借助辅助量子比特的哈密顿量系综中的纠缠猝死

Congwei Lu, [1], * Wanting He, [1], * Jun Wang, [1], * Haibo Wang, [1] 和 Qing Ai[1],†
[1] *Department of Physics, Applied Optics Beijing Area Major Laboratory, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*（日期：2023年8月7日）

在本文中，我们从理论上提出了一种通过将单量子比特与辅助量子比特耦合来模拟其纵向弛豫的方法。为了模拟有限温度下的弛豫，我们采用了哈密顿量系综方法 [Kropf、Gneiting 和 Buchleitner，物理评论X6，031023（2016）]。纵向弛豫是系综平均以及工作量子比特与辅助量子比特之间相互作用共同作用的结果。此外，我们应用该方法研究纵向弛豫和横向弛豫对两个量子比特纠缠动力学的影响。研究发现，只要存在纵向弛豫，纠缠猝死就会发生。横向弛豫会促进纵向弛豫，从而加速有限时间解纠缠。

arXiv:2301.00413v2 [quant-ph] 4 Aug 2023

一、引言

在开放量子系统中，系统与环境之间的相互作用会导致二者之间的信息和能量交换。因此，系统的动力学行为与孤立系统的动力学行为大不相同 [1–6]。通常，弛豫有两种类型，即横向弛豫和纵向弛豫。后者会导致布居转移以及密度矩阵非对角项的衰减，而前者只会降低相干性。这两种行为在量子信息处理中发挥着至关重要的作用。

最近，有研究提出，开放量子系统的量子动力学可以通过许多随机孤立系统的系综平均态来模拟 [7–13]。对每个随机实现进行系综平均的过程会导致所有随机相位被平均掉，从而引发相位信息的丢失，即退相干。然而，由于噪声的经典属性，先前的大多数量子模拟方法只能在高温极限下模拟纵向弛豫 [12–16]。对有限温度下纵向弛豫的量子模拟则鲜有研究。由于耗散环境会通过细致平衡导致有限时间解纠缠 [17–19], 、避免能级交叉处增强的弛豫 [20–22],以及光学非互易性 [23], ，因此，深入理解横向弛豫和纵向弛豫对纠缠猝死及其动力学模拟的影响或许很有意义。

在本文中，为了模拟有限温度下的纵向弛豫，我们引入一个与工作量子比特相互作用的辅助量子比特。为了模拟纵向弛豫，我们有效地制备大量包含辅助量子比特和工作量子比特的系统。它们从相同的初态出发演化，并且在每次实现中，相互作用强度都服从高斯随机分布。通过对不同实现取平均，我们可以有效地模拟纵向弛豫。我们的解析结果表明，这种方法能够很好地模拟耗散率随时间线性变化的有限温度纵向弛豫。这里，耗散率与辅助量子比特和工作量子比特之间随机相互作用强度的方差成正比。辅助量子比特的初态决定了稳态的分布。

我们进一步研究纵向弛豫和横向弛豫对两个量子比特纠缠的影响。我们让第一个工作量子比特与辅助量子比特相互作用，以模拟纵向弛豫，并在第二个工作量子比特上施加随机场，以模拟横向弛豫。这两个工作量子比特初始处于最大纠缠态，并利用并发度刻画纠缠的动力学。我们的模拟表明，由于纵向弛豫，纠缠会在有限时间内发生猝死。在这种情况下，第二个工作量子比特的横向弛豫将加速两个量子比特的有限时间解纠缠。然而，如果不存在纵向弛豫，纠缠将在时间趋于无穷大时降为零。

本文其余部分的结构如下：第II节介绍基于哈密顿量系综的量子模拟方法。第III节模拟有限温度下单量子比特的纵向弛豫。第IV节探讨噪声涨落和相互作用强度对纠缠猝死的影响。最后，我们在第V节总结主要发现。

* 这些作者对本项工作贡献相同
†电子邮箱： aiqing@bnu.edu.cn

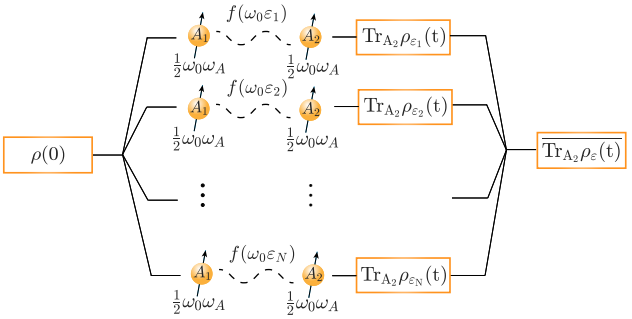

图 1. 借助辅助量子比特，通过哈密顿量系综方法模拟单量子比特纵向弛豫的示意图。每个实现由一个工作量子比特 A_1 和一个辅助量子比特 A_2组成。在每个实现中，它们都从相同的初态 $\rho(0)$独立演化。随后，对工作量子比特的所有约化密度矩阵 $\mathrm{Tr}_{A_2}\,\rho_{\varepsilon_i}(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 求平均，得到系综平均态 $\mathrm{Tr}_{A_2}\,\rho_{\varepsilon}(t)$。

II. 哈密顿量系综方法

首先，我们简要介绍如图 1 所示的哈密顿量系综量子模拟方法 [9, 11–13]，。一般的开放量子系统可由总哈密顿量 $H_T = H_S + \hat{}\hat{}H_E + H_I$ [2] 描述，其中 H_S 为系统哈密顿量，$\hat{}\hat{}H_E$ 为环境哈密顿量，而 H_I 表示二者之间的相互作用。开放系统的时间演化可描述为 $\rho_T(t) = \hat{}U\rho_T(0)\,\hat{}U^{\dagger}$，其中 $\hat{}U = \exp\left(-i\,\hat{}H_T t/\hbar\right)$。因此，通过对环境自由度进行部分迹运算，即可得到系统的密度矩阵： $\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_E[\rho_T(t)]$。为模拟开放量子动力学，我们采用哈密顿量系综

$$\{(\hat{H}_\varepsilon, p_\varepsilon)\}, \tag{1}$$

其中，下标 ε 表示系综中的每个实现。以概率 p_ε 出现的单个实现的哈密顿量 H_ε为

$$\hat{H}_\varepsilon = \hat{H}_S + \hat{H}_E^{\varepsilon} + \hat{V}_\varepsilon. \tag{2}$$

$\hat{}\hat{}H_E^{\varepsilon}$ 和 V_ε 用于模拟环境及其与系统的相互作用。我们假设每个实现都始于相同的初态 $\rho_\varepsilon(0) = \rho(0)$。相应的系统在时刻 t 的演化为$\rho_\varepsilon(t) = \hat{}U_\varepsilon\rho(0)\,\hat{}U_\varepsilon^{\dagger}$，其中 $\hat{}U_\varepsilon = \exp\left(-i\,\hat{}H_\varepsilon t/\hbar\right)$。最后，在每个实现中对环境自由度取迹，再对所有实现求平均，即

$$\langle\rho(t)\rangle = \overline{\mathrm{Tr}_E\,\rho_\varepsilon(t)} = \int d\varepsilon p_\varepsilon\,\mathrm{Tr}_E\,\rho_\varepsilon(t). \tag{3}$$

下文中，所有系综平均量均用上横线标记。在下一节中，我们将以此为例，利用态 $\langle\rho(t)\rangle$ 的系综平均量子动力学，模拟单个量子比特的纵向弛豫行为。

III. 单量子比特的纵向弛豫

在先前的研究中，由于噪声具有经典属性，量子模拟方法只能模拟高温极限下的纵向弛豫 [6, 12, 13]。本文引入一个辅助量子比特，它与工作量子比特相互作用，如图1所示，以模拟有限温度下的纵向弛豫。在哈密顿量系综中，一种实现对应的哈密顿量写为

$$\begin{aligned}\hat{H}_\varepsilon =& \frac{\omega_0}{2}(\omega_A\sigma_z^{A_1} + \omega_A\sigma_z^{A_2}) + f(\omega_0\varepsilon)\sigma_+^{A_1}\sigma_-^{A_2} \\ &+ f^*(\omega_0\varepsilon)\sigma_-^{A_1}\sigma_+^{A_2},\end{aligned} \tag{4}$$

其中，我们令 $\hbar = 1$, σ_z 为泡利矩阵， $\sigma_\pm$ 为升降算符， ω_0 为频率单位。下文的模拟中，我们设定 $\omega_0 = 1$ 。$f(\varepsilon) = f^*(\varepsilon)$ 是工作量子比特与辅助量子比特之间的耦合强度。为简单起见，将双量子比特乘积态重新标记为

$$\begin{aligned}|1\rangle_{A_1A_2} &= |+-\rangle_{A_1A_2},\ |2\rangle_{A_1A_2} = |-+\rangle_{A_1A_2}, \\ |3\rangle_{A_1A_2} &= |++\rangle_{A_1A_2},\ |4\rangle_{A_1A_2} = |--\rangle_{A_1A_2},\end{aligned} \tag{5}$$

其中， $|\pm\pm\rangle_{A_1A_2} \equiv |\pm\rangle_{A_1}\otimes|\pm\rangle_{A_2}$ 表示泡利算符 $\sigma_z^{A_1}\otimes\sigma_z^{A_2}$的本征态。由于 $\sigma_z^{A_1}\otimes\sigma_z^{A_2}$是守恒量，即 $[\sigma_z^{A_1}\otimes\sigma_z^{A_2},\ \hat{}H_\varepsilon] = 0$，我们可以将 H_ε 改写为在式（5）所列基下的分块对角矩阵，

$$\hat{H}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \hat{H}_\varepsilon^- & 0 \\ 0 & \hat{H}_\varepsilon^+ \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{H}_\varepsilon^- &= f(\varepsilon)\sigma_x, \\ \hat{H}_\varepsilon^+ &= \omega_A\sigma_z.\end{aligned} \tag{7}$$

总演化算符 $\exp\left(-i\hat{}H_\varepsilon t\right)$ 可表示为

$$\hat{U}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \hat{U}_\varepsilon^- & 0 \\ 0 & \hat{U}_\varepsilon^+ \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{U}_\varepsilon^- &= \cos[f(\varepsilon)t] - i\sin[f(\varepsilon)]\sigma_x, \\ \hat{U}_\varepsilon^+ &= \cos(\omega_A t) - i\sin(\omega_A t)\sigma_z,\end{aligned} \tag{9}$$

我们假设初态为乘积态$|\psi(0)\rangle = |\phi(0)\rangle_{A_1}\otimes|\varphi(0)\rangle_{A_2}$, 其中工作量子比特 A_1

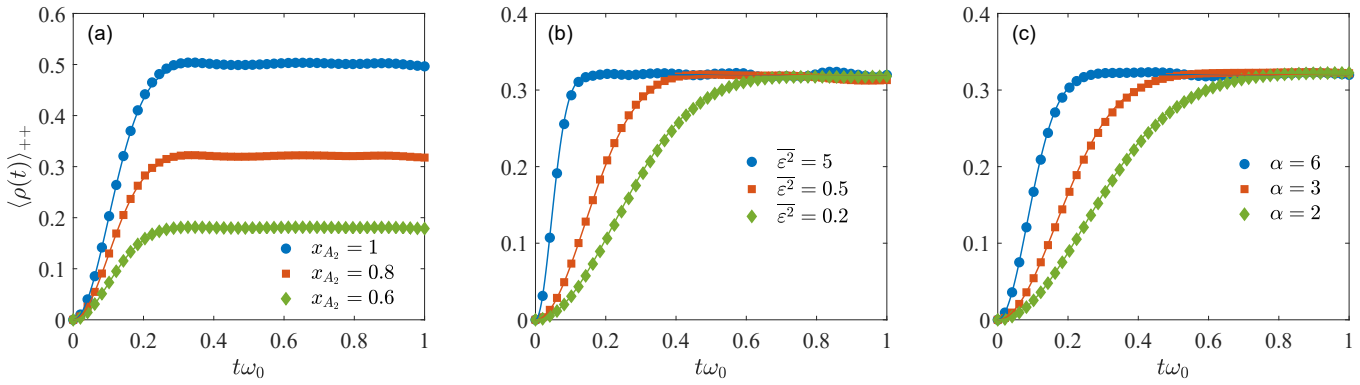

图2. 当 $s=0$ 时，纵向弛豫随 x_{A_2}、$\overline{\varepsilon^2}$ 和 α 的变化。在系综平均下，子系统 A_1 在 $|+\rangle$ 时的布居：(a) 对于 $x_{A_2}=1$、0。8、0。6，当 $\overline{\varepsilon^2}=1$ 且 $\alpha=5$ 时；(b) 对于 $\overline{\varepsilon^2}=5$、0。5、0。2，当 $x_{A_2}=0.8$ 且 $\alpha=5$ 时；(c) 对于 $\alpha=6$、3、2，当 $x_{A_2}=0.8$ 且 $\overline{\varepsilon^2}=1$ 时。解析结果以实线表示，点线则由 $N=8000$ 个随机样本生成，其中 $\varepsilon=0$。

处于态 $|\phi(0)\rangle_{A_1}=|-\rangle_{A_1}$，而辅助量子比特 A_2 处于叠加态 $|\varphi\ 0\ \rangle_{A_2}=x_{A_2}|+\rangle_{A_2}+y_{A_2}|-\rangle_{A_2}$。工作量子比特 A_1 的约化密度矩阵可通过对 A_2进行偏迹得到，

$$\rho_{A_1}(t)=\mathrm{Tr}_{A_2}(\hat{U}_\varepsilon|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\hat{U}_\varepsilon^\dagger). \tag{10}$$

为简单起见，我们假设耦合强度的形式为

$$f(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon-s), \tag{11}$$

其中 ε 是每次实现对应的一个随机数。参数 α 和 s 的物理含义取决于不同的物理实现。这里，我们提出一种能够实现该模型的方案。式（4）中的双量子比特相互作用可以通过两个耦合到光子晶体模式的二能级原子之间的有效偶极-偶极相互作用来实现，其中原子共振接近光子晶体的一个带边 [24]。在相互作用绘景中，两个原子之间的有效相互作用为

$$H_{\mathrm{I}}\approx\frac{g_c^2}{2\omega_A}F(z_{A_1},z_{A_2})(\sigma_+^{A_1}\sigma_-^{A_2}+\sigma_-^{A_1}\sigma_+^{A_2}), \tag{12}$$

其中，$g_c=g\sqrt{2\pi/L}$ g 是原子与光子之间的耦合强度，L是光子从原子位置 z_j衰减的长度尺度。可调函数$F(z_{A_1},z_{A_2})$随两原子间距离 $|z_{A_1}-z_{A_2}|$ 呈指数衰减。因此，我们可以在实验中调节两原子间的距离，使得 $F(z_{A_1},z_{A_2})/\omega_A=\varepsilon-s$，而模型中的 α 由 $g_c^2/2$确定。

ρ_{A_1} 的矩阵元分别为 ely

$$\begin{aligned}\rho_{A_1}^{++}(t)&\equiv\langle+|\,\rho_{A_1}(t)\,|+\rangle\\&=\frac{1}{2}|x_{A_2}|^2\left\{1-\cos[2\alpha(\varepsilon-s)t]\right\},\\\rho_{A_1}^{+-}(t)&\equiv\langle+|\,\rho_{A_1}(t)\,|-\rangle\\&=ix_{A_2}y_{A_2}^*e^{-i\omega_At}\sin\left[\alpha(\varepsilon-s)t\right].\end{aligned} \tag{13}$$

这里，我们假设 ε 服从均值为零的高斯分布，且式（$\langle\rho(t)\rangle$ 中定义的系综平均态为3）可写为

$$\begin{aligned}\langle\rho(t)\rangle_{++}\equiv&\overline{\rho_{A_1}^{++}(t)}\\=&\frac{1}{2}|x_{A_2}|^2\left[1-\cos(2\alpha st)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon^2}t^2}\right],\\\langle\rho(t)\rangle_{+-}\equiv&\overline{\rho_{A_1}^{+-}(t)}\\=&ix_{A_2}y_{A_2}^*e^{-i\omega_At}\sin(\alpha st)e^{-\alpha^2\overline{\varepsilon^2}t^2/2}.\end{aligned} \tag{14}$$

这里，我们利用了均值为零的高斯分布的矩恒等式，即 $\overline{\varepsilon^{2n}}=\overline{(\varepsilon^2)}^n(2n)!/(2^nn!)$以及$\overline{\varepsilon^{2n-1}}=0\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ [25]。

这一结果可视为工作量子比特 A_1 在温度为 T的热浴中发生热化；该热浴处于热平衡状态。当系统 A 达到热平衡时，其处于激发态的概率为 $P_+=e^{-\beta\Delta}(1+e^{-\beta\Delta})^{-1}$ [2]，其中$\beta=1/k_BT$，k_B 为玻尔兹曼常数，Δ 是两个能级之间的能级差。耗散率 $\Gamma(t)=2\alpha^2\overline{\varepsilon^2}t$ 随时间 t线性变化，可用于改进量子计量学，从而达到芝诺极限 [26–28]。为模拟任意温度 T下的这一稳态分布，我们可以有效地调节辅助量子比特 A_2的初态，即 x_{A_2} 和 y_{A_2}，使其满足$P_+=\rho_{A_1}^{++}\,(t\to\infty)$。注意，对于任意温度 T，这一公式始终成立，因为 $0\le x_{A_2}\le1$，因此 $0\le\rho_{A_1}^{++}\,(t\to\infty)<1/2$。

这里，我们以单量子比特为例进行模拟：该量子比特初始处于基态，通过与热库相互作用，弛豫至有限温度 T 下的平衡态。在此模拟中，这一过程可由辅助量子比特的初态、由 $\overline{\varepsilon^2}$ 表征的噪声特性，以及由 α表征的耦合强度来控制。纵向弛豫随参数变化的行为

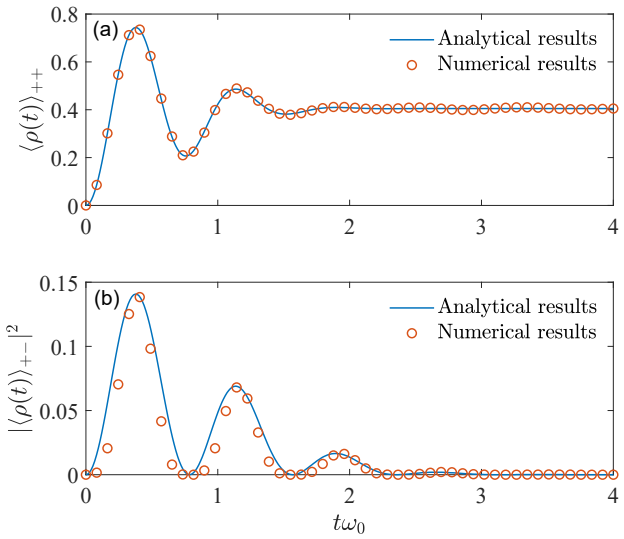

图 3. 单量子比特纵向弛豫的解析结果与数值结果对比。在数值计算中，我们选取 $N = 5000$ $\{\varepsilon\}$ 个方差为 0.6、期望值为 0 的高斯分布随机样本。$s = 4$、$x_{A_2} = 0.9$、$\varepsilon^2 = 0.6$ 和 $\alpha = 1$时，(a) 激发态布居 $\langle\rho(t)\rangle_{++}$、(b) 相干性的模平方 $|\langle\rho(t)\rangle_{+-}|^2$的量子动力学。

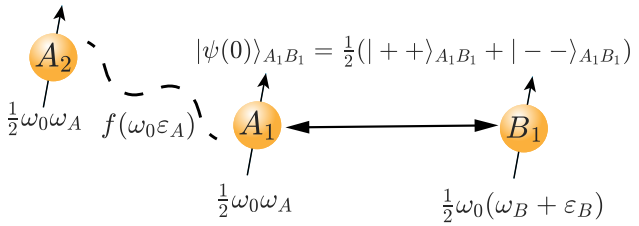

图 4. 模拟双量子比特系统中纠缠猝死的示意图。量子比特 A_1 和 B_1初始化为最大纠缠态，彼此之间没有相互作用。利用由 ε_B 表征的随机能级间距来模拟 B_1的横向弛豫。我们通过 A_1 与辅助量子比特 A_2之间的相互作用来模拟 A_1的纵向噪声。

，即 x_{A_2}、ε^2 和 α，绘于图 2中。在图 2(a)中，我们保持 ε^2 和 α 不变，只改变x_{A_2}。我们发现，x_B 不会改变弛豫时间，但会改变稳态布居。相比之下，从图 2(b)(c)可以看出，随着噪声方差 ε^2 和耦合强度 α增大，弛豫时间会缩短，而稳态布居不变。上述观察是合理的，因为根据式（$\Gamma(t) = 2\alpha^2\varepsilon^2 t$（13），弛豫速率为该式所示。该弛豫过程是非马尔可夫的，因为弛豫速率随时间变化。值得指出的是，若采用浴工程技术，即随时间调节工作量子比特与辅助量子比特之间的相互作用强度，弛豫过程可以是马尔可夫的 [15, 28]。不过，这超出了本研究的范围。

为了验证我们的数值模拟，我们在图 3中比较了密度矩阵所有元素的解析结果和数值结果。我们发现，当 $s \neq 0$时，纵向弛豫和横向弛豫均呈现振荡衰减，但横向弛豫的衰减较慢。如图 3(b)所示，子系统 A_1 与辅助量子比特 A_2 之间的相互作用会在基态和激发态之间诱导出相干性，因为辅助量子比特的初态为叠加态。然而，当达到稳态时，子系统 A_1 的相干性消失，因此变为混合态。此外，由于数值结果与解析结果一致，我们的数值模拟是可靠的。总而言之，在本节中，我们利用辅助量子比特有效地模拟任意温度下单量子比特的纵向弛豫过程。研究发现，辅助量子比特的初态x_{A_2}、频率方差 ε^2 以及工作量子比特与辅助量子比特之间的相互作用强度共同决定了纵向弛豫的弛豫时间和稳态布居。

IV. 有限时间解纠缠

本节模拟双量子比特解纠缠的量子动力学，并考察纵向弛豫和横向弛豫对退纠缠行为的影响。系统包含两个工作量子比特，即量子比特 A_1 和 B_1，其中前者与一个辅助量子比特（即量子比特 A_2）相互作用，如图4所示。因此，总哈密顿量可分为两部分，写作 $H_\varepsilon = \hat{} H_\varepsilon^A + \hat{} H_\varepsilon^B$，其中

$$\begin{aligned}\hat{H}_\varepsilon^A &= \frac{\omega_0}{2}(\omega_A\sigma_z^{A_1} + \omega_A\sigma_z^{A_2}) + f(\omega_0\varepsilon_A)\sigma_+^{A_1}\sigma_-^{A_2} + \text{h.c.},\\ \hat{H}_\varepsilon^B &= \frac{\omega_0}{2}(\omega_B\sigma_z^{B_1} + \varepsilon_B\sigma_z^{B_1}).\end{aligned} \tag{15}$$

由 A_1 和 B_1构成的复合系统初始时处于最大纠缠态，即$|\psi(0)\rangle_{A_1B_1} = (|{+}{+}\rangle_{A_1B_1} + |{-}{-}\rangle_{A_1B_1})/\sqrt{2}$。我们令$A_1$ 与辅助量子比特 A_2 相互作用，以模拟纵向弛豫，如第III节所示，其中$f(\varepsilon_A)$是 A_1 与 A_2之间的耦合强度。对于量子比特 B_1，我们施加由 ε_B 描述的随机能级间距，以模拟横向弛豫[9, 12, 13]。

在进行系综平均之前，我们首先求解每个实现中的量子动力学。三个量子比特的初态为

$$\rho(0) = x\,|\psi_1(0)\rangle\langle\psi_1(0)| + y\,|\psi_2(0)\rangle\langle\psi_2(0)|, \tag{16}$$

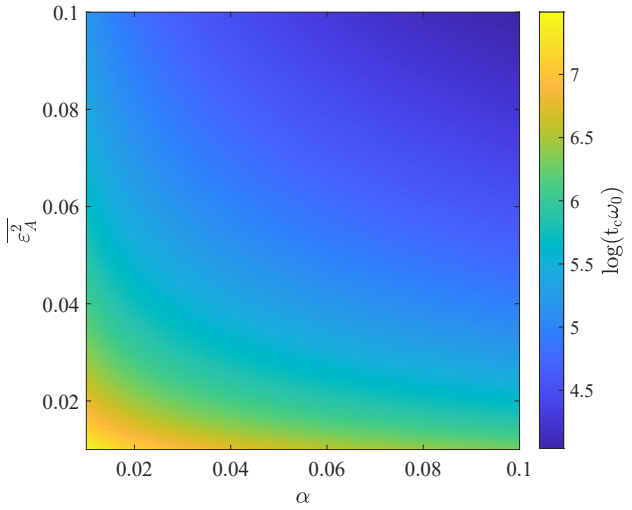

图5. $x = 0.2$、$\overline{\varepsilon_B^2} = 0$ 和 $s = 0$时，临界解纠缠时间 t_c 随 α 和ε_A^2 的变化。

其中

$$|\psi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_{A_2} \otimes (|{+}{+}\rangle_{A_1B_1} + |{-}{-}\rangle_{A_1B_1}),$$
$$|\psi_2(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_{A_2} \otimes (|{+}{+}\rangle_{A_1B_1} + |{-}{-}\rangle_{A_1B_1}). \tag{17}$$

与第 III节中一样，我们将耦合强度定义为$f(\varepsilon_A) = \alpha(\varepsilon_A - s)$。两个工作量子比特的系综平均态，即 $\rho_{A_1B_1}(t)$，可写为

$$\overline{\rho_{A_1B_1}(t)} = \begin{pmatrix} \overline{a(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{b(t)} & \overline{z(t)} & 0 \\ 0 & \overline{z^*(t)} & \overline{c(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{d(t)} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

这里我们假设 ε_A 和 ε_B 服从独立高斯分布。方程（18）的非零矩阵元明确写为

$$\begin{aligned}
\overline{a(t)} &= \frac{x}{4}\left[1 - \cos(2\alpha s t)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right], \\
\overline{b(t)} &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\left[1 + \cos(2\alpha s t)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right], \\
\overline{c(t)} &= \frac{y}{2} + \frac{x}{4}\left[1 + \cos(2\alpha s t)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right], \\
\overline{z(t)} &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_B^2}t^2}e^{-\frac{i}{2}(\omega_A+\omega_B)t}e^{-\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_A^2}\alpha^2t^2}\cos(\alpha s t), \\
\overline{d(t)} &= \frac{y}{4}\left[1 - \cos(2\alpha s t)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right].
\end{aligned} \tag{19}$$

上述表达式的详细推导见附录A。

为了研究由 A_1 和 B_1 组成的复合系统在纵向弛豫和横向弛豫下的解纠缠行为，我们采用并发度 [29] 来表征纠缠性质 $C(\rho_{A_1B_1}) = \max(0, \sqrt{\kappa_1} - \sqrt{\kappa_2} - \sqrt{\kappa_3} - \sqrt{\kappa_4})$。

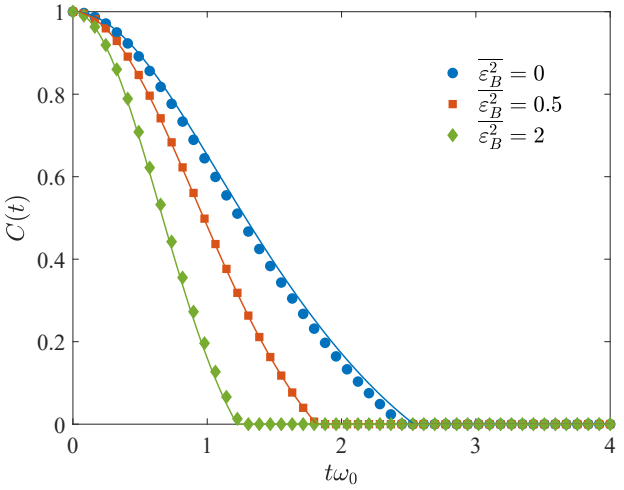

图6. 存在纵向和横向弛豫时，$\varepsilon_B^2 = 0$、0.5、2 条件下，并且 $x = 0.2$、$\varepsilon_A^2 = 0.5$、$\alpha = 1$和$s = 0$时，并发度 $C(t)$随时间 t 的变化。注意，当 $\varepsilon_B^2 = 0$时，横向弛豫被关闭。解析结果以实线表示。点线由$\varepsilon_A = \varepsilon_B = 0$的 $N = 300$ 个随机样本生成。

其中，κ_i是矩阵 $\mathcal{G}$ 按降序排列的特征值

$$\mathcal{G} \equiv \overline{\rho_{A_1B_1}}\left(\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B\right)\overline{\rho_{A_1B_1}}^*\left(\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B\right), \tag{20}$$

其中 σ_y^α ($\alpha = A,\ B$) 是泡利算符。当$C = 1$时，两个工作量子比特处于最大纠缠态；而当 $C = 0$ 时，它们彼此解纠缠。这里，我们可以将并发度简化为

$$C(\overline{\rho_{A_1B_1}}) = 2\max\left\{0, |\overline{z}| - \sqrt{\overline{a}\overline{d}}\right\}. \tag{21}$$

初始时，A_1 和 B_1 处于最大纠缠态，其中 $|z| = 1/2$ 和 $\sqrt{ad} = 0$。接下来，我们将在模拟中展示两类退纠缠现象。在第一类中，只有当时间趋于无穷时，纠缠才会趋于消失。在第二类中，纠缠会在临界解纠缠时间 t_c 处恰好衰减至零，并且此后保持为零。

我们首先研究系统中不存在横向弛豫，即 $\varepsilon_B^2 = 0$ 时，纵向弛豫对纠缠性质的影响。在这种情况下，系统的退纠缠行为由耦合强度 α 和噪声涨落 ε_A^2主导。显然，当 $\alpha = 0$ 时，即子系统 A_1 不与辅助量子比特A_2相互作用时，系统将始终处于最大纠缠态。当 $\alpha > 0$ 时，非零的噪声涨落ε_A^2 将决定系统的纠缠是否会在有限时间内消失。当 $\alpha > 0$ 和$\varepsilon_A^2 = 0$ 时，即关闭纵向弛豫时，$|z|$

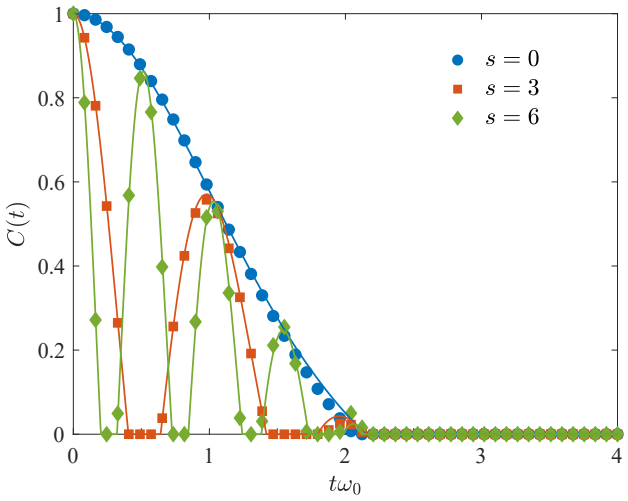

图 7. 同时存在纵向弛豫和横向弛豫时，并发度 $C(t)$ 随时间 t 的变化，其中 $s=0$，3，6，且 $x=0.2$、$\varepsilon_A^2=0.5$、$\varepsilon_B^2=0.2$ 和 $\alpha=1$。解析结果以实线表示。虚线由 $N=300$ 个随机样本生成，其中 $\varepsilon_A=\varepsilon_B=0$。

并且 $\sqrt{ad}$ 可写为

$$|z|=\frac{1}{2}|\cos(\alpha st)|,\qquad \sqrt{ad}=\frac{\sqrt{xy}}{4}[1-\cos(2\alpha st)]. \tag{22}$$

使得 $|z|=1/2$ 且 $\sqrt{ad}=0$，因此系统的纠缠不会持续消失。然而，如果开启纵向弛豫，即 $\alpha>0$且 $\varepsilon_A^2>0$，$|z|$ 在$\sqrt{ad}=\sqrt{xy}/4$趋于无穷时趋于零。因此，只要 $xy>0$，就存在一个有限的 t_c，使纠缠在时间 t_c之后消失。临界解纠缠时间 t_c 关于 ε_A^2 和 α （无横向弛豫时）的关系如图5所示。我们发现，当 $\alpha>0$ 且 $\varepsilon_A^2>0$时，纠缠会在有限时间内消失，并且 t_c 会随着 α 和ε_A^2 的增大而单调、快速衰减。

现在我们考虑仅存在横向弛豫的情况，即 $\varepsilon_B^2>0$ 和 $\varepsilon_A^2=0$。$|z|$和 $\sqrt{ad}$ 的演化可写为

$$|z|=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_B^2 t^2}|\cos(\alpha st)|,\qquad \sqrt{ad}=\frac{\sqrt{xy}}{4}[1-\cos(2\alpha st)]. \tag{23}$$

显然，$|z|$ 在时间趋于无穷大时趋于零。无论时间经过多久，总存在 $2\alpha st=2n\pi$，满足 $n\in\mathcal{Z}$，使得 $\sqrt{ad}$消失。因此，并发度不会在有限时间后始终保持为零，而是在无穷远处趋于零。

我们可以得出结论，当存在纵向弛豫，即 $\alpha>0$ 且 $\varepsilon_A^2>0$时，纠缠会在有限时间内消失。横向噪声涨落越大，纠缠消失得越快。而 A_1 的振荡频率几乎不影响退纠缠时间。此时并发度随 ε_B^2 和 s 变化的动力学分别如图 6和7所示。从图 6中可以看出，即使 $\varepsilon_B^2=0$，并发度在临界解纠缠时间之后仍会保持为零，并且随着 ε_B^2增大而衰减得更快。从图 7中可以看出，当噪声涨落和相互作用强度保持不变时，子系统 A_1 的频率越高，纠缠 C 振荡得越快，但临界解纠缠时间几乎相同。当系统不受纵向弛豫影响，即$\varepsilon_A^2=0$ 或 $\alpha=0$时，纠缠不会在有限时间内消失，而会因横向弛豫在无穷远处消失。

V. 结论

我们利用辅助量子比特辅助的哈密顿量系综方法，模拟了开放量子系统中单量子比特的纵向弛豫。具体而言，与工作量子比特相互作用的辅助量子比特被用于模拟环境效应。理论结果表明，工作量子比特的模拟动力学可以由真实的热化过程描述。我们可以模拟任意温度下的平衡态分布，该分布由辅助量子比特的初态、噪声涨落和相互作用强度决定。此外，我们还模拟了初态为最大纠缠态的双量子比特纠缠动力学。我们令第一个量子比特与辅助量子比特相互作用并发生纵向弛豫，同时令第二个量子比特发生横向弛豫。我们发现，如果第一个量子比特不存在纵向弛豫，而第二个量子比特存在横向弛豫，则当时间趋于无穷时，系统的纠缠将消失。然而，如果存在纵向弛豫，无论是否存在横向弛豫，双量子比特的纠缠都会在有限时间后消失。并且，噪声涨落越大，纠缠衰减得越快。

致谢

Q.A. 感谢北京市自然科学基金（项目编号：1202017）、国家自然科学基金（项目编号：11674033、11505007）以及北京师范大学（项目编号：2022129）的资助。H.B.W. 感谢国家自然科学

基金会（项目编号：61675028）和国家自然科学基金（项目编号：12274037）的资助。

附录A：两个工作量子比特系综平均态的推导

每种实现下三个量子比特的初态为

$$\rho(0) = x\left|\psi_1(0)\right\rangle\left\langle\psi_1(0)\right| + y\left|\psi_2(0)\right\rangle\left\langle\psi_2(0)\right|, \tag{A1}$$

其中

$$\begin{aligned}\left|\psi_1(0)\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle_{A_2}\otimes\left(\left|++\right\rangle_{A_1B_1} + \left|--\right\rangle_{A_1B_1}\right),\\ \left|\psi_2(0)\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle_{A_2}\otimes\left(\left|++\right\rangle_{A_1B_1} + \left|--\right\rangle_{A_1B_1}\right).\end{aligned} \tag{A2}$$

换言之，两个工作量子比特 A_1 和 B_1 处于最大纠缠态，而辅助量子比特A_2 处于混合态。在时间 t， $|\psi_1(0)\rangle$ 演化为如下状态

$$\begin{aligned}\left|\psi_1(t)\right\rangle \;=\; &\eta_1\left|+++\right\rangle_{A_2A_1B_1} + \eta_2\left|-+-\right\rangle_{A_2A_1B_1}\\ &+\eta_3\left|+--\right\rangle_{A_2A_1B_1},\end{aligned} \tag{A3}$$

其中 $\eta_1 = \exp\left[-i(\omega_A+\varepsilon_A+\omega_B+\varepsilon_B)t/2\right]/\sqrt{2}$，$\hat{}$ 因为 $|+++\rangle_{A_2A_1B_1}$ 是 H_ε的本征态。在由基 $\{|-+-\rangle_{A_2A_1B_1}, |+--\rangle_{A_2A_1B_1}\}$张成的不变子空间中，有效哈密顿量可简化为

$$\hat{H}_\varepsilon = -\frac{1}{2}(\omega_B+\varepsilon_B)I + f(\varepsilon_A)\sigma_x. \tag{A4}$$

因此，演化算符 $\hat{} U_\varepsilon = \exp\left(-i\hat{} H_\varepsilon t\right)$ 为

$$\hat{U}_\varepsilon = \left[\cos(f(\varepsilon_A)t) - i\sin(f(\varepsilon_A)t)\sigma_x\right]e^{\frac{i}{2}(\varepsilon_B+\omega_B)t}. \tag{A5}$$

由于 $[\eta_2,\eta_3]^T = \hat{} U_\varepsilon\left[0,1/\sqrt{2}\right]^T$，$|\psi_1(t)\rangle$ 的三个系数可明确表示为

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{2}(2\omega_A+\omega_B+\varepsilon_B)t},\\ \eta_2 &= \frac{-i}{\sqrt{2}}e^{\frac{i}{2}(\varepsilon_B+\omega_B)t}\sin[f(\varepsilon_A)t],\\ \eta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i}{2}(\varepsilon_B+\omega_B)t}\cos[f(\varepsilon_A)t].\end{aligned} \tag{A6}$$

假设 $|\psi_2(t)\rangle$ 可展开为

$$\begin{aligned}\left|\psi_2(t)\right\rangle \;=\; &\xi_1\left|---\right\rangle_{A_2A_1B_1} + \xi_2\left|+-+\right\rangle_{A_2A_1B_1}\\ &+\xi_3\left|-++\right\rangle_{A_2A_1B_1}.\end{aligned} \tag{A7}$$

按照上述步骤，我们可以得到

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i}{2}(2\omega_A+\omega_B+\varepsilon_B)t},\\ \xi_2 &= \frac{-i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{2}(\varepsilon_B+\omega_B)t}\sin[f(\varepsilon_A)t],\\ \xi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{2}(\varepsilon_B+\omega_B)t}\cos[f(\varepsilon_A)t].\end{aligned} \tag{A8}$$

由于我们已经求解了三个量子比特的量子动力学，对辅助量子比特A_2进行偏迹后，我们可以得到两个工作量子比特 $\rho_{A_1B_1}(t) = \mathrm{Tr}_{A_2}\rho(t)$ 在基$\{|+-\rangle_{A_1B_1}, |++\rangle_{A_1B_1}, |--\rangle_{A_1B_1}, |-+\rangle_{A_1B_1}\}$ 下的约化密度矩阵，如下所示

$$\rho_{A_1B_1}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & 0\\ 0 & b(t) & z(t) & 0\\ 0 & z^*(t) & c(t) & 0\\ 0 & 0 & 0 & d(t)\end{pmatrix}. \tag{A9}$$

与第 III节中一样，我们将耦合强度定义为$f(\varepsilon_A) = \alpha(\varepsilon_A - s)$，其中 $\alpha \geq 0$。非零矩阵元为

$$\begin{aligned}a(t) &= \frac{x}{2}\gamma(t)^2,\\ b(t) &= \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\left[1-\gamma(t)^2\right],\\ c(t) &= \frac{y}{2} + \frac{x}{2}\left[1-\gamma(t)^2\right],\\ z(t) &= \frac{1}{2}\zeta(t)\cos[\alpha(\varepsilon_A - s)t],\\ d(t) &= \frac{y}{2}\gamma(t)^2,\end{aligned} \tag{A10}$$

其中 $\zeta(t) = \exp\left[-i(\omega_A+\omega_B+\varepsilon_B)t\right]$， $\gamma(t) = \sin[\alpha(\varepsilon_A - s)t]$。我们假设 ε_A 和 ε_B 服从独立高斯分布。经过系综平均后，方程（A9）的非零矩阵元明确表示为

$$\begin{aligned}\overline{a(t)} &= \frac{x}{4}\left[1-\cos(2\alpha st)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right],\\ \overline{b(t)} &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4}\left[1+\cos(2\alpha st)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right],\\ \overline{c(t)} &= \frac{y}{2} + \frac{x}{4}\left[1+\cos(2\alpha st)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right],\\ \overline{z(t)} &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_B^2}t^2}e^{-\frac{i}{2}(\omega_A+\omega_B)t}e^{-\frac{1}{2}\overline{\varepsilon_A^2}\alpha^2t^2}\cos(\alpha st),\\ \overline{d(t)} &= \frac{y}{4}\left[1-\cos(2\alpha st)e^{-2\alpha^2\overline{\varepsilon_A^2}t^2}\right].\end{aligned} \tag{A11}$$

[1]A. J. Leggett、a rajarCh harsey、M. R. A. Fisher、A. Garg 和 W. Zwerger，《动力学耗散双态系统，”《现代物理评论》**59**，1（1987年）。

[2] H. P. Breuer 和 F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* 2002 （牛津大学出版社，）。[3] W. M. Zhang、P. Y. Lo、H. N. Xiong、M. W. Y. Tu 和 F. Nori, 《开放量子系统的一般非马尔可夫动力学》, 《物理评论快报》109，170402（2012）。[4] H. P. Breuer、E. M. Laine、J. Piilo 和 B. Vacchini, 《专题综述：开放量子系统中的非马尔可夫动力学》, 《现代物理评论》88，021002（2016）。[5] I. de Vega 和 D. Alonso, 《非马尔可夫开放量子系统的动力学》, 《现代物理评论》89，015001（2017）。[6] X. Y. Chen、N. N. Zhang、W. T. He、X. Y. Kong、F. G. Deng、Q. Ai 和 G. L. Long, 《可控非马尔可夫开放量子动力学中的全局关联与局域信息流》, npj Quantum Inf. 8，22（2022）。[7] I. Buluta 和 F. Nori, 《量子模拟器》, 《科学》326，108（2009）。[8] I. M. Georgescu、S. Ashhab 和 F. Nori, 《量子模拟》, 《现代物理评论》86，153（2014）。[9] C. M. Kropf、C. Gneiting 和 A. Buchleitner, 《无序量子系统的有效动力学》, 《物理评论X》6，031023（2016）。[10] C. Gneiting 和 F. Nori, 《无背散射量子输运中的无序诱导退相干》, 《物理评论快报》119，176802（2017）。[11] H. B. Chen、C. Gneiting、P. Y. Lo、Y. N. Chen 和 F. Nori, 《利用哈密顿量系综模拟开放量子系统及其动力学的非经典性》, 《物理评论快报》120，030403（2018）。[12] B. X. Wang、M. J. Tao、Q. Ai、T. Xin、N. Lambert、D. Ruan、Y. C. Cheng、F. Nori、F. G. Deng 和 G. L. Long, 《光合作用光捕获的高效量子模拟》, npj Quantum Inf. 4，52（2018）。[13] N. N. Zhang、M. J. Tao、W. T. He、X. Y. Chen、X. Y. Kong、F. G. Deng、N. Lambert 和 Q. Ai, 《不同哈密顿量和谱密度下开放量子动力学的高效量子模拟》, Front. Phys 16，51502（2021）。[14] A. Soare、H. Ball、D. Hayes、J. Sastrawan、M. C. Jarratt、J. J. McLoughlin、X. Zhen、T. J. Green 和 M. J. Biercuk, 《通过量子控制实现实验噪声滤波》, Nat. Phys. 10，825（2014）。[15] A. Soare、H. Ball、D. Hayes、X. Zhen、M. C. Jarratt、J. Sastrawan、H. Uys 和 M. J. Biercuk, 《用于量子控制定量研究的实验浴工程》, 《物理评论A》89，042329（2014）。[16] X. L. Zhen、F. H. Zhang、G. R. Feng、H. Li 和 G. L. Long, 《纵向弛豫和横向弛豫的最优实验性动力学去耦》, 《物理评论A》93，022304（2016）。[17] T. Yu 和 J. H. Eberly, 《通过自发辐射实现有限时间解纠缠》, 物理评论快报 93，140404（2004）。[18] M. P. Almeida、F. de Melo、M. Hor-Meyll、A. Salles、S. P. Walborn、P. H. Souto Ribeiro 和 L. Davidovich, 《环境诱导的纠缠猝死》, 《科学》316，579（2007）。[19] T. Yu 和 J. H. Eberly, 《纠缠猝死》, 《科学》323，598（2009）。[20] Z.-S. Yang、Y.-X. Wang、M.-J. Tao、W. Yang、M. Zhang、Q. Ai 和 F.-G. Deng, 《通过广义簇关联展开方法研究自旋浴中氮空位中心的纵向弛豫》, 《物理年鉴》（纽约）413，168063（2020）。[21] M. Onizhuk、K. C. Miao、J. P. Blanton、H. Ma、C. P. Anderson、A. Bourassa、D. D. Awschalom 和 G. Galli, 《探测避免交叉处固态量子比特的相干性》, PRX Quantum 2，010311（2021）。[22] K. Head-Marsden、J. Flick、C. J. Ciccarino 和 P. Narang, 《关联量子物质的量子信息与算法》, 《化学评论》121，3061（2021）。[23] Y.-X. Yao 和 Q. Ai, 《受光合能量转移启发的耦合谐振器中的光学非互易性》, arXiv:2208.05841（2022）。[24] J. S. Douglas、H. Habibian、C.-L. Hun、A. V. Gorshkov、H. J. Kimble 和 D. E. Chang, 《冷原子与光子晶体耦合的量子多体模型》, 《自然·光子学》9，326（2015）。[25] J. W. Goodman, *Statistical Optics*（Wiley，霍博肯，新泽西州，2015）。[26] A. W. Chin、S. F. Huelga 和 M. B. Plenio, 《非马尔可夫环境中的量子计量学》, 物理评论快报 109，233601（2012）。[27] Y. Matsuzaki、S. C. Benjamin 和 J. Fitzsimons, 《退相干影响下超越标准量子极限的磁场传感》, 《物理评论A》84，012103 2011（）。[28] X. Y. Long、W. T. He、N. N. Zhang、K. Tang、Z. D Lin、H. F. Liu、X. F. Nie、G. R. Feng、J. Li、T. Xin、Q. Ai 和 D. W. Lu, 《通过量子芝诺效应在有色噪声中实现纠缠增强量子计量学》, 物理评论快报 129，070502（2022）。[29] W. K. Wootters, 《任意态的两个量子比特的形成纠缠》, 物理评论快报 80，2245（1998）。