arXiv:2301.00398v1 [math.PR] 1 Jan 2023

长跳跃非对称排斥过程中标记粒子的运动

赵林杰

Abstract. 我们证明，当过程从其平衡测度出发时，标记粒子满足大数定律和不变性原理 e
长跳跃非对称排斥过程 .

1. 引言 Introduction

研究相互作用粒子系统中典型粒子的长期行为，一直是一个由来已久的问题。这类粒子通常称为标记粒子或示踪粒子。对于 Spitzer [24] 提出的排斥过程——它是最简单的相互作用粒子系统之一——标记粒子的运动自然引起了广泛关注。Saada [18] 和 Rezakhanlou [17]证明了格点上标记粒子的大数定律。当过程从其平衡测度出发时，Arratia[1] 以及 Peligrad 和 Sethuraman [16] 证明了一维最近邻情形下的中心极限定理和不变性原理；Kipnis 和 Varadhan [13] 证明了除一维最近邻情形外所有维度下对称情形的相应结果；Varadhan [25] 证明了非对称零均值情形的相应结果；Kipnis [11] 证明了一维最近邻非对称情形的相应结果；Sethuraman、Varadhan 和 Yau [23] 则证明了三维及更高维度下非对称情形的相应结果。在维度 $d \leq 2$ 下，除一维最近邻情形外，如果底层随机游走具有漂移，我们目前只知道标记粒子具有扩散性，这一点由 Sethuraman[20], 证明；完整的中心极限定理或不变性原理仍有待解决。

我们强调，先前的研究都假设底层随机游走的转移概率具有有限程，或至少具有有限二阶矩。本文研究长程跳跃排斥过程，其对称版本最初由 Jara [7] 引入，用于从相互作用粒子系统推导分数阶抛物方程。最近，Sethuraman 和 Shahar [21]证明了长跳跃非对称排斥过程的水动力学极限。通过考察其密度涨落，Gonçalves 和 Jara [6] 从该模型推导出分数阶 Ornstein–Uhlenbeck 过程和分数阶随机 Burgers 方程。粗略地说，在长跳跃情形下，粒子以正比于 $\|x-y\|^{-d-\alpha}$的速率从 x 跳至 y，其中 d 是格点的维数， $\alpha > 0$ 是某个参数。Jara [8]研究了长程跳跃对称排斥过程中标记粒子的运动。因此，我们聚焦于非对称情形。

我们从其平衡测度开始该过程，即固定密度的伯努利乘积测度，并以原点处有一个粒子为条件。我们证明了不同 α 和 d取值范围下标记粒子的大数定律（见定理 2.2）和不变性原理（见定理 2.4）。由于我们关注的是长跳跃情形，因此假设 $\alpha \leq 2$。我们认为，当 $\alpha > 2$时，与有限程情形相同的结果也应成立。我们还指出，关于$d = 1$、$3/2 \leq \alpha \leq 2$ 的不变性原理仍有待研究。

Key words and phrases. 非对称排斥过程；长跳跃；标记粒子；中心极限定理。致谢。Zhao 感谢中国中央高校基本科研业务费的资助。

由于标记粒子本身不是马尔可夫的，因此考虑从标记粒子视角观察到的环境过程更为方便；当底层转移概率平移不变时，该环境过程是马尔可夫的。我们证明的主要思路是像对称情形 [8]中那样处理与标记粒子相关的指数鞅。然而，非对称排斥过程的不可逆性带来了新的困难；在 d 和 α的一些取值范围内，我们需要处理环境过程的占据时间。为了控制环境过程占据时间的方差，我们将其与长程跳跃排斥过程的占据时间进行比较；后者此前已由 Bernardin、Gon˙calves 和 Sethuraman [3]研究过。

在 [8], Jara 还研究了长程跳跃对称排斥过程中标记粒子的非平衡中心极限定理，其所用方法很大程度上依赖于底层动力学的水动力学极限。由于长程非对称排斥过程的水动力学极限尚未得到完整证明，主要原因是相应水动力学方程解的唯一性问题仍未解决，[21], 因此我们将证明这一情形下标记粒子的非平衡涨落留作未来工作。

关于标记粒子在排斥过程中的行为已有大量研究，因此我们不可能一一列举。在本引言末尾，我们提及 Jara 和 Landim [9, 10], 的工作，他们研究了一维最近邻排斥过程（有或无键无序）中的非平衡涨落。Sethuraman 和 Varadhan [22] 以及 Xue 和作者 [26]分别在一维最近邻情形下推导出了大偏差原理和中偏差原理。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们介绍模型和主要结果，即 即，关于标记粒子的大数定律（定理 2.2）和不变性原理（定理 2.4）。大数定律的证明见第 3节。第 4 节证明有限维分布意义下的收敛，第 5 节证明带标记粒子过程的紧性；这些结果足以证明标记粒子的不变性原理。

2. Notation and Results

对于 $d \geq 1$，令 $\mathbb{Z}^d$ 为 d 维格点，并令 $\mathbb{Z}^d_\star = \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$。对于某个点 $u \in \mathbb{R}^d$，我们用 $\|u\| = (\sum_{1\leq j\leq d} u_j^2)^{1/2}$ 表示其 L^2 范数，用 $|u| = \max_{1\leq j\leq d} |u_j|$ 表示其一致范数，其中 u_j 是 u的第 j 个坐标。注意，这两个范数等价，$|u| \leq \|u\| \leq \sqrt{d}|u|$。

排斥过程是定义在状态空间 $\Omega^d = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 上的马尔可夫过程，其无穷小生成元作用于局部函数 $f\colon \Omega^d \to \mathbb{R}$，形式为

$$\mathbb{L}f(\eta) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} p(y-x)\eta(x)(1-\eta(y))[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)]$$

whe其中 $\eta^{x,\,y}$ 是将 η 中 $\eta(x)$ 和 $\eta($ $y)$,

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(x), & z = y, \\ \eta(y), & z = x, \\ \eta(z), & z \neq x, y, \end{cases}$$

且 $p(\cdot)$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 上的某个转移概率核。上文中，f 是局部的，当且仅当 f的取值仅取决于 $\mathbb{Z}^d$ 的有限多个位置。本文关注具有长跳跃的非对称排斥过程，其中转移核 $p(\cdot)$ 定义为

$$p(z) = \frac{1}{\|z\|^{d+\alpha}}\Big[2\chi_{\{z_1>0\}} + \chi_{\{z_1=0\}}\Big], \quad \alpha > 0. \tag{2.1}$$

令 $p(0) = 0$。上文中，χ_A 是集合 A的示性函数。注意，$\alpha > 0$是为了使 $p(z)$ 可求和所必需的。关于上述排斥过程的构造，请参阅 [15] 。记 $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ 为生成元为 $\mathbb{L}$的马尔可夫过程。

注 2.1. 一般而言，我们只需转移核 $p(\cdot)$ 满足

(i) $p(\cdot)$ 可扩展至 $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$，其扩展仍记为 $p(\cdot)$，不会引起混淆，使得 $p(u/N) = N^{d+\alpha}p(u)$ 对于 $u \neq 0$和 $N \geq 1$;

(ii) $p(\cdot)$ 的对称部分满足 $(p(z) + p(-z))/2 = \|z\|^{-d-\alpha}$ 对于 $z \in \mathbb{Z}^d_\star$。

我们假设 $p(\cdot)$ 取以下形式 (2.1) 以简化表述。

对于 $\rho \in [0, 1]$，令 ν_ρ 为 Ω 上密度恒定的伯努利乘积测度^d ，其密度为 ρ。众所周知，ν_ρ 对于过程的演化而言是一个不变且遍历的测度 $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ (例如参见 [15] 。

我们将研究标记粒子的行为。更确切地说，我们初始时在原点放置一个粒子，并用 X_t 表示标记粒子在时刻 t 的位置。显然，我们有 $X_0 = 0$。注意，$\{X_t\}_{t\geq 0}$ 本身并非马尔可夫过程。因此，在标记粒子视角下研究环境过程更为方便，其定义如下:

$$\xi_t(z) = \eta_t(X_t + z), \quad z \in \mathbb{Z}^d_\star.$$

于是容易看出，$\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ 是状态空间 $\Omega^d_\star = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d_\star}$ 上的马尔可夫过程，其无穷小生成元作用于局部函数 $f : \Omega^d_\star \to \mathbb{R}$ 时为

$$\mathcal{L}f(\xi) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star} p(y - x)\xi(x)(1 - \xi(y))[f(\xi^{x,y}) - f(\xi)] + \sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} p(z)(1 - \xi(z))[f(\theta_z\xi) - f(\xi)],$$

其中 $\xi^{x,\,y}$ 是在交换 $\xi(x)$ 与 $\xi(y)$ 的值后由 ξ 得到的环境构型，而 $\theta_z\xi$ 是在标记粒子跳转至 z 后由 ξ 得到的环境构型，$(\theta_z\xi)(x) = \xi(x + z)$ 对于 $x \neq -z$ ，以及 $(\theta_z\xi)(-z) = 0$。对于 $\rho \in [0, 1]$，记 $\nu^\star_\rho$ 为在原点有一个粒子的条件下 ν_ρ 的测度，

$$\nu^\star_\rho(\cdot) = \nu_\rho(\,\cdot\,|\eta(0) = 1).$$

众所周知，[15] $\nu^\star_\rho$ 对环境过程 $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$ 是不变且遍历的。

固定 $T > 0$。对于 Ω^d 上的任意概率测度 μ ，记 $\mathbb{P}_\mu$ 为由过程 $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ 和初始测度 μ 在路径空间 $D([0, T], \Omega^d)$ 上诱导的概率测度，并记 $\mathbb{E}_\mu$ 为相应的期望。

本文的第一个结果涉及：当环境过程从其平衡态开始时，标记粒子的大数定律。

定理 2.2（大数定律）。假设过程 $\{\eta_t\}_{t\geq 0}$ 的初始测度为 $\nu^\star_\rho$ ，其中 $\rho \in \in (0, 1)$。

(i) 若 $\alpha = 1$，则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{X_{tN/\log N}}{N} = \gamma_d e_1 \tag{2.2}$$

在 $\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}$–概率下，其中 $e_1 \in \mathbb{R}^d$ 是第一个分量为 1、其余分量均为 0 的单位向量，并且

$$\gamma_d := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{\|z\|\leq N} z_1 p(z).$$

(ii) 若 $\alpha > 1$，则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{X_{tN}}{N} = t(1 - \rho)m \tag{2.3}$$

以 $\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}$–概率，其中 $m := \sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} zp(z)$。

注 2.3. 对于 $0<\alpha<1$，由下面的定理 2.4 可知，对于任意 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{X_{tN^{\alpha-\varepsilon}}}{N}=0$$

以 $\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}$-概率。

第二个结果讨论环境过程从其平衡态开始时，关于标记粒子的不变性原理。对于 $N\geq 1$，定义

$$\overline{X}_t^N=\begin{cases}X_{tN^\alpha}, & \text{if } 0<\alpha<1,\\ X_{tN}-tN(1-\rho)\sum_{\|z\|\leq N}zp(z), & \text{if } \alpha=1,\\ X_{tN^\alpha}-tN^\alpha(1-\rho)m, & \text{if } 1<\alpha<2,\\ X_{tN^2/\log N}-t(N^2/\log N)(1-\rho)m, & \text{if } \alpha=2.\end{cases}$$

对于 $\alpha>0$，令 $\{Y_{\alpha,t}\}_{t\geq 0}$ 为 Lévy 过程，使得 $Y_{\alpha,0}=0$，且对于任意 $\beta\in\mathbb{R}$ 和 $a\in\mathbb{R}^d$,

$$\log E\big[\exp\{i\beta(Y_{\alpha,t}\cdot a)\}\big]=t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta),$$

其中

(i) 若 $0<\alpha<1$，则

$$\Phi_{\alpha,a}(\beta)=\int_{u_1>0}\|u\|^{-d-\alpha}(e^{i\beta(u\cdot a)}-1)\,du.$$

(ii) 若 $\alpha=1$，则

$$\Phi_{\alpha,a}(\beta)=\int_{u_1>0}\|u\|^{-d-1}\big(e^{i\beta(u\cdot a)}-1-i\beta(u\cdot a)\chi_{\{\|u\|\leq 1\}}\big)\,du.$$

(iii) 若 $1<\alpha<2$，则

$$\Phi_{\alpha,a}(\beta)=\int_{u_1>0}\|u\|^{-d-\alpha}\big(e^{i\beta(u\cdot a)}-1-i\beta(u\cdot a)\big)\,du.$$

(iv) 若 $\alpha=2$，则

$$\Phi_{\alpha,a}(\beta)=-\frac{\beta^2}{2}a^T\cdot Da.$$

上述中，$D=(D_{i,\ j})_{1\leq i,\ j\leq d}$ 是一个 $d\times d$ 矩阵，给定为

$$D_{i,j}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{\|z\|\leq N}z_iz_jp(z).$$

我们强调，在 $\alpha=2$ 的情形下，$Y_{\alpha,\ t}$ 实际上是一个均值为零、协方差矩阵为 $(1-\rho)D$ 的 d 维布朗运动。

定理 2.4 (不变性原理)。 在定理 2.2的假设下，若 $d=1$ 且 $0<\alpha<3/2$，或 $d\geq 2$ 且 $0<\alpha\leq 2$，则

$$\big\{N^{-1}\overline{X}_t^N\big\}_{0\leq t\leq T}\Rightarrow\{Y_{\alpha,t}\}_{0\leq t\leq T},\quad N\to\infty.$$

$A\dot{b}$此外，收敛是指在路径空间 $D([0,T],\mathbb{R}^d$ 中按斯科罗霍德拓扑收敛).

注 2.5。 如引言中所述，情形 $\alpha>2$ 应与非对称有限程情形相同 [11, 23, 20]。另请注意，情形 $d=1$, $3/2\leq\alpha\leq 2$ 仍未解决。

3. Law of large numbers

在本节中，我们证明标记粒子的大数定律（定理 2.2）。在证明过程中，常数 C可能因行而异，但与 N 无关。对于 $z\in\mathbb{Z}_\star^d$，令 N_t^z

表示截至时间 t 标记粒子沿 z 方向跳跃的次数。由此立即可得

$$X_t = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} zN^z_t. \tag{3.1}$$

由于 N^z_t是强度为 $\int_0^t p(z)(1-\xi_s(z))ds$ 的复合泊松过程，且过程 $\{N^z_t\}_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}$之间没有共同跳跃，对于任意 $a\in\mathbb{R}^d$、任意 $\beta\in\mathbb{R}$以及任意 $\gamma=\gamma(N)$,

$$\mathcal{M}^N_t(\beta) := \mathcal{M}^N_{t,a}(\beta) := \exp\Big\{i\beta(X_{t\gamma(N)}\cdot a)/N - \sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)p(z)\int_0^{t\gamma(N)}(1-\xi_s(z))\,ds\Big\} \tag{3.2}$$

是均值为 1 的复鞅。主要思路是通过考察上述指数鞅，证明特征函数的收敛性。

定理的证明2.2。我们先证明较简单的情形 $\alpha>1$。为了证明（2.3），只需证明对于任意 $a\in\mathbb{R}^d$ 以及任意 $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty}\Big|\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\exp\{i\beta(X_{tN}\cdot a)/N\}\Big] - \exp\big\{i\beta t(1-\rho)(m\cdot a)\big\}\Big| = 0.$$

在（$\gamma(N)=N$ 中取3.2，则上述绝对值可估计为

$$\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\Big|1-\exp\Big\{i\beta t(1-\rho)(m\cdot a) - \sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)p(z)\int_0^{tN}(1-\xi_s(z))\,ds\Big\}\Big|\Big].$$

对于两个实数 $\beta_j\in\mathbb{R}$、$j=1,2$，记 $\mathfrak{R}(\beta_1+i\beta_2)=\beta_1$ 为复数$\beta_1+i\beta_2$的实部。由于 $\alpha>1$ 且 $|1-\xi(z)|\le 1$,

$$\begin{aligned}\Big|\mathfrak{R}\Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)p(z)\int_0^{tN}(1-\xi_s(z))\,ds\Big)\Big| &\le \frac{tN}{N^{d+\alpha}}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}|\cos(\beta(z\cdot a)/N)-1|p\big(\tfrac{z}{N}\big)\\ &\le CtN^{1-\alpha}\Big(\int_1^\infty r^{-1-\alpha}dr + \int_{1/N}^1 r^{1-\alpha}dr\Big)\end{aligned}$$

对于某个常数 $C=C(\beta,a)$。注意，最后一行在 $\alpha\neq 2$ 时由 $Ct(N^{1-\alpha}+N^{-1})$ 控制，在 $\alpha=2$ 时由 $CtN^{-1}\log N$ 控制。利用控制收敛定理，为了完成证明，我们只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)p(z)\int_0^{tN}(1-\xi_s(z))\,ds = i\beta t(1-\rho)(m\cdot a) \tag{3.3}$$

以 $\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}$-概率。为此，对于任意 $K>0$，我们将最后一行两边各项的差估计为

$$\begin{aligned}&\sum_{\|z\|>K}\big|e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1\big|p(z)\int_0^{tN}(1-\xi_s(z))\,ds\\ &\quad+\sum_{\|z\|\le K}\big|e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta(z\cdot a)/N\big|p(z)\int_0^{tN}(1-\xi_s(z))\,ds\\ &\quad+\Big|i\beta\sum_{\|z\|\le K}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN}(1-\xi_s(z))\,ds - i\beta t(1-\rho)(m\cdot a)\Big|.\end{aligned} \tag{3.4}$$

利用基本不等式

$$\left|e^{i\theta}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(i\theta)^k}{k!}\right|\le\frac{|\theta|^{n+1}}{(n+1)!},\quad\forall\theta\in\mathbb{R}\tag{3.5}$$

我们将式（3.4）中的前两项界定为

$$t\beta\sum_{\|z\|>K}|(z\cdot a)|p(z)+\frac{Ct\beta^2K^2a^2}{N}.$$

注意，最后一行在 $N\to\infty,K\to\infty$ 时收敛于零。由于过程 $\{\xi_t\}_{t\ge0}$ 是遍历的，根据遍历定理，当 $N\to\infty$ 时，式（3.4）中的第三项依 $\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}$-概率收敛于

$$\left|i\beta t(1-\rho)\sum_{\|z\|>K}(z\cdot a)p(z)\right|.$$

由于 $K\to\infty$ 时，上述项收敛于零，因为 $p(z)$ 的一阶矩有限。这就证明了式（2.3）。现在我们转向 $\alpha=1$ 的情形。与式（2.3）的证明类似，我们只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{tN/\log N}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)p(z)(1-\xi_s(z))ds=i\beta t(1-\rho)\gamma_d a_1\tag{3.6}$$

依 $\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}$-概率，其中 $a_1=a\cdot e_1$ 是 a 的第一个分量。我们首先将式（3.6）左侧的项拆分为

$$\begin{aligned}&\int_0^{tN/\log N}\sum_{\|z\|>N}(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)p(z)(1-\xi_s(z))ds\\&\quad+\int_0^{tN/\log N}\sum_{\|z\|\le N}(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta(z\cdot a)/N)p(z)(1-\xi_s(z))ds\\&\quad+\frac{1}{N}\int_0^{tN/\log N}\sum_{\|z\|\le N}i\beta(z\cdot a)p(z)(1-\xi_s(z))ds.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由于 $|e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1|\le2$，式（3.7）中第一项的绝对值有如下界

$$\frac{Ct}{\log N}\int_1^\infty\frac{1}{r^{d+1}}r^{d-1}dr\le\frac{Ct}{\log N}.$$

利用不等式（3.5），我们将（3.7）中第二项的绝对值估计为

$$\frac{Ct}{\log N}\int_{\frac{1}{N}}^1\frac{r^2}{r^{d+1}}r^{d-1}dr\le\frac{Ct}{\log N}.$$

为了处理式（3.7）中的最后一项，首先注意到

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\frac{1}{N}\int_0^{tN/\log N}\sum_{\|z\|\le N}i\beta(z\cdot a)p(z)(1-\xi_s(z))ds\Big]\\&\qquad=i\beta t(1-\rho)a\cdot\Big\{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{\|z\|\le N}zp(z)\Big\}=i\beta t(1-\rho)\gamma_d a_1.\end{aligned}$$

上面，第一个等式来自测度 $\nu_\rho^\star$ 的不变性，最后一个等式来自 γ_d 的定义。为了完成证明，我们只需证明

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}_{\nu_\rho^\star}\Big(\frac{1}{N}\int_0^{tN/\log N} \sum_{\|z\|\le N} i\beta(z\cdot a)p(z)(1-\xi_s(z))ds\Big) = 0.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，最后一行中的方差有如下上界

$$\frac{Ct^2\beta^2}{(\log N)^2}\sum_{\|z\|\le N}|z\cdot a|^2 p(z)^2 \le \frac{Ct^2\beta^2}{N^d(\log N)^2}\int_{\frac{1}{N}}^1 \frac{r^2}{r^{2d+2}} r^{d-1}dr \le \frac{Ct^2\beta^2}{(\log N)^2},$$

当 $N\to\infty$ 时，它收敛到零。至此，大数定律的证明完成。 □

4. 不变性原理

在本节和下一节中，我们证明定理2.4。根据 [4, 定理 13。1], 我们只需证明带标记粒子过程在有限维分布意义下的收敛性及其紧性。本节证明前者，下一节证明后者。本节的主要目的是证明以下结果。

命题 4.1。 在定理 2.4的假设下，对于任意 $a\in\mathbb{R}^d$，任意固定的 $t\ge 0$，以及任意$\beta\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty}\log \mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\exp\{i\beta(\overline{X}_t^N\cdot a)/N\}\Big] = t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta). \tag{4.1}$$

注 4.2。 根据上述命题，定理 2.4 中的收敛对任意固定时刻 t均成立。根据 [8,注 33]中的观察，可得有限维分布意义下的收敛。事实上，利用鞅 $\mathcal{M}_{+s}^N(\beta)/\mathcal{M}_s^N(\beta)$ 对任意 $s\ge 0$，并逐行仿照上述命题的证明，可以证明带标记粒子过程的增量是条件独立同分布的，这足以证明有限维分布意义下的收敛。

本节余下部分将针对不同的参数范围 α 和 d，证明命题 4.1。

4.1。 情形 $0<\alpha<1$。 在此情形下，跳跃率 $p(\cdot)$ 具有重尾，其证明与对称情形 [8]非常相似。回忆一下，$\overline{X}_t^N = X_{tN^\alpha}$若 $0<\alpha<1$。取 $\gamma(N)=N^\alpha$代入（3.2），则有

$$\mathcal{M}_t^N(\beta) = \exp\Big\{i\beta(\overline{X}_t^N\cdot a)/N - \frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d} p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi_s(z))ds\Big\}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\exp\{i\beta(\overline{X}_t^N\cdot a)/N\}\Big] - \exp\big\{t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta)\big\}\Big| \\ &\quad\le \mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\Big|1-\exp\Big\{t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta) - \frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d} p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi_s(z))ds\Big\}\Big|\Big].\end{aligned}$$

由于存在一个与 N 无关的有限常数 C，使得

$$\Big|\mathfrak{R}\Big(\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d} p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi_s(z))\Big)\Big| \le C\Big(1+\int_{\frac{1}{N}}^1 r^{1-\alpha}dr\Big)\le C, \tag{4.2}$$

根据控制收敛定理，只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi_s(z))ds=t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta)\tag{4.3}$$

依概率收敛于 $\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}$。注意，

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi_s(z))ds\Big]=t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta),$$

并且由柯西-施瓦茨不等式可得，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}_{\nu_\rho^\star}\Big(\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi_s(z))ds\Big)\\&\qquad\le\frac{Ct^2}{N^d}\Big(\int_{\frac{1}{N}}^1\frac{r^2}{r^{2d+2\alpha}}r^{d-1}dr+1\Big)\le Ct^2\big(N^{2\alpha-2}+N^{-d}\big),\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时， $\alpha<1$该式趋于零。这就证明了（4.3），从而完成了 $0<\alpha<1$情形的证明。

4.2. 情形 $d\ge2$和 $1<\alpha<2$。回顾 $\overline{X}_t^N=X_{tN^\alpha}-tN^\alpha(1-\rho)\,m$在此情形下。取 $\gamma(N)=N^\alpha$于（3.2）中，则可将定义于（ $\mathcal{M}_t^N$（3.2）中的鞅写为

$$\mathcal{M}_t^N(\beta)=\exp\Big\{i\beta(\overline{X}_t^N\cdot a)/N-\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\Gamma_a^N(\xi_s)\,ds\Big\},$$

其中，对于 $a\in\mathbb{R}^d$ 和 $\xi\in\Omega_\star^d$,

$$\Gamma_a^N(\xi)=\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi(z))-i\beta N^{\alpha-1}(1-\rho)(m\cdot a).\tag{4.4}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\exp\Big\{i\beta(\overline{X}_t^N\cdot a)/N\Big\}\Big]-\exp\{t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta)\}\Big|\\&\qquad\le\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\Big|1-\exp\Big\{t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta)-\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\Gamma_a^N(\xi_s)\,ds\Big\}\Big|\Big].\end{aligned}$$

与（4.2）中一样，若 $1<\alpha<2$，则存在一个常数 C，它与 N 无关，使得

$$\Big|\Re\big(\Gamma_a^N(\xi)\big)\Big|\le C\Big(1+\int_{\frac{1}{N}}^1 r^{1-\alpha}dr\Big)\le C.$$

在下面的引理4.3 中，我们将证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\Gamma_a^N(\xi_s)\,ds=t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta)$$

在$\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}$–概率意义下。然后，我们利用控制收敛定理完成4.1 在 $d\ge2$ 且 $1<\alpha<2$ 的情形下的命题证明。

本小节余下部分将证明以下关键引理。

引理 4.3. 假设 $d\ge2$ 和 $1<\alpha<2$。那么，对于任意 $a\in\mathbb{R}^d$、任意 $t>0$以及任意 $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\Gamma_a^N(\xi_s)\,ds=t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta)\tag{4.5}$$

以 $\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}$–概率成立，其中 Γ_a^N 定义见 (4.4)。

在证明上述结果之前，我们先陈述一个关于长跳跃随机游走常返性或暂留性的引理。

引理 4.4。 设 $\alpha > 0$。令 $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ 为 $\mathbb{Z}^d$ 上的对称随机游走，其转移概率为

$$s(x) = \frac{1}{s^\star}\frac{1}{\|x\|^{d+\alpha}}, \quad x \neq 0,$$

其中 $s^\star$ 为归一化常数

$$s^\star = \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}^d,\\ x\neq 0}} \frac{1}{\|x\|^{d+\alpha}}.$$

那么， $\{Z_n\}$ 常返，当且仅当 $d \leq 2$ 且 $\alpha \geq d$。

上述结果最近才在[2] 中得到证明，方法是利用随机游走的暂留性与从原点到无穷远处存在有限能量单位流之间的等价性。下面我们通过分析随机游走 $\{Z_n\}_{n\geq 1}$的特征函数，给出一个更初等的证明。

证明。众所周知，若 $d \geq 3$，则该随机游走是暂态。因此，只需考虑 $d \leq 2$ 的情形。众所周知，该随机游走常返，当且仅当对某个固定的 $\delta > 0$ （例如参见[5] ），

$$\int_{(-\delta,\delta)^d} \Re\Big(\frac{1}{1-\varphi(\theta)}\Big)d\theta = \infty, \tag{4.6}$$

其中 $\varphi(\theta)$， $\theta \in \mathbb{R}^d$ 是随机游走 $\{Z_n\}$ 的特征函数，

$$\varphi(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i(\theta\cdot x)}s(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \cos(\theta\cdot x)s(x).$$

我们先考虑较简单的情形 $d = 1$。若 $\alpha > 1$，则转移核 $s(x)$ 的均值为零，根据大数定律，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j = 0$$

依概率收敛。根据 Chung-Fuchs 定理（例如参见[5] ），此时该随机游走常返。若 $0 < \alpha \leq 1$，注意到

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\varphi(\theta)}{|\theta|^\alpha} = \lim_{\theta\to 0}\frac{|\theta|}{s^\star}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\frac{1-\cos(\theta x)}{|\theta x|^{1+\alpha}} = \frac{1}{s^\star}\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos u}{|u|^{1+\alpha}}du.$$

由于最后一行右侧的项是有限且正的，因此存在一个常数 $C > 1$使得

$$C^{-1}\int_{(-\delta,\,\delta)}|\theta|^{-\alpha}d\theta \leq \int_{(-\delta,\delta)}\frac{1}{1-\varphi(\theta)}d\theta \leq C\int_{(-\delta,\delta)}|\theta|^{-\alpha}d\theta.$$

由于积分 $\int_{(-\delta,\,\delta)}|\theta|^{-\alpha}d\theta$ 有限当且仅当 $0 < \alpha < 1$，在 $d = 1$ 的情况下，随机游走暂态当且仅当 $0 < \alpha < 1$。

现在考虑 $d = 2$ 的情形，其证明与一维情形类似，但更为复杂。若 $\alpha > 2$，则转移核 $s(x)$ 的二阶矩有限，因此 $n^{-1/2}\sum_{j=1}^n Z_j$ 满足中心极限定理。根据 [5], , 此时随机游走是常返的。现在假设 $0 < \alpha < 2$。取满足 $\|v\| = 1$ 的 $v \in \mathbb{R}^2$。定义 $f_v\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为

$$f_v(u) = \frac{1}{s^\star}\frac{1-\cos(v\cdot u)}{\|u\|^{2+\alpha}}, \quad u \in \mathbb{R}^2.$$

注意到 $\int_{\mathbb{R}^2} f_v(u)du$ 可积，且与 v 独立。我们声称

$$\lim_{r\to 0}\sup_{\|v\|=1}\Big|\frac{1-\varphi(rv)}{r^\alpha}-\int_{\mathbb{R}^2} f_v(u)du\Big|=0. \tag{4.7}$$

事实上，对于任意 $0<r<1$，我们有

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1-\varphi(rv)}{r^\alpha}-\int_{\mathbb{R}^2} f_v(u)du\Big| &= \Big|r^2\sum_{x\in\mathbb{Z}^2_\star} f_v(rx)-\int_{\mathbb{R}^2} f_v(u)du\Big| \\ &\le \sum_{x\in\mathbb{Z}^2_\star}\int_{|u-rx|<r/2}\big|f_v(rx)-f_v(u)\big|du+\int_{|u|<r/2} f_v(u)du \\ &\le Cr\sum_{x\in\mathbb{Z}^2_\star}\sum_{j=1}^{2}\int_{|u-rx|<r/2}\big|\partial_{u_j} f_v(w_{rx,u})\big|du+Cr^{2-\alpha}, \end{aligned}\tag{4.8}$$

其中 $w_{rx,\ u}$ 是介于 rx 和 u之间的某个点，且上面的常数 C 与 v 和 r无关。直接计算可得，对于 $j=1,\ 2$,

$$\partial_{u_j} f_v(u)=\frac{1}{s^\star}\frac{v_j\sin(v\cdot u)}{\|u\|^{2+\alpha}}-\frac{2+\alpha}{s^\star}\frac{u_j(1-\cos(v\cdot u))}{\|u\|^{4+\alpha}}.$$

因此，存在某个与 v 无关的常数 C，使得

$$\big|\partial_{u_j} f_v(u)\big|\le C\big[\min\{\|u\|^{-2-\alpha},\|u\|^{-1-\alpha}\}+\min\{\|u\|^{-3-\alpha},\|u\|^{-1-\alpha}\}\big].$$

然后，我们可以将等式（4.8）右侧的第一项估计为

$$Cr\Big\{\sum_{\|rx\|>1}\int_{|u-rx|<r/2}\big(\|w_{rx,u}\|^{-2-\alpha}+\|w_{rx,u}\|^{-3-\alpha}\big)du+\sum_{r\le\|rx\|\le 1}\int_{|u-rx|<r/2}\|w_{rx,u}\|^{-1-\alpha}du\Big\}.$$

由于 $\|w_{rx,\ u}\|\ge|w_{rx,\ u}|\ge|rx|-r/2\ge|rx|/2\ge\|rx\|/\ (2\sqrt{2})$，最后一行有界于 y

$$\begin{aligned}Cr^3\Big\{\sum_{\|rx\|>1}\big(\|rx\|^{-2-\alpha}+\|rx\|^{-3-\alpha}\big)+\sum_{r\le\|rx\|\le 1}\|rx\|^{-1-\alpha}\Big\} \\ \le Cr\Big\{\int_1^\infty(\ell^{-1-\alpha}+\ell^{-2-\alpha})d\ell+\int_r^1\ell^{-\alpha}d\ell\Big\}.\end{aligned}$$

注意到，最后一个不等式右侧的项在 Cr 时有界于 $0<\alpha<1$，在$C(r-r$ 对数 $r)$ 时有界于 $\alpha=1$，而在 $C(r+r^{2-\alpha})$ 时有界于 $1<\alpha<2$。由于上面的常数 C 与v无关，我们便完成了式(4.7) 的证明。

By (4.7)，存在一个常数 $C>1$，使得对任意范数足够小的 $\theta\in\mathbb{R}^2$,

$$C^{-1}\|\theta\|^{-\alpha}\le 1-\varphi(\theta)\le C\|\theta\|^{-\alpha}.$$

由式(4.6)可知，当 $0<\alpha<2$时，随机游走是暂态的。

类似地，对于 $\alpha=2$，可以证明

$$\lim_{r\to 0}\sup_{\|v\|=1}\Big|\frac{1-\varphi(rv)}{r^2|\log r|}-\frac{1}{|\log r|}\int_{\|u\|>r} f_v(u)du\Big|=0.$$

Th因此，存在一个常数 $C>1$，使得对任意范数足够小的 $\theta\in\mathbb{R}^2$ h,

$$-C^{-1}\|\theta\|^{-2}\log\|\theta\|\le 1-\varphi(\theta)\le -C\|\theta\|^{-2}\log\|\theta\|.$$

由（4.6），不难看出，当 $\alpha=2$ 时，该随机游走是常返的。这就完成了证明。 □

引理 *4.3* 的证明。 由于 $p(\frac{z}{N}) = N^{d+\alpha}p(z)$ 对任意 $z \in \mathbb{Z}^d_\star$，我们可以将（4.5）左侧的项改写为

$$\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha} \frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d\star} p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N} - 1 - i\beta(z\cdot a)/N)(1-\xi_s(z))ds \tag{4.9}$$

$$+ i\beta\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN^\alpha}(\rho-\xi_s(z))\,ds. \tag{4.10}$$

对于（4.9），容易看出

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N} - 1 - i\beta(z\cdot a)/N)(1-\xi_s(z))ds\Big] = t(1-\rho)\Phi_{\alpha,a}(\beta).$$

现在我们证明

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Var}_{\nu^\star_\rho}\Big(\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{tN^\alpha}\frac{1}{N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} p\big(\tfrac{z}{N}\big)(e^{i\beta(z\cdot a)/N} - 1 - i\beta(z\cdot a)/N)(1-\xi_s(z))ds\Big) = 0, \tag{4.11}$$

由切比雪夫不等式可知，这意味着项（4.9）当 $N\to\infty$ 趋于 $t(1-\rho)\Phi_{\alpha时,\ a}(\beta)$ 在 $\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}$-概率意义下收敛。对于实部，由柯西-施瓦茨不等式以及过程$\{\xi_t\}_{t\geq 0}$的平稳性，存在某个常数 C，使得（4.11）中的方差有如下界：

$$\frac{Ct^2}{N^{2d}}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} p\big(\tfrac{z}{N}\big)^2\big[\cos\big(\tfrac{\beta(z\cdot a)}{N}\big)-1\big]^2 \leq \frac{Ct^2}{N^d}\Big(1+\int_{\frac{1}{N}}^1 r^{3-d-2\alpha}dr\Big) \leq Ct^2\big(N^{-d}+N^{2\alpha-4}\big).$$

由于 $\alpha<2$，最后一行趋于零。类似地，（4.11）中虚部的方差有如下界：

$$\frac{Ct^2}{N^{2d}}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} p\big(\tfrac{z}{N}\big)^2\big[\sin\big(\tfrac{\beta(z\cdot a)}{N}\big)-\tfrac{\beta(z\cdot a)}{N}\big]^2 \leq \frac{Ct^2}{N^d}\Big(1+\int_{\frac{1}{N}}^1 r^{5-d-2\alpha}dr\Big) \leq Ct^2\big(N^{-d}+N^{2\alpha-6}\big),$$

它也在极限下趋于零。这就证明了（4.11）。

为完成证明，我们只需证明（4.10）在极限下消失，确切地说，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN^\alpha}(\rho-\xi_s(z))\,ds = 0 \tag{4.12}$$

在 $\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}$-概率意义下。根据引理 4.4，转移核为 $s(\cdot)$ 的随机游走在 $d\geq 2$且 $1<\alpha<2$ 时是暂态的，因此我们可以利用 暂态估计，这些估计来自 [23]。由 Kipnis-Varadhan 不等式 [12, 命题 A1.6。1],

$$\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN^\alpha}(\rho-\xi_s(z))\,ds\Big)^2\Big]$$

$$\leq 20TN^{\alpha-2}\sup_{f\in L^2(\Omega^d_\star,\nu^\star_\rho)}\Big\{2\int\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(z\cdot a)p(z)(\rho-\xi(z))f(\xi)\,\nu^\star_\rho(d\xi) - \big\langle f,(-\mathcal{L})f\big\rangle_{\nu^\star_\rho}\Big\}. \tag{4.13}$$

对于 Ω 上的概率测度 μ，以及两个函数 f、$g\in L^2(\Omega^d_\star,\mu)$，我们记作 $\langle f,g\rangle_\mu = E_\mu[fg]$。我们还要指出，为了在下一节证明紧性，我们需要取上述期望内部的上确界

。回想一下， $s(\cdot)$ 是 $p(\cdot)$ 的归一化对称部分，

$$s(z)=\frac{p(z)+p(-z)}{2s^\star}=\frac{1}{s^\star}\frac{1}{\|z\|^{d+\alpha}},\quad z\in\mathbb{Z}^d_\star.$$

由于 $\nu^\star_\rho$ 是生成元 $\mathcal{L}$的不变

$$\big\langle f,(-\mathcal{L})f\big\rangle_{\nu^\star_\rho}=\frac{s^\star}{2}\Big\{\int\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star}s(y-x)[f(\xi^{x,y})-f(\xi)]^2\,\nu^\star_\rho(d\xi)$$
$$+\int\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}s(z)(1-\xi(z))[f(\theta_z\xi)-f(\xi)]^2\,\nu^\star_\rho(d\xi)\Big\}.$$

如附录 A中所述，对于任意有限子集 $A\subset\mathbb{Z}^d_\star$，定义

$$\Psi_A(\xi)=\prod_{x\in A}\frac{\xi(x)-\rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}$$

约定 $\Psi_\emptyset=1$。那么 $\{\Psi_A:\ A\subset\mathbb{Z}^d_\star$是有限的，$\}$是 $L^2(\Omega^d_\star,\nu^\star_\rho)$ 的标准正交基。这使我们可以将任意函数 $f\in L^2(\Omega^d_\star,\nu^\star_\rho)$ 写成

$$f=\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star\\ A\text{ finite}}}\mathfrak{f}(A)\Psi_A,$$

其中，对于有限子集 $A\subset\mathbb{Z}^d_\star$，$\mathfrak{f}(A)=\int f(\xi)\Psi_A(\xi)\nu^\star_\rho(d\xi)$。可以直接验证，若 $x\in A, y\notin A$，则 $\Psi_A(\xi^{x,\,y})=\Psi_{A\backslash\{x\}\cup\{y\}}(\xi)$。因此，

$$\big\langle f,(-\mathcal{L})f\big\rangle_{\nu^\star_\rho}\geq s^\star\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star\\ A\text{ finite}}}\sum_{\substack{x\in A,\\ y\notin A}}s(y-x)\big[\mathfrak{f}(A\backslash\{x\}\cup\{y\})-\mathfrak{f}(A)\big]^2.\tag{4.14}$$

现在我们 处理上确界中的第一项（式4.13）。作变量代换 $\xi\mapsto\xi^z$，

$$\int(\rho-\xi(z))f(\xi)\,\nu^\star_\rho(d\xi)=(1-\rho)\int\chi_{\{\xi(z)=1\}}\big(f(\xi^z)-f(\xi)\big)\,\nu^\star_\rho(d\xi),$$

其中 ξ^z 是由 ξ 将 $\xi(z)$ 的值翻转后得到的构型，也就是说，$\xi^z(x)=\xi(x)$，其中 $x\neq z$且 $\xi^z(z)=1-\xi(z)$。由柯西-施瓦茨不等式，式（4.13）中上确界里的第一项可由下式从上方界定

$$2(1-\rho)\int\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(z\cdot a)p(z)\chi_{\{\xi(z)=1\}}\big(f(\xi^z)-f(\xi)\big)\,\nu^\star_\rho(d\xi)$$
$$\leq 2(1-\rho)\Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}|z\cdot a|p(z)\Big)^{1/2}\Big(\int\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}|z\cdot a|p(z)\big(f(\xi^z)-f(\xi)\big)^2\,\nu^\star_\rho(d\xi)\Big)^{1/2}$$
$$\leq C\Big(\int\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}|z\cdot a|p(z)\big(f(\xi^z)-f(\xi)\big)^2\,\nu^\star_\rho(d\xi)\Big)^{1/2}\tag{4.15}$$

其中某个常数 $C=C(\rho,\alpha,a)$。由于

$$\Psi_A(\xi^z)-\Psi_A(\xi)=\begin{cases}0, & z\notin A,\\ \frac{1-2\xi(z)}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}\Psi_{A\backslash z}(\xi), & z\in A,\end{cases}$$

直接计算表明

$$\int \big(f(\xi^z)-f(\xi)\big)^2\,\nu_\rho^\star(d\xi)=\int\Big(\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}_\star^d\\ A\text{ finite}}}\mathfrak{f}(A)[\Psi_A(\xi^z)-\Psi_A(\xi)]\Big)^2\nu_\rho^\star(d\xi)$$
$$=\frac{1}{\rho(1-\rho)}\int\Big(\sum_{A:z\in A}\mathfrak{f}(A)\Psi_{A\setminus z}(\xi)\Big)^2\nu_\rho^\star(d\xi)=\frac{1}{\rho(1-\rho)}\sum_{A:z\in A}\mathfrak{f}^2(A).$$

对于 $n\ge 0$，令

$$F_n^2(z)=\sum_{\substack{A:z\in A,\\ |A|=n}}\mathfrak{f}^2(A).$$

那么，我们可以将（4.15）中的最后一行改写为

$$C\Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}\sum_{n\ge 0}|z\cdot a|p(z)F_n^2(z)\Big)^{1/2}\tag{4.16}$$

其中某个常数为 $C=C(\rho,\alpha,a)$。

接下来我们对 $F_n^2(z)$ 进行估计。记 $S_t(x,y)$ 为转移概率核为 $s(\cdot)$ 的连续时间随机游走所对应的转移概率，并记 $g(x,y)$ 为相应的格林函数，

$$g(x,y)=\int_0^\infty S_t(x,y)\,dt.$$

根据引理 4.4，$g(x,x)<\infty$ 如果 $d\ge 2$ 且 $1<\alpha<2$。此外，容易看出

$$\sum_y s(x-y)[g(z,y)-g(z,x)]=-\chi_{\{x=z\}}.\tag{4.17}$$

事实上，由于

$$\frac{dS_t(x,z)}{dt}=\sum_y s(x-y)\big[S_t(y,z)-S_t(x,z)\big],$$

对时间从零积分到无穷大，我们利用 4.17）以及 S_t 的对称性，得到（ F_n^2（z）可改写为

$$F_n^2(z)=g(z,z)\sum_x\frac{F_n^2(x)}{g(z,x)}\chi_{\{x=z\}}=-g(z,z)\sum_{x,y}\frac{F_n^2(x)}{g(z,x)}s(y-x)[g(z,y)-g(z,x)]$$
$$=(1/2)g(z,z)\sum_{x,y}s(y-x)\Big[\frac{F_n^2(y)}{g(z,y)}-\frac{F_n^2(x)}{g(z,x)}\Big][g(z,y)-g(z,x)].$$

上面，在第二个等式中，我们使用（4.17）；在最后一个等式中，我们使用 s（$\cdot$）的对称性。由柯西-施瓦茨不等式，

$$\Big[\frac{F_n^2(y)}{g(z,y)}-\frac{F_n^2(x)}{g(z,x)}\Big][g(z,y)-g(z,x)]=F_n^2(y)+F_n^2(x)-\Big[\frac{g(z,y)}{g(z,x)}F_n^2(x)+\frac{g(z,x)}{g(z,y)}F_n^2(y)\Big]$$
$$\le\Big(F_n(y)-F_n(x)\Big)^2,$$

因此，

$$F_n^2(z)\le(1/2)g(z,z)\sum_{x,y}s(y-x)\Big(F_n(y)-F_n(x)\Big)^2.$$

由于 $g(z,z)=g(0,0)$ 与 z 相互独立，并且当 $p(\cdot)$ 具有有限一阶矩时，跳跃率 $\alpha>1$，我们将 (4.16) 从上方估计为

$$C\Big(\sum_n\sum_{x,y}s(y-x)\big(F_n(y)-F_n(x)\big)^2\Big)^{1/2}.\tag{4.18}$$

对某个常数 $C = C(\rho, \alpha, a)$。根据 F_n 的定义以及柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}|F_n^2(y) - F_n^2(x)| &= \Big| \sum_{\substack{x\in A, y\notin A,\\ |A|=n}} \big[\mathfrak{f}^2(A\backslash\{x\}\cup\{y\}) - \mathfrak{f}^2(A)\big]\Big| \\ &\le \sqrt{\sum_{\substack{x\in A, y\notin A,\\ |A|=n}} \big[\mathfrak{f}(A\backslash\{x\}\cup\{y\}) - \mathfrak{f}(A)\big]^2} \times \sqrt{\sum_{\substack{x\in A, y\notin A,\\ |A|=n}} \big[\mathfrak{f}(A\backslash\{x\}\cup\{y\}) + \mathfrak{f}(A)\big]^2} \\ &\le \sqrt{\sum_{\substack{x\in A, y\notin A,\\ |A|=n}} \big[\mathfrak{f}(A\backslash\{x\}\cup\{y\}) - \mathfrak{f}(A)\big]^2} \times \big(F_n(y) + F_n(x)\big).\end{aligned}$$

因此，

$$\big(F_n(y) - F_n(x)\big)^2 \le \sum_{\substack{A: x\in A, y\notin A,\\ |A|=n}} \big(\mathfrak{f}(A\backslash\{x\}\cup\{y\}) - \mathfrak{f}(A)\big)^2.$$

这使我们能够将（4.18）界定为

$$C\Big(\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}_\star^d\\ A \text{ finite}}} \sum_{\substack{x\in A,\\ y\notin A}} s(y-x)\big(\mathfrak{f}(A\backslash\{x\}\cup\{y\}) - \mathfrak{f}(A)\big)^2\Big)^{1/2} \le C\big\langle f, (-\mathcal{L})f\big\rangle_{\nu_\rho^\star}^{1/2}.$$

对于某个常数 $C = C(\rho, \alpha, a)$。在最后一个不等式中，我们使用了（4.14）。由于 $Cx - x^2 \le C^2/4$，我们将（4.13）上界为 $CTN^{\alpha-2}$，它趋于零，因为 $\alpha < 2$。这就完成了 $d \ge 2$ 且 $1 < \alpha < 2$的情形的证明。□

注释 4.5。利用以下情形中介绍的技巧，也可以证明

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN^\alpha}(\rho - \xi_s(z))ds\Big)^2\Big] \le CN^\alpha$$

在 $z \in \mathbb{Z}_\star^d$中一致成立。于是，（4.12）可由柯西-施瓦茨不等式直接推出。

4.3. 情形 $d = 1$ 和 $1 < \alpha < 3/2$。逐行沿用情形 $d \ge 2$ 和 $1 < \alpha < 2$ 中的证明，我们只需证明（4.12）。根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN^\alpha}(\rho - \xi_s(z))\,ds\Big)^2\Big] \\ &\qquad\le CN^{-2}\sum_{z\in\mathbb{Z}_\star}|z\cdot a|p(z)\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN^\alpha}(\rho - \xi_s(z))\,ds\Big)^2\Big] \qquad (4.19)\end{aligned}$$

对于某个常数 $C = C(\alpha, a)$。为完成证明，我们只需证明存在某个常数 C 使得

$$\sup_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN^\alpha}(\rho - \xi_s(z))\,ds\Big)^2\Big] \le CN^{2\alpha-1},$$

或者等价地，对于任意 $t > 0$，

$$\sup_{z\in\mathbb{Z}_\star^d}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\sup_{0\le t'\le t}\Big(\int_0^{t'}(\rho - \xi_s(z))\,ds\Big)^2\Big] \le Ct^{2-\frac{1}{\alpha}}. \qquad (4.20)$$

根据 [19, 引理 3。9], (4.20) 中的期望有如下界

$$10t\,\big\langle \xi(z) - \rho, (1/t - \mathcal{L})^{-1}(\xi(z) - \rho)\big\rangle_{\nu_\rho^\star}.$$

如附录 A中所示，令 $\mathcal{S}:=(\mathcal{L}+\mathcal{L}^*)/2$ 和 $\mathcal{A}:=(\mathcal{L}-\mathcal{L}^*)/2$ 分别为生成元 $\mathcal{L}$ 在 $L^2(\Omega_\star^d,\nu_\rho^\star)$ 中的对称部分和反对称部分。根据 [19, 公式 (3.3)], , 对于任意局部函数 $f:\Omega_\star^d\to\mathbb{R}$以及任意 $\lambda>0$,

$$\left\langle f,(\lambda-\mathcal{L})^{-1}f\right\rangle_{\nu_\rho^\star}=\sup_{g\text{ local}}\left\{2\left\langle f,g\right\rangle_{\nu_\rho^\star}-\left\langle g,(\lambda-\mathcal{S})g\right\rangle_{\nu_\rho^\star}-\left\langle \mathcal{A}g,(\lambda-\mathcal{S})^{-1}\mathcal{A}g\right\rangle_{\nu_\rho^\star}\right\}.$$

由于生成元 $\mathcal{S}$相对于 $\nu_\rho^\star$可逆，我们有 $\left\langle \mathcal{A}g,(\lambda-\mathcal{S})^{-1}\mathcal{A}g\right\rangle_{\nu_\rho^\star}\geq 0$。因此,

$$\left\langle f,(\lambda-\mathcal{L})^{-1}f\right\rangle_{\nu_\rho^\star}\leq\sup_{g\text{ local}}\left\{2\left\langle f,g\right\rangle_{\nu_\rho^\star}-\left\langle g,(\lambda-\mathcal{S})g\right\rangle_{\nu_\rho^\star}\right\}=\|f\|_{-1,\lambda,\mathcal{S}}.$$

关于范数 、 ， λ, $\mathcal{S}$ 的精确定义，请参阅附录 A。特别地,

$$\left\langle \xi(z)-\rho,(1/t-\mathcal{L})^{-1}(\xi(z)-\rho)\right\rangle_{\nu_\rho^\star}\leq\|\xi(z)-\rho\|_{-1,t^{-1},\mathcal{S}}=\left\langle \xi(z)-\rho,(1/t-\mathcal{S})^{-1}(\xi(z)-\rho)\right\rangle_{\nu_\rho^\star}.$$

由于函数 $\xi(z)-\rho$ 是一次函数，根据引理 A.1 和 A.2，最后一行可由$C\|\chi_{\{z\}}\|_{-1,t^{-1},\mathfrak{S}_{\text{ext}}}$ 控制，其中某个常数为 $C=C(\alpha,\rho)$，函数 $\chi_{\{z\}}:\mathcal{E}_{d,1}\to\mathbb{R}$ 定义如下:

$$\chi_{\{z\}}(\{x\})=\begin{cases}1, & \text{if } x=z;\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

而 $\bar{\mathcal{E}}_{d,1}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的仅含一个元素的子集族。生成元 $\mathfrak{S}_{\text{ext}}$ 定义于附录 A.2。我们只需注意，当作用于一次函数时，它对应于转移概率核为 $s(\cdot)$ 的随机游走。量$\|\chi_{\{z\}}\|_{-1,t^{-1},\mathfrak{S}_{\text{ext}}}$ 与 Z^d 上转移概率为 $s(\cdot)$ 的对称排斥过程的占据时间密切相关。准确地说，记生成元为 $\mathbb{S}$ 的排斥过程为 $\{\hat{}\eta_t\}_{t\geq 0}$ ，它作用于局部函数 $f:\Omega^d\to\mathbb{R}$ ，如下:

$$\mathbb{S}f(\eta)=\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}s(y-x)[f(\eta^{x,y})-f(\eta)].$$

因此，可以证明（例如参见[3, 公式（3.2）]）

$$\begin{aligned}\|\chi_{\{z\}}\|_{-1,t^{-1},\mathfrak{S}_{\text{ext}}}&=\frac{1}{\rho(1-\rho)}\left\langle \hat{\eta}(z)-\rho,(t^{-1}-\mathbb{S})^{-1}(\hat{\eta}(z)-\rho)\right\rangle_{\nu_\rho}\\&=\frac{1}{2\rho(1-\rho)t^2}\int_0^\infty e^{-s/t}\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat{\eta}_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\Big]ds.\end{aligned}$$

注意，由于平移不变性，上述量与 z 无关。根据[3, 定理 2.8], 若 $d=1$ 且 $1<\alpha<2$,

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat{\eta}_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\leq Cs^{2-1/\alpha}.$$

因此,

$$\|\chi_{\{z\}}\|_{-1,t^{-1},\mathfrak{S}_{\text{ext}}}\leq Ct^{-2}\int_0^\infty e^{-s/t}s^{2-1/\alpha}ds\leq Ct^{1-1/\alpha}$$

对于某个常数 $C=C(\alpha,\rho)$。这就证明了（4.20），并完成了在 $d=1$ 且$1<\alpha<3/2$ 的情形下的证明。

4.4. 情形 $\alpha=1$。回忆在此情形下 $\overline{X}_t^N=X_{tN}-tN(1-\rho)\sum_{\|z\|\leq N}zp(z)$。取 $\gamma(N)=N$，并将（3.2）中的鞅重写为

$$\mathcal{M}_t^N(\beta)=\exp\Big\{i\beta(\overline{X}_t^N\cdot a)/N-i\beta\sum_{\|z\|\leq N}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN}(\rho-\xi_s(z))ds$$

$$- \sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} \big(e^{i\beta(z\cdot a)/N} - 1 - i\beta N^{-1}(z\cdot a)\chi_{\{\|z\|\le N\}}\big)p(z) \int_0^{tN} (1-\xi_s(z))\, ds\Big\}.$$

如同 前述情形的证明中，根据控制收敛定理，我们只需证明 e

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\|z\|\le N} (z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN} (\rho - \xi_s(z))ds = 0 \tag{4.21}$$

and

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} \big(e^{i\beta(z\cdot a)/N} - 1 - i\beta N^{-1}(z\cdot a)\chi_{\{\|z\|\le N\}}\big)p(z) \int_0^{tN} (1-\xi_s(z))\, ds = \Phi_{\alpha,a}(\beta) \tag{4.22}$$

以 $\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}$-概率。

我们首先证明（4.21）。由柯西-施瓦茨不等式,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\sum_{\|z\|\le N}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big] \\
&\qquad \le N^{-2}\Big(\sum_{\|z\|\le N}|z\cdot a|p(z)\Big)\sum_{\|z\|\le N}|z\cdot a|p(z)\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big] \\
&\qquad\qquad \le CN^{-2}(\log N)^2 \sup_{\|z\|\le N}\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big].
\end{aligned}$$

如同情形 $d=1$ 和 $1<\alpha<3/2$的证明，存在某个常数 $C=C(\alpha,\rho)$，使得

$$\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t'\le t}\Big(\int_0^{t'}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big] \le Ct^{-1}\int_0^\infty e^{-s/t}\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat\eta_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\Big]ds.$$

根据 [3, 定理 2。8], 若 $d=1$ 且 $\alpha=1$,

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat\eta_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\Big] \le Cs\log s,$$

且若 $d\ge 2$ 且 $\alpha=1$,

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat\eta_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\Big] \le Cs.$$

因此,

$$\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t'\le t}\Big(\int_0^{t'}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big] \le Ct^{-1}\int_0^\infty e^{-s/t}\big(s\log s+s\big)ds \le Ct(1+\log t). \tag{4.23}$$

特别是,

$$\sup_{\|z\|\le N}\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big] \le CN\log N,$$

因此

$$\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\sum_{\|z\|\le N}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big] \le CN^{-1}(\log N)^3$$

对于某个常数 $C=C(\rho,\ \beta,\ a,\ T)$，这就完成了对 (4.21) 的证明。

现在，我们证明（4.22）。可以直接验证，（4.22）右侧的期望收敛于 $\Phi_{\alpha,\ a}(\beta)$，当 $N\to\infty$ 时。因此，我们只需证明其方差趋于零,

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Var}_{\nu^\star_\rho}\Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta N^{-1}(z\cdot a)\chi_{\{\|z\|\le N\}}\big)p(z)\int_0^{tN}(1-\xi_s(z))\,ds\Big)=0.$$

根据柯西-施瓦茨不等式和（4.23），我们可以将上一行中的方差估计为

$$\Big(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\big|e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta N^{-1}(z\cdot a)\chi_{\{\|z\|\le N\}}\big|p(z)\Big)^2\sup_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN}(\xi_s(z)-\rho)ds\Big)^2\Big]$$

$$\le CN^{-1}\text{对数 }N$$

对于某个常 数 $C=C(\rho,\ \beta,\ a,\ T)$。这就证明了 (4.22)，并完成了 $\alpha=$情形下的证明 1.

4.5. $d\ge 2$ 和 $\alpha=2$ 的情形。回顾一下，在这种情况下， $\overline{X}^N_t$ 有一个对数 N 修正项

$$\overline{X}^N_t=X_{tN^2/\log N}-t(N^2/\log N)(1-\rho)m.$$

取 $\gamma(N)=N^2/$对数 N代入 (3.2)，那么我们可以将鞅 $\mathcal{M}^N_t(\beta)$ 重写为

$$\mathcal{M}^N_t(\beta)=\exp\Big\{i\beta(\overline{X}^N_t\cdot a)/N-i\beta\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN^2/\log N}(\rho-\xi_s(z))ds$$

$$-\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta N^{-1}(z\cdot a)\big)p(z)\int_0^{tN^2/\log N}(1-\xi_s(z))\,ds\Big\}.\quad(4.24)$$

那么，我们只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}(z\cdot a)p(z)\frac{1}{N}\int_0^{tN^2/\log N}(\rho-\xi_s(z))ds=0\quad(4.25)$$

and

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta N^{-1}(z\cdot a)\big)p(z)\int_0^{tN^2/\log N}(1-\xi_s(z))\,ds=\Phi_{\alpha,a}(\beta)\quad(4.26)$$

依 $\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}$-概率收敛。

对（4.25）的证明与（4.21）类似。我们首先使用柯西-施瓦茨不等式，并将其方差估计为

$$CN^{-2}\sup_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big(\int_0^{tN^2/\log N}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big].$$

根据 [3, 定理 2。8], 若 $d=2$ 且 $\alpha=2$,

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat\eta_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\Big]\le Cs\log\log s,$$

且若 $d\ge 3$ 且 $\alpha=2$,

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat\eta_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\Big]\le Cs.$$

因此,

$$\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\sup_{0\le t'\le t}\Big(\int_0^{t'}(\rho-\xi_s(z))ds\Big)^2\Big]\le Ct^{-1}\int_0^\infty e^{-s/t}\mathbb{E}_{\nu_\rho}\Big[\Big(\int_0^s(\hat\eta_\tau(z)-\rho)d\tau\Big)^2\Big]ds$$

$$\le\begin{cases}Ct(\log\log t+1) & \text{if } d=2,\alpha=2,\\ Ct & \text{if } d\ge 3,\alpha=2.\end{cases}\quad(4.27)$$

特别地，(4.25) 右侧项的方差有界于 $C\log\log N/\log N$若$d=2$且 $\alpha=2$，而有界于 $C/\log N$若 $d\geq 3$且 $\alpha=2$。注意，(4.25) 右侧项的期望为零。这证明了 (4.25)。

还需证明（4.26）。由于

$$\Big|\sum_{\|z\|>N}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta N^{-1}(z\cdot a)\big)p(z)\int_0^{tN^2/\log N}(1-\xi_s(z))\,ds\Big| \leq \frac{Ct}{\log N}\int_1^\infty \frac{r}{r^{d+2}}r^{d-1}dr\leq\frac{Ct}{\log N}$$

and

$$\Big|\sum_{\|z\|\leq N}\Big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta N^{-1}(z\cdot a)+\frac{\beta^2(z\cdot a)^2}{2N^2}\Big)p(z)\int_0^{tN^2/\log N}(1-\xi_s(z))\,ds\Big| \leq \frac{Ct}{\log N}\int_{\frac{1}{N}}^1 \frac{r^3}{r^{d+2}}r^{d-1}dr\leq\frac{Ct}{\log N},$$

我们只需证明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\beta^2}{2}\sum_{\|z\|\leq N}\Big(\frac{z\cdot a}{N}\Big)^2p(z)\int_0^{tN^2/\log N}(1-\xi_s(z))\,ds=-\Phi_{\alpha,a}(\beta) \tag{4.28}$$

在 $\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}$-概率意义下。容易看出，最后一行右侧项的期望收敛到 $\Phi_{\alpha,\ a}(\beta)$。因此，我们只需证明其方差收敛到零。由柯西－施瓦茨不等式及（4.27），方差可估计为

$$C\Big[\sum_{\|z\|\leq N}\Big(\frac{z\cdot a}{N}\Big)^2p(z)\Big]^2\sup_{\|z\|\leq N}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big(\int_0^{tN^2/\log N}(\rho-\xi_s(z))\,ds\Big)^2\Big] \leq\begin{cases}C(\log N)^2/N^2 & \text{if } d=2,\alpha=2,\\ C\log N/N^2 & \text{if } d\geq 3,\alpha=2.\end{cases}$$

这就证明了（4.26），并完成了 $d=2$ 且 $\alpha\geq 2$的情形下的证明。

5. Tightness

对于 $N\geq 1$，记 Q^N 为过程 $\{N^{-1}\overline{X}_t^N\}_{0\leq t\leq T}$ 在斯科罗霍德空间 $D([0,T],\mathbb{R}^d)$ 上的分布。本节将证明分布序列 $\{Q^N\}_{N\geq 1}$ 的紧性。

引理 5.1 （紧性）。在定理 2.4的假设下，分布序列 $\{Q^N\}_{N\geq 1}$在斯科罗霍德空间 $D([0,T],\ \mathbb{R}^d)$ 中是紧的。

根据普罗霍罗夫定理和奥尔德斯判据（参见[12, 第 4 节1] 例如），为了证明紧性，我们只需检验以下两个条件。

命题 5.2. 分布序列 $\{Q^N\}_{N\geq 1}$ 是紧的，当且仅当

(i) 对任意 $0\leq t\leq T$,

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{N\to\infty}Q^N\big(|\omega(t)|>M\big)=0; \tag{5.1}$$

(ii) 对任意 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{\theta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\sup_{\substack{\tau\in\mathfrak{T}_T\\ \delta\leq\theta}}Q^N\big(|\omega(\tau+\delta)-\omega(\tau)|>\varepsilon\big)=0, \tag{5.2}$$

其中， $\mathfrak{T}_T$ 是由上界为 T 的停时构成的集合。

可以直接验证，映射 $\beta \mapsto \Phi_{\alpha,\ a}(\beta)$ 在零点处连续。根据连续性定理（参见 [5, 定理 3.3.17]，例如），对任意固定的 $0 \le t \le T$，随机元素序列 $\{N^{-1}\overline{X}^N_t\}_{N\ge 1}$ 是紧的。因此，条件（5.1）成立。本节接下来将在 d 和 α的不同取值范围内证明条件（5.2）。

5.1. 情形 $0<\alpha<1$。对于任意停时 $\tau \le T$、任意 $\delta \le \theta$ 以及任意 $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}\Big(\Big|\frac{(\overline{X}^N_{\tau+\delta}-\overline{X}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big) \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon}\Big|1-\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\exp\Big\{i\beta\frac{(\overline{X}^N_{\tau+\delta}-\overline{X}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big\}\Big]\Big|d\beta$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon}\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\Big|1-\exp\Big\{-\int_{\tau N^\alpha}^{(\tau+\delta)N^\alpha}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1\big)p(z)(1-\xi_s(z))ds\Big\}\Big|\Big]d\beta.$$

上面的第二个不等式由以下事实得出： $\mathcal{M}^N_{\tau+\cdot}(\beta)/\mathcal{M}^N_\tau(\beta)$ 是一个均值为一的复鞅，其中 $\mathcal{M}^N_\cdot(\beta)$ 定义于（3.2）。由于对任意 $|\beta|\le 2/\varepsilon$,

$$\Big|N^\alpha\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1\big)p(z)(1-\xi(z))\Big| \le C$$

对于某个常数 $C=C(a,\varepsilon)$，且对于任意 $z\in\mathbb{C}$，我们有 $|e^z-1|\le |z|e^{|z|}$

$$\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}\Big(\Big|\frac{(\overline{X}^N_{\tau+\delta}-\overline{X}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big) \le C\delta e^{C\delta} \le C\theta e^{C\theta}.$$

如果 5.2) 中的 $0<\alpha<1$.

5.2. 情形 $d\ge 2$， $1<\alpha<2$ 且 $d=1$， $1<\alpha<3/2$. 要在此情形下证明 (5.2)，我们需要使用截断论证。令

$$\overline{X}^N_t := \overline{U}^N_t + \overline{R}^N_t,$$

其中

$$\overline{U}^N_t = \sum_{\|z\|\le N} z\big[N^z_{tN^\alpha} - tN^\alpha(1-\rho)p(z)\big], \quad \overline{R}^N_t = \sum_{\|z\|>N} z\big[N^z_{tN^\alpha} - tN^\alpha(1-\rho)p(z)\big].$$

我们先处理项 $\overline{R}^N_t$ ，这与情形 $0<\alpha<1$类似。对于任意停时$\tau\le T$、任意 $\delta\le\theta$ 和任意 $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}_{\nu^\star_\rho}\Big(\Big|\frac{(\overline{R}^N_{\tau+\delta}-\overline{R}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big) \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon}\Big|1-\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\exp\Big\{i\beta\frac{(\overline{R}^N_{\tau+\delta}-\overline{R}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big\}\Big]\Big|d\beta$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon}\mathbb{E}_{\nu^\star_\rho}\Big[\Big|1-\exp\Big\{\frac{1}{N^\alpha}\int_{\tau N^\alpha}^{(\tau+\delta)N^\alpha}\widehat{\Gamma}^N_a(\xi_s)ds\Big\}\Big|\Big]d\beta,$$

其中 $\widehat{\Gamma}^N_a$是将 Γ^N_a按 $\|z\|>N$截断后得到的，定义见 (4.4)

$$\widehat{\Gamma}^N_a(\xi) = \frac{1}{N^d}\sum_{\|z\|>N} p(\tfrac{z}{N})(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1)(1-\xi(z)) - i\beta(1-\rho)N^{\alpha-1}\sum_{\|z\|>N}(z\cdot a)p(z).$$

由于 $1<\alpha<2$，存在一个常数 $C=C(a,\varepsilon)$，使得对于任意 $|\beta|\le 2/\varepsilon$,

$$|\widehat{\Gamma}^N_a(\xi)| \le C\int_1^\infty r^{-d-\alpha}(1+r)r^{d-1}dr \le C.$$

因此，

$$\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\Big|\frac{(\overline{R}^N_{\tau+\delta}-\overline{R}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big)\le C\delta e^{C\delta}\le C\theta e^{C\theta}. \tag{5.3}$$

接下来需要处理项 $\overline{U}^N_t$。由于

$$N^z_t-\int_0^t p(z)(1-\xi_s(z))\,ds$$

是一个二次变差为 $\int_0^t p(z)(1-\xi_s(z))\,ds$ 的鞅，我们可以将 $N^{-1}\overline{U}^N_t$ 写成

$$N^{-1}\overline{U}^N_t=\mathfrak{m}^N_t+\frac{1}{N}\sum_{\|z\|\le N} zp(z)\int_0^{tN^\alpha}(\rho-\xi_s(z))ds, \tag{5.4}$$

其中 $\mathfrak{m}^N_t$ 是一个二次变差有界于以下表达式的鞅

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\big[\big(\mathfrak{m}^N_t\cdot a\big)^2\big]\le\frac{CtN^\alpha}{N^2}\sum_{\|z\|\le N}|z\cdot a|^2p(z)\le Ct\int_{N^{-1}}^1 r^{2-d-\alpha}r^{d-1}dr\le Ct.$$

因此，

$$\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\big[\big\{\big(\mathfrak{m}^N_{\tau+\delta}-\mathfrak{m}^N_\tau\big)\cdot a\big\}^2\big]\le C\delta\le C\theta. \tag{5.5}$$

按照（4.13）和（4.19）的证明，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\sup_{0\le t\le T}\Big|\frac{1}{N}\sum_{\|z\|\le N}(z\cdot a)p(z)\int_0^{tN^\alpha}(\rho-\xi_s(z))\,ds\Big|^2\Big]=0. \tag{5.6}$$

由于

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\Big|\frac{(\overline{U}^N_{\tau+\delta}-\overline{U}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big)&\le\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\Big|\big(\mathfrak{m}^N_{\tau+\delta}-\mathfrak{m}^N_\tau\big)\cdot a\Big|>\varepsilon/2\Big)\\&\quad+\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\sup_{0\le t\le T}\Big|\frac{1}{N}\sum_{\|z\|\le N}(z\cdot a)p(z)\int_0^{tN^\alpha}(\rho-\xi_s(z))\,ds\Big|>\varepsilon/4\Big),\end{aligned}$$

项 $N^{-1}\overline{U}^N_t$ 也满足 (5.2)，由 (5.5) 和 (5.6) 可知。引理 5.1 在 $d\ge 2$，$1<\alpha<2$ 且 $d=1$，$1<\alpha<3/2$ 的情形下的证明至此完成。

5.3. 情形 $\alpha=1$。与上一小节一样，我们将 $\overline{X}^N_t$ 分解为：$=\overline{U}^N_t+\overline{R}^N_t$，但 wi th

$$\overline{U}^N_t=\sum_{\|z\|\le N} z\big[N^z_{tN}-tN(1-\rho)p(z)\big],\quad \overline{R}^N_t=\sum_{\|z\|>N} zN^z_t.$$

验证 5.2 中的做法同样适用于检查 $N^{-1}\overline{U}^N_t$ 满足 (5.2)。因此，我们略去证明。为处理第二项，对于任意停时 $\tau\le T$、任意 $\delta\le\theta$ 以及任意 $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\Big|\frac{(\overline{R}^N_{\tau+\delta}-\overline{R}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big)\\&\qquad\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\Big|1-\exp\Big\{-\int_{\tau N}^{(\tau+\delta)N}\sum_{\|z\|>N}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1\big)p(z)(1-\xi_s(z))ds\Big\}\Big|\Big]d\beta.\end{aligned}$$

由于存在一个有限常数 C，使得

$$\Big|N\sum_{\|z\|>N}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1\big)p(z)(1-\xi(z))\Big|\le C,$$

我们有

$$\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\Big|\frac{(\overline{R}^N_{\tau+\delta}-\overline{R}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big)\le C\theta e^{C\theta}.$$

至此， $\alpha=1$的情形证明完毕。

5.4. $d\ge 2$ 和 $\alpha=2$的情形。在此情形下，我们将 $\overline{X}^N_t:=\overline{U}^N_t+\overline{R}^N_t$ 分解为

$$\overline{U}^N_t=\sum_{\|z\|\le N} z\big[N^z_{tN^2/\log N}-t(N^2/\log N)(1-\rho)p(z)\big],$$
$$\overline{R}^N_t=\sum_{\|z\|> N} z\big[N^z_{tN^2/\log N}-t(N^2/\log N)(1-\rho)p(z)\big].$$

如第5.2 小节所述，并根据（4.24），

$$\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\Big|\frac{(\overline{R}^N_{\tau+\delta}-\overline{R}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big)\le\frac{\varepsilon}{2}\int_{-2/\varepsilon}^{2/\varepsilon}\mathbb{E}_{\nu_\rho^\star}\Big[\Big|1-\exp\Big\{\int_{\tau N^2/\log N}^{(\tau+\delta)N^2/\log N}W^N_a(\xi_s)ds\Big\}\Big|\Big]d\beta,$$

其中

$$W^N_a(\xi)=i\beta N^{-1}\sum_{\|z\|>N}(z\cdot a)p(z)(\rho-\xi(z))+\sum_{\|z\|>N}\big(e^{i\beta(z\cdot a)/N}-1-i\beta N^{-1}(z\cdot a)\big)p(z)(1-\xi(z)).$$

由于

$$\Big|\frac{N^2}{\log N}W^N_a(\xi)\Big|\le\frac{C}{\log N}\int_1^\infty r^{1-d-2}r^{d-1}dr\le\frac{C}{\log N},$$

我们有

$$\mathbb{P}_{\nu_\rho^\star}\Big(\Big|\frac{(\overline{R}^N_{\tau+\delta}-\overline{R}^N_\tau)\cdot a}{N}\Big|>\varepsilon\Big)\le\frac{C\theta}{\log N}e^{C\theta/\log N}.$$

因此， $N^{-1}\overline{R}^N_t$满足条件（5.2）。对于 $\overline{U}^N_t$，还需检查相应鞅 $\mathfrak{m}^N_t$的二次变差是否有界于 Ct，其中

$$N^{-1}\overline{U}^N_t=\mathfrak{m}^N_t+\frac{1}{N}\sum_{\|z\|\le N}zp(z)\int_0^{tN^2/\log N}(\rho-\xi_s(z))ds.$$

事实上，我们可以将其界定为

$$\frac{Ct}{\log N}\sum_{\|z\|\le N}(z\cdot a)^2p(z)\le Ct.$$

这就完成了 $d\ge 2$ and $\alpha=2$ 情形下紧性的证明。

Appendix A. Tools

A.1. H_1 and H_{-1} 范数。设 $\{\omega_t\}_{t\ge0}$ 是某个完备可分度量空间 Ω 上的连续时间马尔可夫过程，该空间配备了其 Borel σ-代数。假设过程 ω_t 关于 Ω 上的某个概率测度 π 可逆。记 L 为过程 ω_t的生成元，并记 $\mathcal{C}$ 为生成元 L的核。

对于 $\lambda>0$ and 函数 $f\in L^2(\Omega,\pi)$，定义

$$\|f\|^2_{1,\lambda,L}=\big\langle f,(\lambda-L)f\big\rangle_\pi,\quad \|f\|^2_{-1,\lambda,L}=\big\langle f,(\lambda-L)^{-1}f\big\rangle_\pi.$$

众所周知，范数$\|\cdot\|_{-1,\lambda,L}$ 具有以下变分公式，

$$\|f\|^2_{-1,\lambda,L}=\sup_{g\in\mathcal{C}}\big\{2\langle f,g\rangle_\pi-\|g\|^2_{1,\lambda,L}\big\}.$$

关于上述范数的全面研究，请读者参阅[14] 。

A.2. 不同范数的比较。对于 $d \geq 1$，令 $\mathcal{E}_d$ 为$\mathbb{Z}_\star^d$的有限子集族，并令 $\mathcal{E}_{d,\ n}$ 为基数为 $n \geq 0$ 的那些子集。固定 $\rho \in (0, 1)$。对于非空的 $A \in \mathcal{E}_d$，定义

$$\Psi_A(\xi) = \prod_{x \in A} \frac{\xi(x) - \rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}.$$

按照约定，$\Psi_\emptyset = 1$。那么，$\{\Psi_A\colon\ A \in \mathcal{E}_d\}$ 是希尔伯特空间 $L^2(\Omega_\star^d,\ \nu_\rho^\star)$的一组基。因此，对于任意函数 $f \in L^2(\Omega_\star^d,\ \nu_\rho^\star)$,

$$f(\xi) = \sum_{A \in \mathcal{E}_d} \mathfrak{f}(A)\Psi_A(\xi)$$

对于某个系数函数 $\mathfrak{f}\colon\ \mathcal{E}_d \to \mathbb{R}$。此外，对于任意函数 $f,\ g \in L^2(\Omega_\star^d,\ \nu_\rho^\star)$,

$$\langle f, g\rangle_{\nu_\rho^\star} = \sum_{A \in \mathcal{E}_d} \mathfrak{f}(A)\mathfrak{g}(A) =: \langle \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\rangle.$$

如果 f 属于 $\{\Psi_A$ 的张成空间：$A \in \mathcal{E}_{d,\ n}\}$，或者等价地，$\mathfrak{f}$ 的支集包含于$\mathcal{E}_{d,\ n}$，则称函数 f 及其系数函数 $\mathfrak{f}$ 的次数为 n。

我们用 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathcal{L}$ 在 $L^2(\nu_\rho^\star)$中的对称部分，即 $\mathcal{S} = (\mathcal{L} + \mathcal{L}^*)/2$。我们可以将 $\mathcal{S} = \mathcal{S}^e + \mathcal{S}^t$分解，其中对于局部函数 $f\colon\ \Omega_\star^d \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}^e f(\xi) = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_\star^d} s(y-x)\xi(x)(1-\xi(y))[f(\xi^{x,y}) - f(\xi)],$$

$$\mathcal{S}^t f(\xi) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_\star^d} s(z)(1-\xi(z))[f(\theta_z\xi) - f(\xi)].$$

此外，算子 $\mathcal{S} = \mathcal{S}^e + \mathcal{S}^t$ 有对应的算子 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^e + \mathfrak{S}^t$，其中

$$\mathcal{S}^e f(\xi) = \sum_{A \in \mathcal{E}_d} (\mathfrak{S}^e\mathfrak{f})(A)\Psi_A(\xi), \quad \mathcal{S}^t f(\xi) = \sum_{A \in \mathcal{E}_d} (\mathfrak{S}^t\mathfrak{f})(A)\Psi_A(\xi).$$

对于 [23], 算子 $\mathfrak{S}^e$ 和 $\mathfrak{S}^t$，其显式表达式如下:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{S}^e\mathfrak{f})(A) =& \frac{1}{2}\sum_{x,y \in \mathbb{Z}_\star^d} s(y-x)[\mathfrak{f}(A_{x,y}) - \mathfrak{f}(A)],\\
(\mathfrak{S}^t\mathfrak{f})(A) =& (1-\rho)\sum_{\substack{z \notin A,\\ z \in \mathbb{Z}_\star^d}} s(z)[\mathfrak{f}(\theta_{-z}A) - \mathfrak{f}(A)] + \rho\sum_{z \in A} s(z)[\mathfrak{f}(\theta_{-z}A) - \mathfrak{f}(A)]\\
&+ \sqrt{\rho(1-\rho)}\sum_{\substack{z \notin A,\\ z \in \mathbb{Z}_\star^d}} s(z)[\mathfrak{f}(A \cup \{z\}) - \mathfrak{f}(\theta_{-z}(A \cup \{z\}))]\\
&+ \sqrt{\rho(1-\rho)}\sum_{z \in A} s(z)[\mathfrak{f}(A\backslash\{z\}) - \mathfrak{f}(\theta_{-z}(A\backslash\{z\}))].
\end{aligned}$$

上式中，对于 $A \subset \mathbb{Z}_\star^d$,

$$A_{x,y} = \begin{cases} A\backslash\{x\} \cup \{y\}, & x \in A,\ y \notin A;\\ A\backslash\{y\} \cup \{x\}, & x \notin A,\ y \in A;\\ A & \text{otherwise,}\end{cases} \qquad \theta_x A = \begin{cases} A + x, & -x \notin A;\\ (A+x)\backslash\{0\} \cup \{x\}, & -x \in A,\end{cases}$$

其中 $A + x = \{y + x\colon$ 若 A 非空，则为 $y \in A\}$；以及 $\emptyset + x = \emptyset$。注意，$0 \notin \theta_x A$。

根据上述记号，直接计算可得

$$\langle f, -\mathcal{S}^e f\rangle_{\nu_\rho^\star} = \langle \mathfrak{f}, -\mathfrak{S}^e\mathfrak{f}\rangle = \frac{1}{4}\sum_{x,y \in \mathbb{Z}_\star^d}\sum_{A \subset \mathbb{Z}_\star^d} s(y-x)[\mathfrak{f}(A_{x,y}) - \mathfrak{f}(A)]^2. \tag{A.1}$$

以下结果表明，与生成元 $\mathcal{S}$ 及其环境部分 $\mathcal{S}^e$ 相关的 H_1 和 H_{-1} 范数是等价的。

引理 A.1. 存在一个有限常数 $C = C(d, n, \alpha)$，使得对于任意 $\lambda > 0$ 及次数为 n的局部函数f ，

$$\|f\|_{1,\lambda,\mathcal{S}^e} \le \|f\|_{1,\lambda,\mathcal{S}} \le C\|f\|_{1,\lambda,\mathcal{S}^e}.$$

因此，

$$C^{-1}\|f\|_{-1,\lambda,\mathcal{S}^e} \le \|f\|_{-1,\lambda,\mathcal{S}} \le \|f\|_{-1,\lambda,\mathcal{S}^e}.$$

上述结果已在 [20, 命题 3。4] 中针对最近邻情形得到了证明。我们将其推广到一般情形。

证明。由于

$$\|f\|^2_{1,\lambda,\mathcal{S}} = \|f\|^2_{1,\lambda,\mathcal{S}^e} + \big\langle f, (-\mathcal{S}^t)f\big\rangle_{\nu^\star_\rho} \quad \text{and} \quad \big\langle f, (-\mathcal{S}^t)f\big\rangle_{\nu^\star_\rho} \ge 0,$$

显然，$\|f\|_{1,\ \lambda,\ \mathcal{S}^e} \le \|f\|_{1,\ \lambda,\ \mathcal{S}}$。要完成对 H_1 界的证明，我们只需证明

$$\big\langle f, (-\mathcal{S}^t)f\big\rangle_{\nu^\star_\rho} \le C\big\langle f, (-\mathcal{S}^e)f\big\rangle_{\nu^\star_\rho} \tag{A.2}$$

其中某个常数为 C。注意，

$$\begin{aligned}\big\langle f, (-\mathcal{S}^t)f\big\rangle_{\nu^\star_\rho} &= \frac{1}{2}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star} s(z)E_{\nu^\star_\rho}\big[(1-\xi(z))\big(f(\theta_z\xi) - f(\xi)\big)^2\big] \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ |A|=n}} s(z)\big[\mathfrak{f}(\theta_{-z}A) - \mathfrak{f}(A)\big]^2.\end{aligned}$$

最后一个不等式源于这样一个事实：如果 $\xi(z) = 0$，那么 $\Psi_A(\theta_z\xi) = \Psi_{\theta_z A}(\xi)$。若 $z \notin A$，记 $A = \{x_1, \dots, x_n\}$为 $x_j \ne z$，其中 $1 \le j \le n$。于是，$\theta_{-z}A = \{x_1 - z, \dots, x_n - z\}$。我们需要将粒子从 A 移动到 $\theta_{-z}A$。思路如下：先将粒子从 x_1 移动到 $x_1 - z$，然后从 x_2移动到 $x_2 - z$，.....最后从 x_n移动到 $x_n - z$。具体来说，令

$$A_0 = A, \quad A_j = \{x_1 - z, x_2 - z, \dots, x_j - z, x_{j+1}, \dots, x_n\},\ 1 \le j \le n.$$

根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ z\notin A, |A|=n}} s(z)\big[\mathfrak{f}(\theta_{-z}A) - \mathfrak{f}(A)\big]^2 &\le n\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ z\notin A, |A|=n}}\sum_{j=0}^{n-1} s(z)[\mathfrak{f}(A_{j+1}) - \mathfrak{f}(A_j)]^2 \\ &\le n^2\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ |A|=n}} s(y-x)[\mathfrak{f}(A_{x,y}) - \mathfrak{f}(A)]^2.\end{aligned}$$

类似地，若 $z \in A$，记 $A = \{x_1, \dots, x_{n-1}, z\}$，则 $\theta_{-z}A = \{x_1 - z, \dots, x_{n-1} - z, -z\}$，最后一步将粒子从位置 z 移至位置 $-z$。于是，

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ z\in A, |A|=n}} s(z)\big[\mathfrak{f}(\theta_{-z}A) - \mathfrak{f}(A)\big]^2 &\le n^2\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ |A|=n}} s(y-x)[\mathfrak{f}(A_{x,y}) - \mathfrak{f}(A)]^2 \\ &\quad + n\sum_{z\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ |A|=n}} s(z)\big[\mathfrak{f}(A_{z,-z}) - \mathfrak{f}(A)\big]^2.\end{aligned}$$

由于 $s(z)=2^{d+\alpha}s(2z)$，最后一行的上界为

$$n2^{d+\alpha}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star}\sum_{\substack{A\subset\mathbb{Z}^d_\star,\\ |A|=n}} s(y-x)[\mathfrak{f}(A_{x,y})-\mathfrak{f}(A)]^2.$$

根据（A.1），存在一个常数 $C=C(d,n,\alpha)$，使得 $\langle f,(-\mathcal{S}^t)f\rangle_{\nu^\star_\rho}\le C\langle f,(-\mathcal{S}^e)f\rangle_{\nu^\star_\rho}$。这就完成了对 H_1 范数 的界的证明。

与 H_{-1} 范数相关的不等式可直接由第 H_{-1} 小节中定义的 A.1 范数的定义得出，这里留给读者验证。□

接下来，我们将底层空间 $\mathbb{Z}^d_\star$ 扩展为 $\mathbb{Z}^d$。我们主要关注一次函数。设 $\bar{\mathcal{E}}_d$是 $\mathbb{Z}^d$的有限子集族，$\bar{\mathcal{E}}_{d,n}$ 是其中基数为 n的子集。

对于一次系数函数 $\mathfrak{f}:\mathcal{E}_{d,1}\to\mathbb{R}$，分别定义延拓 $\mathfrak{f}_{\text{ext}},\mathfrak{f}_\odot:\mathcal{E}_{d,1}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\mathfrak{f}_{\text{ext}}(\{x\})=\begin{cases}\mathfrak{f}(\{x\}) & \text{if } x\neq 0;\\ \sum_{x\in\mathbb{Z}^d_\star}s(x)\mathfrak{f}(\{x\}) & \text{if } x=0,\end{cases}$$

and

$$\mathfrak{f}_\odot(\{x\})=\begin{cases}\mathfrak{f}(\{x\}) & \text{if } x\neq 0;\\ 0 & \text{if } x=0.\end{cases}$$

我们还 将算子 $\mathfrak{S}^e$ 扩展到 $\mathfrak{S}_{\text{ext}}$，该算子作用于局部系数函数 $\mathfrak{g}:\mathcal{E}_d\to\mathbb{R}$，一个 s

$$\mathfrak{S}_{\text{ext}}\mathfrak{g}(A)=\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}s(y-x)[\mathfrak{g}(A_{x,y})-\mathfrak{g}(A)].$$

以下结果是 [20, 命题 36]的一个类似结果。

引理 A.2. 存在一个有限常数 $C=C(d,\alpha)$，使得对于任意 $\lambda>0$ 以及任意一次局部系数函数 $\mathfrak{f}$: $\mathcal{E}_d\to\mathbb{R}$,

$$\|\mathfrak{f}\|_{1,\lambda,\mathfrak{S}^e}\le\|\mathfrak{f}_{\text{ext}}\|_{1,\lambda,\mathfrak{S}_{\text{ext}}}\le C\|\mathfrak{f}\|_{1,\lambda,\mathfrak{S}^e},$$

and

$$\|\mathfrak{f}\|_{-1,\lambda,\mathfrak{S}^e}\le C\|\mathfrak{f}_\odot\|_{-1,\lambda,\mathfrak{S}_{\text{ext}}}.$$

证明。由于 $\mathfrak{f}$ 是一次的，根据 H_1 范数和 $\mathfrak{f}_{\text{ext}}$的定义,

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{f}_{\text{ext}}\|^2_{1,\lambda,\mathfrak{S}_{\text{ext}}}&=\lambda\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathfrak{f}^2_{\text{ext}}(\{x\})+\frac{1}{4}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}s(y-x)\big[\mathfrak{f}_{\text{ext}}(\{y\})-\mathfrak{f}_{\text{ext}}(\{x\})\big]^2\\&=\lambda\Big\{\sum_{x\in\mathbb{Z}^d_\star}\mathfrak{f}^2(\{x\})+\Big(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d_\star}s(x)\mathfrak{f}(\{x\})\Big)^2\Big\}+\frac{1}{4}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star}s(y-x)\big[\mathfrak{f}(\{y\})-\mathfrak{f}(\{x\})\big]^2\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d_\star}s(x)\big[\sum_{y\in\mathbb{Z}^d_\star}s(y)\mathfrak{f}(\{y\})-\mathfrak{f}(\{x\})\big]^2.\end{aligned}$$

显然，$\|\mathfrak{f}\|_{1,\ \lambda,\ \mathfrak{S}^e}\le\|\mathfrak{f}_{\text{ext}}\|_{1,\ \lambda,\ \mathfrak{S}_{\text{ext}}}$。根据柯西-施瓦茨不等式以及 $s(x)\le 1$这一事实,

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{f}_{\text{ext}}\|^2_{1,\lambda,\mathfrak{S}_{\text{ext}}}&\le 2\lambda\sum_{x\in\mathbb{Z}^d_\star}\mathfrak{f}^2(\{x\})+\frac{1}{4}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star}s(y-x)\big[\mathfrak{f}(\{y\})-\mathfrak{f}(\{x\})\big]^2\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_\star}s(x)s(y)\big[\mathfrak{f}(\{y\})-\mathfrak{f}(\{x\})\big]^2.\end{aligned}$$

由于当 x、 $y \in \mathbb{Z}_\star^d$ 和 $x \neq y$时， $s(x)s(y) \leq 2^{d+\alpha} s(x-y)$,

$$\|\mathfrak{f}_{\mathrm{ext}}\|^2_{1,\lambda,\mathfrak{S}_{\mathrm{ext}}} \leq 2\lambda \sum_{x\in\mathbb{Z}_\star^d} \mathfrak{f}^2(\{x\}) + \frac{1+2^{d+\alpha+1}}{4} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}_\star^d} s(y-x)\big[\mathfrak{f}(\{y\}) - \mathfrak{f}(\{x\})\big]^2 \leq C\|\mathfrak{f}\|^2_{1,\lambda,\mathfrak{S}^e}$$

对于某个常数 $C = C(d,\alpha)$。这就完成了对 H_1 界的证明。

对于 H_{-1} 界,

$$\|\mathfrak{f}\|^2_{-1,\lambda,\mathfrak{S}^e} = \sup_{\mathfrak{g}} \Big\{ 2\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\rangle - \|\mathfrak{g}\|^2_{1,\lambda,\mathfrak{S}^e} \Big\} \leq \sup_{\mathfrak{g}} \Big\{ 2\langle \mathfrak{f}_\odot, \mathfrak{g}_{\mathrm{ext}}\rangle - C^{-2}\|\mathfrak{g}_{\mathrm{ext}}\|^2_{1,\lambda,\mathfrak{S}_{\mathrm{ext}}} \Big\} \leq C^2 \|\mathfrak{f}_\odot\|^2_{-1,\lambda,\mathfrak{S}_{\mathrm{ext}}},$$

其中，上述上确界取遍系数函数 $\mathfrak{g}$： $\mathcal{E}_d \to \mathbb{R}$ ，它们是具有一次可积性的 L^2 。证明至此完成。□

References

[1] R.Arratia. $\mathbb{Z}$ 上简单对称排斥系统中标记粒子的运动。 *The Annals of Probability*，第 362–373 页，1983 年。[2]J. B¨ aumler. 具有长程跳跃的对称随机游走的常返性与暂留性。 *arXiv preprintarXiv:2209.09901*，2022 年。[3] C. Bernardin、P. Gon˙calves 和 S. Sethuraman. 长程排斥过程的占据时间及其与 KPZ 类指数的联系。 *Probability Theory and Related Fields*，166(1-2):365–428，2016 年。[4] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*。John Wiley & Sons，2013 年。[5] R. Durrett. *Probability: theory and examples*，第 49 卷。剑桥大学出版社，2019 年。[6] P. Gon˙calves 和 M. Jara. 长跳跃排斥过程的密度涨落。 *Probability Theory and Related Fields*，170(1-2):311–362，2018 年。[7] M. Jara. 长跳跃粒子系统的流体力学极限。 *arXiv preprint arXiv:0805.1326*，2008 年。[8] M. Jara. 长跳跃简单排斥过程中标记粒子的非平衡标度极限。 *Communications on pure and applied mathematics*，62(2):198–214，2009 年。[9] M. Jara 和 C. Landim. 对称简单排斥过程中标记粒子的非平衡中心极限定理。*Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*，42(5):567–577，2006 年。[10] M. Jara 和 C. Landim. 键无序排斥过程中标记粒子的淬火非平衡中心极限定理。 *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*，44(2):341–361，2008 年。[11] C. Kipnis. 无限队列系统的中心极限定理及其在简单排斥过程中的应用。 *The Annals of Probability*，14(2):397–408，1986 年。[12] C. Kipnis 和 C. Landim. *Scaling limits of interacting particle systems*，第 320 卷。Springer Science & Business Media，2013 年。[13] C. Kipnis 和 S. R. S. Varadhan. 可逆马尔可夫过程加性泛函的中心极限定理及其在简单排斥过程中的应用。 *Communications in Mathematical Physics*，104(1):1–19，1986 年。[14] T. Komorowski、C. Landim 和 S. Olla. *Fluctuations in Markov processes: time symmetry and martingale approximation*，第 345 卷。Springer Science & Business Media，2012 年。[15] T. M. Liggett. *Interacting particle systems*，第 276 卷。Springer Science & Business Media，2012 年。[16] M. Peligrad 和 S. Sethuraman. 一维最近邻对称简单排斥过程中的分数布朗运动极限。 *Alea*，4:245–255，2008 年。[17] F. Rezakhanlou. 不可逆粒子系统中标记粒子的演化。 *Communications in MathematicalPhysics*，165(1):1–32，1994 年。[18] E. Saada. 简单排斥过程中标记粒子位置的一个极限定理。 *The Annals ofProbability*，第 375–381 页，1987 年。[19] S. Sethuraman. 简单排斥过程加性泛函的中心极限定理。 *Annals of Probability*，第 277–302 页，2000 年。[20] S. Sethuraman. $d \leq 2$ 非对称简单排斥过程中标记粒子的扩散方差。 *ALEA Lat. Am. J.Probab. Math. Stat.*，1:305–332，2006 年。[21] S. Sethuraman 和 D. Shahar. 长程非对称相互作用粒子系统的水动力学极限。 *Elec-tronic Journal of Probability*，23，2018 年。

[22] S. Sethuraman 和 S. R. S. Varadhan. 一维最近邻对称简单排斥过程中电流和标记粒子的大偏差。
The Annals of Probability，41(3A):1461–1512，2013 年。[23] S. Sethuraman、S. R. S. Varadhan 和 H. T. Yau. 非对称简单排斥过程中标记粒子的扩散极限。
Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences，53(8):972–1006，2000 年。[24] F Spitzer. 马尔可夫过程的相互作用。 *Advances in Math*，5:246–290，1970 年。[25] S. R. S. Varadhan. 非对称均值为零随机游走简单排斥过程中平衡态下标记粒子的自扩散。
Annales de l'IHP Probabilités et statistiques，31(1):273–285，1995 年。[26] X. F. Xue 和 L. J. Zhao. 对称简单排斥过程中电流和标记粒子的中偏差。 *arXiv preprint arXiv:2203.05260*，2022 年。*Email address*： linjie_zhao@hust.edu.cn

School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science & Technology, 430074, Wuhan, China.