arXiv:2301.00385v1 [math.CA] 1 Jan 2023

内在黎斯伪扫除及其在带外场的最小能量问题中的应用

Natalia Zorii

谨以此文献给*Stephen J. Gardiner*教授，以庆祝他*65*岁生日

摘要。 对于 $\mathbb{R}^n$上的 $0<\alpha<n$ 阶Riesz核 $\kappa_\alpha(x,y):=|x-y|^{\alpha-n}$，我们将所谓的内伪扫掠$\hat{}\omega^A$ 定义为：将（Radon）测度 ω 在 $\mathbb{R}^n$ 上的内伪扫掠到集合 $A\subset\mathbb{R}^n$，即在所有

$$\int \kappa_\alpha(x,y)\,d(\mu\otimes\mu)(x,y)-2\int \kappa_\alpha(x,y)\,d(\omega\otimes\mu)(x,y)$$

有限能量且集中于 A的正测度 μ 所构成的类 $\mathcal{E}^+(A)$上，使高斯泛函达到极小值的（唯一）测度。对于相当一般的符号测度 ω （不一定具有有限能量）和集合 A （不一定是闭集），这样的$\hat{}\omega^A$ 确实存在，并且保有正测度内扫掠的基本性质（当$\alpha\leqslant 2$时定义），但支配原理所蕴含的性质除外。（为说明后者，我们指出，与扫掠的情形不同，正测度的内伪扫掠可能增加其总质量。）进一步证明，内伪扫掠$\hat{}\omega^A$ 是研究在所有 $\mu\in\mathcal{E}^+(A)$且满足 $\mu(\mathbb{R}^n)=1$的测度上极小化高斯泛函问题的有力工具；这使我们能够通过强化相关表述和/或扩展其应用范围，实质性地改进该主题近期的许多结果。例如，若 A 是一个具有非零内容量 $c_*(A)$的拟闭集，且 ω 是一个紧支撑于 $\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^n}A$中的符号测度，则上述问题有解，当且仅当 $c_*(A)<\infty$，或$\hat{}\omega^A(\mathbb{R}^n)\geqslant 1$。特别地，若 $c_*(A)=\infty$，则当 $\omega^+(\mathbb{R}^n)<1/C_{n,\alpha}$时，该问题无解，其中$C_{n,\alpha}:=1$ if$\alpha\leqslant 2$，而$C_{n,\alpha}:=2^{n-\alpha}$ otherwise；然而，$\omega^-(\mathbb{R}^n)$，即负电荷的总量，对这一现象没有影响。所得结果通过若干实例加以说明。

1. 内伪扫掠：动机与模型例

本文研究关于 α-Riesz核$\kappa_\alpha(x,y)$ 的位势理论：$=|x-y|^{\alpha-n}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上，阶数为 $0<\alpha<n$，其中 $|x-y|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得距离。我们的主要目标是进一步研究存在外场 f 时的最小α-Riesz 能量问题；这一问题受到许多研究者的关注（例如参见专著 [2, 20] 及其中的参考文献，[14, 18],[21]–[25],，以及 [1, 8, 32, 33], 一些关于该主题的最新论文）。

在本文中，我们通过强化相关表述和／或拓展其应用范围，大幅改进了这一领域近期的许多结果（所得结果见第6节）。这得益于一种新工具——内伪扫掠（见第3节；关于所提定义的动机以及一个模型例，亦可参见本节）。

众所周知，α-Riesz 扫掠（扫出）是解决相关问题的有效工具（例如参见 [8, 23, 25, 33]）。然而，它的应用仅限于 α 取值于 $(0,2]$,，且外场 f 具有如下形式的情形

$$f(x):=-U^\omega(x):=-\int \kappa_\alpha(x,y)\,d\omega(y), \tag{1.1}$$

2010年数学主题分类：主要分类 31C15。关键词：带外场的最小黎斯能量问题、内在黎斯扫除、内在黎斯伪扫除。

其中 ω 是一个适当的 正Radon测度。

为了将这一工具的应用范围扩展到任意的 $\alpha \in (0, n)$和/或由(1.1)给出的外场 f，但现在涉及带符号的 ω，我们将正测度的标准内扫掠概念（定义于 $\alpha \in (0, 2]$）推广到所谓的带符号测度的内伪扫掠，同时保留前一概念的基本特征——由支配原理所蕴含的特征除外。

内伪扫掠的概念对于我们研究带外场的最小能量问题至关重要，同时也具有独立的研究价值，并有望进一步推广及应用于其他领域。在介绍这一概念之前，我们首先回顾 α-Riesz势理论的一些基本事实。

我们用 $\mathfrak{M}$ 表示 μ 上所有（取实值的拉东）测度的线性空间，该空间赋予 $\mathbb{R}^n$上的点态收敛拓扑，即在所有具有紧支集的连续函数 φ构成的类 $C_0(\mathbb{R}^n)$上的逐点收敛拓扑；用 $\mathfrak{M}^+$ 表示所有正 $\mu \in \mathfrak{M}$构成的锥，其中 μ 为正的 当且仅当对于所有正的 $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$，均有 $\mu(\varphi) \geqslant 0$。给定 μ、$\nu \in \mathfrak{M}$，位势 U^μ 和互能量 $I(\mu, \nu)$定义为

$$U^\mu(x) := \int \kappa_\alpha(x, y)\, d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$I(\mu, \nu) := \int \kappa_\alpha(x, y)\, d(\mu \otimes \nu)(x, y),$$

分别，前提是右侧的积分有定义（为有限数或 $\pm\infty$）。对于 $\mu = \nu$, $I(\mu, \nu)$ 定义了 $\mu \in \mathfrak{M}$ 的能量 $I(\mu) := I(\mu, \mu)$。

M. Riesz 发现的 α-Riesz核严格正定性的以下性质（ [19, 第一章，式（13）] （另见 [17, 定理 1.15]）） 对本研究至关重要： $I(\mu) \geqslant 0$ 对任意（带符号的） $\mu \in \mathfrak{M}$ 均成立，且 $I(\mu) = 0 \iff \mu = 0$。这意味着，所有满足 $I(\mu) < \infty$ 的（带符号） $\mu \in \mathfrak{M}$ 构成一个预希尔伯特空间 $\mathcal{E}$，其内积为 $\langle \mu, \nu \rangle := I(\mu, \nu)$，能量范数为 $\|\mu\| := \sqrt{I(\mu)}$，例如参见 [10,引理 3.1.2]。由此范数定义的 $\mathcal{E}$ 上的拓扑称为强拓扑。

本文另一个关键事实是，锥 $\mathcal{E}^+ := \mathcal{E} \cap \mathfrak{M}^+$ 强完备，且 $\mathcal{E}^+$ 上的强拓扑比 $\mathcal{E}^+$ 上的（诱导）模糊拓扑更细（参见 J. Deny [6]; 关于 $\alpha = 2$，另见 H. Cartan [4]）。因此，任一强柯西序列（网）$(\mu_j) \subset \mathcal{E}^+$都强收敛且在模糊拓扑下收敛至同一个唯一极限 $\mu_0 \in \mathcal{E}^+$；这是因为 $\mathcal{E}$ 上的强拓扑和 $\mathfrak{M}$上的模糊拓扑都是豪斯多夫的。（沿用 B. Fuglede [10],的说法，这样的核称为完美。）

1.1. 一个模型例。 作为引入内 α-Riesz伪扫掠概念的模型例，先考虑一个闭集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ 和一个能量有限的（带符号）测度 $\omega \in \mathfrak{M}$。由于所有支集为 $S(\mu) \subset F$ 的 $\mu \in \mathfrak{M}^+$ 所成的类 $\mathfrak{M}^+(F)$ 在模糊拓扑下是闭的（第 III.2 节，命题 6],），凸锥 $\mathcal{E}^+(F) := \mathfrak{M}^+(F) \cap \mathcal{E}$ 强闭，因而强完备，因为 α-Riesz 核是完美的。应用 [9] （定理 1.12.3 和命题 1.12.4(2)），我们由此得出，对于给定的 $\omega \in \mathcal{E}$，存在唯一的 $P\omega \in \mathcal{E}^+(F)$，使得

$$\|\omega - P\omega\| = \min_{\mu \in \mathcal{E}^+(F)} \|\omega - \mu\|, \tag{1.2}$$

并且，同一个 $P\omega$ 在 $\mathcal{E}^+(F)$ 中由这两个关系唯一刻画 s

$$\langle P\omega - \omega, \mu \rangle \geqslant 0 \quad \text{for all } \mu \in \mathcal{E}^+(F), \tag{1.3}$$

$$\langle P\omega - \omega, P\omega \rangle = 0. \tag{1.4}$$

这 $P\omega$称为 $\omega \in \mathcal{E}$ 在 $\mathcal{E}^+(F)$ 上的正交投影 。

通过对 [26, 定理 3.1]的证明稍作修改，我们可由上述内容推知， $P\omega$是 $\mathcal{E}^+(F)$ 中唯一满足以下两个性质的测度

$$U^{P\omega} \geqslant U^{\omega} \quad \text{n.e. on } F, \tag{1.5}$$

$$U^{P\omega} = U^{\omega} \quad P\omega\text{-a.e.}, \tag{1.6}$$

其中，缩写 $n.e.$（几乎处处）表示该不等式在 F 上处处成立，除去一个内容量为零的子集 $N \subset F$： $c_*(N) = 0$.[1]

暂且假设 $\alpha \leqslant 2$，并且上述 ω 为正，即 $\omega \in \mathcal{E}^+$。利用完备最大值原理 [17, 定理 1.27 、 1.29], ，由 (1.5) 和 (1.6) 可得，此时 $P\omega$ 在 $\mathcal{E}^+(F)$ 中由以下等式唯一确定:

$$U^{P\omega} = U^{\omega} \quad \text{n.e. on } F, \tag{1.7}$$

参见 [26，定理 3.1], ，因此 $P\omega$ 实际上是将 $\omega \in \mathcal{E}^+$ 扫掠 ω^F 到 F 上所得的结果 :

$$P\omega = \omega^F.$$

¶ 然而，如果 $\alpha > 2$，或者上述 ω 为有符号，那么关系式 (1.2)–(1.6) 仍然成立，但它们不再推出 (1.7)。

受这一观察的启发，我们给出如下定义。

定义1.1。 相对于任意阶数 $\alpha \in (0, n)$ 的 α-Riesz核，将 $\omega \in \mathcal{E}$ 的伪扫掠 $\hat{}\omega^F$ 到闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$上定义为 $\mathcal{E}^+(F)$ 中满足（1.2）的唯一测度（以$\hat{}\omega^F$代替 $P\omega$）；或者等价地，定义为 $\mathcal{E}^+(F)$ 中具有（1.3）–（1.6）所述性质的唯一测度（以$\hat{}\omega^F$代替 $P\omega$）。

注1.2。 暂时假设 ω 为正。由上文可知，只要 $\alpha \leqslant 2$，伪扫掠$\hat{}\omega^F$ 就与扫掠 ω^F 重合；而在其他情况下，前一个概念是后一个概念的自然推广，因为对 $\alpha > 2$ 进行扫掠的问题无解。[2] 但现在若 ω 为带符号的，则对于 $\alpha \leqslant 2$， $\hat{}\omega^F$ 和 ω^F 仍然存在且唯一，而一般而言，

$$\hat{\omega}^F \neq \omega^F,$$

带符号 ω 的扫掠按线性性定义（更多详情见注3.3）。

注1.3。 在下文第3节中，我们将把上述伪扫掠$\hat{}\omega^F$的定义从 $\omega \in \mathcal{E}$ 和闭 $F \subset \mathbb{R}^n$这一模型例推广到:

- $\omega \in \mathfrak{M}$ 不一定具有有限能量。
- $F \subset \mathbb{R}^n$ 不一定是闭的。

对于前一个目标，我们注意到，问题（1.2）等价于极小化高斯泛函 $\|\mu\|^2 - 2\int U^{\omega}\, d\mu$, 它不仅 对 $\omega \in \mathcal{E}$有意义。

本节最后给出一些将在下文使用的一般约定。

从现在起，提及（有符号）测度 $\mu \in \mathfrak{M}$时，我们默认其位势 U^{μ} 在 $\mathbb{R}^n$上关于勒贝格测度几乎处处有定义且有限；或者等价地（参见 [17, 第I.3.7]节），

$$\int_{|y|>1} \frac{d|\mu|(y)}{|y|^{n-\alpha}} < \infty, \tag{1.8}$$

[1]对于闭的 F，使 (1.5) 不成立的所有 $x \in F$ 构成的集合 N 是博雷尔集，因此可容量化，所以 (1.5) 实际上在 F 上准处处（*quasi-everywhere*（*q.e.*））成立，也就是说，除去外容量为零的 N，在 F 上处处成立: $c^*(N) = 0$。（关于内容量和外容量的概念，见 [17, 第 II.2 节6]。）[2]例如，见 [17, 第 IV.5 节20]; 这是因为对于 $\alpha > 2$，最大值原理不成立。因此，提到 α-Riesz 扫掠时，我们默认 $\alpha \in (0, 2]$。

其中 $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$、 μ^+ 和 μ^- 分别是 μ 在汉恩–若尔当分解中的正部和负部。事实上，此时（且仅此时） U^μ 在 $\mathbb{R}^n$上准处处有限，参见 [17, 第III.1.1]节。若要求 μ 是有界的（即 $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$），或具有有限能量，则这一条件必然成立，参见 [10, 引理3.2的推论3]。

若测度 $\mu \in \mathfrak{M}^+$ 集中于集合 $A \subset \mathbb{R}^n$，则称其为集中测度，当且仅当 $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$是 μ-零测集；等价地， A 是 μ-可测的，且 $\mu = \mu|_A$, $\mu|_A$ 是 μ 在 A上的限制。用 $\mathfrak{M}^+(A)$ 表示所有集中于A的 $\mu \in \mathfrak{M}^+$ 所构成的锥，进一步记 $\mathcal{E}^+(A) := \mathfrak{M}^+(A) \cap \mathcal{E}$，并用 $\mathcal{E}'(A)$ 表示 $\mathcal{E}^+(A)$ 在 $\mathcal{E}^+$ 上的强拓扑下的闭包。我们强调， $\mathcal{E}'(A)$ 是强完备的，因为它是强完备锥 $\mathcal{E}^+$ 的强闭子锥。

给定 $A \subset \mathbb{R}^n$，用 $\mathfrak{C}_A$ 表示由 A 的所有紧子集 K 构成的向上有向集合，其中 $K_1 \leqslant K_2$ 当且仅当 $K_1 \subset K_2$。若网 $(x_K)_{K\in\mathfrak{C}_A} \subset Y$ 收敛到 $x_0 \in Y$，且 Y 是拓扑空间，则我们将用以下方式表示这一事实:

$$x_K \to x_0 \ \text{ in } Y \text{ as } K \uparrow A.$$

2. 关于内在黎斯扫除

在继续讨论备注 1.3 中提出的伪扫掠概念的推广之前，我们先回顾内在 α-Riesz 扫掠理论的一些基本事实。该理论将卡当关于内牛顿扫掠的开创性工作 [5] 推广到任意 $\alpha \in (0, 2]$, ，由作者近期的论文 [26, 27],首创，并在 [28]–[30]中得到进一步发展。[3] 在本节中， $0 < \alpha \leqslant 2$。

定义 2.1 ([26, 第 3, 4] 节)。 测度 $\omega \in \mathfrak{M}^+$到集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的内扫掠 ω^A 定义为类 $\Gamma_{A,\omega}$中位势最小的测度,

$$\Gamma_{A,\omega} := \big\{\mu \in \mathfrak{M}^+ : \ U^\mu \geqslant U^\omega \ \text{ n.e. on } A\big\}.$$

也就是说， $\omega^A \in \Gamma_{A,\omega}$ 并且

$$U^{\omega^A} = \min_{\mu\in\Gamma_{A,\omega}} U^\mu \ \text{ on } \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

定理 2.2 ([26, 第 3, 4] 节)。 给定任意 $\omega \in \mathfrak{M}^+$ 和 $A \subset \mathbb{R}^n$，由定义 2.1 引入的内扫掠 ω^A存在且唯一。此外，[4]

$$\begin{aligned} U^{\omega^A} &= U^\omega \ \ \textit{n.e. on } A, \\ U^{\omega^A} &\leqslant U^\omega \ \ \textit{on } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

同一个 ω^A 也可以通过以下任一（等价）断言来刻画:

(a) ω^A 是满足对称关系的 $\mathfrak{M}^+$ 中唯一的测度

$$I(\omega^A, \sigma) = I(\sigma^A, \omega) \ \ \textit{for all } \sigma \in \mathcal{E}^+,$$

其中， σ^A表示 $\mathcal{E}'(A)$ 中唯一满足在 A 上几乎处处有 $U^{\sigma^A} = U^\sigma$ 的测度。[5]

[3]另请参阅 [31] , 了解该理论在 Deny质量正性原理 中的应用。[4]正如 [26, 注 3.12], 所指出的, (2.2) 不再能唯一刻画 ω^A （而对于闭的 A 和 $\omega \in \mathcal{E}^+$ 则可以）。更多细节请参见脚注 5、推论 2.4、注 2.5 和定理 2.6。[5]对于任意 $\sigma \in \mathcal{E}^+$ 和任意 $A \subset \mathbb{R}^n$，满足在 A 上几乎处处有 $U^{\sigma^A} = U^\sigma$ 这一性质的测度 $\sigma^A \in \mathcal{E}'(A)$ 存在且唯一。事实上，它是 σ 在预希尔伯特空间 $\mathcal{E}$ 中到凸的强完备锥 $\mathcal{E}'(A)$ 上的正交投影；也就是说（与 (1.2) 比较），

$$\|\sigma - \sigma^A\| = \min_{\mu\in\mathcal{E}'(A)} \|\sigma - \mu\|.$$

同一个 σ^A 在 $\mathfrak{M}^+$ 内由满足 $\mu{:=}\,\sigma$ 的极值性质 (2.1) 唯一确定。

(b) ω^A 是 $\mathfrak{M}^+$ 中唯一满足以下两个极限关系之一的测度

$$\omega_j^A \to \omega^A \quad \textit{vaguely in } \mathfrak{M}^+ \textit{ as } j \to \infty,$$
$$U^{\omega_j^A} \uparrow U^{\omega^A} \quad \textit{pointwise on } \mathbb{R}^n \textit{ as } j \to \infty,$$

其中 $(\omega_j) \subset \mathcal{E}^+$ 是满足性质[6]的任意序列

$$U^{\omega_j} \uparrow U^{\omega} \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 上逐点满足，当 } j \to \infty \text{时，}$$

而 ω_j^A表示 $\mathcal{E}'(A)$中唯一的测度，并且在 A上几乎处处满足 $U^{\omega_j^A} = U^{\omega_j}$。

注 2.3。对于带符号的 $\omega \in \mathfrak{M}$，我们通过线性性定义内扫掠 ω^A：

$$\omega^A := (\omega^+)^A - (\omega^-)^A. \tag{2.3}$$

此外，若对于所有 $\sigma \in \mathcal{E}$，互能量 $I(\omega, \sigma)$都有定义，则这个 ω^A由对称关系唯一刻画

$$I(\omega^A, \sigma) = I(\sigma^A, \omega) \quad \text{for all } \sigma \in \mathcal{E},$$

而这实际上只需针对某些可数多个 $\sigma \in \mathcal{E}$ 进行验证，且与 ω 的选择无关（参见 [30], 定理 1.4 和注 1.4）。

• 在本文余下部分，我们始终要求 $A \subset \mathbb{R}^n$ 具有如下性质：[7]($\mathcal{P}_1$) $\mathcal{E}^+(A)$ 是强闭的。

当且仅当如此时

$$\mathcal{E}'(A) = \mathcal{E}^+(A),$$

因此，定理 2.2 仍然成立，只需将全文中的 $\mathcal{E}'(A)$ 替换为 $\mathcal{E}^+(A)$。特别地，以下有用的推论成立。

推论 2.4。对于此 A 以及任意 $\omega \in \mathcal{E}^+$，内扫掠 ω^A 实际上是将 ω 正交投影到（凸的、强完备的）锥 $\mathcal{E}^+(A)$ 上所得：

$$\|\omega - \omega^A\| = \min_{\mu \in \mathcal{E}^+(A)} \|\omega - \mu\|.$$

同一个 ω^A 在 $\mathcal{E}^+(A)$ 中由其在 A 上几乎处处满足 $U^{\omega^A} = U^{\omega}$ 唯一确定。

注 2.5. 假设 ($\mathcal{P}_1$) 对推论 2.4 的成立至关重要。事实上，若 $\alpha = 2$ 和 $A := B_r, r \in (0, \infty)$, 那么对于任意满足 $\omega(\overline{B}_r^c) > 0$ 的 $\omega \in \mathfrak{M}^+(B_r^c)$，我们有 $S(\omega^{B_r}) = S_r$ [27, 定理 4.1、5.1], , 因此内扫掠 ω^{B_r} 并未集中在集合 B_r 本身上。（实际上， $S(\omega^{B_r}) \cap B_r = \varnothing$。）[8]

下文将用到推论 2.4 的以下推广。

定理 2.6. 给定 $\omega \in \mathfrak{M}^+$，假设 ω^A 具有有限能量。[9] 那么 ω^A集中在 A上，即 $\omega^A \in \mathcal{E}^+(A)$，并且它是以下问题的唯一解

---

[6]此类 $\omega_j \in \mathcal{E}^+$、 $j \in \mathbb{N}$确实存在；例如，可以通过以下公式来定义：

$$U^{\omega_j} := \min\left\{U^{\omega}, jU^{\lambda}\right\},$$

固定 $\lambda \in \mathcal{E}^+$ （例如参见 [17, 第 272] 页或 [5, 第 257 页，脚注]）。这里我们用到了这样一个事实：对于任意 $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}^+$，存在 $\mu_0 \in \mathfrak{M}^+$，使得 $U^{\mu_0} := \min\{U^{\mu_1}, U^{\mu_2}\}$ [17, 定理 1.31].[7]如 [33, 定理 3.9], 所示，($\mathcal{P}_1$) 例如在 A 为拟闭（拟紧）时成立，也就是说，如果 A 可由闭（紧）集合在外容量意义下逼近，参见 Fuglede [11].[8]此处及下文中，我们采用记号 $B_r := \{|x| < r\}$, $\overline{B}_r := \{|x| \leqslant r\}$, $S_r := \{|x| = r\}$.[9]例如，当 ω 本身具有有限能量，或当 ω 有界且满足分离条件时，就会出现这种情况

$$\inf_{(x,y) \in S(\omega) \times A} |x - y| > 0.$$

在 $\mathcal{E}^+(A)$中遍历 μ、 $\|\mu\|^2-2\int U^\omega\,d\mu$，以极小化高斯泛函的问题。或者， ω^A在 $\mathcal{E}^+(A)$中可由在 A上几乎处处满足 $U^{\omega^A}=U^\omega$这一条件唯一刻画。

证明。由于 $\omega^A=(\omega^A)^A$ （见 [26, 推论 4.2]），将推论 2.4 应用于 $\omega^A\in\mathcal{E}^+$可知，确实有 $\omega^A\in\mathcal{E}^+(A)$，因此 ω^A 是其自身在 $\mathcal{E}^+(A)$ 上的正交投影；或者等价地，它是使泛函 $\|\mu\|^2-2\int U^{\omega^A}\,d\mu$, μ在 $\mathcal{E}^+(A)$ 上取极小值的（唯一）解。注意到对所有 $\mu\in\mathcal{E}^+(A)$，都有 $\int U^{\omega^A}\,d\mu=\int U^\omega\,d\mu$，即可得到该结论的前半部分；而这一点又是由 (2.2) 推得的，所用事实（下文将常常用到）是：对于任意 $\mu\in\mathcal{E}^+(A)$， A 的任意 μ-可测子集，只要满足 $c_*(\cdot)=0$，就是 μ-零测集。

对于后一部分，假设对于某个 $\mu_0\in\mathcal{E}^+(A)$，(2.2) 中的 ω^A 被替换为该项后仍成立。根据内容量可数次可加性的强化版本（引理 2.7），

$$U^{\mu_0}=U^\omega=U^{\omega^A}\ \text{n.e. on } A,$$

由此得到 $\mu_0=(\omega^A)^A$，这同样是由将推论 2.4 应用于 $\omega^A\in\mathcal{E}^+$ 得出的。将此结果与 $(\omega^A)^A=\omega^A$ （见上文）结合，得到 $\mu_0=\omega^A$，从而完成整个证明。□

引理 2.7. 对于任意 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 和博雷尔 $U_j\subset\mathbb{R}^n$,

$$c_*\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}Q\cap U_j\Big)\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}c_*(Q\cap U_j).$$

证明. 参见 [10, 第 157–158] 页（关于 $\alpha=2$, 参见 [5, 第 253] 页）；并参阅 [17, 第 144] 页。 □

3. An extension of the concept of pseudo-balayage

在下文中，我们假设

$$c_*(A)>0. \tag{3.1}$$

那么（且仅当如此）类 $\mathcal{E}^+(A)$ 不等于 $\{0\}$，见 [10, 引理 2.3。1],而所讨论的问题也就变得非平凡。

固定一个（带符号）测度 $\omega\in\mathfrak{M}$ （不一定具有有限能量），并通过以下公式定义外场 $f\colon\ \mathbb{R}^n\to[-\infty,\infty]$

$$f:=-U^\omega.$$

由于 f 是两个下半连续（l.s.c.）函数之差，因此它是博雷尔可测的；并且根据 (1.8)， f 在 $\mathbb{R}^n$ 上准处处有限。

令 $\mathcal{E}_f^+(A)$ 表示由所有满足 f 关于 μ 可积的 $\mu\in\mathcal{E}^+(A)$ 构成的凸锥；则对每个 $\mu\in\mathcal{E}_f^+(A)$，高斯泛函 [10]

$$I_f(\mu):=\|\mu\|^2+2\int f\,d\mu=\|\mu\|^2-2\int U^\omega\,d\mu$$

是有限的。记

$$\hat{w}_f(A):=\inf_{\mu\in\mathcal{E}_f^+(A)}I_f(\mu), \tag{3.2}$$

我们有

$$-\infty\leqslant\hat{w}_f(A)\leqslant0, \tag{3.3}$$

上界估计源于以下事实： $0\in\mathcal{E}_f^+(A)$，而 $I_f(0)=0$。

定义 3.1。若测度 $\hat{}\omega^A\in\mathcal{E}_f^+(A)$ 满足 $I_f(\hat{}\omega^A)=\hat{}w_f(A)$，则称其为 ω 在 A上的内 α-*Riesz*伪扫掠。

[10]在构造函数论中，高斯泛函也称为 f-加权能量。

引理3.2。 内伪扫掠$\hat{\omega}^A$ 是唯一的（如果存在）。

证明。这可通过标准方法得出：利用预希尔伯特空间 $\mathcal{E}$ 中类 $\mathcal{E}_f^+(A)$ 的凸性和平行四边形恒等式，并运用 Riesz核的严格正定性。（例如参见 [21, 引理 6] 的证明。请注意，该证明要求 $\hat{w}_f(A)$ 有限；然而，只要 $\hat{\omega}^A$ 存在，这一点必然成立。）□

注3.3。如果 ω 为正，那么如定理 2.6 所示，内伪扫掠 $\hat{\omega}^A$ 的概念将内扫掠 ω^A （为 $\alpha \leqslant 2$ 引入）扩展至任意 $\alpha \in (0, n)$。详情请参见本节以及第 4 节。

¶ 但是，如果 ω 是带符号的，那么通过（2.3）为 $\alpha \leqslant 2$ 定义的内扫掠 ω^A 可能与内伪扫掠 $\hat{\omega}^A$ 不一致。（因此，在 $\alpha \leqslant 2$ 的情况下，内伪扫掠理论可视为带符号测度内扫掠的一种替代理论，它与标准理论不等价。）

事实上，取 $\omega \in \mathfrak{M}$ 使得 $\omega = -\omega^- \neq 0$。那么 $\omega^A = -(\omega^-)^A \neq 0$，而在 $\mathcal{E}_f^+(A)$上极小化 $\|\mu\|^2 + 2\int U^{\omega^-}\, d\mu \geqslant 0$的 $\hat{\omega}^A$显然为 0，因此 $\hat{\omega}^A \neq \omega^A$。

注3.4。 由定义 3.1容易得出，若 $\hat{\omega}^A$ 存在，则对任意 $c \in [0, \infty)$，$(\widehat{c\omega})^A$ 也存在，而且

$$(\widehat{c\omega})^A = c\hat{\omega}^A. \tag{3.4}$$

然而，若 $c < 0$，则此结论不成立，参见注3.3。

3.1. 关于内伪扫掠的存在性。 回顾一下，我们始终假设条件 $(\mathcal{P}_1)$ 和 (3.1) 成立。在本文余下部分，我们还假设 $\omega \in \mathfrak{M}$ 满足以下性质之一：[11]

$(\mathcal{P}_2)$ $\omega \in \mathcal{E}$。$(\mathcal{P}_3)$ ω^+有界， U^ω在 $\overline{A} := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^n} A$ 上半连续，并且

$$M_A := \sup_{x \in A} U^{|\omega|}(x) < \infty. \tag{3.5}$$

请注意，在情形（$\mathcal{P}_2$）下，类 $\mathcal{E}_f^+(A)$ 实际上与整个 $\mathcal{E}^+(A)$ 相同，参见 (3.13)；而在情形（$\mathcal{P}_3$）下，它必然包含所有有界 $\mu \in \mathcal{E}^+(A)$。

定理 3.5。定义 3.1 引入的内伪扫掠 $\hat{\omega}^A$确实存在。因此，

$$-\infty < \hat{w}_f(A) \leqslant 0. \tag{3.6}$$

同一个 $\hat{\omega}^A$ 还可以用以下 (a) 或 (b) 之一来刻画：(a) $\hat{\omega}^A$ 是 $\mathcal{E}_f^+(A)$ 中唯一具有以下两个性质的测度

$$\int U^{\hat{\omega}^A - \omega}\, d\mu \geqslant 0 \quad \textit{for all } \mu \in \mathcal{E}_f^+(A), \tag{3.7}$$

$$\int U^{\hat{\omega}^A - \omega}\, d\hat{\omega}^A = 0. \tag{3.8}$$

(b) $\hat{\omega}^A$ 是 $\mathcal{E}^+(A)$ 中唯一具有这两个性质[12]的测度

$$U^{\hat{\omega}^A} \geqslant U^\omega \quad \textit{n.e. on } A, \tag{3.9}$$

$$U^{\hat{\omega}^A} = U^\omega \quad \hat{\omega}^A\textit{-a.e.} \tag{3.10}$$

若 $\omega \in \mathfrak{M}$ 在 $\overline{A}^c$ 中紧支撑，则 [11]$(\mathcal{P}_3)$ 显然成立。[12]根据 (3.9)， $U^{\hat{\omega}^A} \geqslant U^\omega$ 在 $\hat{\omega}^A$-几乎处处成立；因此，(3.10) 等价于表面上较弱的关系 $U^{\hat{\omega}^A} \leqslant U^\omega$ 在 $\hat{\omega}^A$-几乎处处成立。同理，(3.8) 可以替换为 $\int U^{\hat{\omega}^A - \omega}\, d\hat{\omega}^A \leqslant 0$。

证明。 固定 $\nu \in \mathcal{E}_f^+(A)$ 后，我们先证明：用 ν 替代 $\hat{}\omega^A$ 时，(3.9) 和 (3.10) 成立，当且仅当 (3.7) 和 (3.8) 成立。只需验证这一结论的"若"部分；反向显然，因为对于任意 $\mu \in \mathcal{E}^+(A)$， A 中任何满足 $c_*(\cdot) = 0$ 的 μ-可测子集都是 μ-零测的。

因此，假设 (3.7) 和 (3.8) 成立（以 ν 代替 $\hat{}\omega^A$），反设 (3.9) 不成立。那么，存在紧集 $K \subset A$，使得在 K 上 $U^\nu < U^\omega$，而 $c(K) > 0$,[13] 因此，对于任意 $\tau \in \mathcal{E}^+(K)$， $\int U^{\nu-\omega}\, d\tau < 0$， $\tau \neq 0$，这与 (3.7) 矛盾，因为 $\int f\, d\tau$ 显然是有限的。因此，(3.9) 确实成立，从而

$$U^\nu \geqslant U^\omega \quad \nu\text{-a.e.} \tag{3.11}$$

此外，反设 (3.10) 不成立，由 (3.11) 可推知，存在紧集 $Q \subset A$，使得 $\nu(Q) > 0$，而在 Q 上 $U^\nu > U^\omega$。结合 (3.11)，可得 $\int U^{\nu-\omega}\, d\nu > 0$，但这与 (3.8) 矛盾。

由此验证的等价性使我们能够证明断言 (a) 和 (b) 中各自唯一性的结论。事实上，假设存在某些 ν、$\nu' \in \mathcal{E}^+(A)$ 满足 (3.9) 和 (3.10)，以取代 $\hat{}\omega^A$。注意到由 (3.10) 可知必有 ν、$\nu' \in \mathcal{E}_f^+(A)$，再将 (3.7) 和 (3.8) 分别应用于 ν 和 ν'，便得

$$\langle \nu, \nu' \rangle \geqslant \int U^\omega\, d\nu' = \|\nu'\|^2, \quad \langle \nu', \nu \rangle \geqslant \int U^\omega\, d\nu = \|\nu\|^2.$$

因此，

$$0 \leqslant \|\nu - \nu'\|^2 = \big(\|\nu\|^2 - \langle \nu', \nu \rangle\big) + \big(\|\nu'\|^2 - \langle \nu, \nu' \rangle\big) \leqslant 0,$$

由此， $\nu = \nu'$，这是由 α-Riesz核的严格正定性所致。

情形 ($\mathcal{P}_2$)。 首先假设 ($\mathcal{P}_2$) 成立；此时高斯泛函具有如下形式 m

$$I_f(\mu) = \|\omega - \mu\|^2 - \|\omega\|^2 \ \text{ for all } \mu \in \mathcal{E}^+(A), \tag{3.12}$$

由此

$$\mathcal{E}_f^+(A) = \mathcal{E}^+(A). \tag{3.13}$$

因此，内伪扫掠 $\hat{}\omega^A$ 的存在性问题归结为 $\omega \in \mathcal{E}$ 在 $\mathcal{E}^+(A)$ 上的正交投影的存在性问题，即

$$\hat{\omega}^A \in \mathcal{E}^+(A) \ \text{ and } \ \|\omega - \hat{\omega}^A\| = \min_{\mu \in \mathcal{E}^+(A)} \|\omega - \mu\|.$$

由于凸锥 $\mathcal{E}^+(A)$ 根据 ($\mathcal{P}_1$) 是强闭的，因而是强完备的；$\mathcal{E}^+$ 由 α-Riesz 核的完美性而强完备。应用 [9]（定理 1.12.3 和命题 1.12.4(2)）可知，这样的正交投影确实存在，且在 $\mathcal{E}^+(A)$ 中由 (3.7) 和 (3.8) 唯一刻画。鉴于上文已证明 (a) 与 (b) 等价，这就推出了该定理。

情形 ($\mathcal{P}_3$)。剩余的情形 ($\mathcal{P}_3$) 将分四步处理。

步骤 1。此步骤旨在证明，内伪扫掠 $\hat{}\omega^A$ 存在，当且仅当存在满足 (a)（等价地，(b)）的（唯一）测度 $\mu_0 \in \mathcal{E}_f^+(A)$，且此时必有 $\mu_0 = \hat{}\omega^A$。

首先假设 $\hat{}\omega^A$ 存在。为验证 (3.9)，反设存在一个紧集 $K \subset A$，满足 $c(K) > 0$，且 $U^{\hat{}\omega^A} < U^\omega$ 在 K 上。经过直接验证可知，对于任意 $\tau \in \mathcal{E}^+(K)$、$\tau \neq 0$ 以及任意 $t \in (0, \infty)$，

$$I_f(\hat{\omega}^A + t\tau) - I_f(\hat{\omega}^A) = 2t \int \big(U^{\hat{\omega}^A} - U^\omega\big)\, d\tau + t^2 \|\tau\|^2. \tag{3.14}$$

[13]如果 A 是可容量化的（例如博雷尔集），我们记 $c(A) := c_*(A) = c^*(A)$。

由于 $\|\tau\| < \infty$，当 $t > 0$ 足够小时，(3.14) 右端的值（因而左端的值也是）为 < 0，然而对于 $\hat{\omega}^A + t\tau \in \mathcal{E}_f^+(A)$，这与定义 3.1 相矛盾。

由此得出 (3.9)，我们得到

$$U^{\hat{\omega}^A} \geqslant U^{\omega} \quad \hat{\omega}^A\text{-a.e.} \tag{3.15}$$

现在假设 (3.10) 不成立；则存在一个紧集 $Q \subset A$，使得 $\hat{\omega}^A(Q) > 0$，并且满足 $U^{\hat{\omega}^A} > U^{\omega}$ 在 Q 上成立，参见 (3.15)。记 $\upsilon := \hat{\omega}^A|_Q$，则对所有 $t \in (0, 1)$，都有 $\hat{\omega}^A - t\upsilon \in \mathcal{E}_f^+(A)$，因此

$$I_f(\hat{\omega}^A - t\upsilon) - I_f(\hat{\omega}^A) = -2t \int \left(U^{\hat{\omega}^A} - U^{\omega}\right) d\upsilon + t^2 \|\upsilon\|^2,$$

当 t 足够小时，这又与定义 3.1 矛盾。（注意，根据 (3.10)，

$$U^{\hat{\omega}^A} \leqslant U^{\omega} \quad \text{on } S(\hat{\omega}^A), \tag{3.16}$$

因为根据 ($\mathcal{P}_3$)，U^{ω} 在 $\overline{A}$ 上是上半连续（u.s.c.），而 $U^{\hat{\omega}^A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是下半连续（l.s.c.）。对于该命题的"若"部分，假设 (a) 对某个（唯一的）$\mu_0 \in \mathcal{E}_f^+(A)$ 成立。为了证明必有 $\mu_0 = \hat{\omega}^A$，我们只需验证

$$I_f(\mu) - I_f(\mu_0) \geqslant 0 \quad \text{for any } \mu \in \mathcal{E}_f^+(A). \tag{3.17}$$

但显然

$$\begin{aligned} I_f(\mu) - I_f(\mu_0) &= \|\mu - \mu_0 + \mu_0\|^2 - 2\int U^{\omega}\, d\mu - \|\mu_0\|^2 + 2\int U^{\omega}\, d\mu_0 \\ &= \|\mu - \mu_0\|^2 + 2\int U^{\mu_0 - \omega}\, d(\mu - \mu_0), \end{aligned}$$

an关系式 (3.7) 和 (3.8)（以 μ_0 代替 $\hat{\omega}^A$）立即导出 (3.1 7).

步骤 2。因此，要完成定理的证明，还需证明内伪扫掠 $\hat{\omega}^A$ 的存在性。为此，在本步骤中始终假设 $A = K$ 是紧的。由于 $c(K) > 0$，见 (3.1)，我们可以将讨论限制在非零测度 $\mu \in \mathcal{E}^+(K)$ 上。对于其中每个 μ，都存在 $t \in (0, \infty)$ 和 $\tau \in \mathcal{E}^+(K)$，使得$\tau(K) = 1$，并且 $\mu = t\tau$。由 ($\mathcal{P}_3$) 可知，位势 $U^{|\omega|}$ 在 K 上有界，

$$\begin{aligned} I_f(\mu) &= t^2\|\tau\|^2 - 2t\int U^{\omega}\, d\tau \geqslant t^2\|\tau\|^2 - 2t\int U^{\omega^+}\, d\tau \\ &\geqslant t^2 c(K)^{-1} - 2tM_K = t^2\left(c(K)^{-1} - 2M_K t^{-1}\right), \end{aligned} \tag{3.18}$$

$M_K \in [0, \infty)$ 是由 (3.5)（其中 $A := K$）引入的。因此，依据 (3.18)，对于所有满足以下性质的 $\mu \in \mathcal{E}^+(K)$，都有$I_f(\mu) > 0$

$$\mu(K) > 2M_K c(K) =: L_K \in [0, \infty).$$

另一方面，$\hat{w}_f(K) \leqslant 0$，参见 (3.3)。鉴于上述结果，若将 (3.2) 中的 $\mathcal{E}_f^+(K)$ 替换为，则 $\hat{w}_f(K)$ 也会相同。

$$\mathcal{E}_{L_K}^+(K) := \left\{\mu \in \mathcal{E}^+(K) :\ \mu(K) \leqslant L_K\right\}, \tag{3.19}$$

也就是说，

$$\hat{w}_f(K) = \inf_{\mu \in \mathcal{E}_{L_K}^+(K)} I_f(\mu) =: \hat{w}_{f, L_K}(K). \tag{3.20}$$

因此，

$$-\infty < -2M_K L_K \leqslant \hat{w}_f(K) \leqslant 0.$$

取一个（极小化）序列 $(\mu_j)\subset\mathcal{E}^+_{L_K}(K)$，使得

$$\lim_{j\to\infty} I_f(\mu_j)=\hat{w}_{f,L_K}(K).$$

由于序列 (μ_j) 在模糊拓扑下有界，参见 (3.19)，它在模糊拓扑下相对紧（第 III.1 节，命题 15], ），因此存在一个子序列 (μ_{j_k})，在模糊拓扑下收敛到某个 $\mu_0\in\mathfrak{M}^+(K)$。（这里我们用到了 $\mathfrak{M}$ 上模糊拓扑的第一可数性，见引理 4.4], ；还用到了 $\mathfrak{M}^+(K)$ 是模糊闭集这一事实，见第 III.2 节，命题 6]。）由下降原理 [17, 式 (1.4.5)],

$$\|\mu_0\|^2\leqslant\liminf_{k\to\infty}\|\mu_{j_k}\|^2.$$

此外，根据第 IV.4.4 节，推论 3],

$$\int U^\omega\,d\mu_0\geqslant\limsup_{k\to\infty}\int U^\omega\,d\mu_{j_k}\in(-\infty,\infty),$$

U^ω 在（紧）集合 K 上有界且上半连续。这些合在一起可得

$$\hat{w}_f(K)\leqslant I_f(\mu_0)\leqslant\liminf_{k\to\infty} I_f(\mu_{j_k})=\hat{w}_{f,L_K}(K),$$

结合 (3.20)，这表明 μ_0 是伪扫掠 $\hat{}\omega^K$.

第*3*步。我们接下来的目标是证明，满足 (3.20) 的常数 L_K 可以定义为与足够大的 $K\in\mathfrak{C}_A$ 无关。（确切地说，在此处及下文中，$K\in\mathfrak{C}_A$ 的选取遵循某个 K_0，使得 $c(K_0)>0$。）

由 (3.9) 和 (3.16)，$U^{\hat{}\omega^K}=U^\omega$ 在 $\mathcal{S}:=S(\hat{}\omega^K)$ 上几乎处处成立，因此也对 $\gamma_{\mathcal{S}}$-几乎所有点成立，其中 $\gamma_{\mathcal{S}}$表示 $\mathcal{S}$ 上的容量测度（见 [10, 定理 2.5]）。由于 $U^{\gamma_{\mathcal{S}}}\geqslant 1$ 在 $\mathcal{S}$上几乎处处成立，因此也对 $\hat{}\omega^K$-几乎所有点成立，由富比尼定理可得，

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^K(\mathbb{R}^n)&=\int 1\,d\hat{\omega}^K\leqslant\int U^{\gamma_{\mathcal{S}}}\,d\hat{\omega}^K=\int U^{\hat{\omega}^K}\,d\gamma_{\mathcal{S}}\\&=\int U^\omega\,d\gamma_{\mathcal{S}}=\int U^{\gamma_{\mathcal{S}}}\,d\omega\leqslant\int U^{\gamma_{\mathcal{S}}}\,d\omega^+.\end{aligned}$$

由于 $U^{\gamma_{\mathcal{S}}}\leqslant 1$ 在 $S(\gamma_{\mathcal{S}})$ 上成立，若 $\alpha\leqslant 2$ （见 [17,定理 1.10]），应用 Frostman 最大值原理；否则应用 [17, 定理 1.5]，得到

$$\hat{\omega}^K(\mathbb{R}^n)\leqslant C_{n,\alpha}\omega^+(\mathbb{R}^n)=:L\ \text{ for all compact } K\subset A,\tag{3.21}$$

其中

$$C_{n,\alpha}:=\begin{cases}1 & \text{if }\ \alpha\leqslant 2,\\ 2^{n-\alpha} & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{3.22}$$

由此得到以下结论，这对我们的证明至关重要。

¶ 我们有

$$\hat{w}_f(K)=\hat{w}_{f,L}(K)\in[-2M_AL,0]\ \ \textit{for all}\ K\in\mathfrak{C}_A,\tag{3.23}$$

$M_A\in[0,\infty)$ 和 $L\in[0,\infty)$ 分别由 (3.5) 和 (3.21)引入。下确界 $\hat{}w_{f,L}(K)$ 实际上是一个最小值，其极小化子为 $\hat{}\omega^K$。

步骤 *4*。为证明非紧 A 时 $\hat{}\omega^A$ 的存在性，我们首先注意到网 $\big(\hat{}w_{f,\ L}(K)\big)_{K\in\mathfrak{C}_A}$ 递减，而且根据 (3.23),

$$\infty<\lim_{K\uparrow A}\hat{w}_{f,L}(K)\leqslant 0.\tag{3.24}$$

对于任意紧 K，$K'\subset A$ 使得 $K\subset K'$ 且 $c(K)>0$,

$$(\hat{\omega}^K+\hat{\omega}^{K'})/2\in\mathcal{E}^+_L(K'),$$

由此可得

$$\|\hat{\omega}^K+\hat{\omega}^{K'}\|^2-4\int U^{\omega}\,d(\hat{\omega}^K+\hat{\omega}^{K'})\geqslant 4\hat{w}_{f,L}(K')=4I_f(\hat{\omega}^{K'}).$$

将平行四边形恒等式应用于 $\hat{}\omega^K$、$\hat{}\omega^{K'}\in\mathcal{E}^+$，因此得到

$$\|\hat{\omega}^K-\hat{\omega}^{K'}\|^2\leqslant 2I_f(\hat{\omega}^K)-2I_f(\hat{\omega}^{K'}). \tag{3.25}$$

注意到由 (3.24) 可知，网 $\big(I_f(\hat{}\omega^K)\big)_{K\geqslant K_0}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是柯西的，由 (3.25) 可推得网 $(\hat{}\omega^K)_{K\geqslant K_0}$ 在 $\mathcal{E}^+(A)$ 中是强柯西的。由 ($\mathcal{P}_1$) 可知，锥 $\mathcal{E}^+(A)$ 是强闭的（因而强完备），故存在 $\zeta\in\mathcal{E}^+(A)$，使得

$$\hat{\omega}^K\to\zeta\ \text{ strongly (hence vaguely) in } \mathcal{E}^+(A) \text{ as } K\uparrow A. \tag{3.26}$$

此外，$\zeta\in\mathcal{E}^+_L(A)$，映射 $\mu\mapsto\mu(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathfrak{M}^+$.[14] 上关于模糊拓扑下半连续

我们断言，此 ζ 即为内伪扫掠 $\hat{}\omega^A$。如上所示（步骤 1），只需验证将 $\hat{}\omega^A$ 替换为 ζ 后，(3.9) 和 (3.10) 仍成立，即可得出结论。

为验证（3.9）（用 ζ 代替$\hat{}\omega^A$），只需对任意给定的紧$K_*\subset A$证明即可。由于 $\mathcal{E}^+$ 上的强拓扑是第一可数的，根据（3.26），存在网（$\hat{}\omega^K$）$_{K\in\mathfrak{C}_A}$的一个子序列（$\hat{}\omega^{K_j}$）$_{j\in\mathbb{N}}$，使得对所有 j，$K_j\supset K_*$，并且

$$\hat{\omega}^{K_j}\to\zeta\ \text{ strongly (hence vaguely) in } \mathcal{E}^+ \text{ as } j\to\infty. \tag{3.27}$$

必要时取一个子序列并更改记号，由（3.27）并利用 [10, 第166页的注记], ，可得

$$U^{\zeta}=\lim_{j\to\infty}U^{\hat{\omega}^{K_j}}\ \text{ n.e. on } \mathbb{R}^n. \tag{3.28}$$

现在对每个$\hat{}\omega^{K_j}$应用（3.9），然后令 $j\to\infty$。鉴于博雷尔集 [17, 上的内容量具有可数次可加性，参见 144] 页，我们由（3.28）推得（3.9）（用 ζ 代替$\hat{}\omega^A$）确实在 K_*上几乎处处成立，因而也在 A上几乎处处成立。

为证明以 ζ 代替 $\hat{}\omega^A$ 时的 (3.10)，由 (3.16) 应用于 K_j 可知 t

$$U^{\hat{\omega}^{K_j}}\leqslant U^{\omega}\ \text{ on } S(\hat{\omega}^{K_j}), \tag{3.29}$$

(K_j) 是上文选取的序列。由于 ($\hat{}\omega^{K_j}$) 在模糊拓扑下收敛到 ζ，见 (3.27)，对于每个 $x\in S(\zeta)$，存在 (K_j) 的一个子序列 (K_{j_k}) 以及点 $x_{j_k}\in S(\hat{}\omega^{K_{j_k}})$，使得 x_{j_k}、$k\in\mathbb{N}$ 随着 $k\to\infty$ 趋于 x。因此，由 (3.29) 得

$$U^{\hat{\omega}^{K_{j_k}}}(x_{j_k})\leqslant U^{\omega}(x_{j_k})\ \text{ for all } k\in\mathbb{N}.$$

在此令 $k\to\infty$，考虑到 U^{ω} 在 $\overline{A}$ 上的上半连续性，以及映射 $(x,\mu)\mapsto U^{\mu}(x)$ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathfrak{M}^+$ 上的下半连续性，其中 $\mathfrak{M}^+$ 配备模糊拓扑，依据引理 2.2.1(b)，我们得到以 ζ 代替 $\hat{}\omega^A$ 时的 (3.10)。

这意味着

$$\zeta=\hat{\omega}^A, \tag{3.30}$$

从而完成了整个定理的证明。 □

[14]参见 [3, IV.1 节，命题 4] 应用于 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 1（正且下半连续）。值得指出的是，在所讨论的集合为紧集的情况下，对于任意下半连续函数 g （不一定为正），映射 $\mu\mapsto\int g\,d\mu$在 $\mathfrak{M}^+(K)$ 上仍关于模糊拓扑下半连续。这可通过将 g 替换为 $g':=g+c\geqslant 0$ 得出，其中 $c\in(0,\infty)$；下半连续函数在紧集上有下界。然后利用映射 $\mu\mapsto\mu(K)$ 在 $\mathfrak{M}^+(K)$ 上的模糊连续性即可。

注 3.6。 暂时假设 ω 是正的，且 A 是拟闭的博雷尔集。此外，若 $\omega \in \mathcal{E}^+$，或者 $U^\omega|_A$ 有界而 $c^*(A) < \infty$,[15] 那么，定理 3.5 可由 Fuglede 关于局部紧豪斯多夫空间上相对于完美核的外伪扫掠的结果 [12, 定理 4.10] 推导出来。上述证明中所采用的方法与 [12], 中的方法本质不同，后者使我们能够为相当一般的 ω 和 A 建立内在黎斯伪扫除 $\hat{\omega}^A$ 的存在性，见（$\mathcal{P}_1$）和（$\mathcal{P}_2$），或（$\mathcal{P}_1$）和（$\mathcal{P}_3$）。在这方面，还值得注意的是，上述证明似乎可以推广到局部紧空间上的适当完美核；我们计划在今后的工作中对此进行研究。

3.2. 内伪扫掠的更多性质。 下述定理说明了称其为“内”伪扫掠的合理性。

定理 3.7。 $\hat{\omega}^K \to \hat{\omega}^A$ 在 $\mathcal{E}^+$ 中强收敛且在模糊拓扑下收敛，当 $K \uparrow A$ 时。

证明。 在情形 ($\mathcal{P}_3$) 下，将 (3.30) 代入 (3.26) 即得。

因此只需考虑情形 ($\mathcal{P}_2$)。此时 $\omega \in \mathcal{E}$，故 $\hat{\omega}^K$ 和 $\hat{\omega}^A$ 分别是 ω 在（凸的、强完备的）锥 $\mathcal{E}^+(K)$ 和 $\mathcal{E}^+(A)$ 上的正交投影。对 (3.25) 的证明稍作修改可得

$$\|\hat{\omega}^K - \hat{\omega}^{K'}\|^2 \leqslant 2I_f(\hat{\omega}^K) - 2I_f(\hat{\omega}^{K'}) \text{ whenever } K \subset K' \quad (K, K' \in \mathfrak{C}_A).$$

注意到网 $\big(\hat{w}_f(K)\big)_{K\in\mathfrak{C}_A}$ 是递减的，并且由 (3.12) 知它有界：

$$-\|\omega\|^2 \leqslant \hat{w}_f(K) \leqslant 0 \text{ for all } K \in \mathfrak{C}_A,$$

由上述结果可知，网 $(\hat{\omega}^K)_{K\in\mathfrak{C}_A} \subset \mathcal{E}^+(A)$ 是强柯西的，因此强收敛并在模糊拓扑下收敛到某个（唯一的） $\mu_0 \in \mathcal{E}^+(A)$。这意味着

$$\hat{w}_f(A) \leqslant I_f(\mu_0) = \lim_{K\uparrow A} I_f(\hat{\omega}^K) = \lim_{K\uparrow A} \hat{w}_f(K),$$

前一个等式是由 $(\hat{\omega}^K)$ 强收敛到 μ_0，并利用 (3.12) 得出的。因此，要验证这个 μ_0 实际上等于 $\hat{\omega}^A$，还需证明

$$\lim_{K\uparrow A} \hat{w}_f(K) \leqslant \hat{w}_f(A). \tag{3.31}$$

但对每个 $\mu \in \mathcal{E}^+(A)$,

$$I_f(\mu) = \lim_{K\uparrow A} I_f(\mu|_K) \geqslant \lim_{K\uparrow A} \hat{w}_f(K),$$

其中等式是对正的、下半连续的、μ-可积函数 κ_α、U^{ω^+} 和 U^{ω^-} 分别应用 [10, 引理 1.2.2] 得出的，而集合 A 是 μ-可测的。现在令 μ 遍历 $\mathcal{E}^+(A)$，即可得到 (3.31)，从而完成定理的证明。□

推论 3.8。 如果 U^ω 在 $\overline{A}$ 上是上半连续的（特别是当 ($\mathcal{P}_3$) 时成立），那么

$$\hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n) \leqslant C_{n,\alpha}\omega^+(\mathbb{R}^n), \tag{3.32}$$

$C_{n,\ \alpha}$ 由（3.22）引入。

证明。 鉴于 U^ω 在 $\overline{A}$ 上具有上半连续性，在情形（$\mathcal{P}_3$）下给出的（3.21）的证明在情形（$\mathcal{P}_2$）下同样成立。因此，在情形（$\mathcal{P}_2$）和（$\mathcal{P}_3$）中均有，

$$\hat{\omega}^K(\mathbb{R}^n) \leqslant C_{n,\alpha}\omega^+(\mathbb{R}^n) \text{ for all } K \in \mathfrak{C}_A,$$

由此得到（3.32），因为网（$\hat{\omega}^K$）$_{K\in\mathfrak{C}_A}$ 在模糊拓扑下收敛于 $\hat{\omega}^A$（定理 3.7），而映射 $\mu \mapsto \mu(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathfrak{M}^+$ 上关于模糊拓扑下半连续（参见脚注 14）。□

[15] 具有有限外容量的拟闭集实际上是拟紧的 [12, 引理 3.14]。

4. 伪扫掠与扫掠概念的比较

下面的例 4.1–4.4 旨在说明，内扫掠通常具有的一些良好性质，在处理内伪扫掠时可能不再成立；即使在狄拉克测度与球面这一最简单的情形下也是如此。

¶ 体现这两个概念差异的第一个事实是，内伪扫掠可能会增加正测度的总质量（例如，参见涉及 $\alpha > 2$ 的式 (4.5)）。回顾一下，若 $\alpha \in (0, 2]$, 那么，根据 [26, 推论 4.9],

$$\mu^A(\mathbb{R}^n) \leqslant \mu(\mathbb{R}^n) \ \text{ for any } \mu \in \mathfrak{M}^+ \text{ and } A \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

¶ 第二个事实是，对于 $\alpha > 2$，存在一个集合 $A \subset \mathbb{R}^n$，它在无穷远处不是内α-薄的[16]，且存在一个测度 $\mu \in \mathfrak{M}^+$，使得

$$\hat{\mu}^A(\mathbb{R}^n) > \mu(\mathbb{R}^n),$$

例如，参见式 (4.5)。与此相反，对于所有 $\mu \in \mathfrak{M}^+$，在无穷远处不是内 α-薄的条件是式 (4.1) 中等号成立的充要条件，参见 [27, 推论 5.3]。

例 4.1。设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界（连通、开）区域，$\omega := \varepsilon_{x_0}$，其中 ε_{x_0} 是位于 $x_0 \in D$ 处的单位狄拉克测度，并设 A 是 $\overline{D} \setminus \{x_0\}$ 关于球面 $S_{x_0,\,1} := \{|x - x_0| = 1\}$ 的反演。对于这些 A 和 ω，($\mathcal{P}_1$) 和 ($\mathcal{P}_3$) 均成立，因此伪扫掠 $\hat{}\varepsilon^A_{x_0}$ 存在且唯一（定理 3.5）。

首先假设 $\alpha \in (0, 2]$。由于将 ε_{x_0} 扫掠到 A 上所得的扫掠 $\varepsilon^A_{x_0}$ 显然具有有限能量，定理 2.6 得出

$$\hat{\varepsilon}^A_{x_0} = \varepsilon^A_{x_0}. \tag{4.2}$$

应用 [17, 第 IV.5 节20] ，因此可推知伪扫掠 $\hat{}\varepsilon^A_{x_0}$ 实际上是容量测度 $\gamma_{\overline{D}}$ 关于球面 $S_{x_0,\,1}$ 的 Kelvin 变换 $\gamma^*_{\overline{D}}$，从而特别有，

$$S(\hat{\varepsilon}^A_{x_0}) = \begin{cases} \partial A & \text{if } \ \alpha = 2, \\ A & \text{if } \ \alpha < 2, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中 $\partial A := \partial_{\mathbb{R}^n} A$。由于集合 A 在无穷远处并非 α-薄集，由 (4.2) 和 [13, 定理 3.22],，我们还可得到

$$\hat{\varepsilon}^A_{x_0}(\mathbb{R}^n) = \varepsilon_{x_0}(\mathbb{R}^n) = 1. \tag{4.4}$$

现在设 $\alpha \in (2, n)$。我们旨在证明，与 (4.4) 相反，此时有[17]

$$1 = \varepsilon_{x_0}(\mathbb{R}^n) < \hat{\varepsilon}^A_{x_0}(\mathbb{R}^n) \leqslant 2^{n-\alpha}, \tag{4.5}$$

后一个不等式根据 (3.32) 成立。

众所周知，$\overline{D}$ 上的容量测度 $\gamma_{\overline{D}}$ 是 $\mathcal{E}^+(\overline{D})$ 中总质量为（有限） $c(\overline{D})$ 的（唯一）测度，并满足（见 [17, 第 II.1.3、II.3.13]节）

$$U^{\gamma_{\overline{D}}} \geqslant 1 \ \text{ n.e. on } \overline{D}, \tag{4.6}$$

$$U^{\gamma_{\overline{D}}} = 1 \ \text{ n.e. on } S(\gamma_{\overline{D}}), \tag{4.7}$$

$$U^{\gamma_{\overline{D}}} > 1 \ \text{ on } D, \tag{4.8}$$

[16]根据 [16, 定义 3.1], $A \subset \mathbb{R}^n$ 称为内在 α-无穷远处薄集，若

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{c_*(A_j)}{q^{j(n-\alpha)}} < \infty,$$

其中 $q \in (1, \infty)$ 且 $A_j := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ q^j \leqslant |x| < q^{j+1}\}$。对于 $\alpha \in (0, 2]$, 另见 [27,定义 2.1]。；而对于 $\alpha = 2$ 和博雷尔 A，见 [7, 第 175–176] 页。

[17]与 (6.11) 比较。

(4.8) 是由以下事实导致的：对于 $\alpha \in (2,n)$，正测度的 α-Riesz 位势在 $\mathbb{R}^n$ [17,定理 1.4] 上是超调和的。

对于 $\gamma_{\overline{D}}$ 的 Kelvin 变换 $\gamma^*_{\overline{D}}$，应用 [17, 式 (4.5.2)–(4.5.4)] 可得

$$\begin{gathered} U^{\gamma^*_{\overline{D}}}(x) = |x-x_0|^{\alpha-n} U^{\gamma_{\overline{D}}}(x^*), \\ I(\gamma^*_{\overline{D}}) = I(\gamma_{\overline{D}}), \\ \gamma^*_{\overline{D}}(\mathbb{R}^n) = U^{\gamma_{\overline{D}}}(x_0), \end{gathered} \tag{4.9}$$

x^* 是关于 $S_{x_0,1}$ 的 x 的反演。结合 (4.6) 和 (4.7)，这表明 $\gamma^*_{\overline{D}}$ 是类 $\mathcal{E}^+(A)$ 中的一个测度，具有以下性质

$$\begin{aligned} U^{\gamma^*_{\overline{D}}} &\geqslant U^{\varepsilon_{x_0}} \quad \text{n.e. on } A, \\ U^{\gamma^*_{\overline{D}}} &= U^{\varepsilon_{x_0}} \quad \text{n.e. on } S(\gamma^*_{\overline{D}}), \end{aligned}$$

when式 (3.9) 和 (3.10)，其中 $\omega := \varepsilon_{x_0}$ 以及 $\hat{\omega}^A := \gamma^*_{\overline{D}}$。因此，根据定理 3 .5,

$$\hat{\varepsilon}^A_{x_0} = \gamma^*_{\overline{D}},$$

这与 (4.8) 和 (4.9) 一起证明了 (4.5)。此外注意到

$$S(\hat{\varepsilon}^A_{x_0}) \subset \partial A$$

（与 (4.3) 比较）。

例4.2。对例 4.1 中论证稍作修改即可得出：若$G \subset \mathbb{R}^n$ 是开且相对紧的集合，则对任意 $\alpha \in (2,n)$以及任意 $x_0 \in G$,

$$1 < \hat{\varepsilon}^{G^c}_{x_0}(\mathbb{R}^n) \leqslant 2^{n-\alpha}.$$

例4.3。设 $\alpha \in (2,n)$，$A := B^c_R := \{|x| \geqslant R\}$，$R \in (0,\infty)$，并设 $\omega := \varepsilon_0$，其中 ε_0 表示位于 $x=0$处的单位狄拉克测度。由例 4.1 可知,

$$\hat{\varepsilon}^{B^c_R}_0 = \gamma^*_{\overline{B}_r},$$

其中$\gamma_{\overline{B}_r}$ 是球 $\overline{B}_r$上的容量测度，$r := 1/R$，而 $\gamma^*_{\overline{B}_r}$ 是$\gamma_{\overline{B}_r}$ 关于单位球面 S_1的 Kelvin 变换。因此，由应用于$\gamma_{\overline{B}_r}$的对称性可知，$\hat{\varepsilon}^{B^c_R}_0$在球面 S_R上均匀分布，并且满足

$$1 < \hat{\varepsilon}^{B^c_R}_0(\mathbb{R}^n) \leqslant 2^{n-\alpha}.$$

例4.4。设 $\alpha \in (2,n)$，$A := S_R$，$R \in (0,\infty)$，并设 $\omega := \varepsilon_0$。如例 4.3 所示,

$$S(\hat{\varepsilon}^{B^c_R}_0) = S_R,$$

根据定义 3.1，得到

$$\hat{\varepsilon}^{S_R}_0 = \hat{\varepsilon}^{B^c_R}_0.$$

因此，$\hat{\varepsilon}^{S_R}_0$在球面 S_R上均匀分布，并且满足

$$1 < \hat{\varepsilon}^{S_R}_0(\mathbb{R}^n) \leqslant 2^{n-\alpha}.$$

另请注意，$\hat{\varepsilon}^{S_R}_0$实际上是容量测度 $\gamma_{S_r}(=\gamma_{\overline{B}_r})$ 关于单位球面 S_1 的 Kelvin 变换，其中 $r := 1/R$。

5. 内在高斯变分问题

与前面一样，考虑一个满足 (3.1) 和 $(\mathcal{P}_1)$ 的集合 $A \subset \mathbb{R}^n$、一个满足 $(\mathcal{P}_2)$ 或 $(\mathcal{P}_3)$ 的（带符号）测度 $\omega \in \mathfrak{M}$，以及由下式给出的外场 f

$$f := -U^{\omega}.$$

根据定理 3.5，极小化高斯泛函 $I_f(\mu)$ 的问题，

$$I_f(\mu) := \|\mu\|^2 + 2\int f\, d\mu = \|\mu\|^2 - 2\int U^{\omega}\, d\mu,$$

在由所有具有有限 $I_f(\mu)$的 $\mu \in \mathcal{E}^+(A)$构成的类$\mathcal{E}_f^+(A)$中，该问题有唯一解；其解 $\hat{}\omega^A$ 称为 ω 到 A上的内伪扫掠，并且在 $\mathcal{E}_f^+(A)$中由(3.7)和(3.8)共同唯一刻画，或者等价地，由(3.9)和(3.10)共同唯一刻画。

本文接下来将说明，内伪扫掠这一概念是解决内在高斯变分问题的有力工具。该问题表述如下。

问题 5.1. 是否存在$\lambda_{A,f}$，使其在 $\breve{\mathcal{E}}^+(A)$中极小化 $I_f(\mu)$? 这里，

$$\breve{\mathcal{E}}^+(A) := \big\{\mu \in \mathcal{E}^+(A) :\ \mu(\mathbb{R}^n) = 1\big\}.$$

专著 [2, 20] 回顾了问题 5.1 的近期成果；该问题由 C.F. Gauss [14], 提出（其中也列出了大量参考文献）。关于这一主题的一些最新研究，请参见 [8, 32, 33]。

注 5.2。 如果 $A = K$ 是紧的，而 f 在 K上是下半连续的，那么极小化子 $\lambda_{K,\,f}$ 的存在性很容易验证：这是因为类 $\breve{\mathcal{E}}^+(K)$ 在模糊拓扑下是紧的，参见 [3, 第 III.1.9 节、推论 3], ；而高斯泛函 $I_f(\cdot)$ 在 $\mathfrak{M}^+(K)$ 上关于模糊拓扑下半连续，后者可由下降原理以及映射 $\mu \mapsto \int f\, d\mu$ 在 $\mathfrak{M}^+(K)$ 上的模糊下半连续性直接得出（脚注 14）。然而，如果 A 非紧，或 f 不是下半连续的，这种仅基于模糊拓扑的证明便不再适用。

为研究 A 非紧和/或 f 不下半连续的一般情形下的问题 5.1，我们最近提出了一种方法，该方法系统地运用了预希尔伯特空间 $\mathcal{E}$ 上的强拓扑和疏拓扑，并实质性地利用了 Riesz 核的完美性，见 [33]。然而，若 $c_*(A) = \infty$，则 [33] 中所做的分析仅限于 $\alpha \leqslant 2$ 和 $\omega \geqslant 0$，且主要基于正测度的内扫掠理论。

受此观察启发，我们利用上文第 3、4 节中发展的内伪扫掠理论，将 [33], 中提出的方法推广到任意 $\alpha \in (0, n)$ 和带符号的 ω。由此得到的结果在第 6 节中予以表述，并在第 7–9 节中证明。值得强调的是，这些结果显著改进了 [8, 33] 中近期提出的许多结果（详情参见第 6.3 节）。

5.1. 预备结果。 首先注意，在假设（$\mathcal{P}_2$）或（$\mathcal{P}_3$）成立时，对于所有 $\mu \in \breve{\mathcal{E}}^+(A)$, 高斯泛函 $I_f(\mu)$ 都是有限的。因此

$$\breve{\mathcal{E}}^+(A) \subset \mathcal{E}_f^+(A), \tag{5.1}$$

因此

$$\min_{\mu \in \mathcal{E}_f^+(A)} I_f(\mu) =: \hat{w}_f(A) \leqslant w_f(A) := \inf_{\mu \in \breve{\mathcal{E}}^+(A)} I_f(\mu). \tag{5.2}$$

引理5.3。 $-\infty < w_f(A) < \infty$。

证明。 根据 [21, 引理 5], $w_f(A) < \infty$ 等价于不等式

$$c_*\big(\{x \in A : |f|(x) < \infty\}\big) > 0,$$

根据 (3.1) 以及 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限这一事实，该结论确实成立。（此处用到了内内容量可数次可加性的强化版本，见引理 2.7。）最后，结合 (5.2) 和 (3.6) 得到 $w_f(A) > -\infty$。□

问题 5.1 的解 $\lambda_{A,\,f}$ 是唯一的（如果存在），这可利用类 $\breve{\mathcal{E}}^+(A)$ 的凸性以及预希尔伯特空间 $\mathcal{E}$ 中的平行四边形恒等式来证明。这样的 $\lambda_{A,\,f}$称为内 f加权平衡测度。

以下定理给出了 $\lambda_{A,\,f}$ 的特征性质，可由作者较早的一篇论文推出 [21]（参见其中的定理 1、定理 2 和命题 1）。

定理 5.4。 要使 $\lambda \in \breve{\mathcal{E}}^+(A)$ 成为问题 5.1 的（唯一）解 $\lambda_{A,\,f}$，以下两个不等式中任意一个成立都是必要且充分的:

$$U_f^\lambda \geqslant \int U_f^\lambda \, d\lambda \quad \text{n.e. on } A, \tag{5.3}$$

$$U_f^\lambda \leqslant w_f(A) - \int f \, d\lambda \quad \lambda\text{-a.e. on } A, \tag{5.4}$$

其中

$$U_f^\lambda := U^\lambda + f$$

被定义 为 λ 的 f 加权位势。若 (5.3) 或 (5.4) 成立，则实际 *ly*

$$\int U_f^\lambda \, d\lambda = w_f(A) - \int f \, d\lambda =: c_{A,f} \in (-\infty, \infty), \tag{5.5}$$

$c_{A,\,f}$ 称为内 f 加权平衡常数。[18]

注 5.5。 若 f 在$\overline{A}$ 上是下半连续的（例如在情形 ($\mathcal{P}_3$) 下），那么由 (5.4) 得

$$U_f^{\lambda_{A,f}} \leqslant c_{A,f} \quad \text{on } S(\lambda_{A,f}),$$

将其与 (5.3) 结合可得

$$U_f^{\lambda_{A,f}} = c_{A,f} \quad \text{n.e. on } A \cap S(\lambda_{A,f}).$$

6. 关于$\lambda_{A,\,f}$ 的存在性及其性质

以下内容中，除推论 6.8 外，我们均假设 A 和 f 满足第 5 节开头所重申的永久性要求。

6.1. 问题 5.1 的可解性。

下文定理 6.1、6.3、6.4、6.7 以及推论 6.2、6.5、6.6、6.8 给出了问题 5.1 存在（唯一）解 $\lambda_{A,\,f}$ 的充分条件和/或必要条件。

定理 6.1。 要使$\lambda_{A,\,f}$ 存在，充分条件是[19]

$$c_*(A) < \infty. \tag{6.1}$$

推论 6.2。 只要 A 是拟紧的，$\lambda_{A,\,f}$ 就存在。

证明。 显然，对于拟紧 A，由 [33, 定理 3.9] 和 [11, 定义 2.1]，($\mathcal{P}_1$) 和 (6.1) 分别成立。□

[18]与 [20, 第 27] 页类似， $c_{A,\,f}$ 也可称为内部修正罗宾常数。[19]关于定理 6.1 和推论 6.2 的推广，见下文注 8.2。

定理 6.3。 要使$\lambda_{A,\ f}$ 存在，充分条件是

$$\hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n) = 1, \tag{6.2}$$

$\hat{}\omega^A$ 是 ω 在 A上的内伪扫掠。此外，

$$\lambda_{A,f} = \hat{\omega}^A, \quad w_f(A) = \hat{w}_f(A), \quad c_{A,f} = 0,$$

$c_{A,\ f}$ 是内 f加权平衡常数。

•根据定理 6.1，本节余下部分中我们假设

$$c_*(A) = \infty. \tag{6.3}$$

• 除非（$\mathcal{P}_2$）成立，否则还假设

$$\lim_{|x|\to\infty,\ x\in\overline{A}} U^{\omega^-}(x) = 0. \tag{6.4}$$

定理 6.4。 只要满足以下条件，问题 5.1 就无解

$$\hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n) < 1. \tag{6.5}$$

推论 6.5. 如果 $\omega^+ = 0$，那么问题 5.1 总是无解。

*P*证明。 确实，如果 $\omega = -\omega^-$，那么 (6.5) 成立，因为 $\hat{}\omega^A = 0$ （见注3.3）。 □

推论 6.6. 如果 U^ω 在 $\overline{A}$上是上半连续的，那么只要满足以下条件，问题 5.1 就无解：

$$\omega^+(\mathbb{R}^n) < 1/C_{n,\alpha},$$

$C_{n,\ \alpha}$ 由 (3.22) 引入。

证明。 由定理 6.4 并利用 (3.32) 即可得出。 □

定理 6.7. 除非 ($\mathcal{P}_2$) 成立，否则假设 U^ω 在 $\overline{A}$ 上连续[20] ，并且

$$\lim_{|x|\to\infty,\ x\in\overline{A}} U^{\omega^\pm}(x) = 0. \tag{6.6}$$

Then

$$\lambda_{A,f}\ \textit{exists} \iff \hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n) \geqslant 1.$$

此外，如果

$$\hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n) > 1, \tag{6.7}$$

则[21]

$$\lambda_{A,f} \neq \hat{\omega}^A, \quad w_f(A) \neq \hat{w}_f(A), \quad c_{A,f} \neq 0. \tag{6.8}$$

推论 6.8. 去掉假设 (6.3) 以及对 ω 所施加的所有假设，考虑在 $\overline{A}^c$ 中紧支撑的带符号 $\omega \in \mathfrak{M}$。那么，当且仅当 $c_*(A) < \infty$ 或 $\hat{}\omega^A(\mathbb{R}^n) \geqslant 1$ 时，$\lambda_{A,\ f}$ 存在。特别是，如果 $c_*(A) = \infty$ 和 $\omega^+(\mathbb{R}^n) < 1/C_{n,\ \alpha}$ 都成立，则 $\lambda_{A,\ f}$ 不存在；其中 $C_{n,\ \alpha}$ 由 (3.22) 引入。

证明。 这由定理 6.1、6.7 和推论 6.6 综合得出。 □

注 6.9. 因此，若 $\omega \in \mathfrak{M}$ 在 $\overline{A}^c$ 中具有紧支撑，而 $c_*(A) = \infty$，那么根据推论 6.8，只要 $\omega^+(\mathbb{R}^n)$足够小，问题 5.1 就无解；而作为负电荷总量的 $\omega^-(\mathbb{R}^n)$对此现象没有影响。（请注意，当从静电学解释的角度考察该问题时，刚才观察到的事实与我们的物理直觉一致。）

[20]我们所说的连续函数，是指其取值为有限数。[21]另请参见定理 6.3 和注 8.3。

6.2. 关于支集的描述 $S(\lambda_{A,\,f})$。 下面的定理 6.10 给出了极小化子 $\lambda_{A,\,f}$ 具有紧支撑的充分条件，而例 6.11 和例 6.12则分析了这些条件的锐性。

定理 6.10。 在定理 6.7 的假设下，进一步假设 A 在无穷远处不是内 α-薄的。那么，只要满足（6.7）， $S(\lambda_{A,\,f})$ 就是紧的。

例 6.11 和例 6.12 为某些特定的 A 和 f 给出了 $S(\lambda_{A,\,f})$ 的显式公式。（6.9）中的后一个等式以及（6.13）中的两个等式表明，若将 $\hat{}\omega^A(\mathbb{R}^n) > 1$ 替换为 $\hat{}\omega^A(\mathbb{R}^n) = 1$，则定理 6.10 一般不再成立。

例 6.11。 对于 $A := B_R^c := \{|x| \geqslant R\}$， $R \in (0,\infty)$，以及位于 $x = 0$ 处的单位狄拉克测度 ε_0，定义

$$\omega := \varepsilon_0/q, \quad \text{where} \quad q := \hat{\varepsilon}_0^{B_R^c}(\mathbb{R}^n).$$

如例 4.1 所示， $q = 1$ 当 $\alpha \leqslant 2$ 时，而在其他情况下为 $q > 1$。根据（3.4），

$$\hat{\omega}^{B_R^c} = \hat{\varepsilon}_0^{B_R^c}/q,$$

由此

$$\hat{\omega}^{B_R^c}(\mathbb{R}^n) = \hat{\varepsilon}_0^{B_R^c}(\mathbb{R}^n)/q = 1.$$

因此，根据定理 6.3，问题 5.1 的解 $\lambda_{B_R^c,\,f}$（其中 $f := -U^\omega$）确实存在，而且

$$\lambda_{B_R^c,f} = \hat{\omega}^{B_R^c} = \hat{\varepsilon}_0^{B_R^c}/q.$$

鉴于例 4.1 和例 4.3 中指出的情况，可得

$$S(\lambda_{B_R^c,f}) = \begin{cases} S_R & \text{if } \alpha \geqslant 2, \\ B_R^c & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.9}$$

例 6.12。 设 $\overline{B}_{z,\,r}$ 为以点 $z := (0,\dots,0,-r)$ 为球心、半径为 r 的闭球，并设 A_0 表示 $\overline{B}_{z,\,r} \setminus \{0\}$ 关于以原点 0 为球心的单位球面 S_1 的反演。则 A_0 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集，在无穷远处并非 α-薄，且满足 $0 \notin A_0$，其边界 ∂A_0 无界。

按照与例 4.1 类似的方法，我们可知

$$\hat{\varepsilon}_0^{A_0} = \gamma^*_{\overline{B}_{z,r}}, \tag{6.10}$$

$\gamma^*_{\overline{B}_{z,\,r}}$ 是 $\gamma_{\overline{B}_{z,\,r}}$的 Kelvin 变换，而 $\overline{B}_{z,\,r}$上的容量测度是相对于 S_1而言的。注意到 $\gamma^*_{\overline{B}_{z,\,r}}(\mathbb{R}^n) = U^{\gamma_{\overline{B}_{z,\,r}}}(0)$（参见 (4.9)），而 $U^{\gamma_{\overline{B}_{z,\,r}}}(0) = 1$，于是得到

$$\hat{\varepsilon}_0^{A_0}(\mathbb{R}^n) = 1 \quad \text{for any } \alpha \in (0,n) \tag{6.11}$$

（与（4.5）比较）。因此，应用定理 6.3，我们推断满足 $A := A_0$ 和 $f := -U^{\varepsilon_0}$ 的问题 5.1 的解确实存在，而且$\lambda_{A_0,\,f}$ λ_{A_0}还

$$\lambda_{A_0,f} = \hat{\varepsilon}_0^{A_0}. \tag{6.12}$$

根据 $S(\gamma_{\overline{B}_{z,\,r}})$ 的描述， [17, 第 II.3 节的 (6.10) 和 (6.12) 得出

$$S(\lambda_{A_0,f}) = \begin{cases} \partial A_0 & \text{if } \alpha \geqslant 2, \\ A_0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.13}$$

6.3. 注。由此得到的结果大幅改进了 [8, 33], 中的许多近期结果，具体而言，增强了它们的表述和/或拓展了其应用范围。例如， [8, 推论 26]仅涉及在无穷远处不薄的闭集 A ，以及形如 $-U^{\omega}$ 的外场 f ，其中 $\omega := c\varepsilon_{x_0}, c \in (0, \infty)$， ε_{x_0} 是在 $x_0 \notin A$ 处的单位狄拉克测度。然而，即使对于这些非常特殊的 A 和 ω， [8, 推论 26] 中的所有断言通常也弱于上文所建立的相关结果。尤其是，这是因为 [8] 中的断言是用 $\omega(\mathbb{R}^n)$ 表述的，而我们的结果则是用 $\hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n)$ 表述的（这两个值之间的关系见第 4 节）。

关于我们当前方法相较于 [33], 中所提方法的优点，见上文注 5.2。

7. 定理 6.3 的证明

由条件 (6.2) 可知，内伪扫掠 $\hat{\omega}^A$ 在类 $\mathcal{E}_f^+(A)$ 上极小化 $I_f(\mu)$，实际上属于其真子类 $\breve{\mathcal{E}}^+(A)$，见 (5.1)。因此，

$$w_f(A) \leqslant I_f(\hat{\omega}^A) = \hat{w}_f(A),$$

结合 (5.2) 可得

$$I_f(\hat{\omega}^A) = w_f(A) = \hat{w}_f(A).$$

因此，$\hat{\omega}^A$ 是问题 5.1 的（唯一）解，即 $\hat{\omega}^A = \lambda_{A,\ f}$。将此等式代入 (3.8)，得到

$$\int U_f^{\lambda_{A,f}}\, d\lambda_{A,f} = \int \left(U^{\hat{\omega}^A} - U^{\omega}\right) d\hat{\omega}^A = 0,$$

根据定理 5.4，这就确立了剩余的关系 $c_{A,\ f} = 0$。

8. 定理 6.1 和 6.4 的证明

8.1. 极值测度。令 $\mathbb{M}_f(A)$ 表示所有具有如下性质的网 $(\mu_s)_{s\in S} \subset \breve{\mathcal{E}}^+(A)$ 所构成的（非空）集合

$$\lim_{s\in S} I_f(\mu_s) = w_f(A); \tag{8.1}$$

这些网 $(\mu_s)_{s\in S}$ 称为（问题 5.1 中的）极小化网。利用 $w_f(A)$ 的有限性（引理5.3）、$\breve{\mathcal{E}}^+(A)$ 的凸性以及 α-Riesz 核的完美性，借助与引理 4.2] 中类似的论证，可以看出存在唯一的 $\xi_{A,\ f} \in \mathcal{E}^+$，使得对于每个 $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}_f(A)$,

$$\mu_s \to \xi_{A,f} \ \text{ strongly and vaguely in } \mathcal{E}^+ \ (\text{as } s \text{ ranges through } S). \tag{8.2}$$

这个 $\xi := \xi_{A,\ f}$ 将称为（问题 5.1 中的）极值测度 。

由 (8.2)，我们有

$$\xi_{A,f} \in \mathcal{E}^+(A), \tag{8.3}$$

根据 $(\mathcal{P}_1)$，$\mathcal{E}^+(A)$ 是强闭的，此外

$$\xi_{A,f}(\mathbb{R}^n) \leqslant 1, \tag{8.4}$$

th映射 $\mu \mapsto \mu(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathfrak{M}^+$ [3, IV.1 节中关于模糊拓扑下半连续，命题 4]。以下简单观察对于下面给出的证明至关重要。

引理 8.1。 问题 5.1 可解，当且仅当

$$\xi_{A,f}(\mathbb{R}^n) = 1 \ \ and \ \ I_f(\xi_{A,f}) = w_f(A), \tag{8.5}$$

并且在肯定的情况下

$$\lambda_{A,f} = \xi_{A,f}. \tag{8.6}$$

证明。 由 (8.3) 可知「若」部分显然，而反向结论则由以下事实推出：平凡网 $(\lambda_{A,f})$ 显然是极小化的，因此强收敛到 $\lambda_{A,f}$ 和 $\xi_{A,f}$。由于 $\mathcal{E}$ 上的强拓扑是豪斯多夫的，故得 (8.6)。□

8.2. **定理 6.1 的证明**。 固定一个极小化序列 $(\mu_j) \in \mathbb{M}_f(A)$；由 (8.2),

$$\mu_j \to \xi \ \ \text{strongly and vaguely in } \mathcal{E}^+ \ (\text{as } j \to \infty),$$

$\xi := \xi_{A,f}$ 是问题 5.1 中的（唯一）极值测度，因此

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\mu_j\| < \infty. \tag{8.7}$$

为证明此 ξ 是问题 5.1 的解，只需验证 (8.5)。由于 $\mu_j \to \xi$ 在模糊拓扑下，应用 [3, IV.1 节、命题 4] 可得

$$\xi(\mathbb{R}^n) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \mu_j(\mathbb{R}^n) = 1, \tag{8.8}$$

而 [3, 第四节 4.4，推论 3]给出

$$\int 1_K \, d\xi \geqslant \limsup_{j\to\infty} \int 1_K \, d\mu_j \ \ \text{for every compact } K \subset \mathbb{R}^n, \tag{8.9}$$

示性函数 1_K 在 K 上有界、具有紧支撑且上半连续。将 (8.8) 和 (8.9) 与

$$\xi(\mathbb{R}^n) = \lim_{K\uparrow\mathbb{R}^n} \int 1_K \, d\xi,$$

我们得到

$$1 \geqslant \xi(\mathbb{R}^n) \geqslant \limsup_{(j,K)\in\mathbb{N}\times\mathfrak{C}} \int 1_K \, d\mu_j = 1 - \liminf_{(j,K)\in\mathbb{N}\times\mathfrak{C}} \int 1_{A\setminus K} \, d\mu_j,$$

$\mathbb{N}\times\mathfrak{C}$ 是有向集 $\mathbb{N}$ 和 $\mathfrak{C}$ 的有向积：$= \mathfrak{C}_{\mathbb{R}^n}$ [15, 第 68] 页。因此，只要证明等式，(8.5) 中的前一个关系便随之成立

$$\liminf_{(j,K)\in\mathbb{N}\times\mathfrak{C}} \int 1_{A\setminus K} \, d\mu_j = 0. \tag{8.10}$$

由 [17, 定理 2.6] 应用于 $A \setminus K$，任取 $K \in \mathfrak{C}$，存在唯一的内容量测度 $\gamma_{A\setminus K}$，使其在由所有满足以下条件的 $\mu \in \mathcal{E}^+$ 构成的（凸）集合 $\Gamma_{A\setminus K}$ 上极小化能量 $\|\mu\|^2$

$$U^\mu \geqslant 1 \ \ \text{n.e. on } A \setminus K.$$

对于任意满足 $K \subset K'$ 的 $K' \in \mathfrak{C}$，我们有 $\Gamma_{A\setminus K} \subset \Gamma_{A\setminus K'}$，因此 [17, 引理 2.2] 得出

$$\|\gamma_{A\setminus K} - \gamma_{A\setminus K'}\|^2 \leqslant \|\gamma_{A\setminus K}\|^2 - \|\gamma_{A\setminus K'}\|^2. \tag{8.11}$$

由于 $\|\gamma_{A\setminus K}\|^2 = c_*(A\setminus K)$ [17, 定理 2.6], $\|\gamma_{A\setminus K}\|^2$ 随着 K 在 $\mathfrak{C}$ 中取值而递减。结合 (8.11) 可知，网 $(\gamma_{A\setminus K})_{K\in\mathfrak{C}} \subset \mathcal{E}^+$ 在 $\mathcal{E}^+$ 上的强拓扑中是柯西的。注意到 $(\gamma_{A\setminus K})_{K\in\mathfrak{C}}$ 在模糊拓扑下收敛到零，[22]我们得到

$$\gamma_{A\setminus K} \to 0 \ \text{ strongly in } \mathcal{E}^+ \text{ as } K \uparrow \mathbb{R}^n, \tag{8.12}$$

α-Riesz核是完备的。

由上述结果可知

$$U^{\gamma_{A\setminus K}} \geqslant 1_{A\setminus K} \ \text{ n.e. on } A\setminus K, \tag{8.13}$$

因此，对所有 $j\in\mathbb{N}$， μ_j-几乎处处成立。对 μ_j 积分 (8.13)，由柯西–施瓦茨（布尼亚科夫斯基）不等式可得，

$$\int 1_{A\setminus K}\, d\mu_j \leqslant \int U^{\gamma_{A\setminus K}}\, d\mu_j \leqslant \|\gamma_{A\setminus K}\| \cdot \|\mu_j\| \ \text{ for all } K\in\mathfrak{C} \text{ and } j\in\mathbb{N}.$$

结合 (8.7) 和 (8.12)，可得 (8.10)，从而 $\xi\in\breve{\mathcal{E}}^+(A)$，因此

$$w_f(A) \leqslant I_f(\xi). \tag{8.14}$$

为完成定理的证明，还需验证 (8.5) 中后一个关系；根据 (8.1) 和 (8.14)，这可归结为验证不等式

$$I_f(\xi) \leqslant \lim_{j\to\infty} I_f(\mu_j). \tag{8.15}$$

在情形 $(\mathcal{P}_2)$ 下，由 (μ_j) 强收敛到 ξ，分别对 μ_j 和 ξ 应用 (3.12)，即可得到 (8.15)。否则，情形 $(\mathcal{P}_3)$ 成立，因此 $f=-U^\omega$ 在 $\overline{A}$ 上下半连续且有界。于是存在 $c\in(0,\infty)$，使得 $f':=f+c\geqslant 0$ 在 $\overline{A}$ 上，并且 [3, IV.1 节中的命题 4] 应用于 f'，得到

$$\int f\, d\xi + c = \int f'\, d\xi \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int f'\, d\mu_j = \liminf_{j\to\infty} \int f\, d\mu_j + c,$$

第一个和最后一个等式根据 $\xi(\mathbb{R}^n) = \mu_j(\mathbb{R}^n) = 1$ 成立。因此，

$$\int f\, d\xi \leqslant \lim_{j\to\infty} \int f\, d\mu_j.$$

将其乘以 2，再加到

$$\lim_{j\to\infty} \|\mu_j\|^2 = \|\xi\|^2,$$

由此得到 (8.15)，整个证明至此完成。

注 8.2。对上述证明稍作推广即可表明，定理 6.1 及推论 6.2 对外场 f 仍然成立，其中 f 可表示为以下各项之和

$$f := u + U^\vartheta,$$

whe关于 $\vartheta\in\mathcal{E}$，当 $u\colon \overline{A}\to(-\infty,\infty]$ 是下半连续的、有下界的，并且满足

$$c_*(\{x\in A:\ u(x)<\infty\}) > 0.$$

[22]事实上，对于任意给定的 $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^n)$，都存在一个开且相对紧的集合 $G\subset\mathbb{R}^n$，使得 $\varphi(x)=0$ 对所有 $x\notin\overline{G}$都成立。因此，对于所有满足 $K\supset\overline{G}$ 的 $K\in\mathfrak{C}$，都有 $\gamma_{A\setminus K}(\varphi)=0$，结论得证。

8.3. 定理 6.4 的证明。由于根据 (6.3)，$c_*(A) = \infty$，存在互不相交的紧集 $K_j \subset A$、$j \in \mathbb{N}$，使得对所有 $x \in K_j$，$|x| \geqslant j$，且 $c(K_j) \geqslant j$。若 $\lambda_j := \gamma_{K_j}/c(K_j) \in \breve{\mathcal{E}}^+(K_j)$ 表示 K_j 上的归一化容量测度，则

$$\|\lambda_j\| \to 0 \quad \text{as } j \to \infty, \tag{8.16}$$

$$\lambda_j \to 0 \quad \text{vaguely in } \mathcal{E}^+ \text{ as } j \to \infty, \tag{8.17}$$

后者由以下事实推出：对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意紧子集 K，当 j 足够大时，对所有 $= \varnothing$，都有 $K \cap S(\lambda_j)$。定义

$$\mu_j := \hat{\omega}^A + c_j \lambda_j, \quad \text{where } c_j := 1 - \hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n). \tag{8.18}$$

由 (6.5) 可知

$$0 < c_j \leqslant 1 \quad \text{for all } j, \tag{8.19}$$

我们得到对所有 j 都有 $\mu_j \in \breve{\mathcal{E}}^+(A)$，因此

$$w_f(A) \leqslant \liminf_{j\to\infty} I_f(\mu_j). \tag{8.20}$$

另一方面，$I_f(\hat{}\omega^A) = \hat{}w_f(A)$（见定义 3.1 和定理 3.5）。通过直接验证，由 (8.16)、(8.18) 和 (8.19) 可得

$$\limsup_{j\to\infty} I_f(\mu_j) \leqslant \limsup_{j\to\infty} \left(I_f(\hat{\omega}^A) + 2c_j \int U^{\omega^-}\, d\lambda_j \right) \leqslant \hat{w}_f(A) + 2L_\infty, \tag{8.21}$$

其中

$$L_\infty := \limsup_{j\to\infty} \int U^{\omega^-}\, d\lambda_j.$$

首先，设 $(\mathcal{P}_2)$ 成立。对测度 ω^-、$\lambda_j \in \mathcal{E}^+$ 应用柯西–施瓦茨不等式，然后令 $j \to \infty$，由 (8.16) 可得

$$L_\infty = 0. \tag{8.22}$$

否则，$(\mathcal{P}_3)$ 成立，因而 (6.4) 必须成立，这同样推出 (8.22)，其中 λ_j 是支集为 $\overline{A} \cap \{|x| \geqslant j\}$ 的单位测度。将 (8.22) 代入 (8.21)，再将由此得到的不等式与 (8.20) 和 (5.2) 结合，得到

$$\lim_{j\to\infty} I_f(\mu_j) = \hat{w}_f(A) = w_f(A), \tag{8.23}$$

这表明，序列 (μ_j) 实际上是在问题 5.1 中极小化，因此在强收敛和模糊拓扑下均收敛于极值测度 $\xi_{A,\,f}$：

$$\mu_j \to \xi_{A,f} \quad \text{strongly and vaguely in } \mathcal{E}^+ \text{ as } j \to \infty.$$

由 (8.17)–(8.19)，可得

$$\hat{\omega}^A = \xi_{A,f},$$

$\mathfrak{M}$ 上的模糊拓扑是豪斯多夫的。因此，由 (6.5)，

$$\xi_{A,f}(\mathbb{R}^n) = \hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n) < 1,$$

而应用引理 8.1 可知，问题 5.1 确实无解 le.

注 8.3. 如式 (8.23) 所示，在定理 6.4 的假设下，式 (5.2) 取等号，即

$$\hat{w}_f(A) = w_f(A)$$

（与定理 6.3 和 6.7 比较）。

9. 定理 6.7 和 6.10 的证明

9.1. 辅助结果。 根据推论 6.2，对于每个满足$K \geqslant K_0$的 $K \in \mathfrak{C}_A$，其中 $c(K_0) > 0$，问题 5.1 存在唯一解 $\lambda_{K,\,f}$，且满足 $A^{:}= K$；而根据下文引理 9.1，这些 $\lambda_{K,\,f}$ 构成一个极小化网：

$$(\lambda_{K,f})_{K\geqslant K_0} \in \mathbb{M}_f(A). \tag{9.1}$$

引理 9.1. $w_f(K) \downarrow w_f(A)$ 当 $K \uparrow A$时。

证明。 对于任意 $\mu \in \breve{\mathcal{E}}^+(A)$， $\mu(K) \uparrow 1$ 当 $K \uparrow A$时。将 [10, 引理 1.2。2] 应用于函数 κ_α、U^{ω^+} 和 U^{ω^-} 中的每一个（它们均为正的、下半连续的且 μ-可积），因此得到

$$I_f(\mu) = \lim_{K\uparrow A} I_f(\mu|_K) = \lim_{K\uparrow A} I_f(\nu_K) \geqslant \lim_{K\uparrow A} w_f(K),$$

其中

$$\nu_K := \mu|_K/\mu(K) \in \breve{\mathcal{E}}^+(K),$$

$K \in \mathfrak{C}_A$ 足够大。现在令 μ 遍历 $\breve{\mathcal{E}}^+(A)$，得到

$$w_f(A) \geqslant \lim_{K\uparrow A} w_f(K),$$

由此得证引理，反向结论则由单调性显然成立。 □

- 除非情形（$\mathcal{P}_2$）成立，否则下文假设外场$f = -U^\omega$ 在$\overline{A}$上连续，且（6.6）成立。

引理 9.2。 对于极值测度$\xi_{A,\,f}$，有

$$I_f(\xi_{A,f}) = w_f(A). \tag{9.2}$$

证明。 由（8.2）和（9.1），

$$\lambda_{K,f} \to \xi_{A,f} \ \text{ strongly and vaguely in } \mathcal{E}^+ \text{ as } K \uparrow A,$$

因此

$$\lim_{K\uparrow A} \|\lambda_{K,f}\|^2 = \|\xi_{A,f}\|^2. \tag{9.3}$$

若情形（$\mathcal{P}_2$）成立，则（$\lambda_{K,\,f}$）$_{K\geqslant K_0}$ 强收敛到$\xi_{A,\,f}$。将（3.12）分别应用于$\lambda_{K,\,f}$ 和 $\xi_{A,\,f}$，可得

$$\lim_{K\uparrow A} I_f(\lambda_{K,f}) = I_f(\xi_{A,f}), \tag{9.4}$$

因此，由引理 9.1，

$$I_f(\xi_{A,f}) = \lim_{K\uparrow A} w_f(K) = w_f(A).$$

在剩余情形（$\mathcal{P}_3$）中，对于任意 $t > 0$，取 r 使得

$$|f| < t/2 \ \text{ on } A \cap \overline{B}_r^c,$$

根据 (6.6)，这是可能的。由 (8.4)，

$$\left| \int_{\overline{B}_r^c} f \, d(\lambda_{K,f} - \xi_{A,f}) \right| < t \ \text{ for all } K \geqslant K_0. \tag{9.5}$$

显然可以选择上述 r，使得

$$\xi_{A,f}(S_r) = 0,$$

测度 $\xi_{A,f}$ 有界。因此，根据 [17,定理 0.5′]，

$$\lambda_{K,f}|_{\overline{B}_r} \to \xi_{A,f}|_{\overline{B}_r} \ \text{ vaguely in } \mathfrak{M}^+ \text{ as } K \uparrow A,$$

由此，根据 f 在 $\overline{A}$上的连续性，

$$\lim_{K\uparrow A}\int f\,d\lambda_{K,f}|_{\overline{B}_r}=\int f\,d\xi_{A,f}|_{\overline{B}_r},$$

将其与（9.5）结合，并令 $t>0$ 任意小，可得[23]

$$\lim_{K\uparrow A}\int f\,d\lambda_{K,f}=\int f\,d\xi_{A,f}. \tag{9.6}$$

将其乘以 2，再与（9.3）相加，便得到（9.4），进而得到（9.2）；这同样是利用引理 9.1 得出的。□

推论 9.3. $\lambda_{A,f}$ 存在当且仅当 $\xi_{A,f}(\mathbb{R}^n)=1$，且在此情形下 $\lambda_{A,f}=\xi_{A,f}$。

证明. 由引理 8.1 和 9.2 结合即可得出。 □

引理 9.4. 对于极值测度 $\xi=\xi_{A,f}$，有

$$U_f^\xi\geqslant C_\xi \ \text{ n.e. on } A, \tag{9.7}$$

$$U_f^\xi\leqslant C_\xi \ \text{ on } S(\xi), \tag{9.8}$$

其中

$$C_\xi:=\int U_f^\xi\,d\xi\in(-\infty,\infty). \tag{9.9}$$

证明。 在情形（$\mathcal{P}_3$）下，由于 $U^{\omega^\pm}$ 在 $\overline{A}$ 上有界，且极值测度 ξ 由 (8.4) 控制，因此 $\int U_f^\xi\,d\xi$ 有限；而在情形（$\mathcal{P}_2$）下，这显然成立。对每个足够大的 $K\in\mathfrak{C}_A$ 应用定理 5.4，

$$U_f^{\lambda_{K,f}}\geqslant c_{K,f} \ \text{ n.e. on } K, \tag{9.10}$$

$$U_f^{\lambda_{K,f}}\leqslant c_{K,f} \ \text{ on } S(\lambda_{K,f}), \tag{9.11}$$

其中

$$c_{K,f}=\int U_f^{\lambda_{K,f}}\,d\lambda_{K,f}.$$

此外，结合 (9.3) 和 (9.6)，

$$\lim_{K\uparrow A}c_{K,f}=C_\xi, \tag{9.12}$$

C_ξ 是 (9.9) 中出现的（有限）常数。

固定 $K_*\in\mathfrak{C}_A$。由于 $\mathcal{E}^+$ 上的强拓扑是第一可数的，可以选取网 $(\lambda_{K,f})_{K\in\mathfrak{C}_A}$ 的一个子序列 $(\lambda_{K_j,f})_{j\in\mathbb{N}}$，使得

$$\lambda_{K_j,f}\to\xi \ \text{ strongly (hence vaguely) in } \mathcal{E}^+ \text{ as } j\to\infty. \tag{9.13}$$

假设.....不失一般性，当然是可以的

$$K_*\subset K_j \ \text{ for all } j,$$

因为如果不是这样，我们就用 $K_j\ K_j'$ 替换：$=K_j\cup K_*$；然后，根据 $\big(w_f(K)\big)$ 的单调性，序列 $(\lambda_{K_j',\,f})_{\,j\in\mathbb{N}}$ 仍然是极小化的，因而也强收敛于 ξ。

由于 $K_*\in\mathfrak{C}_A$ 的选取是任意的，只要证明.....，即可推出 (9.7)

$$U_f^\xi\geqslant C_\xi \ \text{ n.e. on } K_*. \tag{9.14}$$

[23]在 ($\mathcal{P}_2$) 的情况下，(9.6) 也成立，这可由 (9.4) 减去 (9.3) 得到。或者，也可以通过对测度 ω, $\lambda_{K,f}-\xi_{A,f}\in\mathcal{E}$应用柯西–施瓦茨不等式，利用网 $(\lambda_{K,f})_{K\geqslant K_0}$ 强收敛到 $\xi_{A,f}$ 推导得出。

必要时取一个子序列并更改记号，由（9.13）以及 [10, 第 166 页，注], ，我们得到

$$U^{\xi} = \lim_{j\to\infty} U^{\lambda_{K_j,f}} \quad \text{n.e. on } \mathbb{R}^n. \tag{9.15}$$

现在将 (9.10) 应用于每个 K_j，然后令 $j \to \infty$，根据 (9.12) 和 (9.15)，即可得到 (9.14)。（这里用到了博雷尔集上内容量的可数次可加性。）

由于 $(\lambda_{K_j,f})$ 在模糊拓扑下收敛到 ξ，见 (9.13)，对于每个 $x \in S(\xi)$，存在序列 (K_j) 的一个子序列 (K_{j_k}) 以及点 $x_{j_k} \in S(\lambda_{K_{j_k},f})$、$k \in \mathbb{N}$，使得 x_{j_k} 当 $k \to \infty$ 时趋近于 x。因此，根据 (9.11)，

$$U_f^{\lambda_{K_{j_k},f}}(x_{j_k}) \leqslant \int U_f^{\lambda_{K_{j_k},f}}\, d\lambda_{K_{j_k},f} \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}.$$

在这里令 $k \to \infty$，并应用 (9.12)、f 在 $\overline{A}$ 上的连续性，以及映射 $(x,\mu) \mapsto U^{\mu}(x)$ 在配备模糊拓扑的 $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{M}^+, \mathfrak{M}^+$ 上的下半连续性 [10, 引理 2.2.1(b)], ，即可得到剩余的不等式 (9.8)。□

9.2. **定理 6.7 的证明**。首先根据定理 6.3 和定理 6.4 指出，实际上只需考虑满足 (6.7) 的情形。

对于极值测度 $\xi = \xi_{A,\,f}$，由 (9.7) 和 (9.8) 可得

$$U_f^{\xi} = C_{\xi} \quad \text{n.e. on } S(\xi) \cap A,$$

由此可知

$$U_f^{\xi} = C_{\xi} \quad \xi\text{-a.e.}, \tag{9.16}$$

测度 ξ 属于类 $\mathcal{E}^+(A)$。我们断言，此时必有

$$C_{\xi} \neq 0. \tag{9.17}$$

事实上，若此结论不成立，则由 (9.7) 和 (9.16)，根据定理 3.5 可得 $\xi = \hat{}\omega^A$，然而这与 (6.7) 矛盾，因为根据 (8.4)，$\xi(\mathbb{R}^n)6\ 1$。

对 ξ 积分 (9.16)，可得

$$\int U_f^{\xi}\, d\xi = C_{\xi} \cdot \xi(\mathbb{R}^n),$$

因此，由 (9.9) 和 (9.17)，

$$\xi(\mathbb{R}^n) = 1.$$

应用推论 9.3 可知，在假设 (6.7) 下，$\lambda_{A,\,f}$ 确实存在，而且 $\lambda_{A,\,f} = \xi$。

等式 $\lambda_{A,\,f} = \xi$ 结合 (5.5)、(9.9) 和 (9.17) 可推出

$$c_{A,f} = \int U_f^{\lambda_{A,f}}\, d\lambda_{A,f} = \int U_f^{\xi}\, d\xi = C_{\xi} \neq 0,$$

这证明了 (6.8) 中的第三个关系。第一个关系显然成立，因为由 (6.7) 可知，

$$\lambda_{A,f}(\mathbb{R}^n) = 1 < \hat{\omega}^A(\mathbb{R}^n).$$

最后，第一个关系推出第二个关系；否则，$w_f(A) = \hat{}w_f(A)$，于是$\lambda_{A,\,f} = \hat{}\omega^A$，这由$\hat{}\omega^A$的唯一性以及包含关系 $\breve{\mathcal{E}}^+(A) \subset \mathcal{E}_f^+(A)$得出，参见（5.1）。

9.3. **定理 6.10 的证明**。根据定理 6.7，在所述假设下，问题 5.1 存在解$\lambda_{A,\,f}$，此外，由（6.8）可得，

$$c_{A,f} \neq 0. \tag{9.18}$$

反设 $S(\lambda_{A,\,f})$ 是非紧的。由注 5.5 可知，存在一个序列 $(x_j) \subset A$，使得 $|x_j| \to \infty$ 当 $j \to \infty$ 时，且

$$U_f^{\lambda_{A,f}}(x_j) = c_{A,f} \quad \text{for all } j \in \mathbb{N}.$$

由 (6.6) 可得

$$\liminf_{j\to\infty} U^{\lambda_{A,f}}(x_j) = c_{A,f},$$

因此 $c_{A,\,f} \geqslant 0$，由 (9.18) 可知，实际上，

$$c_{A,f} > 0. \tag{9.19}$$

B因此，由 (5.3)，$U^{\lambda_{A,\,f}\,\,f} \geqslant c_{A,\,f}$ 在 A 上几乎处处成立，这与 (6.6) 和 (9.19) 一起给出

$$\liminf_{|x|\to\infty,\ x\in A} U^{\lambda_{A,f}}(x) > 0.$$

然而，由于 [16, 注 4.12(i)]，中集合 A 在无穷远处不是内 α-薄的，这是不可能的。

参考文献

[1] Benko, D.、Dragnev, P.D.、Orive, R.：关于实轴上的点质量黎曼外场。《数学分析及其应用杂志》**491**，124299（2020）[2] Borodachov, S.V.、Hardin, D.P.、Saff, E.B.：可求长集上的离散能量。施普林格，柏林（2019）[3] Bourbaki, N.：积分。第1–6章。施普林格，柏林（2004）[4] Cartan, H.：牛顿位势理论：能量、容量与位势序列。《法国数学会通报》**73**，74–106（1945）[5] Cartan, H.：牛顿位势扫除的一般理论。《格勒诺布尔傅里叶大学年刊》**22**，221–280（1946）[6] Deny, J.：有限能量位势。《数学学报》**82**，107–183（1950）[7] Doob, J.L.：经典位势理论及其概率对应理论。施普林格，柏林（1984）[8] Dragnev, P.D.、Orive, R.、Saff, E.B.、Wielonsky F.：带外场的黎曼能量问题及相关理论。《构造逼近》（2022）。https://doi.org/10.1007/s00365-022-09588-z[9] Edwards, R.E.：泛函分析。理论与应用。Holt, Rinehart and Winston，纽约（1965）[10] Fuglede, B.：局部紧空间上的位势理论。《数学学报》**103**，139–215（1960）[11] Fuglede, B.：与可数次可加集函数相关的拟拓扑。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》**21**，123–169（1971）[12] Fuglede, B.：对称函数核与测度扫除。《数学分析》**42**，225–259（2016）[13] Fuglede, B.、Zorii, N.：与黎曼核相关的格林核。《芬兰科学院数学年刊》**43**，121–145（2018）[14]Gauss, C.F.：关于按距离平方的倒数关系起作用的吸引力与排斥力的一般定理（1839）。《著作集》5，197–244（1867）

[15] Kelley, J.L.：一般拓扑学。普林斯顿，纽约（1957）[16] Kurokawa, T.、Mizuta, Y.：关于黎斯势在无穷远处的阶。《广岛数学杂志》**9**，533–545（1979）[17] Landkof, N.S.：现代势理论基础。施普林格，柏林（1972）[18] Ohtsuka, M.：局部紧空间上的位势。《广岛大学科学杂志》A-I辑 **25**，135–352（1961）[19] Riesz, M.：黎曼–刘维尔积分与势。《塞格德学报》**9**，1–42（1938）[20] Saff, E.B.、Totik, V.：带外场的对数势。施普林格，柏林（1997）[21] Zorii, N.V.：带外场的平衡势。《乌克兰数学杂志》**55**，1423–1444（2003）[22] Zorii, N.V.：带外场的位势平衡问题。《乌克兰数学杂志》**55**，1588–1618（2003）[23] Zorii, N.：向量测度的带外场约束能量问题。《数学新闻》**285**，1144–1165（2012）[24] Zorii, N.：带外场的无限维向量势平衡问题。《位势分析》**38**，397–432（2013）[25] Zorii, N.：无限维向量测度高斯变分问题可解性的充要条件。《位势分析》**41**，81–115（2014）[26] Zorii, N.：内在黎斯扫除理论及其应用。《波兰科学院数学通报》**68**，41–67（2020）[27] Zorii, N.：黎斯势理论中的调和测度、平衡测度与无穷远处的纤细性。《位势分析》**57**，447–472（2022）[28] Zorii, N.：局部紧空间上的测度扫除。《数学分析》**48**，249–277（2022）[29] Zorii, N.：局部紧空间上的容量理论及其与扫除理论的相互作用。《位势分析》（2022）。https://doi.org/10.1007/s11118-022-10010-3[30]Zorii, N.：局部紧空间上的扫除理论。《位势分析》（2022）。https://doi.org/10.1007/s11118-022-10024-x[31] Zorii, N.：无穷远点在Deny质量正性原理的黎斯势中的作用。arXiv:2202.12418（2022）[32] Zorii, N.：局部紧空间上的带外场最小能量问题。arXiv:2207.14342（2022）[33] Zorii, N.：带外场的最小黎斯能量问题。arXiv:2209.05891（2022）

乌克兰科学院数学研究所，捷列先科夫斯卡街3号，01601，基辅-4，乌克兰，
natalia.zorii@gmail.com