$

式 (90) 的共轭类集合记为 $\mathbf{P}_g^-(\sigma) \subset \Gamma_g$，其特征如下:

定理 6.1. ([61], [55]) 元素 $\mu \in \mathbf{P}_g^-(\sigma)$ 由以下数据唯一确定:
(a) $\{B_i\}$ 的多重点和边界曲线处的 *Nielsen* 阶数，(b) $\{\mathcal{A}_j\}$ 的螺旋数 $\{\mathbf{s}(C_j)\}$，其中 $\mathcal{A}_j$ 是 C_j 的一个小环形邻域，使得 $|\mathbf{s}(C_j)|$ $(\mathbf{s}(C_j) \le 0)$ 是 $\mathcal{A}_j$ 的分数德恩扭转，(c) μ 在扩展分割图 $\mathbf{\Gamma}(\mu)$ 上的作用，即一个一维有向图，其顶点对应于 $\{B_i\}$，边则自然对应于 $\{C_j\}$。

不变量 (a) 和 (b) 由 [61], 给出，(c) 由 [55] 给出。我们将它们称为 μ 的数值数据 *(a)*、*(b)*、*(c)* 。伪周期映射与稳定曲线的解析自同构之间的关系如下。

命题 6.2。 设 $\mu: \Sigma_g \to \Sigma_g$ 是$\mathbf{P}_g^-(\sigma)$中的一个元素。则存在解析自同构 $\mu_\sigma: \Sigma_g(\sigma) \to \Sigma_g(\sigma)$，相对于稳定曲线 $\Sigma_g(\sigma)$ 上的某个复结构，使得下图在同伦意义下可交换;

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{\ \mu\ } & \Sigma_g \\ {\scriptstyle \mathrm{cont}_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cont}_\sigma} \\ \Sigma_g(\sigma) & \xrightarrow[\ \mu_\sigma\ ]{} & \Sigma_g(\sigma). \end{array}$$

反之，稳定曲线 $\Sigma_g(\sigma)$ 的任意解析自同构 μ_σ 都可提升为 $\mathbf{P}_g^-(\sigma)$的一个元素μ 。

证明 (第 *1* 步) 若 $\sigma=\emptyset$，则 μ 是周期映射，已知 μ 与一个解析自同构同伦。此结论是 Kerchhoff 定理 [45], 的推论，或者可以显式构造这种同伦，参见 [60] 或 [55, 第2]章。

如果 $\sigma\neq\emptyset$, μ 在 $B=\Sigma_g\backslash\coprod_{1\leq i\leq k}\mathcal{A}_i$ 上同伦于带实边界的黎曼曲面的解析自同构直和，并且对 $\coprod\mathcal{A}_i$ 的限制可以收缩为点映射（在 $\Sigma_g(\sigma)$中），就如命题 2.8 中所述。由于 $\Sigma_g(\sigma)$是通过同伦将 $\coprod\mathcal{A}_i$ 收缩为节点而由 Σ_g 构造的，因此 B 上的解析自同构可下降为 $\Sigma_g(\sigma)$的解析自同构。

（步骤 *2*）反过来，设 $\mu_\sigma:\ \Sigma_g(\sigma)\ \to\ \Sigma_g(\sigma)$ 是关于某个复结构的解析自同构。

假设 $P_i=\mathrm{cont}(C_i)$ 是一个非反向节点，在两侧局部分支的圆盘邻域 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$ 处的余价分别为 $\delta^{(1)}/\lambda^{(1)}$和 $\delta^{(2)}/\lambda^{(2)}$，其中 $P_i=U^{(1)}\cap U^{(2)}$。根据定义，$\mu_\sigma^{m(P_i)}$保留 $U_{(j)}$，并且从两个分支内部观察时，均按顺时针方向旋转角度 $2\pi\delta^{(j)}/\lambda^{(j)}$（$j=1,\ 2$）。令 $\pi_P^{(j)}$: $\widetilde{U}^{(j)}\to U^{(j)}$ 为在 P_i处的实爆破，其例外圆为 $C^{(j)}=(\pi_P^{(j)})^{-1}(P)$；再令 $\mathcal{A}$为边界为 $\partial\mathcal{A}=\partial\mathcal{A}^{(1)}\coprod\partial\mathcal{A}^{(2)}$的小环带。

我们通过将 $C^{(j)}$自然地粘贴到 $\partial\mathcal{A}^{(j)}$上，用构件 $\widetilde{U}^{(1)}$、 $\widetilde{U}_{(2)}$和 $\mathcal{A}$构造黎曼曲面 $(\Sigma_g)_{\mathrm{loc}}=\widetilde{U}^{(1)}\cup\mathcal{A}\cup\widetilde{U}^{(2)}$的一部分，并定义同胚$\mu_{\mathrm{loc}}$：$(\Sigma_g)_{\mathrm{loc}}\to(\Sigma_g)_{\mathrm{loc}}$，它是 $\mu_\sigma^{m(P_i)}$ 的局部提升，如下所示。限制 $\mu_{\mathrm{loc}}|_{\widetilde{U}^{(j)}}$:$\widetilde{U}^{(j)}\to\widetilde{U}^{(j)}$ 定义为通过 $\pi_P^{(j)}$ 对 $\mu_\sigma^{m(P_i)}$ 的提升，而 $\mu_{\mathrm{loc}}|_{\mathcal{A}}:\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 定义为分数德恩扭转，即线性扭转（[55, §2.3]），其螺旋数 [55,，定义 2.4]

$$\mathbf{s}(C_i)=-\frac{\delta_i^{(1)}}{\lambda_i^{(1)}}-\frac{\delta_i^{(2)}}{\lambda_i^{(2)}}-\mathbf{K}(C_i)\qquad(\mathbf{K}(C_i)\in\mathbf{Z},\ \mathbf{K}(C_i)\geq-1).\tag{91}$$

由于 $-\delta^{(2)}/\lambda^{(2)}\equiv\delta^{(1)}/\lambda^{(1)}+\mathbf{s}(C_i)$（模$\mathbf{Z}$），映射 μ_{loc}定义良好，并表示一个右手分数德恩扭转，其 $\mathbf{s}(C_i)\leq0$。

当 P_i是一个反向节点，且两侧局部分支的余价均为 δ/λ 时，按照上文相同的记号，我们定义同胚 μ_{loc}：$(\Sigma_g)_{\mathrm{loc}}\to(\Sigma_g)_{\mathrm{loc}}$，它是 $\mu^{m(P_i)_\sigma\ \ /2}$的局部提升，定义如下。限制 $\mu_{\mathrm{loc}}|_{\widetilde{U}^{(1)}}:\ \widetilde{U}_{(1)}\to\widetilde{U}^{(2)}$以及 $\mu_{\mathrm{loc}}|_{\widetilde{U}^{(2)}}:\ \widetilde{U}_{(2)}\to\widetilde{U}^{(1)}$被定义为通过 $\pi_P^{(1)}$和 $\pi_P^{(2)}$对 $\mu^{m(P_i)_\sigma\ \ /2}$的提升，而 $\mu_{\mathrm{loc}}|_{\mathcal{A}}:\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 被定义为特殊扭转（ [55, §2.4]），该扭转交换边界分支 $\partial\mathcal{A}^{(1)}$ 和 $\partial\mathcal{A}^{(2)}$，其螺旋数为 $\mathbf{s}(C_i)/2$，其中

$$\mathbf{s}(C_i)=-\frac{2\delta_i}{\lambda_i}-2\mathbf{K}(C_i)\qquad(\mathbf{K}(C_i)\in\mathbf{Z},\mathbf{K}(C_i)\geq0).\tag{92}$$

μ_σ 在 Σ_g（σ）各部分上的限制（节点的圆盘邻域除外）具有平凡的提升。根据 μ_σ 在 Σ_g（σ）的对偶图上的作用，我们

将黎曼曲面的这些部分与同胚拼接起来。然后，我们得到 Σ_g 以及所需的同胚 μ。

□

注意，（91）和（92）是定理 6.1 的数据（b）中的螺旋数。通过从 μ 到 μ_σ 的下降，数据（a）和（c）得以保留，而数据（b）在这一下降过程中消失，即螺旋数并不是稳定曲线的解析自同构的数据。（螺旋数本质上表示沿例外圆的分数德恩扭转系数，参见 Liu [51]。）

关于 $\Sigma_g(\sigma)$ 上的这一复结构，存在一个商全纯映射 $\pi_{\mu_\sigma}:\ \Sigma_g(\sigma)\longrightarrow \Sigma_g(\sigma)/G_{\mu_\sigma}$（定义 5.12）。该商映射在拓扑意义下提升为广义商映射 [55,定义 3.4]

$$\pi_\mu : \Sigma_g(\sigma) \longrightarrow \mathcal{W}(\mu) = \Sigma_g/\langle\mu\rangle. \tag{93}$$

这里，$\mathcal{W}(\mu)$ 通常是一个非约化结点黎曼曲面（即为每个分支附加一个重数），而 π_μ 是一个捏缩覆盖（[55], 定义 3.2），即除节点之外为有限无分歧拓扑覆盖。节点的逆像的每个连通分支都同胚于一个圆。空间 $\mathcal{W}(\mu)$ 分解为以下各部分（[55], 第 95 页，图 4.1）；

$$\mathcal{W}(\mu) = \sum_i \mathrm{Core}_i + \sum_j \mathrm{Tail}_j + \sum_j \mathrm{Arch}_j + \sum_j \mathrm{Quasitail}_j. \tag{94}$$

轨道 $\mu^\alpha(B_i)$ $(0 \le \alpha \le m(B_i)-1)$ 在除去多重点的小圆盘邻域外，经 π_μ 映射到核心$_i$。部分尾$_j$、弧$_j$、准尾$_j$ 分别是由 $\mathbf{P}^1$ 构成的链或树；这些 $\mathbf{P}^1$ 是 π_μ 对多重点邻域、非双向环带和反向环带的像，其重数可由数据 (a) 和 (b) 明确确定。

令 $\mathrm{cont}^{(nc)}:\mathcal{W}(\mu)\to\mathcal{W}(\mu)^\sharp$ 表示 非核心部分 （即所有的尾、弧和准尾）的收缩。则 $\mathcal{W}(\mu)^\sharp$ 可与 $\Sigma_g(\sigma)/G_{\mu_\sigma}$ 视为同一对象（见注5.14），换言之，以下同伦交换图是 π_{μ_σ} 到 π_μ 的提升；

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{\ \pi_\mu\ } & \mathcal{W}(\mu) \\ {\scriptstyle \mathrm{cont}_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cont}^{(nc)}} \\ \Sigma_g(\sigma) & \xrightarrow[\ \pi_{\mu_\sigma}\ ]{} & \mathcal{W}(\mu)^\sharp \cong \Sigma_g/G_{\mu_\sigma}. \end{array}$$

(图 I) 从解析商到广义商的提升

6.2 Orb黎曼曲面退化的 ifold 结构

在本小节中，我们提出黎曼曲面退化的轨形模型这一概念。

设 M 是一个二维正规复空间，且 $f\colon M \to \Delta = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| \le \epsilon_0\}$ 是一个到半径充分小的圆盘的真满射全纯映射，使得对 $t \in \Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ 上的任意点，其纤维 $f^{-1}(t)$ 都是亏格为 g 的黎曼曲面。我们称 f 亏格为 g 的退化。除非另有说明，我们总是假设 $g \ge 2$。

首先假设 M 是非奇异的。设 $F = f^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{r_0} m_i F_i$ 是中心纤维的不可约分解。如果约化概形 $F^{\mathrm{red}} = \sum_{i=1}^{r_0} F_i$ 至多只有节点奇点，并且 F^{red} 的任意 (-1)-球面分支与其他分支至少有三个交点，那么 f 就称为**正规极小模型**，它在 f的局部双有理等价类中唯一确定。

亏格为 g 的两个退化称为**拓扑等价**（分别地，**解析等价**），如果对于它们的正规极小模型 $f\colon M \to \Delta$和 $f'\colon M' \to \Delta'$，存在保向同胚（分别地，解析同构） $h_M\colon M \to M'$ 和 $h_\Delta\colon \Delta \to \Delta'$，使得 $h_\Delta \circ f = f' \circ h_M$。该等价类称为此退化的**拓扑类型**（分别地，**解析类型**）。

现在固定一点 $t_0 \in \Delta^*$，并令 $w\colon \Sigma_g \to f^{-1}(t_0)$ 为一个 Teichm¨uller 标记。我们选取一条光滑环路 $L_{t_0t_0}$ in Δ^*，它从 t_0 出发，沿逆时针方向绕 $0 \in \Delta$ 一周后返回 t_0。令 $\mu(L_{t_0t_0})\colon f^{-1}(t_0) \to f^{-1}(t_0)$ 为沿着 $L_{t_0t_0}$ 的微分同胚。那么 $w^{-1} \circ \mu(L_{t_0t_0}) \circ w\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ 是一个保向同胚。对于另一个点 $t_0' \in \Delta^*$，我们将来自 w 的 $f^{-1}(t_0')$ 的 Teichm¨uller 标记定义为 $w' = \mu(L_{t_0t_0'}) \circ w\colon \Sigma_g \longrightarrow f^{-1}(t_0')$，其中 $\mu(L_{t_0t_0'})\colon f^{-1}(t_0) \to f^{-1}(t_0')$ 是沿着连接 t_0 与 t_0' 的路径 $L_{t_0t_0'}$ in Δ^* 的微分同胚。那么映射 $w'^{-1} \circ \mu(L_{t_0't_0'}) \circ w'$ 与 $w^{-1} \circ \mu(L_{t_0t_0}) \circ w$ 共轭。换言之，共轭类

$$\mu_f(w) = [w^{-1} \circ \mu(L_{t_0t_0}) \circ w] \tag{95}$$

定义良好，且与 t_0 和 $L_{t_0t_0'}$ 的选择无关。

证明如下：取一条连接 t_0 和 t_0' 的“直”路径 $L'_{t_0t_0'}$（位于 Δ^* 中），并假设环路 $L'_{t_0t_0'}L_{t_0't_0'}L'_{t_0't_0}$ 与 $L_{t_0t_0}$ 同伦。我们分别用 a 和 b 表示微分同胚 $\mu(L_{t_0t_0'})$ 和 $\mu(L'_{t_0t_0'})\colon f^{-1}(t_0) \to f^{-1}(t_0')$。于是根据对 $L'_{t_0t_0'}$ 的假设，我们有 $b^{-1}\mu(L_{t_0't_0'})b = \mu(L_{t_0t_0})$，并且

$$\begin{aligned}
&[w'^{-1} \circ \mu(L_{t_0't_0'}) \circ w'] \\
&= [w^{-1}a^{-1} \circ \mu(L_{t_0't_0'}) \circ aw] \\
&= [w^{-1}a^{-1}bb^{-1} \circ \mu(L_{t_0't_0'}) \circ bb^{-1}aw] \\
&= [w^{-1}a^{-1}b \circ (b^{-1}\mu(L_{t_0't_0'})b) \circ b^{-1}aw] \\
&= [w^{-1}a^{-1}b \circ \mu(L_{t_0t_0}) \circ b^{-1}aw] \\
&= [w^{-1}(a^{-1}b)ww^{-1} \circ \mu(L_{t_0t_0}) \circ ww^{-1}(b^{-1}a)w] \\
&= [c^{-1}w^{-1} \circ \mu(L_{t_0t_0}) \circ wc]
\end{aligned} \tag{96}$$

其中我们令 $c = w^{-1}(b^{-1}a)w$: $\Sigma_g \to \Sigma_g$。等式 (96) 表明，共轭类 $[w'^{-1} \circ \mu(L_{t_0't_0'}) \circ w']$ 和 $[w^{-1} \circ \mu(L_{t_0t_0}) \circ w]$ 相同。我们将这个共轭类 $\mu_f(w)$ 称为 相对于标记 f 的拓扑单值化 w。注意， $\mu_f(w)$ 由 $f^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ 的纤维化结构决定。

对于 $f^{-1}(t_0)$ 的同一个复结构，我们选择另一个 Teichm¨uller 标记$\widetilde{w}$: $\Sigma_g \to f^{-1}(t_0)$，并考虑相对于 $\widetilde{w}$ 的拓扑单值化 $\mu_f(\widetilde{w})$。那么$\mu_f(w)$ 与 $\mu_f(\widetilde{w})$ 显然在 Γ_g 中彼此共轭，即

$$\mu_f(\widetilde{w}) = [w^{-1} \circ \widetilde{w}]^{-1}\mu_f(w)[w^{-1} \circ \widetilde{w}] \in \Gamma_g.$$

因此， $\mu_f(w)$ 的共轭类 $\mu_f(w)$ 由 f 唯一确定，与标记 w 的选择无关。记作

$$\mu_f = \widehat{\mu_f(w)} \in \widehat{\Gamma}_g \quad (\text{conjugacy classes of } \Gamma_g), \tag{97}$$

并称 μ_f 为 f 的拓扑单值化。那么:

定理 6.3. (i) ***(****[20], [2], [39], [65], [23]****)*** 拓扑单值化属于负扭转伪周期映射的共轭类。

(ii) ***(****[55,* 定理 *7.2]****)*** 亏格为 g 的退化的拓扑结构由其拓扑单值化唯一确定。拓扑单值化集合与负扭转伪周期映射的共轭类集合一一对应。

正常极小模型与拓扑单值群作用 μ_f 的广义商 (93) 之间的关系如下:

定理 6.4. ***(****[55,* 第 *9]*章***)*** 亏格为 g 的退化的正常极小模型 $f: M \to \Delta$ 的中心纤维 $F = f^{-1}(0)$ 与 μ_f 的广义商空间 $\mathcal{W}(\mu_f)$在拓扑上作为非约化结点黎曼曲面彼此重合。特别地， F 如 ***(94)*** 所示分解为核心和非核心部分。

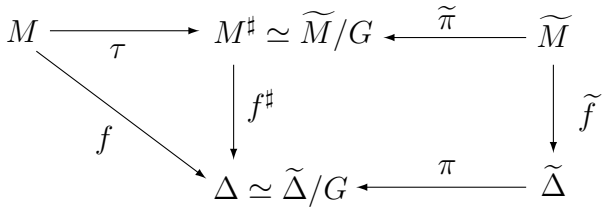
现在我们改变 f在双有理等价类中的模型。由于正常极小模型 f的中心纤维 F 的任何不可约分支真子集都具有负交叉形式，根据 Grauert定理 [27]，存在将 F的非核心部分收缩的解析压缩映射 $\tau: M \to M^\sharp$。令 $f^\sharp: M^\sharp \to \Delta$为自然映射。$\tau$ 在 F 上的限制与收缩映射一致

$$\tau|_F = \mathrm{cont}^{(nc)} : F \longrightarrow F^\sharp = (f^\sharp)^{-1}(0)$$

如§6.1 的图 I 所示。全空间 $M^\sharp$ 是一个正规复空间，具有循环商奇点和二面体商奇点，其支集位于非核心部分的收缩点上，而奇点的类型则由 μ_f （[10, 引理 2.1]）的数据明确给出

使得 F 中的非核心部分正是这些奇点的极小解消的例外集。由于 $M^\sharp$ 至多具有商奇点，我们可以按照 Satake [64]的意义将其视为一个复轨形。我们将 $f^\sharp$ 称为退化 的轨形模型。

$f^\sharp$ 的显式轨形结构描述如下（[10, §§2,3]）。设 $\pi\colon \widetilde{\Delta} \to \Delta$是由 $u \mapsto t = u^N$ 定义的圆盘覆盖映射，其中 N 是 μ_f的伪周期；设 $\widetilde{M}$ 是 $M^\sharp$ 与 $\widetilde{\Delta}$ 在 Δ上的纤维积的正规化。设 $\widetilde{f}\colon \widetilde{M} \to \widetilde{\Delta}$ 是自然映射。那么，覆盖变换群 $G := \langle\widetilde{\mu}\rangle \simeq \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ 作用于 $\widetilde{f}^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$，并根据 M的正规性，将其全纯地延拓到 f 上，使得下列交换图成立：



（图 II）精确稳定约化的过程

由于拓扑单值化 $\mu_{\widetilde{f}} \simeq \mu_f^N$ 在主体 上 B （如定理 6.1 前所定义）是平凡的，广义商 $\mathcal{W}(\mu_{\widetilde{f}})$ 的非核心部分由重数为 1 的弧 组成（[55, 定义 4.7]），即 $\mathcal{W}(\mu_{\widetilde{f}})$ 是亏格为 g 的半稳定曲线。因此，中心纤维 $\sim F = f^{-1}(0)$ 是一条拓扑类型为 $\Sigma_g(\sigma)$ 的稳定曲线，其中 M 在 F 的节点处有 A 型有理二重点。从半稳定曲线 $\sim\mathcal{W}(\mu_{\widetilde{f}})$ 的角度来看，F 是将其上的弧收缩后得到的像。图 II 中映射 $\widetilde{\pi}$ 在纤维 $\widetilde{\pi}|_{\widetilde{F}}\colon \widetilde{F} \to F^\sharp$ 上的限制，实质上与图 I 中的商映射 $\sim\pi_{\mu_\sigma}$ 一致。我们称 $f()$ 的精确稳定约化 。这种稳定约化是极小的，因为基变换的次数 N 在 f 的所有稳定约化中最小；这是因为根据 [55, 第 3] 章给出的算法，对于 μ_f^n 及 $n < N$，其广义商不可能是亏格为 g 的半稳定曲线。

$\widetilde{\ }$生成元 $\widetilde{\mu}$ 在 f 附近对 G 的作用，是稳定曲线 F的自同构 $\sim\widetilde{\mu}|_{\widetilde{F}}\colon F \to F$向族 f的扩张，其局部描述如下：

$\widetilde{\ }$(i) 假设 P 是 F 的一个非奇异点，且属于不可约分支 $\widetilde{F}_i$，其稳定子 $\mathrm{Stab}_G(\widetilde{F}_i) = \langle\widetilde{\mu}^{m(\widetilde{F}_i)}\rangle$。阶为 $n(\widetilde{F}_i)$ 的自同构 $\widetilde{\mu}^{m(\widetilde{F}_i)}|_{\widetilde{F}_i}\colon \widetilde{F}_i \to \widetilde{F}_i$ 及其相关的 $n(\widetilde{F}_i)$ 重循环覆盖 $\widetilde{\pi}|_{\widetilde{F}_i}\colon \widetilde{F}_i \to \widetilde{\pi}(\widetilde{F}_i) \subset F^\sharp$ 在 (66) 和 (67) 中给出。设 (x,u) 是 $P = \{(x,u) = (0,0)\}$ 处的局部坐标，其中 x 是纤维坐标，u 是基底坐标 $\widetilde{\Delta} = \{u \in \mathbf{C} \mid |u| \le \epsilon^{1/N}\}$ 的提升。于是映射 $\widetilde{\mu}^{m(F_i)}$ 在局部作用为

$$\widetilde{\mu}^{m(\widetilde{F}_i)}\colon (x,u) \longmapsto \left(\widetilde{\mu}^{m(\widetilde{F}_i)}|_{\widetilde{F}_i}(x),\ \mathbf{e}\left(\frac{m(\widetilde{F}_i)}{N}\right)u\right). \tag{98}$$

此外，若 P 是 $\widetilde{\pi}|_{\widetilde{F}_i}$ 的赋值为 δ/λ 的分歧点，则 Stab $_G$ $=(P)_{\langle\widetilde{\mu}^{m(F_i)n(F_i)/\lambda}\rangle}$，且映射 $\widetilde{\mu}^{m(F_i)n(F_i)/\lambda}$ 在 P 附近的作用为

$$\widetilde{\mu}^{m(\widetilde{F}_i)n(\widetilde{F}_i)/\lambda}:\ (x,u)\longmapsto\left(\mathbf{e}\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)x,\ \mathbf{e}\left(\frac{m(\widetilde{F}_i)n(\widetilde{F}_i)}{\lambda N}\right)u\right). \tag{99}$$

(ii) 假设 P是 $\widetilde{F}$的一个非反向节点，且 Stab$_G(P)$ $=\langle\widetilde{\mu}^{m(P)}\rangle$。根据（91），通过映射 Cont$_\sigma$：$\Sigma_g\to\Sigma_g(\sigma)$ $\simeq\widetilde{F}$，曲线 $C_P=$ Cont$_\sigma{}^{-1}(P)$ 处的螺旋数为 s(C_P) $=-\delta^{(1)}/\lambda^{(1)}-\delta^{(2)}/\lambda^{(2)}-\mathbf{K}$。单值化映射 $\mu_{\widetilde{f}}\simeq\mu_f^N$在 C 的环形邻域上的作用相当于 C 次右手整系数德恩扭转

$$n(P):=\frac{N|\mathbf{s}(C_P)|}{m(P)}=\frac{\ell(\delta^{(1)}\lambda^{(2)}+\delta^{(2)}\lambda^{(1)}+\mathbf{K}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)})}{\gcd(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})}, \tag{100}$$

其中 $\ell=N/\big(\mathrm{lcm}(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})m(P)\big)\in\mathbf{Z}$。此映射在 P 的管状邻域上的限制给出了奇点 P 的米尔诺纤维化，其单值化映射为$\widetilde{\ }$上文所述的映射。这意味着， M 在 P 附近由方程$xy=u^{n(P)}$定义，其中 x和 y分别是 P两侧分支的局部参数。这里， $n(P)$与 $\widetilde{M}$ 的奇点 P的米尔诺数一致。根据（71），映射 $\widetilde{\mu}^{m(P)}$在 P 附近的局部表达式为

$$\widetilde{\mu}^{m(P)}:\ (x,y,u)\longmapsto\left(\mathbf{e}\left(\frac{\delta^{(1)}}{\lambda^{(1)}}\right)x,\ \mathbf{e}\left(\frac{\delta^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\right)y,\ \mathbf{e}\left(\frac{m(P)}{N}\right)u\right). \tag{101}$$

(iii) 假设 P 是具有 Stab$_G(P)$ $=\langle\widetilde{\mu}^{m(P)/2}\rangle$ 的反向节点。螺旋数$\widetilde{\ }$由式 (92) 中的 s(C_P) $=-2(\delta/\lambda)$ $-2\mathbf{K}$ 给出。然后，在 P 附近， M 由方程 $xy=u^{n(P)}$ 局部定义，使得米尔诺数 $n(P)$ 为

$$n(P)=\frac{N|\mathbf{s}(C_P)|}{m(P)}=2\ell\big(\delta+\mathbf{K}\lambda\big), \tag{102}$$

其中 $\ell=N/(\lambda m(P))$ $\in\mathbf{Z}$。映射 $\widetilde{\mu}^{m(P)/2}$由式 (72) 局部给出：

$$\widetilde{\mu}^{m(P)/2}:\ (x,y,u)\longmapsto\left(\mathbf{e}\left(\frac{\delta}{2\lambda}\right)y,\ \mathbf{e}\left(\frac{\delta}{2\lambda}\right)x,\ \mathbf{e}\left(\frac{m(P)}{2N}\right)u\right). \tag{103}$$

根据上述论证，我们定义如下：

定义 6.5。 退化 f 的带标记的轨形结构定义如下：(i)由轨形模型、精确稳定约化和群构成的集合

$$\{\widetilde{f}:\widetilde{M}\to\widetilde{\Delta},\ f^\sharp:M^\sharp\to\Delta,\ G=\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\} \tag{104}$$

$\widetilde{\ }$满足图 *II*，使得 G 在 f 上的作用局部由 *(98)* $\sim$*(103)* 导出，并且

(~ ~ii) 稳定曲线 $F = f^{-1}(0)$ 的韦伊标记的提升，由 $\boldsymbol{b}$ 给出 y

$$\widetilde{w} = \mathrm{cont}^{(\mathrm{nc})} \circ \pi_{\mu_{\widetilde{f}}} : \Sigma_g \longrightarrow \mathcal{W}(\mu_{\widetilde{f}}) \longrightarrow \widetilde{F}. \tag{105}$$

为简便起见，我们有时将这个带标记的轨形结构记作 $f^{\mathrm{orb}} = \{\widetilde{f}, f^\sharp, G, \widetilde{w}\}$。

~ ~**注 6.6.** (i) 由于 M 有奇点，*(f, G)* 不能直接定义 $f^\sharp$ 上的复轨形结构。不过，利用 *Takamura* 的方法*[66]*，很容易补足这一点：节点附近的作用 *(101)* 和 *(103)* 被提升为 $\mathbf{C}^2$ 上 *A* 型的局部线性作用。因此，$M^\sharp$ 在非核心部分收缩所得点的邻域内的轨形图，定义为 $\mathbf{C}^2$ 原点处的开邻域以及上述提升后的作用（另见 *[10, §3.2]*）。对于 $M^\sharp$ 的其他轨形图，~ 我们可以使用 M 的开集，以及 G 在这些开集上的限制作用。总之，$f^\sharp$： $M^\sharp \longrightarrow \Delta$ 具有轨形纤维化结构（见定义 *4.6*）。

(ii)标记 $\widetilde{w}$ *(105)* 显然下降为韦伊标记

$$w : \Sigma_g(\sigma) \longrightarrow \widetilde{F}. \tag{106}$$

若将标记 $\widetilde{w}$ 与 w进行比较，则 $\widetilde{w}$ 是通过提升 $\Sigma_g \to \Sigma_g(\sigma)$确定的，其中包含螺旋数的数据。这就是我们使用 $\widetilde{w}$ 而非w的原因。请注意，*Hubbard–Koch [37, Def.2.1]* 在构造增广 *Teichmüller* 空间时使用了这种稳定曲线标记（另见 *[9, p.490]*）。

6.3 局部轨形模空间映射与 Kodaira 周期性

在本小节中，我们定义退化的局部轨形模空间映射，并证明它具有 Kodaira 周期性。

对于给定的亏格为 g 的退化 f： $M \to \Delta$，其拓扑单值化为 $\mu_f \in \mathcal{P}_g^{(-)}(\sigma)$，受限全纯族 $f^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ 诱导出模空间映射 $\Delta^* \to M_g$。根据经典稳定约化定理和代数几何中的赋值判据，或根据 Imayoshi [39, Th.2,Th.4] 的解析论证，该映射可全纯延拓至 Deligne–Mumford 紧化

$$J_f : \Delta \longrightarrow \overline{M}_g, \tag{107}$$

这称为典范扩张模空间映射（[58]）。该映射由$f^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$决定，且与 f的局部双有理模型的选择无关。

现在我们考虑定义 6.5 中的 $f^{\mathrm{orb}} = \{\widetilde{f}, f^\sharp, G, \widetilde{w}\}$ f的带标记轨形结构，以及式 (43) 中的轨形 $M_g^{orb} = \{(D_\epsilon(\sigma)\ W(\sigma)\ \varphi_\sigma,\ M_\epsilon(\sigma))\}_{\sigma \in \mathcal{C}_g/\Gamma_g}$。映射 J_f提升为这些空间之间的映射如下。根据式 (106) 将标记 $\widetilde{w}$ 下降到 w，~ ~ ~我们考虑 σ-外尔带标记稳定曲线 $[F, w]$ $(F = f^{-1}(0))$。由于生成元

~ ~$\widetilde{\mu}$的 G诱导了 F的一个解析自同构，因此点 $p=[F,w]$属于定理 5.18 中的~等对称分层 T^{μ}_{σ}：

$$p=[\widetilde{F},w]\in T^{\widetilde{\mu}}_{\sigma}\subset T(\sigma)\subset D_{\epsilon}(\sigma). \tag{108}$$

我们考虑 (44)、(45) 的万能族 $\pi\div \overset{orb}{Y_g} \longrightarrow \overset{orb}{M_g}$。由定理 4.4，存在 $D_\epsilon(\sigma)$ 中 p 的一个开邻域 B，使得限制族 $\pi_X=\pi_\sigma|_X$：~$X=\pi_\sigma^{-1}(B)\subset X_\epsilon(\sigma)\longrightarrow B\subset D_\epsilon(\sigma)$ 是带有标记~ ~ ~ ~w的 F 的标准 Kuranishi 族。由于 f：$M\to\Delta$ 是 F 的局部变形，由 Kuranishi 族的泛性质可知，存在唯一的全纯映射

$$\widetilde{J}_{\widetilde{f}}:\widetilde{\Delta}\longrightarrow B \tag{109}$$

~ ~使得 f 是 π_X 在 $J_{\widetilde{f}}$ 下的拉回。于是我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{\Delta} & \xrightarrow[\widetilde{J}_{\widetilde{f}}]{} & \widetilde{J}_{\widetilde{f}}(\widetilde{\Delta}) & \subset & B & \subset & D_\epsilon(\sigma) \\
\pi\downarrow & & \downarrow\varphi_{\sigma,\widetilde{\Delta}} & & & & \downarrow\varphi_\sigma \\
\Delta & \xrightarrow[J_f]{} & J_f(\Delta)\subset\varphi_\sigma(B) & \subset & M_\epsilon(\sigma) & \subset & \overline{M}_g
\end{array}$$

（图 III）局部轨形模空间映射

~ ~其中 $\varphi_{\sigma,\tilde{\Delta}}$ 是轨形结构映射 φ_σ：$D_\epsilon(\sigma)\longrightarrow M_\epsilon(\sigma)=D_\epsilon(\sigma)/W(\sigma)$ 在 $J_{\widetilde{f}}(\Delta)$ 上的限制。更确切地说，图 III 中的空间 B 实际上是带有韦伊标记（B,w）的 Kuranishi 空间，而遗忘映射（B,w）$\to B\to\varphi_\sigma(B)$ 的限制的像不过是 B 对 G 的商；$\varphi_\sigma(B)=B/G$。根据 §6.2 中图 II 里的 f 的~构造，群 G 也作用在 B 的解析子空间~ ~ ~ ~$J_{\widetilde{f}}(\Delta)$ 上，使得 $J_f(\Delta)=J_{\widetilde{f}}(\Delta)/G$。从这个意义上说，$J_{\widetilde{f}}$是 J_f 的提升。考虑到这些要点，我们作如下定义：

定义 6.7。对于具有拓扑单值化 $\mu_f\in\mathcal{P}_g^{(-)}$（$\sigma$）和轨形结构 $f^{\mathrm{orb}}=\{\widetilde{f},f^\sharp,G,\widetilde{w}\}$的黎曼曲面退化 f：$M\to\Delta$，我们将其局部轨形模空间映射 定义为

$$\{\widetilde{J}_{\widetilde{f}}:\widetilde{\Delta}\to D_\epsilon(\sigma),\ J_f:\Delta\to M_\epsilon(\sigma),\ G\} \tag{110}$$

~ ~其满足图 *III*。为简便起见，我们有时仅将（*110*）记作 $J_{\widetilde{f}}$：$\Delta\to D_\epsilon$（σ）。

~ ~为了明确描述 $J_{\widetilde{f}}$：$\Delta\to D_\epsilon(\sigma)$，我们将定义一类特殊的全纯函数。

定义 6.8。 若存在一个全纯函数 $\widetilde{\varphi}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \ (c_i \in \mathbf{C})$，使得变量 t 在 $\mathbf{C}$ 中原点处的全纯函数 $\varphi(t)$ 是一个重数为 $\gamma \in \mathbf{N}$ 且周期为 $L \in \mathbf{N}$ 的伪周期函数，则称之为

$$\varphi(t) = t^{\gamma}\widetilde{\varphi}(t^L) = c_0 t^{\gamma} + c_1 t^{\gamma+L} + c_2 t^{\gamma+2L} + \cdots \qquad (c_0 \neq 0). \tag{111}$$

注记 6.9. 本框架中的伪周期函数概念受到 *Kodaira* *[46, §8]*的启发。正如我们已经解释过的，*[46, §7]* 中定义的椭圆曲线退化的函数不变量，用我们的术语来说就是轨形模映射。按照本文的术语，在 *[46, §8]*中每个退化纤维芽附近，该函数不变量都属于伪周期函数类。

伪周期函数的特征如下。

引理 *6.10.* 设 $\varphi(t)$ 是原点处的全纯函数，满足 $\varphi(0) = 0$ 且 $\varphi(t) \not\equiv 0$。那么，以下条件 *(i)* 和 *(ii)* 等价；*(i)* $\varphi(t)$ 是重数为 γ、周期为 L的伪周期函数；*(ii)* $\varphi(t)$ 存在一个由 $t \mapsto \mathbf{e}(1/L)t$ 给出的 $C \to C$ 作用，其特征为 $\mathbf{e}(\gamma/L)$，并且 $\varphi(t)$ 在原点处的导数满足以下条件；

$$\varphi\Big(\mathbf{e}\big(\frac{1}{L}\big)t\Big) = \mathbf{e}\big(\frac{\gamma}{L}\big)\varphi(t), \quad \varphi^{(\gamma)}(0) \neq 0,\ \varphi^{(j)}(0) = 0 \ \text{ for } \forall j < \gamma. \tag{112}$$

证明 我们假设 (i)。根据 $\varphi(t)$ 的表达式 (111)，可得

$$\varphi\Big(\mathbf{e}\big(\frac{1}{L}\big)t\Big) = c_0\mathbf{e}\big(\frac{\gamma}{L}\big)t^{\gamma} + \sum_{i\geq 1} c_i\mathbf{e}\big(\frac{\gamma+iL}{L}\big)t^{\gamma+iL} = \mathbf{e}\big(\frac{\gamma}{L}\big)\varphi(t).$$

由于 $c_0 \neq 0$，(ii) 中关于导数的条件也得到满足。

反过来，我们假设 (ii)。将 $\varphi(t)$ 分解为

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad \text{where } \varphi_1(t) = \sum_{i\equiv\gamma \bmod L} c_i t^i, \ \ \varphi_2(t) = \sum_{j\not\equiv\gamma \bmod L} c_j t^j.$$

于是可得

$$\varphi\Big(\mathbf{e}\big(\frac{1}{L}\big)t\Big) = \mathbf{e}\big(\frac{\gamma}{L}\big)\varphi_1(t) + \sum_{j\not\equiv\gamma \bmod L} c_j\mathbf{e}\big(\frac{j}{L}\big)t^j.$$

因此，条件 (ii) 表示

$$c_j\mathbf{e}\big(\frac{j}{L}\big) = c_j\mathbf{e}\big(\frac{\gamma}{L}\big), \ \text{ for } \forall j \not\equiv \gamma \pmod L.$$

这意味着 $c_j = 0, \forall j \not\equiv \gamma$ (模 L)，即 $\varphi_2(t) \equiv 0$。因此我们有 $\varphi(t) = \varphi_1(t)$。由 (ii) 中关于导数的条件可知，$\varphi_1(t)$ 的首项应为 t^{γ} 的非零常数倍。因此得到 (i)。

□

定义 6.11. 设 $\varphi(t)$ 是一个重数为 γ、周期为L的伪周期函数。设 γ' 和 $\mathbf{K}$ 是满足 $\gamma = \gamma' + \mathbf{K}L$、$\mathbf{K} \geq 0$、$0 \leq \gamma' \leq L-1$、$\gamma' \equiv \gamma$ (模 L)的整数。我们将 $\varphi(t)$ 的解析螺旋数 定义为

$$\mathbf{s}(\varphi) = \frac{\gamma}{L} = \frac{\gamma'}{L} + \mathbf{K}, \tag{113}$$

并称$\mathbf{K}$ *and* γ'/L 为整数项 *and*，称分数项 *and*为$\mathbf{s}(\varphi)$ 的整数项和分数项。

定义6.11的几何意义将在定理6.12 (iv)和注记6.14中得到阐明。

现在我们明确写出(110)中 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}}\colon \widetilde{\Delta} \to D_\epsilon(\sigma)$在 $p = [\widetilde{F}, w] \in T^{\widetilde{\mu}}_\sigma$附近的映射。根据§5.6中的讨论，$\widetilde{F}$的节点的轨道不可约分解 $\widetilde{F} = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{j=0}^{m(\widetilde{F}_i)-1} \widetilde{\mu}^j(\widetilde{F}_i)$和分解 $\sum_{i=1}^{\bar{k}} \sum_{j=0}^{m(P_i)-1} \widetilde{\mu}^j(P_i)$，诱导出 $D_\epsilon(\sigma)$在 p附近的Harris–Mumford坐标$(z_1^{(0)}, \cdots, z_i^{(j)}, \cdots, z_\alpha^{(\gamma)},_\beta, \cdots, z^{(m(F_{\bar{r}})-1)\,\bar{r},q_{\bar{r}}})$，如(89)所示。于是，映射 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}}$可由 $3g-3$ 全纯函数 $\varphi_i^{(j)}(u)$ $(1 \leq i \leq \bar{k}, 0 \leq j \leq m(P_i)-1)$,$\psi_\alpha^{(\gamma)},_\beta(u)$ $(1 \leq \alpha \leq \bar{r},\ 1 \leq \beta \leq q_\alpha,\ 0 \leq \gamma \leq m(\widetilde{F}_\alpha) - 1)$表示，其中 $\varphi_i^{(j)}(0) = \psi_\alpha^{(\gamma)},_\beta(0) = 0$ 分别映到这些坐标:

$$\widetilde{J}_{\widetilde{f}}\colon \quad z_i^{(j)} = \varphi_i^{(j)}(u), \quad z_{\alpha,\beta}^{(\gamma)} = \psi_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(u) \quad (u \in \widetilde{\Delta}). \tag{114}$$

以下定理从注记 6.9 的角度推广了 Kodaira 的结果。

定理 6.12. 设 $J_{\widetilde{f}}\colon \Delta \to D_\epsilon\sigma)$ $G)$ 为退化 $f\colon M \to \Delta$ （亏格为 $g \geq 2$）的带标记轨形结构 *(104)*、*(105)* 的轨形模映射 *(110)* 的图表。设 $\varphi_i^{(j)}u$ $\psi_\alpha^{(\gamma)},_\beta u$ 是 *(114)* 中表示 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}}$ 的全纯函数。那么

(i) $\varphi_i^{(0)}$ u 是一个伪周期函数，其周期为 N/mP_i，重数为nP_i。这里，nP_i 是 *(100)* （分别为 *(102)*）中所述的米尔诺数，分别对应于 P_i 为非反向节点（分别为反向节点）的情形。

(ii) 若 $\psi_\alpha^{(0)}$ $,_\beta(u) \neq 0$，则 $\psi_\alpha^{(0)}$ $,_\beta(u)$ 是一个伪周期函数，其周期为 $N/m(\widetilde{F}_\alpha)$，重数为

$$\gamma_{\alpha,\beta} := \left(\frac{n(\widetilde{F}_\alpha) - \theta_{\alpha,\beta}}{n(\widetilde{F}_\alpha)} + \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \right) \frac{N}{m(\widetilde{F}_\alpha)} \tag{115}$$

其中$\mathbf{K}_{\alpha,\beta}$ 是一个非负整数，且 $\theta_{\alpha,\beta}/n(F_\alpha)$ 由（*87*）给出。

(iii) 对于任意 j，我们有 $\varphi_i^{(j)}(u) = \varphi_i^{(0)}(u)$，且对于任意 γ，有 $\psi_\alpha^{(\gamma)},_\beta(u) = \psi_\alpha^{(0)},_\beta(u)$。

(iv) 伪周期函数 $\varphi_i^{(j)}(u)$ 和 $\psi_\alpha^{(\gamma)}$ $,_\beta(u)$的解析螺旋数由下式给出

$$\mathbf{s}(\varphi_i^{(j)}) = |\mathbf{s}(C_{P_i})|, \quad \mathbf{s}(\psi_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}) = \frac{n(\widetilde{F}_\alpha) - \theta_{\alpha,\beta}}{n(\widetilde{F}_\alpha)} + \mathbf{K}_{\alpha,\beta} \tag{116}$$

对于任意的 j 和 γ，其中 $|\mathbf{s}(C_{P_i})|$ 是式（*91*）和（*100*）或式（*92*）和（*102*）中给出的切割曲线C_{P_i} 的螺旋数的绝对值。

~证明 我们证明（i）。首先假设 P_i 是 F的一个非双向节点。令 $L = N/m(P_i)$。由于 $z_i^{(0)}$ 是挠层τ_{P_i}的生成元 v_{P_i} 的对偶向量，由引理 5.21 和式（100）可知， $\widetilde{\mu}^{m(P_i)}$ 作用于 $z_i^{(0)}$ 的方式为

$$\widetilde{\mu}^{m(P_i)}:\ z_i^{(0)} \longmapsto \mathbf{e}\Big(\frac{\delta^{(1)}}{\lambda^{(1)}} + \frac{\delta^{(2)}}{\lambda^{(2)}}\Big) z_i^{(0)} = \mathbf{e}\Big(\frac{n(P_i)}{L}\Big) z_i^{(0)}. \tag{117}$$

~ ~由于 $\widetilde{\mu}(\Delta)$ 自然是 $H^0(F,\ \Omega^{\frac{1}{\widetilde{F}}} \otimes \omega_{\widetilde{F}})^* \subset B \subset D_\epsilon(\sigma)$ 中的 G-不变子空间，且 $\widetilde{\mu}^{m(P_i)}$ 在 $\widetilde{\Delta}$ 上通过 $u \mapsto \mathbf{e}(1/L)u$作用，因此函数 $\varphi_i^{(0)}(u)$ 满足 $\varphi_i^{(0)}(\mathbf{e}(1/L)u) = \mathbf{e}\big(n(P_i)/L\big)\varphi_i^{(0)}(u)$。因此，由引理 6.10， $\varphi_i^{(0)}(u)$ 是一个周期为 L 的伪周期函数，其重数模 L 同余于 $n(P_i)$。

另一方面，正如我们在 §3.1 中解释 (20) 的注释 (II) 时所说， F 的 Kuranishi~族在节点 ([9, pp.184–186]) 处具有局部结构 $\{xy = t | (x,\ y,\ t) \in \mathbf{C}^3,\ |x|,\ |y|, |t| < 1\}$，也就是说，它是一个缝合簇（参见 [47]）。由于 $\widetilde{M}$ 在 P_i 处有奇点 $xy = u^{n(P_i)}$ ~ ~ ~ ~，而 f: $M \to \Delta$ 应由 $J_{\widetilde{f}}$ 从 Kuranishi 族拉回，因此映射 $\sim J_{\widetilde{f}}$ 在局部由下式给出

$$\widetilde{J}_{\widetilde{f}} : u \mapsto t = u^{n(P_i)}\psi(u)$$

其中 $\psi(u)$ 是一个满足 $\psi(0) \neq 0$ 的全纯函数。

因此， $\varphi_i^{(0)}(u)$ 的重数恰好与 $n(P_i)$ 重合。

因此，对于非双向情形，我们得到了断言 (i)。当 P_i 是一个反向节点时，讨论类似，故略去。

我们证明 (ii)。考虑一个分支 $\widetilde{F}_\alpha$，并设 $L' = N/m(\widetilde{F}_\alpha)$。由于 $z_\alpha^{(0)}{}_{,\beta}$ 是 (87) 中 $v_{\alpha,\beta}$ 的对偶向量，映射 $\widetilde{\mu}^{m(F_\alpha)}$ 的作用为

$$\widetilde{\mu}^{m(\widetilde{F}_\alpha)}:\ z_{\alpha,\beta}^{(0)} \longmapsto \mathbf{e}\left(-\frac{\theta_{\alpha,\beta}}{n(\widetilde{F}_\alpha)}\right) z_{\alpha,\beta}^{(0)} = \mathbf{e}\left(\frac{1}{L'}\left(-\frac{\theta_{\alpha,\beta}L'}{n(\widetilde{F}_\alpha)}\right)\right) z_{\alpha,\beta}^{(0)}.$$

因此，由引理 6.10，我们同样得到断言 (ii)。

由于映射 $\widetilde{\mu}$ 的迭代对节点轨道的每个邻域以及 F 的分支~的轨道的每个邻域，均作循环置换且保持同构，因此断言 (iii) 成立。

断言 (iv) 由 (i)、(ii)、(iii) 和定义 6.11 显然成立。 □

注 6.13. 在定理 *6.12* 的性质 *(ii)* 中，可能出现平凡函数 $\psi_\alpha^{(0)}{}_{,\beta}(u) \equiv 0$。特别地，在 $\bar{k} = 0$ $\psi_{1\,\beta}^{(0)}\ u \equiv 0$ $1 \le \beta \le 3g-3$ $\widetilde{J}_{\widetilde{f}}$且 $,()$ 对所有 都成立的情形下，是常值映射 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}}(\Delta) = p$，即 $M \simeq F \times \Delta$且 f $F \times \Delta \longrightarrow \Delta$是投影，使得 f 由$(F \times \Delta)/G$的解消得到。

~ ~ ~**注 6.14.** 解析螺旋数（$n(F_\alpha) - \theta_{\alpha,\ \beta}$）$/n(F_\alpha)$ 的分数项s（$\psi_\alpha^{(\gamma)}{}_{,\beta}$）在 *(116)* 中是一个拓扑不变量，因为根据命题*5.3*，它由总赋值决定

利用命题*5.3*。另一方面，$\mathbf{K}_{\alpha,\,\beta}$ 的整数项$\mathbf{s}$（$\psi_{\alpha}^{(\gamma)}$, β）不是拓扑不变量，而完全由 f 的解析结构决定。与通常的螺旋数 *(91)* 和 *(92)* 相比，数$\mathbf{K}_{\alpha,\,\beta}$ 似乎是“积分德恩扭转数的解析类比”。另见 *Kuno* 的论文 *[49, §4.3]*。

在某种情况下，从 *[13]*的角度来看，$\mathbf{K}_{\alpha,\,\beta}$ 与纤维芽(f, F) 的模不变量*([63],[68])*有关。这一点将在一篇后续论文中讨论。

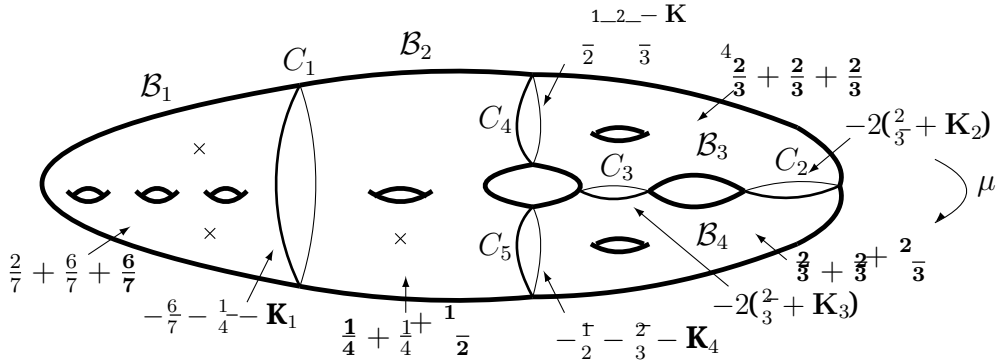
6.4 退化的例子及其不变量

这里我们给出黎曼曲面退化的两个例子，并展示它们的轨形结构及其轨形模映射的性质。

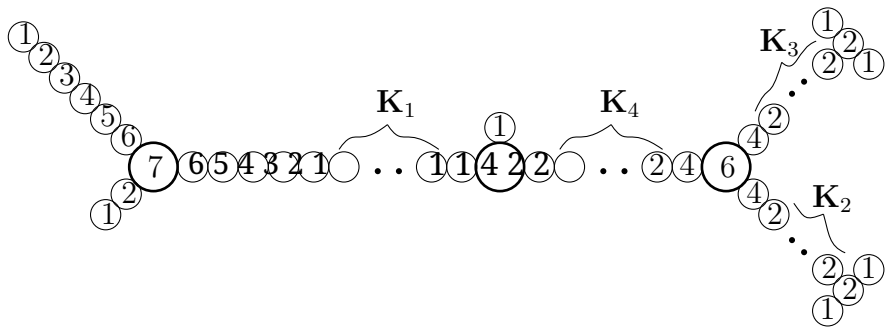
例 6.15。 设 $\mu\colon\ \Sigma_8 \longrightarrow \Sigma_8$ 为$\mathbf{P}_8^{(-)}(\sigma)$ 中具有 $\sigma = \langle C_1, \cdots, C_5\rangle$ 且伪周期为 $N = 84$ 的元素，如图 *III* 所示。 $\mathcal{B} = \coprod_{i=1}^{4}\mathcal{B}_i = \Sigma_8 \setminus \coprod_{j=1}^{5} C_j$ 的总价数在 $\mathcal{B}_1$上为$(g = 3, \bar{g} = 0,$ $n = 7;\ \ 2/7 + 6/7 + \mathbf{6/7})$，在 $\mathcal{B}_2$上为$(g = 1, \bar{g} = 0, n = 4; \mathbf{1/4} + 1/4 + \mathbf{1/2})$，在 $\mathcal{B}_3$ 和 $\mathcal{B}_4$上为$(g = 1, \bar{g} = 0, n = 3;\ \ \mathbf{2/3} + \mathbf{2/3} + \mathbf{2/3})$。其中，粗体标出的价数对应边界曲线，罗马字体标出的价数对应主体内部用叉号标记的多重点。

图上的作用的阶为 *2*，具有 $\mu(\mathcal{B}_3) = \mathcal{B}_4$, $\mu(C_4) = C_5$，其中 C_1, C_4,C_5 是非双向的， C_2, C_3 是双向边。螺旋数为 $s(C_1) = -6/7 - 1/4 - K_1$ $(K_1 \geq -1)$、$s(C_2) = -2($ $2/3 + K_2)$ $(K_2 \geq 0)$、$s(C_3) = -2(2/3 + K_3)$ $(K_3 \geq 0)$、$s(C_4) = s(C_5) = -1/2 - 2/3 - K_4$ $(K_4 \geq -1)$。

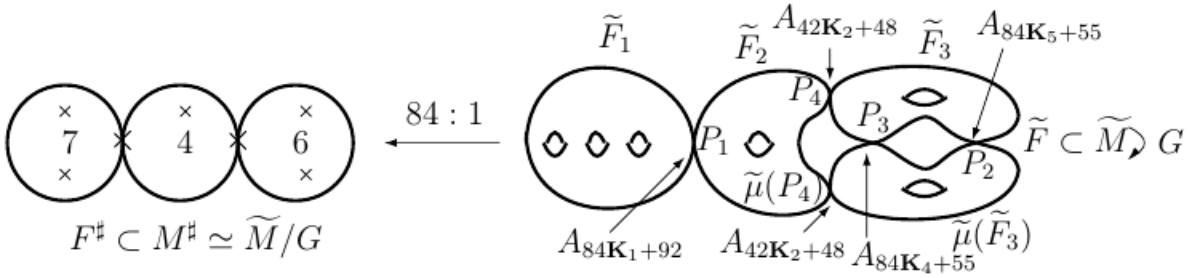
令 $f\colon\ M \longrightarrow \Delta$ 为拓扑单值化 $\mu_f = \mu$ 下某个退化的正规极小模型。中心纤维 $F = f^{-1}(0)$，即广义商 $\mathcal{W}(\mu_f)$，由 *[55]* 中的算法给出，如图 *IV* 所示。图中的圆圈表示$\mathbf{P}^1$，圆圈中的数字表示它们的重数。（图中省略了某些 i 对应的$\mathbf{K}_i = -1$ 情形。



（图 III）例 6.15 的拓扑单值化数据



（图 IV）例 6.15 的正规极小模型的中心纤维 F



(Figure V) The central fibers of the precise stable reduction of Ex. 6.15

F 有三个核心分支，其重数分别为7、4 和6。

通过收缩 F 的非核心部分 $M \longrightarrow M^\sharp$，我们得到轨形模型$f^\sharp$： $M^\sharp \longrightarrow \Delta$。纤维 $F^\sharp = (f^\sharp)^{-1}(0)$ 如图 V 所示。这里的 $M^\sharp$具有五个孤立的循环商奇点和两个二面体商奇点，其支集在该图中以十字符号标示。

设 $\widetilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$ 为覆盖 $u \mapsto t = u^{84}$，设 $\widetilde{M}$ 为 $M^\sharp \times_\Delta \widetilde{\Delta}$ 的正规化。我们得到精确稳定约化 $\widetilde{f}$： $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{\Delta}$以及轨形结构 $(f^\sharp, \widetilde{f}, G = \sim \langle\widetilde{\mu}\rangle \simeq \mathbf{Z}/84\mathbf{Z})$。稳定纤维 $F = f^{-1}(0)$ 如图 V 所示。拓扑单值化 $\mu_{\widetilde{f}} \simeq \mu_f^{84}$ 在 $\mathcal{B}$ 上是平凡的，并且在 C_j 的环形邻域处作用为 $n_i = 84/\mathrm{s}(C_i)$ 右德恩扭转，即

$$n_1 = 84\mathbf{K}_1 + 93,\ n_2 = 84\mathbf{K}_2 + 56,\ n_3 = 84\mathbf{K}_3 + 56,\ n_4 = n_5 = 42\mathbf{K}_4 + 49. \qquad (118)$$

~ ~标记由复合映射

$w \quad \Sigma_8 \to \Sigma_8\ \sigma \ \simeq \mathcal{W}\ \mu_{\widetilde{f}} \ \to F \qquad F =: (\ )(\ )(\ )$ 定义。设 $(\ )$ 为轨道不 $\sum_{i=1}^{2} \widetilde{F}_i + \sum_{j=0}^{1} \widetilde{\mu}^j\ \widetilde{F}_3 \qquad w\ \mathcal{B}_i = \widetilde{F}_i \quad 1 \le$ 可约分解，使得 $(\ )\ (i \le 3)$，$w(\mathcal{B}_4) = \widetilde{\mu}(\widetilde{F}_3)$。设 $P = \sum_{i=1}^{3} P_i + \sum_{j=0}^{1} \widetilde{\mu}^j(P_4)$ 为 F 上 ~ ~节点集合的分解，使得 $w(C_i) = P_i\ (1 \le i \le 4)$ 且 $w(C_5) = \widetilde{\mu}(P_4)$。 M 在每个节点处都有 $xy = u^{n_i}$ 型的奇点~，对应于 (118)。 G 到 M 的作用不是有效的。事实上，~ ~稳定子 $_G(F_1) = G$ 的阶为 86，而 F_1 的自同构 $\widetilde{\mu}_{|\widetilde{F}_1}$ 的阶为 7。

~ ~令 $V_1 = H^0(F_1, 2K_{\widetilde{F}_1} + P_1)$、$V_2 = H^0(F_2, 2K_{\widetilde{F}_2} + P_1 + P_4 + \widetilde{\mu}(P_4))$、$V_3 = \sim \sim H^0(F_3, 2K_{\widetilde{F}_3} + P_2 + P_3 + P_4)$ 以及 $\widetilde{\mu}(V_3) = H^0(\widetilde{\mu}(F_3)\ 2K_{\widetilde{F}_3} + P_2 + P_3 + \widetilde{\mu}(P_4))$。根据例*5.6*以及运用命题*5.3*的类似论证，对数二次特征为

$$\mathrm{Ch}_{\widetilde{\mu}} V_1 = \left\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right\},\ \mathrm{Ch}_{\widetilde{\mu}} V_2 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\},\ \mathrm{Ch}_{\widetilde{\mu}^2} \widetilde{\mu}^j(V_3) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \quad (119)$$

对于 $j = 0,\ 1$。小 ***Teichm¨uller*** 空间 $T(\sigma)$ 局部上是 $\bigoplus_{i=1}^{2} V_i \bigoplus_{j=0}^{1} \widetilde{\mu}^j(V_3)$的一个开集，且 维数 $T(\sigma) = 16$。等对称分层 $T_\sigma^{\widetilde{\mu}}$由唯一一点 $p = [\widetilde{F}, w]$构成，因为根据 ***(119)***，0-特征空间是 0维的，并且根据推论*5.19*， $T_\sigma^{\widetilde{\mu}}$ 是连通的。令

$$(z_1, z_2, z_3, z_4^{(0)}, z_4^{(1)}, z_{1,1}, \cdots, z_{1,7}, z_{2,1}, z_{2,2}, z_{2,3}, z_{3,1}^{(0)}, z_{3,2}^{(0)}, z_{3,3}^{(0)}, z_{3,1}^{(1)}, z_{3,2}^{(1)}, z_{3,3}^{(1)}) \quad (120)$$

为 $D_\epsilon(\sigma)$ 在 p 处的哈里斯–芒福德坐标系，其排列顺序为节点处有序挠层的对偶向量，以及与 ***(119)*** 中的特征相对应的特征向量。由 ***(119)*** 可得，***(115)*** 中给出的重数为

$$\gamma_{1,j} = 84\mathbf{K}_{1,j} + 12\gamma'_{1,j},\ \ \gamma'_{1,j} = 6, 5, 5, 4, 3, 2, 1\ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),\ \mathbf{K}_{1,j} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad (121)$$

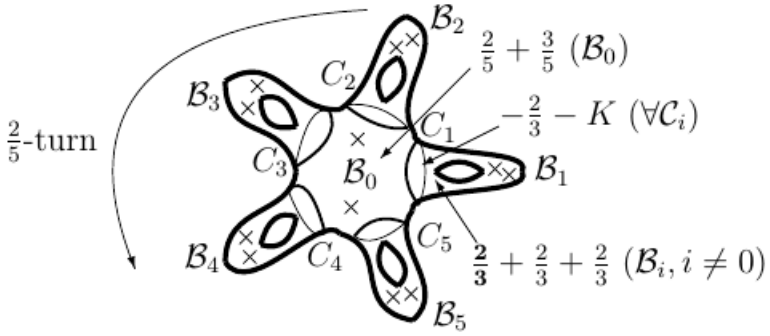
$$\gamma_{2,j} = 84\mathbf{K}_{1,j} + 21\gamma'_{2,j},\ \ \gamma'_{2,j} = 3, 2, 1\ (j = 1, 2, 3),\ \mathbf{K}_{2,j} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad (122)$$

$$\gamma_{3,j} = 42\mathbf{K}_{3,j} + 14\gamma'_{3,j},\ \ \gamma'_{3,j} = 2, 2, 1\ (j = 1, 2, 3),\ \mathbf{K}_{3,j} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad (123)$$

这里的记号表示 $\gamma'_{1,\ 1} = 6$、$\gamma'_{1,\ 2} = 5$、$\cdots$、$\gamma'_{3,\ 3} = 1$。由定理*6.12*、***(120)***、~ ~ ***(118)*** 以及 ***(121)∼(123)***，轨形模映射 $J_{\widetilde{f}}$： $\Delta \to D_\epsilon(\sigma)\ (u \in \Delta)$ 具有如下 ***Kodaira*** 周期性

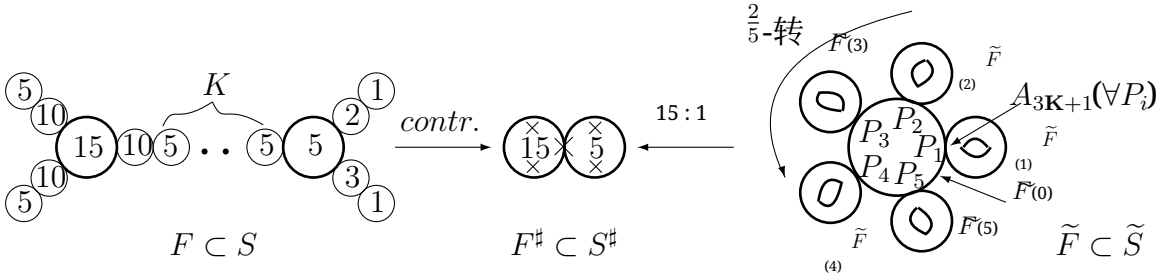
$$\begin{aligned}
z_i &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{i,k} u^{n_i + 84k} \quad (i = 1, 2, 3, c_{i,0} \neq 0, c_{i,k} \in \mathbf{C}),\\
z_4^{(j)} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{4,k} u^{n_4 + 42k} \quad (j = 0, 1, c_{4,0}^{(k)} \neq 0, c_{4,k} \in \mathbf{C}),\\
z_{i,j} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{i,j,k} u^{\gamma_{i,j} + 84k} \quad (i = 1, 2, j = 1, 2, 3, c_{i,j,k} \in \mathbf{C}),\\
z_{3,i}^{(j)} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{3,i,k} u^{\gamma_{3,i} + 42k} \quad (i = 1, 2, 3, j = 0, 1, c_{3,i,k} \in \mathbf{C}).
\end{aligned}$$

例*6.16.* 令 μ： $\Sigma_5 \longrightarrow \Sigma_5$ 为 $P_5^{(-)}(\sigma)$ 中的元素，其中 $\sigma = \langle C_1, \cdots, C_5 \rangle$和 $N = 15$ 如图*VI*所示。 $\mathcal{B} = \coprod_{i=0}^{5} \mathcal{B}_i = \Sigma_5 \setminus \coprod_{j=1}^{5} C_j$ 的总价数在 $\mathcal{B}_0$ 上为 $(g = 0, \bar{g} = 0, n = 5, 2/5 + 3/5 + \mathbf{1})$，在 $\mathcal{B}_i (1 \leq i \leq 5)$ 上为 $(g = 1, \bar{g} = 0, n = 3, 2/3 + 2/3 + \mathbf{2/3})$。图上的作用的阶为 *5*，其置换为 $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4)$、$(C_1, C_3, C_5, C_2, C_4)$，即 *[55,* 第 *148]* 页所述的 $2/5$ 转，其中 C_j 为非双向边，螺旋数 $s(C_j) = -2/3 - K$ （$K \geq 0$）。



(Figure VI) The data of topological monodromy of Ex. 6.16

令 $f: S \longrightarrow \Delta$ 为拓扑单值化 $\mu_f = \mu$ 的退化。纤维 $F = f^{-1}(0)$ 以及获得其精确稳定约化 $f: S \longrightarrow \Delta$ 的过程如图VII所示。这里 $\widetilde{F} = \widetilde{f}^{-1}(0) = \sum_{i=0}^{5} \widetilde{F}_i$ 是不可约分解，使得对于诱导自同构 $\widetilde{\mu}: \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{F}$，$\widetilde{F}(i) = \widetilde{\mu}^{i-1}(\widetilde{F}(1))$ ($1 \leq i \leq 5$)。于是 $g(\widetilde{F}^{(0)}) = 0$, $g(\widetilde{F}(i)) = 1$，且 $\widetilde{S}$ 在节点 $P_i (1 \leq i \leq 5)$ 处有 $A_{3\mathbf{K}+1}$-奇点。



(图VII) 例6.16精确稳定约化的中心纤维

我们设定 $V_0 = H^0(\widetilde{F}_0, 2K_{\widetilde{F}_0} + \sum_{i=1}^{5} P_i)$，$V_1 = H^0(\widetilde{F}_1, 2K_{\widetilde{F}_1} + P_1)$。利用命题5.3计算可得，对数二次特征为

$$\mathrm{Ch}_{\widetilde{\mu}} V_0 = \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \ \mathrm{Ch}_{\widetilde{\mu}} V_1 = \left\{\frac{2}{3}\right\}. \tag{124}$$

那么，$T(\sigma)$ 在局部上是 $V_0 \bigoplus_{j=0}^{4} \widetilde{\mu}^j(V_1) \simeq \mathbf{C}^7$, 的一个开集，并且根据（124），$T_\sigma^{\widetilde{\mu}}$ 只由一个 $\widetilde{}$ 点 $p = [F, w]$ 组成。由（124）可知，（115）中给出的重数为

$\gamma_{0,1} = 15K_{0,1} + 12$, $\gamma_{0,2} = 15K_{0,2} + 3$, $\gamma_{1,1} = 3K_{1,1} + 1$ ($K_{0,1}, K_{0,2}, K_{1,1} \in Z_{\geq 0}$). 设 $(z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, z_1^{(3)}, z_1^{(4)}, z_{0,1}, z_{0,2}, z_{1\,1}^{(0)}, , z_{1\,1}^{(1)}, , z_{1\,1}^{(2)}, , z_{1\,1}^{(3)}, , z_{1\,1}^{(4)},)$ 为 p 处 $D_e(\sigma)$ 上的 Harris–Mumford $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 坐标系。那么，轨形模映射 $J_{\widetilde{f}}: \Delta \to D_e(\sigma)$ ($u \in \Delta$) 具有 Kodaira 周期性，其形式为

$$z_1^{(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k} u^{2+3\mathbf{K}+3k} \quad (0 \leq j \leq 4, c_{1,0} \neq 0, c_{1,k} \in \mathbf{C}),$$

$z_{0,j}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{0,j,k}u^{\gamma_{0,j}+15k}\ (j=1,2,c_{0,j,k}\in\mathbf{C}),\ z_{1,1}^{(j)}=\sum_{k=0}^{\infty}c_{1,1,k}u^{\gamma_{1,1}+3k}\ (0\le j\le 4,c_{1,1,k}\in\mathbf{C}).$

7 从万能退化族恢复纤维化复曲面

本节旨在证明，任意纤维化复曲面都可以由第 4 节给出的黎曼曲面普遍退化族 $\pi:Y_g^{orb}\longrightarrow M_g^{orb}$ 拉回得到。通过将第 6 节讨论的概念全局化，我们为亏格为 $g\geq 2$ 的纤维化复曲面 $\mathbf{f}:\mathbf{M}\to\mathbf{B}$ 定义全局单值化 μ 和全局轨形模映射 $\mathbf{J}^{orb}$。反过来，从不变量 $(\mu,\mathbf{J}^{orb})$ 出发，我们通过经由 $\mathbf{J}^{orb}$ 拉回万能族 π，构造一个实现这些不变量的纤维化复曲面$\mathbf{f}$。

注意，Kodaira [46] 构造了一个具有给定（μ，$\mathbf{J}^{orb}$）（按他的术语，即同调不变量和函数不变量）的椭圆曲面，并将其称为椭圆曲面的基本成员（[46, 第603]页）。我们的定理 7.8 可视为构造亏格为 $g\geq 2$的纤维化复曲面的基本成员。

在 §7.1 中，我们从局部视角进行讨论。对于给定的伪周期映射$\sim\mu_{loc}\in\mathrm{P}\bar{g}(\sigma)$，我们定义集合 $\mathrm{P}^*(\Delta,\Delta;\ D_\epsilon(\sigma)\ M_\epsilon(\sigma);T_\sigma^{\mu_\sigma})$，它由 μ_{loc}的对偶伪周期映射组成，即从轨形圆盘到 M_g^{orb}在等对称分层$T_\sigma^{\mu_\sigma}$处的图表$D_\epsilon(\sigma)$的轨形映射 J_{loc}^{orb}，其具有定理 6.12 中给出的 Kodaira 周期性。简言之，对于给定的（$\mu_{loc},\mathrm{J}_{loc}^{orb}$），我们通过 J_{loc}^{orb} 以轨形理论意义拉回万能族 π的局部结构，构造退化$f:\ M\to\Delta$，使其实现这些不变量。此外，我们证明，$\widetilde{\mathrm{P}}^*(\Delta,\Delta;\ D_\epsilon(\sigma)\ M_\epsilon(\sigma);\ T_\sigma^{\mu_\sigma})$ 是建立在 f固定拓扑结构之上的解析结构的分类空间。

在 §7.2 中，我们定义纤维化复曲面 $\mathrm{f}:\mathrm{M}\to\mathrm{B}$ 的全局单值化和全局轨形模映射。在 f 的判别轨迹之外的受限全纯族 $\mathrm{f}^{(0)}:\mathrm{M}^{(0)}\to\mathrm{B}^{(0)}$ 上，这些概念就是通常的概念，即取值于映射类群的单值表示 $\mu:\ \pi_1(\mathrm{B}^{(0)},b_0)\ \to\ \Gamma_g$，以及由模空间映射 $\mathrm{J}^{(0)}:\mathrm{B}^{(0)}\to M_g$ 及其提升$\widetilde{\mathrm{J}}^{(0)}:\ \widetilde{\mathrm{B}}^{(0)}\to T_g$ 组成的对 $(\mathrm{J}^{(0)})^{orb}=(\widetilde{\mathrm{J}}^{(0)},\mathrm{J}^{(0)})$；该提升从 $\mathrm{B}^{(0)}$ 的万有覆盖映到 Teichm¨uller 空间。我们证明，在 §7.1 中给出的临界集附近，$(\mu,(\mathrm{J}^{(0)})^{orb})$ 和 $(\mu_{loc},\mathrm{J}_{loc}^{orb})$ 都能在全局上良好拼接。

在第7.3节中，我们通过证明定理 7.8 达成了主要目的。

7.1 Loc从万能族恢复退化

我们讨论 从 π 的局部结构中恢复退化 $f\colon M\to\Delta$ $^{-}$.

我们固定一个具有伪周期 N（见（90））的元素 $\mu\in \mathrm{P}_g^{-}(\sigma)$。置 $G=\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, $\sim$ $\tilde{}$，并令（Δ, G, $\pi_{\tilde{\Delta}}$, Δ）为由 $\pi_{\tilde{\Delta}}$: $\Delta\ni u\mapsto t=u^N\in\Delta$ 定义的轨形圆盘。令μ_σ： $\Sigma_g(\sigma)\to\Sigma_g(\sigma)$ 为 μ 的解析自同构下降（见命题 6.2）。我们考虑等对称分层 $T_\sigma^{\mu_\sigma}\subset D_\epsilon(\sigma)$。固定一点 $p=[S,w]\in T_\sigma^{\mu_\sigma}$, 并令（$\cdots$, $z_i^{(j)}$, $\cdots$, $z_\alpha^{(\gamma)}$, β, $\cdots$）为 $D_\epsilon(\sigma)$ 上 p 处的 Harris–Mumford 坐标系。

定义 7.1. 轨形映射

$$(\widetilde{J},J,G):(\widetilde{\Delta},G,\pi_{\widetilde{\Delta}},\Delta)\longrightarrow(D_\epsilon(\sigma),W(\sigma),\varphi_\sigma,M_\epsilon(\sigma))$$

到 M_g^{orb} 的图表 *(43)* 的映射称为 μ 在 p 处的对偶伪周期映射，若满足以下条件：全纯映射 $J:\Delta\to D_\epsilon(\sigma)$ 满足 $J(0)=p$，可表示为 $(3g-3)$ 伪周期函数 $z_i^{(j)}=\varphi_i^{(j)}(u)$、$z_\alpha^{(\gamma)}$、$_\beta=\psi_{\alpha\,\beta}^{(\gamma)}$、$(u)$，且 *(d-i)* $\varphi_i^{(0)}(u)$ 具有周期 $N/m(P_i)$ 和重数 $n(P_i)$，如 *(100)* 或 *(102)* 所示；*(d-ii)* $\psi_\alpha^{(0)}$、$_\beta(u)$ 具有周期 $N/m(\widetilde{F}_\alpha)$ 和重数 γ_α、$_\beta$，如 *(115)* 所示，或者 $\psi_\alpha^{(0)}$、$_\beta(u)\equiv 0$；*(d-iii)* 对于 j、$0\le j\le m(P_i)-1$，$\varphi_i^{(j)}(u)=\varphi_i^{(0)}(u)$，并且对于 γ、$0\le\gamma\le_{\sim} m(F_\alpha)-1$，$\psi_\alpha^{(\gamma)}$、$_\beta(u)=\psi_\alpha^{(0)}$、$_\beta(u)$。

$\tilde{}$全纯映射 $J=\varphi_\sigma\circ J\circ(\pi_{\tilde{\Delta}})^{-1}:\ \Delta\longrightarrow M_\epsilon(\sigma)$ 是良定义的。

这个定义的动机来自定理6.12。(d-i)∼ (d-iii)中的所有不变量，除了 $K_{\alpha,\beta}$，都由定理6.1中 μ 的数据 (a)、(b)、(c) 数值确定。但只要满足 $\gamma_{\alpha,\beta}>0$（见 (115)），$K_{\alpha,\beta}$ 就可以是任意非负整数。由于这样的 $K_{\alpha,\beta}$ 有无穷多种取值（参见定理6.12 (ii)），对于给定的 μ 和 p，(J,J,G) 也有无穷多种取值。令 $P^*(\Delta,\Delta;\ D_\epsilon(\sigma)\ M_\epsilon(\sigma);\ p)$ 表示 μ 在 p 处的对偶伪周期映射 (J,J,G) 的集合。令 p 遍历 $T_\sigma^{\mu_\sigma}$，得到以下定义：

定义 7.2. 对于 μ， $T_\sigma^{\mu_\sigma}$ 的对偶伪周期映射集合定义为

$$\mathbf{P}^*(\widetilde{\Delta},\Delta;D_\epsilon(\sigma),M_\epsilon(\sigma);T_\sigma^{\mu_\sigma})=\bigcup_{p\in T_\sigma^{\mu_\sigma}}\mathbf{P}^*(\widetilde{\Delta},\Delta;D_\epsilon(\sigma),M_\epsilon(\sigma);p).$$

$\sim$ $\tilde{}$定理 *7.3*。*(i)* 对于任意 $\mu\in P_g^{-}(\sigma)$ 和 $(J,J,G)\in P^*(\Delta,\Delta;\ D_\epsilon(\sigma)\ M_\epsilon(\sigma);T_\sigma^{\mu_\sigma})$，唯一存在一个退化 f： 亏格为 g 的黎曼曲面的 $M\to\Delta$，使得 f 的带标记的拓扑单值化与 μ 一致，且 f 的轨形$\tilde{}$模空间映射的图映射与 (J,J,G) 一致。

(ii) 对于元素 $(\widetilde{J}(i)\,J^{(i)},G)\in P^*(\widetilde{\Delta},\Delta;\ D_\epsilon(\sigma)\ M_\epsilon(\sigma);\ T_\sigma^{\mu_\sigma})\ (i=1,2)$，设 $f(i):M^{(i)}\to\Delta$ 为 *(i)* 中给出的退化。则 $f(1)$ 与 $f(2)$ 解析等价，当且仅当 $(\widetilde{J}(1)\,J^{(1)},G)$ 与 $(\widetilde{J}(2)\,J(2)\,G)$ 重合。

~ ~证明 我们证明 (i)。考虑一个元素 $(J, J, G) \in \mathbf{P}^*(\Delta, \Delta;\ D_\epsilon(\sigma)\ M_\epsilon(\sigma);$ $p)$，对于 $p = [S, w] \in T^\mu_\sigma$，Harris-Mumford 坐标 $(\cdots, z_i^{(j)}, \cdots, z_\alpha^{(\gamma)}{}_{,\beta}, \cdots)$ 是 p 在 $D_\epsilon(\sigma)$ 上的坐标，而 $\widetilde{J}$ 则通过伪周期函数 $\varphi_i^{(j)}(u)$ 和 $\psi_\alpha^{(\gamma)}{}_{,\beta}(u)$ 表示。

~ ~ ~令 $\pi_\sigma\colon\ X_\epsilon(\sigma) \to D_\epsilon(\sigma)$ 为定理 4.4 中的族，并令 $f\colon M \to \Delta$ 为通过映射 $J\colon\ \Delta \to D_\epsilon(\sigma)$ 从 π_σ 拉回的族（按定义 4.10 的意义），即 f 是纤维积 $M = \pi_\sigma^{-1}(J(\Delta)) \times_{\widetilde{J}(\widetilde{\Delta})} \Delta \longrightarrow \Delta$的第二投影。根据构造，中心纤维 $f^{-1}(0)$ 与 S 同构。

下面证明以下断言：

~ ~**断言** M 具有正规 A型奇点，并且对于 $u \neq 0$，任意纤维 $f^{-1}(u)$都非奇异。

事实上，由于 $z_i^{(j)}$ 是节点处的平滑坐标，且 $\varphi_i^{(j)}(u)$不恒为零，S 的所有节点都通过 S的变形 f 消失；也就是说，对于 $u \neq 0$，纤维 $f^{-1}(u)$~ ~非奇异。接下来，限制族 $\pi_\sigma^{-1}(J(\Delta)) \longrightarrow_\sim \sim J(\Delta)$的全空间沿中心纤维具有非正规奇点；该中心纤维是复空间曲线上的非孤立尖点，在$\mathbf{C}^{3g-2}$ 中局部由映射的像给出

$$\widetilde{J}: \widetilde{\Delta} \ni u \longmapsto (\cdots, z_i^{(j)}, \cdots, z^{(\gamma)}_{\alpha,\beta}, \cdots, x) = (\cdots, u^{n(P_i)}, \cdots, u^{\gamma_{\alpha,\beta}}, \cdots, x) \tag{125}$$

在条件 $n(P_i) \geq 2$ 和γ_α下，模去单位后，对任意 i、α、β均成立；其中 x 是 π_σ 在 $\pi_\sigma^{-1}(0)$的一个非奇异点处的局部纤维坐标。幸运的是，这些余维一奇点沿中心纤维的开轨迹自动得到解消，这是因为通过 J拉回~；对于 u，根据(125)，可将其视为该奇点的局部一致化参数。另一方面，$\widetilde{Y}_g$ 中节点 $P(j)_i$处的芽$(\widetilde{Y}_g, P(j)_i)$，与 $\mathbf{C}^{3g-1}$的环境坐标$(\cdots, z_i^{(j)}, \cdots, z_\alpha^{(\gamma)}{}_{,\beta}, \cdots, x, y)$中由 $xy = z_i^{(j)}$ 给出的原点处的芽重合（参见 $[9,$第XI章，§ $3]$）。于是，芽$(\widetilde{M}, P(j)_i)$是 A型奇点 $xy = u^{n(P_i)}$。上述断言得证。

~ ~现在根据定义 (d-i) ∼ (d-iii)、引理 6.10 和 (88)，复曲线 $J(\Delta) \subset B \subset D_\epsilon(\sigma)$ 在 $G = \langle\mu\rangle$ 对 B 的作用下保持不变，并且与 Δ 上的~ 作用相容，即

$$\widetilde{J}\left(\mathbf{e}\left(\frac{1}{N}\right) u\right) = \widetilde{J}\left(\mu(u)\right).$$

~因此，G 在族 f上有相对作用，这是中心纤维 S自同构的自然延拓。关于该作用在 f 上的显式描述，本质上与图 II 中给出的 (98) ∼(103) 相同。令 $f^\sharp$: $M^\sharp = \widetilde{M}/G \longrightarrow \Delta = \widetilde{\Delta}/G$ 为商族。通过复合 $f^\sharp$ 与对 $M^\sharp$ 上奇点的极小解消 $M \to M^\sharp$，我们得到一个退化的正规极小模型 $f\colon\ M \to \Delta$。

f 的带标记的拓扑单值化与预先指定的 $\mu \in \mathbf{P}^{-}_{g}(\sigma)$ 相吻合，因为根据 [10, 定理 3.1.1], 它由 G 的作用决定。f 的轨形结构不过就是上述 $\{f^{\sharp}, f, G\}$。令 $J_f\colon \Delta \to M_\sigma$ 为 f经规范延拓的模空间$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$映射。那么，显然 J 是 J_f 经 G的提升，即 J 是 f的轨形模映射的图表映射。因此，我们得到了所需的唯一退化 f。

我们证明 (ii)。假设 $f^{(i)}$ 对于 $i = 1,\ 2$ 彼此解析等价。于是 $J_{f^{(i)}}$: $\Delta \longrightarrow M_\sigma \subset M_g$ 彼此相同（参见 [58]）。因此存在$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$一个元素 $g \in G$，使得 $J_{\widetilde{f}^{(2)}} = g \circ J_{\widetilde{f}^{(1)}}$。若 $g \neq \mathrm{id}$，则 $\mu_{f^{(1)}} \neq \mu_{f^{(2)}}$，这与假设矛盾。因此 $g = \mathrm{id}$，且 $(\widetilde{J}_{(1)}\ J^{(1)},\ G) = (\widetilde{J}_{(2)}\ J^{(2)},\ G)$。反之显然成立。 □

推论 7.4。设 $f\colon\ M \to \Delta$ 是一个亏格为 g、带有标记 $w\colon\ \Sigma_g \to f^{-1}(t_0)\,(t_0 \in \partial\Delta)$ 的退化，并且 $\mu_f \in \mathbf{P}^{-}_{g}(\sigma)$ 是 (f, w)的标记的拓扑单值化。

$\widetilde{\ }$设 $(J_{\widetilde{f}}, J_f, G) : (\Delta, G, \pi_{\tilde{\Delta}}, \Delta) \longrightarrow (D_\epsilon(\sigma)\ W(\sigma)\ \varphi_\sigma, M_\epsilon(\sigma))$ 是 (f, w) 的轨形模映射，且 $\pi_\sigma\colon\ X_\epsilon(\sigma) \to D_\epsilon(\sigma)$ 是定理 *4.4* 中的族。那么，f 的轨形$\widetilde{\ }$模型与通过 $(J_{\widetilde{f}}, J_f, G)$ 对 π_σ 作轨形拉回（见定义 *4.10*）所得的对象同构。

推论 7.5。设 $\mathbf{AS}(\mu)$ 是亏格为 g、具有固定标记 w 且其拓扑单值化 $\widehat{\mu}_f$与固定的 $\mu \in \mathbf{P}^{-}_{g}(\sigma)$一致的退化$f\colon\ M \to \Delta$ 的（复）解析结构集合。那么，$\mathbf{AS}(\mu)$ 与$\widetilde{\ }\mathbf{P}^{*}($ $\Delta, \Delta;\ D_\epsilon(\sigma)\ M_\epsilon(\sigma);\ T^{\mu_\sigma}_{\sigma})$之间存在双射对应。

7.2 纤维化复曲面的全局轨形模映射

这里我们定义纤维化复曲面的轨形模映射这一概念。

设 $\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathrm{B}$ 是从二维复流形 M 到亏格为 $h \geq 0$ 的紧黎曼曲面 B 的真满射全纯映射。令 $\mathrm{Disc_f(B)} = \{Q_1, \cdots, Q_s\} \subset \mathrm{B}$ 为判别轨迹，并设 $\mathrm{B}^{(0)} = \mathrm{B} \setminus \mathrm{Disc_f(B)}$。如果 f 在 $\mathrm{B}^{(0)}$ 上方的任意纤维都是亏格为 g 的黎曼曲面，我们就称 f 为亏格为 $g \geq 2$ 的纤维化复曲面。假设每个退化纤维 $F_i = \mathrm{f}^{-1}(Q_i)$ 都是 §6.2 意义下的正规极小纤维。令 $\mathrm{f}^{(0)} : \mathrm{M}^{(0)} \to \mathrm{B}^{(0)}$ 为 f 在 $\mathrm{B}^{(0)}$ 上的受限全纯族。我们固定一点 $b_0 \in \mathrm{B}^{(0)}$，并将纤维 $\mathrm{f}^{-1}(b_0) := \Sigma_g$ 作为标记的基底黎曼曲面。

基本群 $\pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0)$ 由从 b_0 出发并最终回到 b_0 的环路 $\beta_1, \cdots, \beta_{2h}, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 生成，这些环路位于 $\mathbf{B}^{(0)}$ 上，且满足唯一关系

$$\beta_1\beta_2\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\beta_3\beta_4 \cdots \beta_{2h-1}^{-1}\beta_{2h}^{-1}\alpha_1 \cdots \alpha_s = 1.$$

这里，每个 α_i 都是逆时针绕 Q_i 一周的环路，而 $\beta_1, \cdots, \beta_{2h}$ 是 $\pi_1(\mathbf{B}\ b_0)$ 的典范生成元。由于 $\mathbf{f}^{(0)}$ 是一个可微纤维丛，我们有 该

到映射类群的单值表示

$$\mu_{\mathbf{f}} : \pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0) \longrightarrow \Gamma_g. \tag{126}$$

设 $\Delta_i = \{t_i \in \mathbf{C} \mid |t_i| < \epsilon_0\}$ 是 $\mathbf{B}$ 上 Q_i 处的局部圆盘坐标，且 $f_i = \mathbf{f}|_{M_i} : M_i = \mathbf{f}^{-1}(\Delta_i) \longrightarrow \Delta_i$ 是 Δ_i 上的退化。于是，我们可以将 $\mu_{\mathbf{f}}(\alpha_i)$ 识别为 §6.2 中定义的 f_i 的标记的拓扑单值 μ_{f_i}。因此，存在一个元素 $\sigma^{(i)} \in \mathcal{C}_g$，使得 $\mu_{\mathbf{f}}(\alpha_i) = \mu_{f_i} \in \mathbf{P}\bar{g}(\sigma^{(i)})$。令 N_i 表示 μ_{f_i} 的伪周期。

设 $\varphi_{\widetilde{\mathbf{B}}^{(0)}} : \widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)} \longrightarrow \mathbf{B}^{(0)}$ 是 $\mathbf{B}^{(0)}$ 的万有覆盖。那么，$\pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0)$ 作用于 $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$，且有 $\mathbf{B}^{(0)} \cong \widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}/\pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0)$。另一方面，循环群 $\mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}$ 通过 $u_i \mapsto \mathbf{e}(1/N_i)u_i$ 作用于 $\widetilde{\Delta}_i = \{u_i \in \mathbf{C} \mid |u_i| < \epsilon^{1/N_i}\}$，而投影 $\varphi_{\widetilde{\Delta}_i} : \widetilde{\Delta}_i \to \Delta_i$ 由 $u_i \mapsto t_i = u^{N_i}$ 定义。我们将 $\mathbf{B}$ 上的复轨形结构定义为

$$\mathbf{B}^{\mathrm{orb}} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}^{(0)}, \pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0), \varphi_{\widetilde{\mathbf{B}}^{(0)}}, \mathbf{B}^{(0)}\right) \bigcup_{1 \le i \le s} \left(\widetilde{\Delta}_i, \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}, \varphi_{\widetilde{\Delta}_i}, \Delta_i\right). \tag{127}$$

注意，尽管 $\pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0)$ 是无限群，而 $\mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}$ 是有限群，但轨形结构 $\mathbf{B}^{\mathrm{orb}}$ 按照 §4.3 的意义是良定义的。

设 $\widetilde{\mathbf{f}}^{(0)} : \widetilde{\mathbf{M}}^{(0)} = \mathbf{M}^{(0)} \times_{\mathbf{B}^{(0)}} \widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)} \longrightarrow \widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 是 $\mathbf{f}^{(0)}$ 在 $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 上的拉回。设 $\mathbf{M} \to \mathbf{M}^\sharp$ 是将 F_i $(1 \le i \le s)$ 的所有非核心部分收缩所得的收缩映射，且 $\mathbf{f}^\sharp : \mathbf{M}^\sharp \to \mathbf{B}$ 是自然的全纯映射。设 $\{f_i^\sharp : M_i^\sharp \to \Delta_i, \widetilde{f}_i : \widetilde{M}_i \to \widetilde{\Delta}_i, G_i = \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}\}$ 是定义 6.5 和注 6.6 中 f_i 的轨形结构。我们将 $\mathbf{M}^\sharp$ 上的复轨形结构定义为

$$(\mathbf{M}^\sharp)^{\mathrm{orb}} = \left(\widetilde{\mathbf{M}}^{(0)}, \pi_1(\mathbf{B}^{(0)}, b_0), \varphi_{\widetilde{\mathbf{M}}^{(0)}}, \mathbf{M}^{(0)}\right) \bigcup_{1 \le i \le s} \left(\widetilde{M}_i, \mathbf{Z}/N_i\mathbf{Z}, \varphi_{\widetilde{M}_i}, M_i^\sharp\right) \tag{128}$$

其中 $\varphi_{\widetilde{\mathbf{M}}^{(0)}}$ 和 $\varphi_{\widetilde{M}_i}$ 是自然投影。于是，我们得到定义 4.6 中的轨形纤维化：

$$(\mathbf{f}^\sharp)^{\mathrm{orb}} : (\mathbf{M}^\sharp)^{\mathrm{orb}} \longrightarrow \mathbf{B}^{\mathrm{orb}}. \tag{129}$$

现在令

$$\mathbf{J}^{(0)} : \mathbf{B}^{(0)} \longrightarrow M_g \tag{130}$$

为模空间映射。$\mathbf{J}^{(0)}$ 在 $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 上的提升定义如下。对于点 $x \in \mathbf{B}^{(0)}$，令 $\gamma(b_0, x)$ 为 $\mathbf{B}^{(0)}$ 上一条从 b_0 出发并以 x 为终点的弧，且 $[\gamma(b_0, x)]$ 为其同伦类。那么，$\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 由所有形如 $(x, [\gamma(b_0, x)])$ 的有序对组成。令

$$w_{\gamma(b_0,x)} : \Sigma_g = \mathbf{f}^{-1}(b_0) \longrightarrow \mathbf{f}^{-1}(x)$$

是沿着 $\gamma(b_0, x)$ 的 $\mathbf{f}^{(0)}$ 的纤维的保向同胚。由于 $w_{\gamma(b_0,x)}$ 的同伦类定义了 $\mathbf{f}^{-1}(x)$ 的 Teichmüller 标记，因此映射

$$\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)} : \widetilde{\mathbf{B}}^{(0)} \longrightarrow T_g \tag{131}$$

由 $\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)}((x,\ [\gamma(b_0,\ x)])) = [\mathbf{f}^{-1}(x)\, w_{\gamma(b_0,x)}]$ 定义。于是 $\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)}$ 是一个全纯映射，满足 $\varphi_{T_g}\circ\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)} = \mathbf{J}^{(0)}$，也就是说，它是式 (130) 中 $\mathbf{J}^{(0)}$ 的一个提升。

另一方面，由 (107) 可知，$\mathbf{J}^{(0)}$ 可全纯延拓至

$$\mathbf{J} : \mathbf{B} \longrightarrow \overline{M}_g. \tag{132}$$

由 (110)，受限映射 $J_{f_i} = \mathbf{J}|_{\Delta_i} :\ \Delta_i \longrightarrow M_g$ 可提升至

$$\widetilde{J}_{\widetilde{f}_i} : \widetilde{\Delta}_i \longrightarrow D_\epsilon(\sigma^{(i)}). \tag{133}$$

我们证明 (131) 和 (133) 的拼接满足作为轨形映射的相容条件。若 J 是常值映射，即 J(B) $= b_0$，则映射 (131) 和 (133) 显然可以良好拼接。因此，我们假设 J(B) 是 M_g 上的一条解析曲线。设 $x \in \mathrm{B}^{(0)} \cap (\Delta_i \backslash Q_i)$ 是一点。设 $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{B}}^{(0)}$ 和 $x^\sharp \in \overline{\widetilde{\Delta}}_i$ 是满足 $\varphi_{\widetilde{\mathbf{B}}^{(0)}}(\widetilde{x}) = \varphi_{\widetilde{\Delta}_i}(x^\sharp) = x$ 的点。设 V_x 是 $\mathrm{B}^{(0)} \cap (\Delta_i \backslash Q_i)$ 中 x 的一个充分小的开邻域。设 $\widetilde{V}_{\widetilde{x}}$（分别为 $V^\sharp_{x^\sharp}$）是 $\widetilde{\mathrm{B}}^{(0)}$ 中 $\widetilde{x}$ 的开邻域（分别是 $\widetilde{\Delta}_i$ 中 $x^\sharp$ 的开邻域），满足 $\varphi_{\widetilde{\mathbf{B}}^{(0)}}(\widetilde{V}_{\widetilde{x}}) = \varphi_{\widetilde{\Delta}_i}(V^\sharp_{x^\sharp}) = V_x$。令 $\widetilde{y} = \widetilde{\mathrm{J}}^{(0)}(\widetilde{x}) \in T_g = D_\epsilon(\emptyset)$，并令 $y^\sharp = \widetilde{J}_{\widetilde{f}_i}(x^\sharp) \in D_\epsilon(\sigma^{(i)})$。

引理 7.6。分别存在 $\widetilde{y}$ 在 T_g 中的开邻域 $\widetilde{U}_{\widetilde{y}}$，以及 $y^\sharp$ 在 D_ϵ 中的开邻域 $U^\sharp_{y^\sharp}$（$\sigma^{(i)}$），使得

（i）$\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)}(\widetilde{V}_{\widetilde{x}})$（分别为 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}_i}(V^\sharp_{x^\sharp})$）是 $\widetilde{U}_{\widetilde{y}}$（分别为 $U^\sharp_{y^\sharp}$）中的解析曲线，

（ii）存在一个双全纯映射 $\psi :\ \widetilde{U}_{\widetilde{y}} \longrightarrow U^\sharp_{y^\sharp}$，使得 ψ 到 $\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)}(\widetilde{V}_{\widetilde{x}})$ 的限制映射诱导出到 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}_i}(V^\sharp_{x^\sharp})$ 上的同构。

证明 根据 Arbarello–Cornalba 定理 [8]，，我们可以假设 $U_{\widetilde{y}}$ 是黎曼曲面 $\mathbf{f}^{-1}(x)$ 的一个足够小的 Kuranishi 族的基底。另一方面，根据定理 4.4，$D_\epsilon(\sigma^{(i)})$是稳定曲线的标准 Kuranishi 族的基底的并。根据 §3.1 中的性质 (iii)，标准 Kuranishi 族的基底上任意一点（尤其是 $y^\sharp$）处的 Kodaira–Spencer 映射都是同构。因此，我们也可以假设 $U^\sharp_{y^\sharp}$是$\mathbf{f}^{-1}(x)$的一个足够小的 Kuranishi 族的基底。

因此，我们可以假设存在一个双全纯映射 $\psi' :\ \widetilde{U}_{\widetilde{y}} \longrightarrow U^\sharp_{y^\sharp}$，使得根据 §3.1 中的性质 (v)，$\psi'$ 是由自同构$g_0 \in \mathrm{Aut}(\mathbf{f}^{-1}(\overline{x}))$到 Kuranishi 族的延拓 g_0 所诱导的。

由于 $\varphi_{T_g} : T_g \to M_g$ 和 $\varphi_{D_\epsilon(\sigma^{(i)})} :\ D_\epsilon(\sigma^{(i)}) \to M_\epsilon(\sigma^{(i)})$ 分别是 Teichm¨uller 标记和韦伊标记的遗忘映射，因此 $\varphi_{T_g}(\widetilde{U}_{\widetilde{y}}) = \varphi_{D_\epsilon(\sigma^{(i)})}(U^\sharp_{y^\sharp})$ 是 M_g 内 $\mathbf{J}^{(0)}(x)$ 的一个开集（在经典拓扑中）。

现在我们分别考虑上述空间上的解析曲线 $\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)}(\widetilde{V}_{\widetilde{x}})$ 和 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}_i}(V^\sharp_{x^\sharp})$。显然，$\varphi_{T_g}(\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)}(\widetilde{V}_{\widetilde{x}})) = \varphi_{D_\epsilon(\sigma^{(i)})}(\widetilde{J}_{\widetilde{f}_i}(V^\sharp_{x^\sharp})) = \mathbf{J}^{(0)}(V_x)$。因此存在一个元素 $g_0 \in \mathrm{Aut}(\mathbf{f}^{-1}(x))$，使得双全纯映射$g_0 \circ \psi' : \widetilde{U}_{\widetilde{y}} \longrightarrow U^\sharp_{y^\sharp}$在 $\widetilde{\mathbf{J}}^{(0)}(\widetilde{V}_{\widetilde{x}})$ 上的限制将其同构地映到 $\widetilde{J}_{\widetilde{f}_i}(V^\sharp_{x^\sharp})$。

— □

我们将式 (132) 中的典范扩张模空间映射 $\mathbf{J}:\mathbf{B}\longrightarrow M_g$ 扩张为如下的轨形映射。引理 7.6 保证了其定义良好。

定义 7.7。式 *(131)* 中的映射 $\widetilde{\ }\mathbf{J}^{(0)}:\ \widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}\longrightarrow T_g$ 以及式 *(*$1\le i\le s$*)* 中的映射 *(133)* $\widetilde{J}_{\widetilde{f}_i}:\ \widetilde{\Delta}_i\longrightarrow D_\epsilon(\sigma^{(i)})$ 拼接良好，并定义了轨形映射

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{orb}}:\mathbf{B}^{\mathrm{orb}}\longrightarrow\overline{M}_g^{orb}.$$

我们称 $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{orb}}$为纤维化复曲面 $\mathbf{f}:\mathbf{M}\to\mathbf{B}$的（全局）轨形模映射。

7.3 纤维化复曲面基本成员的全局恢复

我们通过从普遍退化族拉回，构造出所有具有可能的单值化表示和轨形模映射的纤维化复曲面。

令 D**(B)** 为紧黎曼曲面 $\mathbf{B}$ 的有限子集，并设 $\mathbf{B}^{(0)}=\mathbf{B}\setminus D$**(B)**。对于固定点 $b_0\in\mathbf{B}^{(0)}$，我们考虑一个从基本群到亏格为 $g\ge 2$ 的映射类群的表示

$$\mu:\pi_1(\mathbf{B}^{(0)},b_0)\longrightarrow\Gamma_g. \tag{134}$$

我们假设 μ 满足以下条件。设 α_i 是一个环路，它对 $1\le i\le s$逆时针绕Q_i 一周。则存在一个元素 $\sigma^{(i)}\in\mathcal{C}_g$，使得$\mu$**(**$\alpha_i$**)** $\in\mathbf{P}^{\bar{}}g$**(**$\sigma^{(i)}$**)**。我们称这样的 μ 一个伪周期表示作用在$\mathbf{B}$上。

设 N_i 为 μ**(**α_i**)**的伪周期，$\mathbf{B}^{\mathrm{orb}}$ 为**(127)**中$\mathbf{B}$ 上的轨形结构。设$\mathbf{J}:\mathbf{B}\ \to M_g$ 为一个全纯映射，并且 $\overline{\ }$

$$\mathbf{J}^{\mathrm{orb}}:\mathbf{B}^{\mathrm{orb}}\longrightarrow\overline{M}_g^{\mathrm{orb}} \tag{135}$$

是$\mathbf{J}$上的一个轨形映射。我们假设$\mathbf{J}^{\mathrm{orb}}$ 满足以下条件：**(i)** $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 上的限制图映射将 $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 映到 T_g，即 $\widetilde{\ }\mathbf{J}:\ \widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}\longrightarrow T_g=D_\epsilon(\emptyset)$；**(ii)** 每个 Δ_i 上的限制图映射都属于（定义 7.1 中的）

$$\widetilde{\mathbf{J}}|_{\widetilde{\Delta}_i}\in\mathbf{P}^*(\widetilde{\Delta}_i,\Delta_i;D_\epsilon(\sigma^{(i)}),M_\epsilon(\sigma^{(i)});T_{\sigma^{(i)}}^{\mu_{\sigma^{(i)}}}).$$

我们称这样的$\mathbf{J}^{\mathrm{orb}}$ 与 相关联的对偶伪周期映射。

定理 7.8. (i) 对于任意$(\mu,\mathbf{J}^{\mathrm{orb}})\ \in\ \mathcal{F}(\mathbf{B})$，存在唯一一个（在解析等价意义下）亏格为 $g\ge 2$ 的纤维化复曲面

$$\mathbf{f}:\mathbf{M}\longrightarrow\mathbf{B} \tag{136}$$

使得$\mathbf{f}$ 的单值表示与 μ 一致，且$\mathbf{f}$ 的轨形模映射与$\mathbf{J}^{\mathrm{orb}}$ 一致。

(ii) 与（*136*）（见（*129*））相关的轨形纤维化$(\mathbf{f}^{\sharp})^{\mathrm{orb}}:(\mathbf{M}^{\sharp})^{\mathrm{orb}}\longrightarrow\mathbf{B}^{\mathrm{orb}}$ 与来自普遍退化族（定义*4.9*）的轨形拉回（定义*4.10*） $\pi:\ Y_g^{orb}\longrightarrow M_g^{orb}$.一致

证明 π 到 $D_\epsilon(\emptyset)=T_g$ 的限制族不过是 Teichmüller 标记黎曼曲面的万能族（[14]） $Y_g\to T_g$。根据假设，$\widetilde{\ }\mathbf{J}(\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)})$ 包含于 T_g，因此，通过 $\widetilde{\ }\mathbf{J}$从该万能族拉回而得到的 $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 上的族是 Teichmüller 标记黎曼曲面的全纯族 $\widetilde{\ }\mathbf{f}^{(0)}:\ \widetilde{\ }\mathbf{M}^{(0)}\to\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$。由于 $\mathbf{B}^{(0)}$ 是 $\widetilde{\ }\mathbf{B}^{(0)}$ 关于 $\pi_1(\mathbf{B}^{(0)},b_0)$的商空间，标记的遗忘映射诱导出一个黎曼曲面的全纯族 $\mathbf{f}^{(0)}:\mathbf{M}^{(0)}\to\mathbf{B}^{(0)}$。

另一方面，由定理 7.3 可知，通过 $\mathbf{J}|_{\widetilde{\Delta}_i}$ 的拉回 π 诱导出一个稳定曲线族 $\widetilde{f}_i$: $\widetilde{M}_i\to\widetilde{\Delta}_i$及其商族 $f_i^{\sharp}:\ M_i^{\sharp}\to\Delta_i$。

按照定义 7.7 良定义性证明中的同样论证，映射 $(\widetilde{\ }\mathbf{f}^{(0)},\ \mathbf{f}_{(0)})$ 和 $(\widetilde{f}_i,\ f_i^{\sharp})$ $(1\le i\le s)$ 作为轨形映射能够良好拼接，并定义了一个轨形纤维化 $(\mathbf{f}^{\sharp})^{\mathrm{orb}}:(\mathbf{M}^{\sharp})^{\mathrm{orb}}\to\mathbf{B}^{\mathrm{orb}}$。因此，根据 §6.2 中的论证，我们得到一个纤维化复曲面 $\mathbf{f}:\ \mathbf{M}\to\mathbf{B}$。

从构造显然可知，$\mathbf{f}$ 的单值表示与 μ 相同，而 $\mathbf{f}$ 的轨形模映射与 $\mathbf{J}^{\mathrm{orb}}$ 相同。由于其具有固定的轨形模映射 $\mathbf{J}^{\mathrm{orb}}$，$\mathbf{f}$ 在解析等价意义下的唯一性也是显然的。

□

注 7.9. 亏格为 $g\ge 2$ 的纤维化复曲面 *(136)* 的构造，与 *Kodaira* *[46, §8]* 提出的椭圆曲面的基本成员（简称基本椭圆曲面）的构造类似；不过，两者在以下几点上有所不同。

(i) 假设基本椭圆曲面没有重纤维（即 *[46,* 第 *565]* 页所给出的 ${}_mI_b$、$m\ge 2$ 类型的纤维），而我们的纤维化曲面 *(136)* 则允许存在任意奇异纤维，包括重纤维。

(ii) 设 $\mathcal{F}(\mathcal{J},G)$ 为不含重纤维、具有 *J-* 特征 $\mathcal{J}$ 和同调不变量 G 的椭圆曲面集合（见 *[46,* 定义 *8.1]*）。那么，$\mathcal{F}(\mathcal{J},G)$ 中的基本椭圆曲面，是唯一具有整体截面的成员（*[46,* 定理 *10.2]*）；而 $\mathcal{F}(\mathcal{J},G)$ 中的其他成员，则由基本椭圆曲面经过 *[46,* 定义 *9.2]* 中定义的扭转得到（见 *[46,* 定理 *10.1]*）。

另一方面，根据定理 *7.8*，亏格为 $g\ge 2$ 的纤维化复曲面由数据 $(\mu,\mathbf{J}^{\mathrm{orb}})$ 唯一确定。

这种差异本质上源于：椭圆曲线具有平移自同构，而亏格为 $g\ge 2$ 的黎曼曲面则没有这类无限阶自同构。

致谢。我们感谢 Sampei Usui 教授就对数几何提供的建议并与我们讨论，感谢 Toshiyuki Akita 教授就黎曼曲面的自同构表示提供的建议，感谢 Kunio Obitsu 教授就增广 Teichm¨uller 空间提供的建议，也感谢 Kazuhiro Konno 教授与我们讨论纤维化复曲面。最后，我们感谢 Athanase Papadopoulos 教授对我们研究成果的关注，并感谢他提出的许多意见，这些意见极大地改进了我们的表述。第二作者获得了 JSPS KAKENHI 17H01091 资助。

参考文献

[1] W. Abikoff，《Teichmüller 空间的实解析理论》，Lecture Notes in Math. 820（1980），Springer。[2] N. A'Campo，《关于复超曲面孤立奇点的单值化》，Invent. math. 20（1973），147–169。[3] N. A'Campo，L. Ji，A. Papadopoulos，《关于 Grothendieck 的 Teichmüller 空间构造》，载于《Handbook of Teichmüller theory》，第 VI 卷（2016），35–69。[4] A. A'Campo-Neuen，N. A'Campo，L. Ji，A. Papadopoulos，《评注 Teichmüller 的论文〈可变黎曼曲面〉》，载于《Handbook of Teichmüller theory》，第 IV 卷（2014），805–814。[5] L. V. Ahlfors，《关于 Teichmüller 的黎曼曲面空间的一些评注》，Ann. of Math.（2）74（1961），171–191。[6] L. V. Ahlfors 和 L. Bers，《可变度量下的黎曼映射定理》，Ann. of Math.（2）72（1960），385–404。[7] J. W. Alexander，《关于 n 维胞腔的变形》，Proc. Nath. Acad. Sci. 9（1923），406–407。[8]E. Arbarello，M. Cornalba，《通过 Kuranishi 族构造 Teichmüller 空间》，Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci.（5）第 VIII 卷（2009），89–116。[9] E. Arbarello，M. Cornalba，P.A. Griffiths，《代数曲线的几何》，第 II 卷，Springer，2011。[10] T. Ashikaga，《通过单值化和平稳约化研究纤维化复曲面的局部签名亏缺》，Comment. Math. Helv. 85（2010），417-461。[11] T. Ashikaga 和 M. Ishizaka，《通过 Matsumoto-Montesinos 定理分类亏格3曲线的退化》，东北数学杂志 54（2002），195–226。[12] T. Ashikaga 和 K. Konno，《代数曲线铅笔的整体与局部性质》，载于《2000 年安昙野代数几何会议》，S. Usui 等编，Adv. St. in Pure Math. 36（2002），1–49。[13] T. Ashikaga 和 K. Yoshikawa，《与纤维化曲面签名相关的曲线模空间上的一个除子》，Adv. St. in Pure Math. 56（2009），1–34。[14] L. Bers，《Teichmüller 空间上的纤维空间》，Acta. Math. 130（1973），89–126。[15] L. Bers，《带节点的退化黎曼曲面空间》，载于《Discontinuous Groups and Riemann surfaces》，Ann. Math. Studies 79，Princeton U. P.（1974），43–55。

[16] S. A. Broughton, 《模空间的等对称分层与映射类群的 Krull 维数》, Topology and its Applications 37（1990）, 101–113。[17] H. Cartan, 《解析空间对自同构群的商》, 《Algebraic geometry and topology》, 纪念 S. Lefschetz 的研讨会论文集, R. H. Fox、D. C. Spencer 和 A. W. Tucker 编, Princeton Math. Series, 12。Princeton Univ. Press, 普林斯顿, 新泽西州, 1957年, 90–102。[18] H. Cartan, 《复解析空间的商》, 载于《Contributions to Function Theory》, Tata Institute, 孟买（1960）, 1–15。[19] F. Catanese, 《变形与模空间的简明实用指南》, 载于《Handbook of Moduli》, 第 I 卷（2013）, 161–215。[20] C.H. Clemens, 《获得普通奇点的非奇异代数簇族的皮卡-勒夫谢茨定理》, Trans. Amer. Math. Soc. 136（1969）, 93–108。[21] P. Deligne 和 D. Mumford, 《给定亏格的曲线空间的不可约性》, Publ. Math. I.H.E.S. 36（1969）, 75–110。[22]Dias Raquel 和 Gonzáles-Aguilera Victor, 《$\acute{a}$ 的分支轨迹的极限点》, Adv. Geom. 19（2019）, 505–526。[23] C. Earle 和 P. Sipe, 《穿孔圆盘上的黎曼曲面族》, Pacific J. Math. 150（1991）, 79–86。[24] C. Ehresmann, 《关于微分纤维空间》, C. R. Acad. Sci. Paris 224（1947）, 1611-1612。[25] H. M. Farkas 和 I. Kra, 《黎曼曲面》, 1979, Springer。[26] R. Friedman, 《正规交叉簇的整体平滑化》, Ann. of Math. 118（1983）, 75–114。.[27] H. Grauert, 《关于修正及例外解析集》, Math. Ann, 146（1962）, 331–368。[28] A. Grothendieck, 《解析几何中的构造技巧。I—X》, Henri Cartan 研讨班, 第 13 卷（1960—1961）。[29] J. Harris 和 D. Mumford, 《曲线模空间的小平维数》, Invent. Math. 67（1982）, 23–88。[30] W. J. Harvey, 《紧黎曼曲面的自同构循环群》, Quart. J. Math. Oxford Ser.（2）17（1966）, 86–97。[31] W. J. Harvey, 《Teichmüller 空间中的分支轨迹》, Trans. Amer. Math. Soc. 153（1971）, 387–399。[32] W. H. Harvey, 《离散群的沙博蒂空间》, 《Discontinuous groups and Riemann surfaces》（1973年于马里兰大学大学公园市举行的会议论文集）, Princeton Univ. Press, 普林斯顿, 新泽西州, 1974, 239–246。Ann. of Math. Studies, 第79号, MR 0364629。[33] W. J. Harvey, 《曲面映射类群的几何结构》, 载于《Homological group theory：1977年9月于达勒姆举行的群论同调与组合技术研讨会论文集》, C. T. C. Wall 编, London Math. Soc. Lecture Note Series, 36。剑桥大学出版社, 1979, 255–269。

[34] V. Hinich和A. Vaintrob，扩充的Teichm ̋uller空间与轨形，《精选数学，新系列》16（2010），533–629。[35] R. Hirakawa和S. Takamura，《黎曼曲面的模空间几何图谱》，京都大学，预印本，2022。[36] J. H. Hubbard，《Teichm ¨uller理论及其在几何学、拓扑学和动力系统中的应用》，第I卷，Matrix Editions出版社，伊萨卡，纽约，2006。[37] J. H. Hubbard和S. Koch，曲线模空间的Deligne-Mumford紧化的解析构造，《微分几何杂志》98（2014），261–313。[38] J. H. Hubbard、P. Papadopol和V. Veselov，C´上的H^2eron映射作为动力系统的紧化，《数学学报》184（2000），203–270。[39] Y. Imayoshi，黎曼曲面的全纯族与Teichm ¨uller空间，载于《黎曼曲面及相关主题》，Ann. of Math. Studies 97（1981），277–300。[40] Y. Imayoshi，给定单值化的穿孔圆盘上黎曼曲面全纯族的构造，载于《Teichm ¨uller理论手册》，第II卷（2009），93–130。[41] Y. Imayoshi和Taniguchi，《Teichm ¨uller空间导论》，Springer，1992。[42] K. Kato和C. Nakayama，C上对数概形的对数Betti上同调、对数 ´etale上同调和对数de Rham上同调，《古代数学杂志》22（1999），161–189。[43] K. Kato和S. Usui，《退化极化Hodge结构的分类空间》，Ann. of Math. Studies 169，Princeton Univ. Press，2009。[44] L. Keen，黎曼曲面上的领圈，载于《Discontinuous groups and Riemann surfaces》，Princeton Univ. Press（1974），263–268。[45] S. P. Kerchhoff，Nielsen实现问题，《数学年刊》117（1983），235–265。[46] K. Kodaira，《紧解析曲面 II》，《数学年刊》77（1963），563–626。[47] I. Kra，黎曼曲面与模空间的horocyclic坐标。I：Kleinian群的Teichm ¨uller空间与黎曼空间，《美国数学会杂志》3（1990），499–578。[48] I. Kra，书评：S. Donaldson，《黎曼曲面》。《美国数学会通报》（新系列）49（2012），第3期，455–463。MR 2952711 Zbl 1321.00036。[49] Y. Kuno，纤维化4-流形的Meyer函数与签名，载于《Te- ichm ¨uller理论手册》，第V卷（2016），75–96。[50] A. Kuribayashi，具有非平凡自同构的紧黎曼曲面解析族，《名古屋数学杂志》28（1966），119–165。[51] X. L. Liu，分数德恩扭转与模不变量，《中国科学：数学》64（2021），1735–1744。[52] H. Masai，通过重整化体积紧化Teichm ¨uller空间及其距离，arXiv:2108.06059v3 [math.GT] 272022年9月。[53] Y. Matsumoto，关于黎曼曲面的万能退化族，载于《几何与拓扑中的奇点——斯特拉斯堡2009》，Euro. Math. Soc.（2012），71–102。[54] Y. Matsumoto，Deligne-Mumford紧化与晶体群，载于《Teichm ¨uller理论手册》，第VII卷（2020），21–62。

[55] Y. Matsumoto和J. M. Montesinos-Amilibia，伪周期映射与黎曼曲面退化，数学讲义第2030号（2011），Springer。[56] H. Miyachi，Lipschitz代数与Teichm¨uller空间的紧化，载于《Teichm¨uller理论手册》，第IV卷（2014），375–413。[57] S. Mizuta和M. Namba，Greenberg定理与紧黎曼曲面上的等价问题，《大阪数学杂志》43（2006），137–178。[58] Y. Namikawa，退化研究，载于《代数簇与紧复流形的分类》，数学讲义第412卷（1974），Springer。[59]J. Nielsen，《有限阶变换的结构》，Mat.- Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15（1937），77页。英文译本：载于《Collected Papers 2》，Birkh¨auser，1986。[60] J. Nielsen，《有限阶映射类》，《数学学报》75（1942），23–115。英文译本：载于《Collected Papers 2》，Birkh¨auser，1986。[61] J. Nielsen，代数有限型的曲面变换类，Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 21（1944），3–89：载于《Collected Papers 2》，Birkh¨auser，1986。[62] K. Ohshika，Teichm¨uller空间的紧化，载于《Teichm¨uller理论手册》，第IV卷（2014），235–254。[63] M. Reid，关于小亏格铅笔的问题，预印本（1990）（参见其个人主页）。[64] I. Satake，V-流形的Gauss-Bonnet定理，《日本数学会杂志》9（1957），464–492。[65] H. Shiga和H. Tanigawa，关于Teichm¨uller空间的Maskit坐标与模变换，《古代数学杂志》12（1989），437–443。[66] S. Takamura，迈向退化原子的分类II，（复曲线退化的循环商构造），京都大学数理解析研究所预印本系列第1344号（2001）。[67] S. Takamura，商族线性化，《东京大学数学科学杂志》26（2019），361–389。[68] S. L. Tan，奇异纤维的陈数、模不变量与等平凡曲线族，《越南数学学报》35（2010），159–172。[69]O. Teichm¨uller，极值拟共形映射与二次微分。普鲁士科学院数学与自然科学部论文集22（1940），1–197。G. Th´eret英译：极值拟共形映射与二次微分。载于《Theichm¨uller理论手册》（A. Papadopoulos编），第V卷，EMS Publishing House，苏黎世，2016，321–483。[70] O. Teichm¨uller，可¨变黎曼曲¨面。《德国数学》7，344–359（1944）。A. A’Campo Neuen英译：可变黎曼曲面。载于《Teichm¨uller理论手册》（A. Papadopoulos编），第IV卷，EMS Publishing House，苏黎世，2014，787–803。[71] T. Terasoma，曲线退化与解析变形，arXiv:math/9801118v1[math.AG] 26 1998年1月。

[72] S. Usui，通过对数几何恢复消失圈，《东北数学杂志》**53** （2001），1–36。[73] H. V¨olklein，黎曼球面覆盖的模空间，《以色列数学杂志》**85** （1994），407–430。.[74]A. Wiman，关于双曲线及允许自身具有唯一变换的 p=3次曲线，《瑞典皇家科学院学报增刊》（1985），第21（1）号，1–23。[75] S. Wolpert，Teichm¨üller 空间的韦伊–彼得森完备化的几何学，载于《微分几何综述 *VIII*：献给 *Calabi*、*Lawson*、*Siu* 和 *Uhlenbeck* 的论文集》，第357–393页。国际出版社，马萨诸塞州剑桥，2003。[76] S. Wolpert，Teichm¨üller 空间上测地线长度函数的行为，《微分几何杂志》**79** （2008），277–334。[77] S. Wolpert，黎曼曲面族与韦伊–彼得森几何，《CBMS 数学区域会议系列》**113**，美国数学会，2010。[78] S. Yamada，关于 Teichm¨üller 空间的韦伊–彼得森完备化的几何学，《数学研究快报》**11** （2004），327–344。Tadashi Ashikaga，东北学院大学工学部，日本宫城县多贺城市 985-8537；电子邮箱：ashikaga@mail.tohoku-gakuin.ac.jp Yukio Matsumoto，学习院大学数学系，日本东京丰岛区目白171-8588；电子邮箱：yukiomat@math.gakushuin.ac.jp