arXiv:2301.00428v1 [math.DG] 1 Jan 2023

作为余伴随轨道的加权非线性旗流形

Stefan Haller[1] 和 Cornelia Vizman[2]

摘要

加权非线性旗是闭子流形的嵌套集合，其中每个子流形都赋予了一个体积密度。我们研究加权非线性旗的 Fr´échet 流形的几何，从而推广加权非线性格拉斯曼流形。当环境流形是辛流形时，我们利用这些非线性旗描述哈密顿微分同胚群的一类余伴随轨道，这些轨道由加权各向同性非线性旗组成。

1 引言

本文研究加权非线性旗流形，研究动机在于它们可用于描述哈密顿群的新型余伴随轨道。这扩展了已有的余伴随轨道描述方式，包括利用点的构形空间、加权各向同性非线性格拉斯曼流形 [26, 15, 7]，辛非线性格拉斯曼流形 [8]，以及辛非线性旗流形 [9]进行描述的轨道。

设 M 为一个光滑流形，且 $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_r)$ 是一组维数严格递增的闭流形。我们考虑类型为 $\mathcal{S}$ 的非线性旗的 Fr´échet 流形 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$，即 M 中一列嵌套的嵌入子流形 $N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_r$，其中 N_i 与 S_i 微分同胚。考虑配备处处非零密度的子流形，可得到加权非线性旗流形 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)$。我们通过两种方式描述其 Fr´échet 流形结构：一是将其视为 M 中类型为 S_i 的加权非线性格拉斯曼流形笛卡尔积的分裂光滑子流形；二是将其视为 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$ 上的局部平凡光滑纤维丛，该纤维丛与 M 中类型为 $\mathcal{S}$ 的非线性标架主丛相关联。对每个加权非线性旗，都可以通过 $\mathrm{Diff}(M)$ 等变包含映射，将其关联到 M 上一个具有受控奇点的紧支撑分布

$$J : \mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M) \hookrightarrow C^\infty(M)^*, \quad \big\langle J((N_1,\nu_1),\dots,(N_r,\nu_r)), f \big\rangle := \sum_{i=1}^{r} \int_{N_i} f\nu_i.$$

$\mathrm{Diff}(M)$ 在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)$ 中的轨道是有限余维子流形。我们利用装饰有上同调类的非线性旗，对这些轨道给出一个明确的同调描述（除连通分支外；见定理 2.11 和 2.15）。

受 [26, 15, 7] 关于带权各向同性非线性格拉斯曼流形的结果启发，我们考察辛流形 (M, ω) 中带权各向同性非线性旗的流形。哈密顿群 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的自然作用所产生的轨道是有限

[1]维也纳大学数学系，奥斯卡-摩根施特恩广场 1 号，1090 维也纳，奥地利。stefan.haller@univie.ac.at[2]蒂米什瓦拉西部大学数学系，V. Parvan大道 4 号，300223 蒂米什瓦拉，罗马尼亚。cornelia.vizman@e-uvt.ro

[3]2020 数学主题分类。58D10（主要）；37K65、53C30、53D20、58D05。

余维子流形，可描述为等作用叶状结构的叶。每个带权非线性旗的等作用叶都带有一个典范的弱非退化辛形式，而映射 J 限制为 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 作用的等变动量映射，因此将该叶识别为哈密顿群的余伴随轨道（参见定理 3.14）。此外，这个余伴随轨道是 M 中类型为 S_i 的带权子流形之余伴随轨道乘积中的一个分裂辛子流形。

最低维的例子是 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的余伴随轨道，由 [3] 中研究的带基点的加权涡旋环组成。我们还给出了更多由嵌套球面或环面构成的例子，并明确描述了相应的哈密顿群余伴随轨道。

致谢。第一作者谨向蒂米什瓦拉西大学致谢，感谢其热情款待。他衷心感谢奥地利科学基金（FWF）项目 P31663 的资助。第二作者谨向维也纳大学致谢，感谢其热情款待。她获得了 CNCS UEFISCDI 项目（编号 PN-III-P4-ID-PCE-2020-2888）的部分资助。

2 加权非线性旗的流形

非线性旗是光滑流形 M 中一列嵌套的闭子流形 $N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_r$。加权非线性旗是在非线性旗的每个子流形 N_i 上附有一个体积密度 ν_i。通过对测试函数 $f \in C^\infty(M)$ 积分，加权非线性旗在 M 上给出一个具有温和奇异性 $\sum_{i=1}^r \int_{N_i} f\nu_i$ 的紧支撑分布。

我们将证明，M 中所有加权非线性旗构成的空间以一种自然的方式成为 Fr´echet 流形。事实上，这是一个以 [9] 中讨论的非线性旗流形为底空间的局部平凡光滑丛的全空间。该丛底空间上的自然 $\mathrm{Diff}(M)$ 作用是局部传递的 [9, 命题 2.9(a)]。本节的主要目的是描述 $\mathrm{Diff}(M)$ 在加权非线性旗空间中的轨道，见下文定理 2.11。

2.1 加权非线性格拉斯曼流形

本节回顾 [26, 15, 7] 中出现的加权子流形流形的一些基本事实。这些加权非线性格拉斯曼流形是将在第 2.2 节引入的加权非线性旗的一种特殊情形。我们在此以一种便于推广到非线性旗情形的方式介绍它们。

设 S 是一个维数为 k 的闭流形，允许其非连通且不可定向。对于每个流形 M，我们用 $\mathrm{Gr}_S(M)$ 表示 M 中类型为 S 的非线性格拉斯曼流形，即 M 中所有与 S 微分同胚的光滑子流形组成的空间。此外，我们用 $\mathrm{Emb}_S(M)$ 表示 M 中类型为 S 的所有参数化子流形组成的空间，即所有从 S 到 M 的光滑嵌入所组成的空间。$\mathrm{Emb}_S(M)$ 和 $\mathrm{Gr}_S(M)$ 都以一种自然的方式构成 Fr´echet 流形。此外，$\mathrm{Diff}(M)$ 等变映射

$$\mathrm{Emb}_S(M) \to \mathrm{Gr}_S(M), \qquad \varphi \mapsto \varphi(S), \tag{1}$$

是一个结构群为 $\mathrm{Diff}(S)$ 的光滑主丛；$\mathrm{Diff}(S)$ 是 Fr´échet 李群，参见 [2, 19, 20]和 [14,定理 44.1]。

对于每个闭的 k 维流形 S，令

$$\mathrm{Den}(S) := \Gamma^\infty(|\Lambda|_S) = \Omega^k(S; \mathcal{O}_S)$$

表示 S 上所有光滑密度构成的空间。这里 $\mathcal{O}_S$ 表示 S的定向丛，且 $|\Lambda|_S = \Lambda^k T^*S \otimes \mathcal{O}_S$，参见例如 [16]。$S$上的密度是可以在不依赖坐标的情况下对 S 进行积分的几何量，无需指定定向，甚至无需假设其可定向。我们用 $\mathrm{Den}_\times(S)$ 表示体积密度构成的空间，即处处不消失的密度构成的空间。显然，这是 Fr´echet 空间 $\mathrm{Den}(S)$ 中的一个开子集。

我们将类型为 S 、位于 M 中的加权非线性格拉斯曼流形定义为

$$\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}}(M) := \big\{(N,\nu) \;\big|\; N \in \mathrm{Gr}_S(M), \nu \in \mathrm{Den}_\times(N)\big\}, \tag{2}$$

也就是说，这是由所有类型为 S 、位于 M 中且配有处处非零密度的子流形构成的空间。我们通过规定自然双射

$$\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}}(M) = \mathrm{Emb}_S(M) \times_{\mathrm{Diff}(S)} \mathrm{Den}_\times(S), \qquad \big(\varphi(S), \varphi_*\mu\big) \leftrightarrow [\varphi, \mu], \tag{3}$$

为微分同胚，赋予该空间 FrSéchet 流形结构。此处右侧表示与式 (1) 中的非线性标架丛及 $\mathrm{Diff}(S)$ 在 $\mathrm{Den}_\times(S)$ 上的自然作用相伴的丛的全空间。特别地，典范遗忘映射

$$\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}}(M) \to \mathrm{Gr}_S(M), \qquad (N,\nu) \mapsto N, \tag{4}$$

成为一个典型纤维为 $\mathrm{Den}_\times(S)$ 的局部平凡光滑丛。事实上，根据式 (3) 中的识别，它对应于伴随丛 $\mathrm{Emb}_S(M) \times_{\mathrm{Diff}(S)} \mathrm{Den}_\times(S) \to \mathrm{Gr}_S(M)$ 的丛投影。

存在一个典范的 $\mathrm{Diff}(M)$ 等变映射

$$J : \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}}(M) \to C^\infty(M)^*, \qquad \langle J(N,\nu), f\rangle := \int_N f\nu.$$

此映射是单射，其像由具有温和奇异性的紧支撑分布构成： $J(N,\nu)$ 支撑于 N 上，且其波前集与 N 的余法丛重合。

令 $\mu \in \mathrm{Den}_\times(S)$ 为一个体积密度。空间

$$\mathrm{Gr}_{S,\mu}^{\mathrm{wt}}(M) := \big\{(N,\nu) \in \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}}(M) \;\big|\; (S,\mu) \cong (N,\nu)\big\}$$

称为 M 中类型为 (S,μ) 的加权子流形的非线性格拉斯曼流形。它由 M 中所有加权子流形 (N,ν) 构成，且存在一个微分同胚 $S \to N$ 将 μ 映射到 ν。将 μ 的 $\mathrm{Diff}(S)$ 轨道记为 $\mathrm{Den}(S)_\mu$，则 (3) 中的识别限制为一个典范双射

$$\mathrm{Gr}_{S,\mu}^{\mathrm{wt}}(M) = \mathrm{Emb}_S(M) \times_{\mathrm{Diff}(S)} \mathrm{Den}(S)_\mu. \tag{5}$$

众所周知， [21] μ 的 $\mathrm{Diff}(S)_0$ 轨道是一个凸子集，其中包含 S 上所有与 μ 在 $H^k(S;\mathcal{O}_S)$ 中表示同一上同调类的体积密度；这里的 $H^k(S;\mathcal{O}_S)$ 是系数取定向丛的德拉姆上同调。因此， μ 的 $\mathrm{Diff}(S)$ 轨道与 S 上所有体积密度的集合相同，这些密度属于映射 S 下 $H^k(S;\mathcal{O}_S)_{[\mu]}$ 的原像；其中 $H^k(S;\mathcal{O}_S)_{[\mu]}$ 是 $[\mu]$ 在 $H^k(S;\mathcal{O}_S)$ 中的（有限）$\mathrm{Diff}(S)$ 轨道，而该映射为 $\mathrm{Diff}(S)$ 等变线性映射

$$h_S : \mathrm{Den}(S) \to H^k(S;\mathcal{O}_S), \qquad h_S(\alpha) = [\alpha]. \tag{6}$$

更简洁地说，

$$\mathrm{Den}(S)_\mu = \mathrm{Den}_\times(S) \cap h_S^{-1}\big(H^k(S;\mathcal{O}_S)_{[\mu]}\big). \tag{7}$$

因此，$\mathrm{Den}(S)_\mu$ 是由有限个平行闭仿射子空间组成的有限并中的一个开子集，且这些子空间的余维有限。特别地，$\mathrm{Den}(S)_\mu$ 是 $\mathrm{Den}_\times(S)$ 中一个余维为有限值 $\dim\ H^k(S;\ \mathcal{O}_S)$ 的分裂光滑子流形，其切空间为

$$T_\alpha \operatorname{Den}(S)_\mu = \ker h_S = d\Omega^{k-1}(S;\mathcal{O}_S). \tag{8}$$

由 (5) 可知，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M)$ 是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_S(M)$ 中一个有限余维的分裂光滑子流形，其余维为 $\dim\ H^k(S;\ \mathcal{O}_S)$。此外，(4) 中的典范遗忘映射限制为一个局部平凡光滑纤维丛 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M)\ \to \mathrm{Gr}_S(M)$，其典型纤维为 $\mathrm{Den}(S)_\mu$。

M 中类型为 S 的上同调加权子流形空间定义为

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_S(M) := \big\{(N,[\nu]) : N \in \mathrm{Gr}_S(M), [\nu] \in H^k(N;\mathcal{O}_N)\big\}.$$

利用典范双射

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_S(M) = \mathrm{Emb}_S(M) \times_{\mathrm{Diff}(S)} H^k(S;\mathcal{O}_S), \tag{9}$$

我们将 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_S(M)$ 构造成 $\mathrm{Gr}_S(M)$ 上的有限秩光滑向量丛，其秩为 $\dim\ H^k(S;\ \mathcal{O}_S)$。典范的 $\mathrm{Diff}(M)$ 等变映射

$$h_{\mathrm{Gr}_S(M)} : \mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_S(M) \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_S(M), \quad (N,\nu) \mapsto (N,[\nu]),$$

是覆盖 $\mathrm{Gr}_S(M)$ 的光滑丛映射。事实上，经由 (5) 和 (9) 中的微分同胚，它对应于由 (6) 诱导的映射。

M 中类型为 $(S,[\mu])$ 的上同调加权子流形空间定义为

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_{S,[\mu]}(M) := \big\{(N,[\nu]) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_S(M) : (N,[\nu]) \cong (S,[\mu])\big\}$$

并且由所有满足以下条件的上同调加权子流形 $(N,[\nu])$ 组成：存在一个微分同胚 $S \to N$，将上同调类 $[\mu]$ 映到 $[\nu]$。由于 (9) 限制为一个双射

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_{S,[\mu]}(M) = \mathrm{Emb}_S(M) \times_{\mathrm{Diff}(S)} H^k(S;\mathcal{O}_S)_{[\mu]},$$

我们看到 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_{S,[\mu]}(M)$ 是 $\mathrm{Gr}_S(M)$ 的有限覆盖。利用 (7)，我们得出

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M) = h^{-1}_{\mathrm{Gr}_S(M)}\big(\mathrm{Gr}^{\mathrm{hwt}}_{S,[\mu]}(M)\big). \tag{10}$$

众所周知，$\mathrm{Diff}_c(M)$ 在 $\mathrm{Emb}_S(M)$ 上的作用存在局部光滑截面，参见例如 [9, 引理 2.1(c)]。此外，$\mathrm{Diff}(S)$ 在 $\mathrm{Den}(S)_\mu$ 上的（传递）作用也存在局部光滑截面。后者可用 [21, 4]，中的莫瑟证明方法证明，参见下文引理 2.12。利用附录中的引理 A.1，我们得出自然的 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M)$ 上的作用存在局部光滑截面。特别地，该作用是局部传递的。因此，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M)$ 的每个连通分支都是一个 $\mathrm{Diff}_c(M)_0$ 轨道。因此，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M)$ 中的每个 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 或 $\mathrm{Diff}(M)$ 轨道都是若干连通分支的并集。

注 2.1. Poincar´e 对偶性给出了一个典范的 $\mathrm{Diff}(S)$ 等变同构

$$H^k(S;\mathcal{O}_S) = H_0(S;\mathbb{R}).$$

因此，指定上同调类 $[\mu] \in H^k(S;\ \mathcal{O}_S)$，就相当于指定 μ 的每个连通分支上的总体积 S。

例 2.2. 若 S 是连通的，则 $H^k(S;\mathcal{O}_S)=\mathbb{R}$，且 $\mathsf{Diff}(S)$ 的作用在此上同调上是平凡的。因此，轨道 $H^k(S;\mathcal{O}_S)_{[\mu]}$ 是一个单点集，并且

$$\mathrm{Den}(S)_\mu=\left\{\alpha\in\mathrm{Den}_\times(S):\int_S\alpha=\int_S\mu\right\}\tag{11}$$

是连通的。相应地，

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M)=\left\{(N,\nu)\in\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_S(M):\int_N\nu=\int_S\mu\right\}.$$

这就是 [26, 15, 7] 中讨论的情形。

如果 S 由两个微分同胚的连通分支构成，那么 $H^k(S;\mathcal{O}_S)\cong\mathbb{R}^2$，且任何交换这两个连通分支的微分同胚都会在此上同调上产生非平凡作用。如果 μ 在两个连通分支上的总体积相等，那么轨道 $H^k(S;\mathcal{O}_S)_{[\mu]}$ 是一个单点集，且 $\mathsf{Den}(S)_\mu$ 是连通的。否则，$H^k(S;\mathcal{O}_S)_{[\mu]}$ 由两个点构成，并且根据 (7)，$\mathsf{Den}(S)_\mu$ 有两个连通分支。

备注 2.3. 设 $\mu\in\mathsf{Den}_\times(S)$。众所周知，$\mathsf{Diff}(S,\mu)$（保持 μ 的微分同胚群）是 $\mathsf{Diff}(S)$ 中的分裂李子群，参见 [11, 第 203] 页上的定理 III.2.5.3。此外，由作用给出的映射 $\mathsf{Diff}(S)\to\mathsf{Den}(S)_\mu$，$f\mapsto f_*\mu$ 是一个结构群为 $\mathsf{Diff}(S,\mu)$ 的光滑主丛。由 (5) 可知，满射且 $\mathsf{Diff}(M)$ 等变的映射

$$\mathrm{Emb}_S(M)\to\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S,\mu}(M),\qquad\varphi\mapsto\big(\varphi(S),\varphi_*\mu\big),$$

是一个结构群为 $\mathsf{Diff}(S,\mu)$ 的光滑主丛。

备注 2.4. 假设 $(N,\nu)\in\mathsf{Gr}^{\mathrm{wt}}_S(M)$，并令 $\mathsf{Gr}^{\mathrm{wt}}_S(M)_{(N,\nu)}$ 表示其 $\mathsf{Diff}_c(M)$ 轨道。结合前述备注以及 $\mathsf{Diff}_c(M)$ 在 $\mathsf{Emb}_S(M)$ 上的作用具有局部光滑截面这一事实（[9, 引理 2.1(c)]），可知由该作用给出的映射

$$\mathrm{Diff}_c(M)\to\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_S(M)_{(N,\nu)},\qquad f\mapsto\big(f(N),f_*\nu\big)$$

是一个结构群为 $\mathsf{Diff}_c(M,N,\nu)$ 的光滑主丛；该群由保持 N 和 ν 的微分同胚组成。后者是 $\mathsf{Diff}_c(M)$ 中的一个分裂李子群，因为它与典范丛投影 $\mathsf{Diff}_c(M,N)\to\mathsf{Diff}(N)$ 下 $\mathsf{Diff}(N,\nu)$ 的原像相同，见[9, 引理 2.1(d)]。因此，每个轨道都可视为一个齐性空间，

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_S(M)_{(N,\nu)}=\mathrm{Diff}_c(M)/\mathrm{Diff}_c(M,N,\nu).$$

2.2 加权非线性旗流形

取自然数 k_i 使得

$$0\le k_1<k_2<\cdots<k_r\tag{12}$$

并令 $\mathcal{S}=(S_1,\dots,S_r)$ 为一族闭光滑流形，且 $\dim S_i=k_i$。

对于光滑流形 M，令

$$\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M):=\left\{(N_1,\dots,N_r)\in\prod_{i=1}^r\mathrm{Gr}_{S_i}(M)\,\middle|\,\forall i:N_i\subseteq N_{i+1}\right\}$$

表示 M 中类型为 $\mathcal{S}$ 的非线性旗空间，并记

$$\mathrm{Fr}_{\mathcal{S}}(M):=\left\{(\varphi_1,\dots,\varphi_r)\in\prod_{i=1}^r\mathrm{Emb}_{S_i}(M)\,\middle|\,\forall i:\varphi_i(S_i)\subseteq\varphi_{i+1}(S_{i+1})\right\}$$

M 中类型为 $\mathcal{S}$ 的非线性标架空间。在命题 2.3] 中已证明，$\mathbf{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$ 和 $\mathbf{Fr}_{\mathcal{S}}(M)$ 分别是 $\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Gr}_{S_i}(M)$ 和 $\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Emb}_{S_i}(M)$ 的分裂光滑子流形。此外，典范的 $\mathbf{Diff}(M)$ 等变映射

$$\mathrm{Fr}_{\mathcal{S}}(M)\to\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M),\qquad(\varphi_1,\dots,\varphi_r)\mapsto\big(\varphi_1(S_1),\dots,\varphi_r(S_r)\big)\tag{13}$$

是一个结构群为

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{S}):=\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Diff}(S_i).$$

我们将 $\mathcal{S}$ 中类型为 M 的加权非线性旗空间记为

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M):=\left\{\big((N_1,\nu_1),\dots,(N_r,\nu_r)\big)\in\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S_i}(M)\,\middle|\,\forall i:N_i\subseteq N_{i+1}\right\}.\tag{14}$$

这是 $\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S_i}(M)$ 中的一个分裂光滑子流形，因为它与丛投影 $\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S_i}(M)\to\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Gr}_{S_i}(M)$ 下，分裂光滑子流形 $\mathbf{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$ 的原像重合。此外，典范的 $\mathbf{Diff}(M)$ 等变遗忘映射

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)\to\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M),\quad\big((N_1,\nu_1),\dots,(N_r,\nu_r)\big)\mapsto(N_1,\dots,N_r),\tag{15}$$

是一个典型纤维为

$$\mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S}):=\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Den}_{\times}(S_i).\tag{16}$$

后者是 Fr´echet 空间 $\mathbf{Den}(\mathcal{S}):=\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Den}(S_i)$ 中的一个 $\mathbf{Diff}(\mathcal{S})$ 不变开子集。此外，典范的 $\mathbf{Diff}(M)$ 等变双射

$$\begin{aligned}\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)&=\mathrm{Fr}_{\mathcal{S}}(M)\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S})}\mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S}),\\ \Big(\big(\varphi_1(S_1),(\varphi_1)_*\mu_1\big),\dots,\big(\varphi_r(S_r),(\varphi_r)_*\mu_r\big)\Big)&\leftrightarrow\big[(\varphi_1,\dots,\varphi_r),(\mu_1,\dots,\mu_r)\big],\end{aligned}\tag{17}$$

是 $\mathbf{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)$ 与由 (13) 中的非线性标架丛及 $\mathbf{Diff}(\mathcal{S})$ 在 $\mathbf{Den}_{\times}(\mathcal{S})$ 上的典范作用所关联的丛之间的微分同胚。事实上，这正是丛微分同胚 $\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S_i}(M)=\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Emb}_{S_i}(M)\times_{\mathrm{Diff}(S_i)}\mathbf{Den}_{\times}(S_i)$，它由 (3) 中微分同胚的乘积限制在其底空间 $\prod_{i=1}^{r}\mathbf{Gr}_{S_i}(M)$ 中的子流形 $\mathbf{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$ 上得到。

我们有一个典范的 $\mathbf{Diff}(M)$ 等变映射

$$J:\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)\to C^{\infty}(M)^*,\quad\big\langle J\big((N_1,\nu_1),\dots,(N_r,\nu_r)\big),f\big\rangle:=\sum_{i=1}^{r}\int_{N_i}f\nu_i.\tag{18}$$

J 的像由定义在 M 上、具有温和奇异性的紧支撑分布构成。更确切地说，$J((N_1,\nu_1)\dots,(N_r,\nu_r))$ 的波前集与 $N_1,\dots,N_r$ 的余法丛之并集重合。

引理 2.5. 式（18）中的映射是单射。

证明. 假设 $J((N_1,\nu_1)\ldots,(N_r,\nu_r)) = J((N'_1,\nu'_1)\ldots,(N'_r,\nu'_r))$。对 r 采用归纳法，只需证明 $N_r = N'_r$ 和 $\nu_r = \nu'_r$。

为证明 $N_r = N'_r$，我们反设存在 $x \in N_r$，使得 $x \notin N'_r$。由 (12) 可知，$N_r \setminus N_{r-1}$ 在 N_r 中稠密。因此，不失一般性，我们可以假设 $x \notin N_{r-1}$。此外，由于 ν_r 在 N_r 上不为零，故 $\nu_r(x) \neq 0$。于是，若 f 是一个支集包含在 x 的充分小邻域内的光滑隆起函数，则 $\langle J((N_1,\nu_1)\ldots,(N_r,\nu_r))\ f\rangle = \int_{N_r} f\nu_r \neq 0$ 且 $\langle J((N'_1,\nu'_1)\ldots,(N'_r,\nu'_r))\ f\rangle = 0$。由于这与我们的假设矛盾，我们得出结论 $N_r = N'_r$。

为证明 $\nu_r = \nu'_r$，我们反设存在 $x \in N_r = N'_r$，使得 $\nu_r(x) \neq \nu'_r(x)$。与前面一样，不失一般性，我们可以假设 $x \notin N_{r-1}$ 且 $x \notin N'_{r-1}$。于是，若 f 是一个支集包含在 x 的充分小邻域内的光滑隆起函数，则 $\langle J((N_1,\nu_1)\ldots,(N_r,\nu_r))\ f\rangle = \int_{N_r} f\nu_r \neq \int_{N'_r} f\nu'_r = \langle J((N'_1,\nu'_1)\ldots,(N'_r,\nu'_r))\ f\rangle$。由于这与我们的假设矛盾，我们得出结论 $\nu_r = \nu'_r$。 □

注 2.6. 设 ω 是 M 上的辛形式，并令 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{symp}}_{\mathcal{S}}(M)$ 表示类型为 $\mathcal{S}$ 的辛非线性旗流形，参见 [9, 第 4 节 2]。回忆一下，这是由所有满足以下条件的旗 $(N_1,\ldots,N_r)$ 组成的开子集：$(\in)$ 属于 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$，且 ω 在每个 N_i 上的限制都是辛形式。因此，k_i 必须为偶数，而 $\omega^{k_i/2}$ 拉回后在 N_i 上成为体积形式，进而在 N_i 上诱导出体积密度 $\nu_i = |\iota^*_{N_i}\omega^{k_i/2}|$。由此，辛形式 ω 给出了一个 $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ 等变光滑单射（截面）

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{symp}}_{\mathcal{S}}(M) \to \mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M) \tag{19}$$

它是 (15) 中典范丛投影限制映射的右逆。将 (19) 中的映射与 (18) 中的 J 复合，我们便得到 [9, 公式 (38)] 中所考虑的动量映射。

注 2.7. 黎曼度量 g on M 会在 M的每个子流形上诱导出一个体积密度。因此，g提供了 (15) 中典范丛投影的一个光滑截面 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M) \to \mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)$，且该截面关于 $\mathrm{Isom}(M,g)$ 等变，参见 [26, 第 6]节。

2.3 结构群约化

对 (13) 中的主标架丛使用结构群约化将会很方便。为此，我们固定嵌入 $\iota_i\colon S_i \to S_{i+1}$，并令 $\iota = (\iota_1,\ldots,\iota_{r-1})$。

我们先回顾 [9, 命题 2.10]中的一些事实。M中类型为 $(\mathcal{S},\iota)$ 的非线性旗空间，

$$\mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\iota}(M) := \left\{ (N_1,\ldots,N_r) \in \mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M) \,\middle|\, \begin{array}{c} (S_1 \xrightarrow{\iota_1} S_2 \xrightarrow{\iota_2} \cdots \to S_r) \\ \cong (N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_r) \end{array} \right\},$$

由 M中所有满足以下条件的非线性旗 $(N_1,\ldots,N_r)$ 构成：存在微分同胚 $S_i \to N_i, 1 \le i \le r$，使其与典范包含映射 $N_i \subseteq N_{i+1}$相交织。这是 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$ 中一个 $\mathrm{Diff}(M)$ 不变开闭子集。M 中类型为 $(\mathcal{S},\iota)$ 的参数化非线性旗（非线性标架）空间，

$$\mathrm{Fr}_{\mathcal{S},\iota}(M) := \{(\varphi_1,\ldots,\varphi_r) \in \mathrm{Fr}_{\mathcal{S}}(M) | \forall i : \varphi_i = \varphi_{i+1}\circ\iota_i\},$$

是 $\mathrm{Fr}_{\mathcal{S}}(M)$ 的一个分裂光滑子流形。此外，将 (13) 限制后得到的映射 $\mathrm{Fr}_{\mathcal{S},\iota}(M) \to \mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\iota}(M)$ 是一个结构群为

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota) := \left\{ (g_1,\ldots,g_r) \in \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Diff}(S_i) \,\middle|\, \forall i : g_{i+1}\circ\iota_i = \iota_i\circ g_i \right\}. \tag{20}$$

后者是 Diff($\mathcal{S}$) 中的一个分裂李子群，其李代数为

$$\mathfrak{X}(\mathcal{S};\iota)=\left\{(Z_1,\dots,Z_r)\in\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{X}(S_i)\middle|\forall i: Z_{i+1}\circ\iota_i=T\iota_i\circ Z_i\right\}. \tag{21}$$

我们得到一个 Diff(M) 等变交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Fr}_{\mathcal{S},\iota}(M) & \hookrightarrow & \mathrm{Fr}_{\mathcal{S}}(M)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Diff}(\mathcal{S})}\\ \mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\iota}(M) & \hookrightarrow & \mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M).\end{array} \tag{22}$$

它可视为沿着包含映射 Diff($\mathcal{S}$; ι) $\subseteq$ Diff($\mathcal{S}$) 对式 (13) 的结构群约化，该约化定义在 Flag$_{\mathcal{S},\ \iota}$ (M) 上，更多细节见 [9, 命题 2.10]。

注 2.8. Diff(M) 等变双射

$$\mathrm{Fr}_{\mathcal{S},\iota}(M)=\mathrm{Emb}_{S_r}(M),\qquad(\varphi_1,\dots,\varphi_r)\mapsto\varphi_r, \tag{23}$$

是一个微分同胚 [9,命题2.10(b)]。相应地，我们有一个群同构

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)=\mathrm{Diff}(S_r;\Sigma),\quad(g_1,\dots,g_r)\mapsto g_r, \tag{24}$$

其中，Diff(S_r;Σ) 表示 S_r 上所有保持非线性旗 $\Sigma=(\Sigma_1,\dots,\Sigma_{r-1})$ 的微分同胚构成的子群，其中 $\Sigma_i:=(\iota_{r-1}\circ\cdots\circ\iota_i)(S_i)$。后者是 Diff($S_r$) 的一个分裂李子群，见 [9, 命题 2.9(b)], ，且 (24) 是李群的一个微分同胚 [9, 命题 2.10(a)]。Diff($\mathcal{S}$; ι) 的李代数可以类似地识别为 $\mathfrak{X}(S_r;\ \Sigma)$，即 S_r 上与 $\Sigma_1,\ \dots,\Sigma_{r-1}$ 相切的向量场所构成的李代数。

我们关注结构群约化 (22)，因为 Diff$_c$(M) 在 Fr$_{\mathcal{S},\iota}$(M) 上的作用存在局部光滑截面。这由 [9, 引理 2.1(c)] 以及 (23) 中的微分同胚可得。

令 Flag$^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota}$($M$) 表示 Flag$_{\mathcal{S},\iota}$($M$) 在 (15) 中丛投影下的原像。将 (17) 中的微分同胚限制在 Flag$_{\mathcal{S},\iota}$(M) 上，并结合 (23) 中的微分同胚，我们得到一个丛之间的 Diff(M)- 等变微分同胚，其底空间为 Flag$_{\mathcal{S},\iota}$(M),

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota}(M)=\mathrm{Emb}_{S_r}(M)\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)}\mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S}). \tag{25}$$

2.4 Diff(M) 在加权非线性旗空间上的作用

In th本节旨在 d描述b加权he Diff(M) orb其位于F中 lag$^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)$，见T h定理 2.11 bel

现在，设 $\iota=(\iota_1,\dots,\iota_{r-1})$ 是一组嵌入 $\iota_i\colon\ S_i\to S_{i+1}$，并假设 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_r)\in$ Den$_{\times}$($\mathcal{S}$)。我们将 M 中类型为 ($\mathcal{S},\iota,\mu$) 的加权旗空间定义为

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M):=\left\{\big((N_1,\nu_1),\dots,(N_r,\nu_r)\big)\in\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)\middle|\begin{array}{c}\big(S_1\xrightarrow{\iota_1}S_2\xrightarrow{\iota_2}\cdots\to S_r,\mu_1,\dots,\mu_r\big)\\ \cong\big(N_1\subseteq N_2\subseteq\cdots\subseteq N_r,\nu_1,\dots,\nu_r\big)\end{array}\right\},$$

也就是说，所有加权旗 $\big((N_1,\nu_1)\dots,(N_r,\nu_r)\big)$ 中满足以下条件的空间：存在微分同胚 $S_i\to N_i$，$1\le i\le r$，使其与典范包含映射 $N_i\subseteq N_{i+1}$交织，并将 μ_i 映到 ν_i。

将 μ 的 Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 轨道记为 Den$(\mathcal{S})_{\iota,\,\mu}$，则 (25) 中的微分同胚限制为一个 Diff$(M)$ 等变双射

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)=\mathrm{Emb}_{S_r}(M)\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)}\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}. \tag{26}$$

考虑有限维向量空间

$$H(\mathcal{S},\iota):=\prod_{i=1}^{r}H^{k_i}\big(S_i,\iota_{i-1}(S_{i-1});\mathcal{O}_{S_i}\big)=\prod_{i=1}^{r}H_0\big(S_i\setminus\iota_{i-1}(S_{i-1});\mathbb{R}\big). \tag{27}$$

这里，左侧表示以定向丛为系数的相对德拉姆上同调，我们采用约定 $S_0=\emptyset$。右侧的 Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 等变识别表示庞加莱–勒夫谢茨对偶。我们有一个 Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 等变线性映射

$$h_{\mathcal{S},\iota}\colon\mathrm{Den}(\mathcal{S})\to H(\mathcal{S},\iota),\qquad h_{\mathcal{S},\iota}(\mu_1,\dots,\mu_r):=\big([\mu_1],\dots,[\mu_r]\big). \tag{28}$$

因此，确定类 $[\mu]:=h_{\mathcal{S},\iota}(\mu)$，等价于指定 μ_i 在 $S_i\setminus\iota_{i-1}(S_{i-1})$ 的每个连通分支上的积分，其中 $i=1,\dots,r$。

注 2.9（较大的余维）。如果余维 dim$(S_i)-$ dim(S_{i-1}) 都严格大于一，那么 $H^{k_i}\big(S_i,\iota_{i-1}(S_{i-1});\mathcal{O}_{S_i}\big)=H^{k_i}\big(S_i;\,\mathcal{O}_{S_i}\big)=H_0(S_i;\,\mathbb{R})$, and

$$H(\mathcal{S},\iota)=\prod_{i=1}^{r}H^{k_i}\big(S_i;\mathcal{O}_{S_i}\big)=\prod_{i=1}^{r}H_0\big(S_i;\mathbb{R}\big).$$

因此，在这种情况下，上同调空间 $H(\mathcal{S},\iota)$ 不依赖于嵌入 ι。

命题 2.10。在这种情况下，以下结论成立：

(a) Diff$(\mathcal{S},\iota)_0$ 轨道 μ 与凸集 Den$_\times(\mathcal{S})\cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}$，$([\mu])$ 重合。特别地，该轨道是 Den$_\times(\mathcal{S})$ 中的分裂光滑子流形，其余维有限，为 dim $H(\mathcal{S},\iota)$。

(b) Diff$(\mathcal{S},\iota)_0$ 在 Den$_\times(\mathcal{S})\cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}$，$([\mu])$ 上的作用存在局部光滑截面。

(c) 将 $[\mu]$ 的（有限）Diff$(\mathcal{S};\iota)$ 轨道记为 $H(\mathcal{S},\iota)_{[\mu]}$，则 μ 的 Diff$(\mathcal{S};\,\iota)$ 轨道为

$$\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}=\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S})\cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}\big(H(\mathcal{S},\iota)_{[\mu]}\big). \tag{29}$$

特别地，Den$(\mathcal{S})_{\iota,\,\mu}$ 是 Den$_\times(\mathcal{S})$ 中的分裂光滑子流形，其余维有限，为 dim $H(\mathcal{S},\iota)$，且切空间为

$$T_\alpha\,\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}=\ker h_{\mathcal{S},\iota}=\big\{(d\gamma_1,\dots,d\gamma_r):\gamma_i\in\Omega^{k_i-1}(S_i;\mathcal{O}_{S_i}),\iota_{i-1}^*\gamma_i=0\big\}. \tag{30}$$

此外，Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 在 Den$(\mathcal{S})_{\iota,\,\mu}$ 上的作用具有局部光滑截面。

(d) 典范包含 Den$(\mathcal{S})_{\iota,\,\mu}\subseteq\prod_{i=1}^{r}Den(S_i)_{\mu_i}$ 是一个有限余维的分裂光滑子流形。

我们将该命题的证明推迟，先给出本节的主要结果：

定理 2.11。在这种情况下，以下结论成立：

(a) 空间 Flag$^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}、\iota、\mu}(M)$ 是 Flag$^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}、\iota}(M)$ 中的一个分裂光滑子流形，其余维有限，为 dim $H(\mathcal{S},\iota)$。

(b) 典范的 Diff(M)-等变遗忘映射 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M) \to \mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\iota}(M)$ 是一个局部平凡光滑纤维丛，其典型纤维为 $\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}$。
(c) 典范包含 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M) \subseteq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}_{S_i,\mu_i}(M)$ 是一个分裂光滑子流形。

(d) $\mathrm{Diff}_c(M)$ 在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)$ 上的作用存在局部光滑截面。特别地，$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)$ 的每个连通分支都是一个 $\mathrm{Diff}_c(M)_0$ 轨道。此外，$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)$ 中的每个 $\mathrm{Diff}(M)$ 或 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 轨道都是若干连通分支的并。

证明。结论 (a) 和 (b) 可由 (25)、(26) 与命题 2.10(c) 合并推出。

结论 (c) 可由命题 2.10(d) 以及通过 (5) 和 (26) 中的微分同胚对 (22) 作的结构群约化推出，另见 (23)。

最后来看结论 (d)。根据命题 2.10(c)，$\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)$ 在 $\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}$ 上的（传递）作用存在局部光滑截面。$\mathrm{Diff}_c(M)$ 在 $\mathrm{Emb}_{S_r}(M)$ 上的作用也存在局部光滑截面，参见 [9, 引理 2.1(c)]。利用引理 A.1，我们得出 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)$ 上的作用存在局部光滑截面，参见 (25)。 □

我们将对旗的深度使用归纳法，借助下面这个关键引理证明命题 2.10；其证明暂且推迟。

引理 2.12。设 S 是 N 的闭子流形，满足 $\dim(S) < \dim(N) = n$，并考虑以下 $\mathrm{Diff}(N,S)$ 等变线性映射

$$h : \mathrm{Den}(N) \to H^n(N,S;\mathcal{O}_N), \qquad h(\mu) = [\mu].$$

那么，对于每个 $\kappa \in H^n(N,S;\mathcal{O}_N)$，自然的 $\mathrm{Diff}(N,S)_0$ 作用于

$$\mathrm{Diff}(S) \times \big(\mathrm{Den}_\times(N) \cap h^{-1}(\kappa)\big) \tag{31}$$

存在局部光滑截面。

命题 2.10 的证明。我们使用引理 2.12，对 r 进行归纳。将截断序列记为 $\mathcal{S}' := (S_1, \dots, S_{r-1})$、$\mu' := (\mu_1, \dots, \mu_{r-1})$ 和 $\iota' := (\iota_1, \dots, \iota_{r-2})$。根据归纳法，$\mathrm{Diff}(\mathcal{S}',\iota')_0$ 在 $\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}') \cap h^{-1}_{\mathcal{S}',\iota'}([\mu'])$ 上的作用存在局部光滑截面。因此，存在 $\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}') \cap h^{-1}_{\mathcal{S}',\iota'}([\mu'])$ 中包含 μ' 的开邻域 U'，以及一个光滑映射

$$\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}') \cap h^{-1}_{\mathcal{S}',\iota'}([\mu']) \supseteq U' \xrightarrow{\sigma'} \mathrm{Diff}(\mathcal{S}';\iota')_0,$$

使得对于所有 $\tilde{\mu}' \in U'$，我们都有

$$\big(\sigma'(\tilde{\mu}')\big)_* \mu' = \tilde{\mu}' \qquad \text{and} \qquad \sigma'(\mu') = \mathrm{id}\,. \tag{32}$$

回忆一下，$\mathrm{Diff}(\mathcal{S}',\iota')$ 是 $\mathrm{Diff}(S_{r-1})$ 中的分裂李子群，参见 [9, 命题 2.9(b) 和 2.10(a)]。利用 [9, 引理 2.1(d)]，这意味着 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)$ 是 $\mathrm{Diff}(S_r, \iota_{r-1}(S_{r-1}))$ 中的分裂李子群。因此，将引理 2.12 中的局部光滑截面加以限制，我们看到，$\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)_0$ 对 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S}',\iota') \times \big(\mathrm{Den}_\times(S_r) \cap h^{-1}([\mu_r])\big)$ 的作用具有局部光滑截面。换言之，存在 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S}';\iota')$ 中单位元的一个开邻域 V、$\mathrm{Den}_\times(S_r) \cap h^{-1}([\mu_r])$ 中 μ_r 的一个开邻域 U''，以及一个光滑映射

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{S}';\iota') \times \big(\mathrm{Den}_\times(S_r) \cap h^{-1}([\mu_r])\big) \supseteq V \times U'' \xrightarrow{\sigma''} \mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)_0,$$

使得对于所有 $g \in V$ 和 $\tilde{\mu}_r \in U''$，我们都有

$$\sigma''(g, \tilde{\mu}_r) \cdot (\mathrm{id}, \mu_r) = (g, \tilde{\mu}_r) \qquad \text{and} \qquad \sigma''(\mathrm{id}, \mu_r) = \mathrm{id}\,. \tag{33}$$

因此，$U := (\sigma')^{-1}(V) \times U''$ 是 $\mathrm{Den}_\mu(\mathcal{S}) \cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}([\mu])$ 的一个开邻域，并且

$$\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}) \cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}([\mu]) \supseteq U \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)_0, \qquad \sigma(\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_r) := \sigma''(\sigma'(\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{r-1}), \tilde{\mu}_r)$$

是 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)_0$ 对 $\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}) \cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}([\mu])$ 作用的局部光滑截面，即

$$\sigma(\mu) = \mathrm{id} \qquad \text{and} \qquad \sigma(\tilde{\mu})_*\mu = \tilde{\mu},$$

对所有 $\tilde{\mu} \in U$ 均成立。由凸性可知，$\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}) \cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}([\mu])$ 是连通的。因此，$\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)_0$ 的作用在 $\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}) \cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}([\mu])$ 上是传递的。这证明了 (a) 和 (b)。(c) 立即得出。

为证明 (d)，令 A 表示 $\prod_{i=1}^r H^{k_i}(S_i;\mathcal{O}_{S_i})^{[\mu_i]}$ 在典范线性满射 $H(\mathcal{S},\iota) \to \prod_{i=1}^r H^{k_i}(S_i;\mathcal{O}_{S_i})$ 下的原像。因此，A 是 $H(\mathcal{S},\iota)$ 中仿射子空间的有限并。由 (7) 可知，我们有 $\prod_{i=1}^r \mathrm{Den}(S_i)_{\mu_i} = \mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}) \cap h^{-1}_{\mathcal{S},\iota}(A)$。结合 (29)，我们得出 $\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}$ 是 $\prod_{i=1}^r \mathrm{Den}(S_i)_{\mu_i}$ 中余维为 $\dim A$ 的分裂光滑子流形。 □

接下来，我们来证明引理 2.12 的以下无穷小版本：

引理 2.13. 设 S 是 N 的闭子流形，且 $\dim(S) < \dim(N) = n$. 假设 $\mu \in \mathrm{Den}_\times(N)$，$\gamma \in \Omega^{n-1}(N,S;\mathcal{O}_N) := \{\alpha \in \Omega(N;\mathcal{O}_N) : \iota_S^*\alpha = 0\}$，且 $Z \in \mathfrak{X}(S)$. 那么存在一个向量场 $X \in \mathfrak{X}(N)$，使得 $L_X\mu = d\gamma$ 且 $X|_S = Z$.

证明. 令 $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(N)$ 为 Z 的任意一个延拓，即 $\tilde{Z}|_S = Z$. 注意到，将 $i_{\tilde{Z}}\mu \in \Omega^{n-1}(N;\mathcal{O}_N)$ 拉回到 S 后为零，因此 $\beta := \gamma - i_{\tilde{Z}}\mu \in \Omega^{n-1}(N;\mathcal{O}_N)$ 也满足同样性质。

我们先构造 $\tilde{\gamma} \in \Omega^{n-1}(N;\mathcal{O}_N)$，使得 $d\tilde{\gamma} = d\beta$ 且 $\tilde{\gamma}|_S = 0$. 为此，我们固定一个光滑同伦 $h\colon N \times [0,1] \to N$，使得 $h_1 = \mathrm{id}_N$，$h_t|_S = \mathrm{id}_S$，并且 h_0 将 S 的一个邻域映入 S. 考虑相应的链同伦 $\phi\colon \Omega^*(N;\mathcal{O}_N) \to \Omega^{*-1}(N;\mathcal{O}_N)$，定义为 $\phi(\alpha) := \int_0^1 \iota_t^* i_{\partial_t} h^*\alpha\, dt$，其中 $\iota_t\colon N \to N \times [0,1]$ 表示在 t 处的包含映射，也就是说，$\iota_t(x) := (x,t)$. 那么，对于所有形式 $\alpha \in \Omega^*(N;\mathcal{O}_N)$，都有 $\phi(\alpha)|_S = 0$ 且 $d(\phi(\alpha)) + \phi(d\alpha) = h_1^*\alpha - h_0^*\alpha$. 特别地，$d\alpha = d\big(h_0^*\alpha + \phi(d\alpha)\big)$. 定义 $\tilde{\gamma} := h_0^*\beta + \phi(d\beta)$，即可得到 $d\tilde{\gamma} = d\beta$. 此外，$h_0^*\beta|_S = 0$，因为 β 拉回到 S 后为零，因此如所需有 $\tilde{\gamma}|_S = 0$.

定义向量场 $Y \in \mathfrak{X}(N)$ 为 $i_Y\mu := \tilde{\gamma}$，我们得到 $Y|_S = 0$ 和 $L_Y\mu = di_Y\mu = d\tilde{\gamma} = d(\gamma - i_{\tilde{Z}}\mu) = d\gamma - L_{\tilde{Z}}\mu$。因此，向量场 $X := Z + Y$ 具有所需的性质。 □

引理 2.12 的证明。回顾一下，$\mathrm{Diff}(N,S)$ 在 $\mathrm{Diff}(S) \times \mathrm{Den}(N)$ 上的无穷小作用为

$$\zeta_X(f,\mu) = \big(R_{X|_S}(f), -L_X\mu\big),$$

其中 $X \in \mathfrak{X}(N,S)$，$f \in \mathrm{Diff}(S)$，且 $\mu \in \mathrm{Den}(S)$。这里，对于 $Z \in T_{\mathrm{id}}\mathrm{Diff}(S) = \mathfrak{X}(S)$，我们令 $R_Z(f)$ 表示 $\mathrm{Diff}(S)$ 上满足 $R_Z(\mathrm{id}) = Z$ 的右不变向量场。

注意，引理 2.13 的证明中，可以选取为关于 Z 光滑（且线性）依赖。因此，该引理的证明实际上给出了一个光滑映射

$$\tilde{\sigma} : T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Diff}(S) \times T\big(\mathrm{Den}_\times(N) \cap h^{-1}(\kappa)\big) \to \mathfrak{X}(N,S)$$

使得对于所有 $Z \in \mathfrak{X}(S) = T_{\mathrm{id}}\mathrm{Diff}(S)$、$\mu \in \mathrm{Den}_\times(N) \cap h^{-1}(\kappa)$，以及 $d\gamma \in d\Omega^{n-1}(N,S;\mathcal{O}_N) = T_\mu\big(\mathrm{Den}_\times(N) \cap h^{-1}(\kappa)\big)$，均有 $\zeta_{\tilde{\sigma}(Z,d\gamma)}(\mathrm{id}\ \mu) = (Z, d\gamma)$。将此与 $T\mathrm{Diff}(S)$ 的右平凡化相结合，我们得到一个光滑映射

$$\sigma : T\Big(\mathrm{Diff}(S) \times \big(\mathrm{Den}_\times(N) \cap h^{-1}(\kappa)\big)\Big) \to \mathfrak{X}(N,S)$$

使得对于所有 $f \in \mathrm{Diff}(S)$、$Z \in T_f\mathrm{Diff}(S)$、$\mu \in \mathrm{Den}_\times(N) \cap h^{-1}(\kappa)$ 以及 $\xi \in T_\mu\big(\mathrm{Den}_\times(N) \cap h^{-1}(\kappa)\big)$，$\zeta_{\sigma(Z,\xi)}(f,\mu) = (Z,\xi)$。由于 $\mathrm{Diff}(N,S)$ 是正则李群，我们可以应用引理 A.2，得出 $\mathrm{Diff}(N,S)_0$ 作用于 (31) 时存在局部光滑截面。 □

定理 2.11 的证明至此完成。

注 2.14。鉴于备注 2.3，我们预期各向同性子群

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota,\mu) := \big\{(g_1,\dots,g_r) \in \mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota) \;\big|\; \forall i : g_i^*\mu_i = \mu_i\big\} \tag{34}$$

是 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)$ 的分裂李子群，其李代数为

$$\mathfrak{X}(\mathcal{S},\iota,\mu) = \big\{(Z_1,\dots,Z_r) \in \mathfrak{X}(\mathcal{S},\iota) \;\big|\; \forall i : L_{Z_i}\mu_i = 0\big\}, \tag{35}$$

由作用给出的满射映射 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota) \to \mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}$ 是一个局部平凡的光滑主纤维丛，其结构群为 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota,\mu)$。如果能够证明，只要 S 是 N 的闭子流形，且 μ 是 N 上的体积密度，各向同性群 $\{f \in \mathrm{Diff}(N,S) : f|_S = \mathrm{id}\ f^*\mu = \mu\}$ 就是 $\mathrm{Diff}(N,S)$ 中的分裂李子群，那么通过对旗的深度作归纳法，便可相当直接地得到这一结论。[11,第 III.2.5.3 定理的证明（第 203] 页）涵盖了 $S = \emptyset$ 的情形。然而，将上述证明推广到非平凡的 S 并非完全直接，因此我们不打算在此证明。注意，通过 (24) 中的微分同胚，群 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota,\mu)$ 对应于 $\mathrm{Diff}(S_r;\Sigma)$ 的子群，该子群由所有保持 μ_r 且其在 Σ_i 上的限制保持 $(\iota_{r-1}\circ\cdots\circ\iota_i)_*\mu_i$（其中 $1 \le i \le r-1$）的微分同胚构成。类似地，李代数 $\mathfrak{X}(\mathcal{S};\iota,\mu)$ 可以识别为 $\mathfrak{X}(S_r;\Sigma)$ 中相应的子代数。

如果前一段中提出的预期确实成立，那么这个满射且关于 $\mathrm{Diff}(M)$ 等变的映射

$$\mathrm{Emb}_{S_r}(M) = \mathrm{Fr}_{\mathcal{S},\iota}(M) \to \mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M), \tag{36}$$

$$(\varphi_1,\dots,\varphi_r) \mapsto \Big(\big(\varphi_1(S_1),(\varphi_1)_*\mu_1\big),\dots,\big(\varphi_r(S_r),(\varphi_r)_*\mu_r\big)\Big), \tag{37}$$

将是一个局部平凡的光滑主纤维丛，其结构群为 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota,\mu)$，见式（26）。此外，推广备注 2.4，加权旗 $(\mathcal{N},\nu)$ 的各向同性群，

$$\mathrm{Diff}_c(M;\mathcal{N},\nu) := \big\{g \in \mathrm{Diff}_c(M) \;\big|\; \forall i : g(N_i) = N_i, g|_{N_i}^*\nu_i = \nu_i\big\},$$

将是 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 的一个分裂李子群，因为它与丛投影 $\mathrm{Diff}_c(M;\mathcal{N}) \to \mathrm{Diff}(\mathcal{N},\iota_{\mathcal{N}})$ 下 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota,\mu)$ 的原像一致，参见 [9,引理 2.1(d)、命题 2.9(b) 和命题 2.10(a)]。此外，该作用所给出的轨道映射 $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)_{(\mathcal{N},\nu)}$ 将是一个以 $\mathrm{Diff}_c(M;\mathcal{N},\nu)$ 为结构群的局部平凡光滑主丛。因此，$(\mathcal{N},\nu)$ 的 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 轨道可视为一个齐性空间

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)_{(\mathcal{N},\nu)} = \mathrm{Diff}_c(M)/\mathrm{Diff}_c(M;\mathcal{N},\nu).$$

2.5 同调描述

I本节中，我们将更明确地描述流形 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\,\iota,\,\mu}(M)$.

若 $\mathcal{N}=(N_1,\dots,N_r)$ 是 M 中类型为 $\mathcal{S}$ 的非线性旗，则定义

$$H(\mathcal{N}):=\prod_{i=1}^{r}H^{k_i}\big(N_i,N_{i-1};\mathcal{O}_{N_i}\big)=\prod_{i=1}^{r}H_0\big(N_i\setminus N_{i-1};\mathbb{R}\big),$$

约定 $N_0=\emptyset$。

我们将 M 中类型为 $\mathcal{S}$ 的同调加权旗空间定义为

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}}(M):=\big\{(\mathcal{N},[\nu]):\mathcal{N}\in\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M),[\nu]\in H(\mathcal{N})\big\}$$

注意，我们有一个 Diff(M) 等变遗忘映射

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}}(M)\to\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M),\tag{38}$$

以及一个 Diff(M) 等变映射

$$h_{\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)}:\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S}}(M)\to\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}}(M),\qquad(\mathcal{N},\nu)\mapsto(\mathcal{N},[\nu]).\tag{39}$$

令 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}\,\iota,\,}(M)$ 表示在投影 (38) 下，开子集 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\,\iota}(M)$ 的原像。利用典范的 Diff(M) 等变识别

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S},\iota}(M)=\mathrm{Emb}_{S_r}(M)\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)}H(\mathcal{S},\iota),\tag{40}$$

我们赋予 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}}(M)$ 光滑向量丛的结构，使其成为 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$ 上秩有限（可能不恒定）的光滑向量丛，并配备投影 (38)。(39) 中的映射是覆盖 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)$ 的光滑丛映射。事实上，通过 (25) 和 (40) 中的识别，(28) 中的映射 $h_{\mathcal{S},\,\iota}$ 诱导出一个丛映射 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\,\iota}(M)\to\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}\,\iota,\,}(M)$，它与 (39) 的限制相一致。

我们将 M 中类型为 $(\mathcal{S},\iota,[\mu])$ 的同调加权旗空间定义为

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S},\iota,[\mu]}(M):=\left\{(\mathcal{N},[\nu])\in\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}}(M)\,\middle|\,\begin{array}{c}\big(S_1\xrightarrow{\iota_1}S_2\xrightarrow{\iota_2}\cdots\to S_r,[\mu]\big)\\ \cong\big(N_1\subseteq N_2\subseteq\cdots\subseteq N_r,[\nu]\big)\end{array}\right\},$$

也就是说，该空间由 M 中所有满足下述条件的同调加权旗 $(\mathcal{N},[\nu])$ 构成：存在微分同胚 $S_i\to N_i$，$1\le i\le r$，使其与典范包含 $N_i\subseteq N_{i+1}$ 相互交织，并将 $[\mu]\in H(\mathcal{S},\iota)$ 映至 $[\nu]\in H(\mathcal{N})$。(40) 中的微分同胚限制后给出一个双射

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S},\iota,[\mu]}(M)=\mathrm{Emb}_{S_r}(M)\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)}H(\mathcal{S},\iota)_{[\mu]}.\tag{41}$$

因此，由于轨道 $H(\mathcal{S},\iota)_{[\mu]}$ 是有限的，$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}\,\iota,,[\mu]}(M)$ 是 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S}\,\iota,}(M)$ 中一个 Diff(M) 不变的闭子流形，其余维为 $\dim H(\mathcal{S},\iota)$，由 (40) 得出。此外，遗忘映射

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S},\iota,[\mu]}(M)\to\mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\iota}(M)\tag{42}$$

是一个 Diff(M) 等变覆盖映射，且具有有限纤维。

我们用以下结果补充定理 2.11：

定理 2.15。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)=h^{-1}_{\mathrm{Flag}_{\mathcal{S}}(M)}\big(\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S},\iota,[\mu]}(M)\big).$$

证明。由命题 2.10(c) 中的恒等式 (29)，结合 (26) 和 (41，可得此结论). □

注 2.16。若 Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 对 $H(\mathcal{S},\iota)$ 的作用是平凡的，那么根据命题 2.10，Den$_\times(\mathcal{S})$ 中的 Diff$(\mathcal{S},\iota)_0$ 和 Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 轨道重合，且式 (42) 中的遗忘（覆盖）映射是微分同胚，$\mathrm{Flag}^{\mathrm{hwt}}_{\mathcal{S},\iota,[\mu]}(M) = \mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\iota}(M)$。特别是，当所有 $S_i\setminus\iota(S_{i-1})$ 都连通时，便会出现这种情况，如下文例 2.17 和 2.18 所示。在后一连通性假设下，$H(\mathcal{S},\iota)=\mathbb{R}^r$ 通过同构 $[\mu]\mapsto\left(\int_{S_1}\mu_1,\dots,\int_{S_r}\mu_r\right)$ 和

$$\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}=\left\{\alpha\in\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}):\int_{S_i}\alpha_i=\int_{S_i}\mu_i\right\}.$$

此外，定理 2.15 保证

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)=\left\{(\mathcal{N},\nu)\in\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota}(M):\int_{N_i}\nu_i=\int_{S_i}\mu_i\right\}. \tag{43}$$

这也适用于备注 2.9 中的情形，前提是每个模型流形 S_i 都是连通的。同类嵌套球面的描述可见例 2.19。

例 2.17（嵌套环面）。若 $(\mathcal{S},\iota)$ 表示环面之间的标准（经向）嵌入，$\mathbb{T}^0\subseteq\mathbb{T}^1\subseteq\cdots\subseteq\mathbb{T}^r$，则 $H(\mathcal{S},\iota)=\mathbb{R}^{r+1}$ 通过同构 $[\mu]\mapsto(\int_{\mathbb{T}^i}\mu_i)$。

例 2.18（嵌套射影空间）。若 $(\mathcal{S},\iota)$ 表示射影空间之间的标准嵌入，$\mathbb{P}^0\subseteq\mathbb{P}^1\subseteq\cdots\subseteq\mathbb{P}^r$，则 $H(\mathcal{S},\iota)=\mathbb{R}^{r+1}$ 通过同构 $[\mu]\mapsto(\int_{\mathbb{P}^i}\mu_i)$。

例 2.19（嵌套球面 [13]）。若 $(\mathcal{S},\iota)$ 表示球面之间的标准赤道嵌入，$S^0\subseteq S^1\subseteq\cdots\subseteq S^r$，则 $H(\mathcal{S},\iota)=\mathbb{R}^{2(r+1)}$。由此同构赋予$[\mu]\in H(\mathcal{S},\iota)$的 $2(r+1)$ 个数为

$$(a_0^+,a_0^-,a_1^+,a_1^-,\dots,a_r^+,a_r^-)=\left(\int_{S^0_+}\mu_0,\int_{S^0_-}\mu_0,\int_{S^1_+}\mu_1,\int_{S^1_-}\mu_1,\dots,\int_{S^r_+}\mu_r,\int_{S^r_-}\mu_r\right),$$

其中，S^i_+ 和 S^i_- 分别表示 S^i的北半球和南半球。考察关于超平面的反射可知，对于每个 $0\le i\le r$，都存在一个 Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 中的微分同胚，将S^i_+ 与S^i_-互换，同时保持所有其他半球$S^k_\pm$不变。这样的微分同胚会将 a_i^+与 a_i^-互换，同时保持所有其他数 $a_k^\pm$ 不变。因此，Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 轨道 $H(\mathcal{S},\iota)_{[\mu]}$ 有 2^s 个元素，其中 s 是满足 $a_i^+\neq a_i^-$的 $0\le i\le r$ 的数量。实际上，Diff$(\mathcal{S},\iota)$ 在 $H(\mathcal{S},\iota)\cong\mathbb{R}^{2(r+1)}$ 上的作用可分解为一个通过交换或不交换数字 a_i^+和 a_i^-实现的 $(\mathbb{Z}_2)^{2(r+1)}$ 作用。我们得到与（43）类似的描述：

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)=\left\{(\mathcal{N},\nu)\in\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\iota}(M)\;\middle|\;\begin{array}{l}\{\int_{N_i^+}\nu_i,\int_{N_i^-}\nu_i\}=\{a_i^+,a_i^-\},\text{ where }N_i^+\text{ and }N_i^-\\ \text{denote the connected components of }N_i\setminus N_{i-1}\end{array}\right\}. \tag{44}$$

3 哈密顿群的余伴随轨道

在本节中，(M,ω) 表示一个辛流形。在 M 中所有类型为 S_r 的各向同性子流形所构成的非线性格拉斯曼流形记为 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$，它是 $\mathrm{Gr}_{S_r}(M)$ 中一个在哈密顿群作用下保持不变的分裂光滑子流形。事实上，$\mathrm{Ham}(M)$ 的轨道在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$ 中给出了一个有限余维的光滑叶状结构，称为等作用叶状结构 [26, 15]。

设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$ 中的等体积叶，并令 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{等漂移叶}\mathcal{S},\,\iota,\,\mu}(M)|_{\mathcal{L}}$ 表示 $\mathcal{L}$ 在典范丛投影 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\,\iota,\,\mu}(M)\to\mathrm{Gr}_{S_r}(M)$ 下的原像。我们将证明，

$\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 等漂移叶$\mathcal{S},\ \iota,\ \mu(M)|_{\mathcal{L}}$ 上的自然作用存在局部光滑截面。特别地，后一个空间的每个连通分支都是 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的一个轨道。

空间 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 各向同性$\mathcal{S},\ \iota,\ \mu(M)|_{\mathcal{L}}$带有一个典范的弱非退化辛形式，而 (18) 的限制给出了一个 $\mathrm{Ham}(M)$-等变单射动量映射，对应于 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的作用，

$$J\colon \mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)|_{\mathcal{L}} \hookrightarrow \mathfrak{ham}_c(M)^*, \quad \langle J(\mathcal{N},\nu), X_f\rangle = \sum_{i=1}^{r}\int_{N_i} f\nu_i.$$

该动量映射 J将 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 各向同性$\mathcal{S},\ \iota,\ \mu(M)|_{\mathcal{L}}$的每个连通分支一一映到相应的余伴随轨道，参见定理 3.14。由此，我们识别出可由加权非线性旗建模的哈密顿群 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的余伴随轨道。

本节内容受 [26, 15, 7] 关于加权各向同性非线性格拉斯曼流形的结果启发。

3.1 等辛叶作为 $\mathrm{Ham}(M)$ 的轨道

鉴于各向同性嵌入的管状邻域定理， [23, 24], 所有类型为 S 、位于 M 中的各向同性子流形构成 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_S(M)$ 的一个分裂光滑子流形，参见例如 [15, 第 8] 节。在各向同性子流形 N 处的切空间为

$$T_N\,\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_S(M) = \{u_N \in \Gamma(TN^{\perp}) | \iota_N^* i_{u_N}\omega \in \Omega^1(N)\ \text{closed}\},$$

其中 $TN^{\perp}:= TM|_N/TN$表示 N的法丛。

Weinstein 在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_S(M)$ 上的 [26] 等漂移分布 $\underline{\mathcal{D}}$ 定义为

$$\underline{\mathcal{D}}_N := \{u_N \in \Gamma(TN^{\perp}) | \iota_N^* i_{u_N}\omega \in dC^\infty(N)\} \tag{45}$$

其有限余维为 $\dim\ H^1(S;\mathbb{R})$。这是一个可积分布 [26, 15]，其叶是 $\mathrm{Ham}(M)$ 的轨道。它在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_S(M)$ 上诱导出一个称为等作用叶状结构的光滑叶状结构。特别地，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_S(M)$ 中的 $\mathrm{Ham}(M)$ 轨道是分裂光滑子流形。

将 (1) 中的基本标架丛加以限制，可得一个主 $\mathrm{Diff}(S)$ 丛 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_S(M) \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_S(M)$，其全空间为 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_S(M)$，这是 $\mathrm{Emb}_S(M)$ 中由所有各向同性嵌入组成的分裂光滑子流形。在 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_S(M)$ 上，我们考虑等漂移分布 $\underline{\mathcal{D}}$的拉回：

$$\mathcal{D}_\varphi := \big\{u_\varphi \in \Gamma(\varphi^*TM) : \varphi^* i_{u_\varphi}\omega \in dC^\infty(S)\big\}. \tag{46}$$

这是一个可积分布，其余维相同，为 $\dim\ H^1(S;\mathbb{R})$； $\mathcal{D}$ 的叶是 $\underline{\mathcal{D}}$ 的叶之原像中的连通分支。根据 [26, 15], ，群 $\mathrm{Ham}(M)$ 在 $\mathcal{D}$ 的叶上可传递作用。我们需要命题 3.1 中稍强一些的后续结论。

紧支哈密顿向量场的李代数记作 $\mathfrak{ham}_c(M) = \{X_f\colon\ f \in C_c^\infty(M)\}$。我们将 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 记为通过积分 $\mathfrak{ham}_c(M)$ 中的含时向量场得到的微分同胚群。出于我们的目的，无须将 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 视为无限维李群，参见 [14, 第 43 节13]。所谓到 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的光滑映射（截面），我们仅指一个到 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 的光滑映射，且其取值均属于 $\mathrm{Ham}_c(M)$。

命题 3.1. $\mathrm{Ham}_c(M)$ 在等作用叶状结构$\mathcal{D}$ 的每个叶 $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_S(M)$ 上的作用都存在局部光滑截面。

证明. 为了证明无穷小传递性，设 $\varphi \in \mathrm{Emb}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 且 $u_\varphi \in \mathcal{D}_\varphi$，参见 (46)。因此，存在 $f \in C^\infty(S)$ 使得 $df = \varphi^* i_{u_\varphi}\omega$。我们将 f扩展为函数 $f_1 \in C_c^\infty(M)$，使得 $f = f_1 \circ \varphi$。定义在 M 上沿着 S 的1-形式 β 为

$$\beta = df_1 \circ \varphi - i_{u_\varphi}\omega \in \Gamma(\varphi^* T^*M) \tag{47}$$

在与 $\varphi(S) \subseteq M$ 相切的向量上取值为零。因此，β 可视为法丛 $T\varphi(S)^\perp$ 上的纤维线性函数，其沿零截面 $\varphi(S)$ 的微分与β 本身一致。于是，借助 $\varphi(S)$ 在 M 中的管状邻域以及一个适当的隆起函数，我们得到 $f_2 \in C_c^\infty(M)$，使得 $\beta = df_2 \circ \varphi$。由 (47) 可知，对于 $f = f_1 - f_2$，有 $df \circ \varphi = i_{u_\varphi}\omega$。因此，我们得出结论：$u_\varphi = X_f \circ \varphi$ 是哈密顿向量场 $X_f \in \mathfrak{ham}_c(M)$ 在 φ 处的无穷小生成元。

例如，利用黎曼度量构造管状邻域，我们看到，对于固定各向同性嵌入 $\varphi_0 \in \mathcal{E}$ 的某个充分小开邻域中的 φ，函数 f 可以选取得关于 φ 和 u_φ 光滑变化。因此，我们可以应用引理 A.2，并得出 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 作用存在局部光滑截面。 □

推论 3.2。$\mathrm{Ham}_c(M)$ 在等作用叶状结构 $\underline{\mathcal{D}}$ 的每个叶 $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 上的作用都具有局部光滑截面。

例 3.3。平面中的每条嵌入闭曲线都是 $(\mathbb{R}^2, \omega)$ 的拉格朗日子流形，其中 ω 是典范面积形式，因而是 $\mathrm{Gr}_{S^1}^{\mathrm{iso}}(\mathbb{R}^2)$ 的一个元素。等漂移分布 $\underline{\mathcal{D}}$ 的余维为一。围成面积 a 唯一确定一个等漂移叶 $\mathcal{L}_a \subseteq \mathrm{Gr}_{S^1}^{\mathrm{iso}}(\mathbb{R}^2)$，即 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的一个轨道。

对于 $\mathbb{R}^{2k}$ 中的拉格朗日 k-环面，也会出现类似现象，即 $\mathrm{Gr}_{\mathbb{T}^k}^{\mathrm{iso}}(\mathbb{R}^{2k})$ 的元素，其中 $\mathbb{T}^k := (S^1)^k$。对于任意 $\varphi \in \mathrm{Emb}_{\mathbb{T}^k}^{\mathrm{iso}}(\mathbb{R}^{2k})$，我们赋予它由嵌入的 k-环面的第 i 条子午线 $\varphi_i(\theta) = \varphi(1, \dots, \theta, \dots, 1)$ 所围成的曲面的辛面积 a_i。这些数值与其同伦类中子午线的选择无关，也与以该子午线为边界的曲面的选择无关。k-元组 $(a_1, \dots, a_k)$ 是等作用变形下的不变量。实际上，a_i 是第 i 条子午线的作用积分，定义见 [26]。

令 $\mathcal{E}_{a_1,\dots,a_k} \subseteq \mathrm{Emb}_{\mathbb{T}^k}^{\mathrm{iso}}(\mathbb{R}^{2k})$ 表示所有具有辛面积 $a_1, \dots, a_k$ 的各向同性嵌入所构成的空间。它是拉格朗日嵌入的等漂移叶的并集，但不一定在 $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^k)$ 作用下保持不变。$\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^k)$ 在 k-元组 $(a_1, \dots, a_k)$ 上的作用可分解为一个 $\mathrm{GL}(k, \mathbb{Z})$ 作用。令 $[a_1, \dots, a_k]$ 表示 $(a_1, \dots, a_k)$ 的轨道。我们将 $\mathcal{L}_{[a_1,\dots,a_k]} \subseteq \mathrm{Gr}_{\mathbb{T}^k}^{\mathrm{iso}}(\mathbb{R}^{2k})$ 定义为 $\mathcal{E}_{a_1,\dots,a_k}$ 在主 $\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^k)$ 丛投影 (1) 下的像。因此，$\mathcal{L}_{[a_1,\dots,a_k]}$ 是 $\mathbb{R}^{2k}$ 中拉格朗日 k-环面的等漂移叶的并集。

对 $\mathcal{L}_{[a_1,\dots,a_k]}$ 还有一种直接描述。给定一个拉格朗日环面 $N \in \mathrm{Gr}_{\mathbb{T}^k}^S(\mathbb{R}^{2k})$，我们选取 $H_1(N, \mathbb{Z})$ 的一个基 $\{[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]\}$，其中 γ_i 是 N 中作用积分为 a_i 的回路。我们注意到，$\mathrm{GL}(k, \mathbb{Z})$ 轨道 $[a_1, \dots, a_k]$ 与所作选择无关，而 $\mathcal{L}_{[a_1,\dots,a_k]}$ 是 $\mathrm{Gr}_{\mathbb{T}^k}^S(\mathbb{R}^{2k})$ 中所有满足这些作用积分的轨道为 $[a_1, \dots, a_k]$ 的拉格朗日环面所构成的空间。

我们还需要以下观察结果。

引理 3.4. 若 L 是 M中的各向同性子流形，则典范包含 $\mathrm{Gr}_S(L) \subseteq \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$是一个分裂光滑子流形。此外，$\mathrm{Gr}_S(L)$的每个连通分支都是$\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$中某个等体积叶内的分裂光滑子流形。

证明。设 $N \in \mathrm{Gr}_S(L)$，即 $N \cong S$ 是 L中的一个闭子流形。根据管状邻域定理，不妨假设 L 是向量丛$p\colon L \to N$的全空间，其中 $L \to N$是 N在 L中的法丛，并将 N与 L中的零截面等同。我们

有一个定义在 L上的向量丛典范短正合序列 $0 \to p^*L \to TL \to p^*TN \to 0$ 。在 L上选取一个线性联络，我们便得到该序列的一个分裂，从而得到一个定义在 L上的向量丛同构$TL \cong p^*TN \oplus p^*L$。对偶化后，我们得到一个定义在 L上的向量丛同构$T^*L \cong p^*T^*N \oplus p^*L^*$。我们将其视为一个微分同胚

$$T^*L \cong T^*N \oplus L \oplus L^*$$

该映射将零截面 $L \subseteq T^*L$ 恒等地映到右侧的直和项 L 。通过此同构，我们有

$$\theta_L = \pi_1^*\theta_N + \pi_2^*\kappa,$$

其中 π_1和 π_2分别表示从 $T^*N \oplus L \oplus L^*$到 T^*N和 $L \oplus L^*$的投影，$\theta_L \in \Omega^1(T^*L)$ 和 $\theta_N \in \Omega^1(T^*N)$ 表示典范1-形式，且 $\kappa \in \Omega^1(L \oplus L^*)$。事实上，直接计算得到 $\kappa(\xi) = \ell'(C(Tq \cdot \xi))$，其中 $x \in N$、$\ell \in L_x$、$\ell' \in L_x^*$、$\xi \in T_{(\ell,\ell')}(L \oplus L^*)$，$q\colon L \oplus L^* \to L$ 表示投影，而 C 表示 L上的线性联络，将其视为在 L上的纤维上线性映射 $C\colon TL \to p^*L$。

根据各向同性嵌入的管状邻域定理，[23, 24], 我们可以假设$M = T^*L \oplus p^*E$并且 $\omega = \tilde{\pi}_1^* d\theta_L + \tilde{\pi}_2^*\rho$，其中 E是位于 N上的向量丛，$\tilde{\pi}_1$和 $\tilde{\pi}_2$分别表示从 $T^*L \oplus p^*E$到 T^*L 和 p^*E的投影，而 ρ是定义在 p^*E全空间上的闭2-形式。将其与前一段中的微分同胚结合起来，我们得到一个微分同胚

$$M = T^*N \oplus L \oplus L^* \oplus E, \tag{48}$$

将 $L \subseteq M$ 恒等映射到右侧的直和项 L 上，并且满足

$$\omega = \pi_1^* d\theta_N + \pi_2^*\sigma,$$

其中 π_1和 π_2 分别表示从 $T^*N \oplus L \oplus L^* \oplus E$到 T^*N和 $L \oplus L^* \oplus E$的投影，而 σ是定义在 $L \oplus L^* \oplus E$全空间上的闭2-形式。

(48) 中的微分同胚给出了以 N 为中心的 $\mathrm{Gr}_S(M)$ 上光滑结构的一个（标准）图卡，

$$\Gamma(T^*N \oplus L \oplus L^* \oplus E) \to \mathrm{Gr}_S(M), \qquad \phi \mapsto \phi(N).$$

在此图卡中，包含映射 $\mathrm{Gr}_S(L) \subseteq \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M) \subseteq \mathrm{Gr}_S(M)$ 变为

$$\Gamma(L) \subseteq \{(\alpha, \xi) \in \Omega^1(N) \times \Gamma(L \oplus L^* \oplus E) : d\alpha + \xi^*\sigma = 0\} \subseteq \Omega^1(N) \times \Gamma(L \oplus L^* \oplus E). \tag{49}$$

由于 L 是各向同性的，σ 拉回到 L 后为零。因此，根据庞加莱引理，$\sigma = d\beta$ 是全空间 $L \oplus L^* \oplus E$ 上的一个 1-形式 β，且沿着 L 消失。通过由 $(\alpha, \xi) \mapsto (\alpha - \xi^*\beta, \xi)$ 给出的 $\Omega^1(N) \times \Gamma(L \oplus L^* \oplus E)$ 的微分同胚，(49) 中的包含映射变为线性包含映射，

$$\Gamma(L) \subseteq Z^1(N) \times \Gamma(L \oplus L^* \oplus E) \subseteq \Omega^1(N) \times \Gamma(L \oplus L^* \oplus E),$$

其中 $Z^1(N)$ 表示 N 上闭1-形式的空间。显然，这两个包含映射都存在补空间。特别地，$\mathrm{Gr}_S(L)$ 是 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 中的分裂光滑子流形。第二个断言源于以下事实：经过 N 的等体积叶对应于子空间 $B^1(N) \times \Gamma(L \oplus L^* \oplus E)$，参见 [15, 第 8] 节。

□

3.2 加权各向同性非线性格拉斯曼流形作为余伴随轨道

本节回顾 [26, 15, 7] 中关于哈密顿群 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的余伴随轨道的结果，这些轨道以 M 中类型为 S 的加权各向同性非线性格拉斯曼流形为模型，并将这些结果推广到可能非连通的模型流形 S。这里我们以一种便于推广至加权非线性旗流形的方式来介绍这些结果。

设 S 是一个闭的 k 维流形。典范丛投影 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}}(M) \to \mathrm{Gr}_S(M)$ 下 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 的原像是 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}}(M)$ 中的一个分裂光滑子流形，记作 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}_S}(M)$。式 (3) 中的微分同胚限制为 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 上丛之间的微分同胚，

$$\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}(M) = \mathrm{Emb}_S^{\mathrm{iso}}(M) \times_{\mathrm{Diff}(S)} \mathrm{Den}_\times(S).$$

典范丛投影 $\mathrm{Gr}_{S,\mu}^{\mathrm{wt}}(M) \to \mathrm{Gr}_S(M)$ 下 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 的原像是 $\mathrm{Gr}_{S,\mu}^{\mathrm{wt}}(M)$ 中的一个分裂光滑子流形，记作 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}_{S,\mu}}(M)$，并称为 M 中类型为 (S,μ) 的加权各向同性子流形的非线性格拉斯曼流形。式 (5) 中的微分同胚限制为 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 上丛之间的微分同胚，

$$\mathrm{Gr}_{S,\mu}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}(M) = \mathrm{Emb}_S^{\mathrm{iso}}(M) \times_{\mathrm{Diff}(S)} \mathrm{Den}(S)_\mu.$$

我们回顾一下在 (6) 中的 $\mathrm{Diff}(S)$ 等变线性映射 $h_S\colon \mathrm{Den}(S) \to H^k(S,\mathcal{O}_S)$，$h_S(\alpha) = [\alpha]$in，其核为 $d\Omega^{k-1}(S,\mathcal{O}_S)$；我们将其限制在 $\mathrm{Den}_\times(S)$ 上。可积分布 $\mathcal{D} \times \ker Th_S$ 在 $\mathrm{Emb}_S^{\mathrm{iso}}(M) \times \mathrm{Den}_\times(S)$ 上的乘积下降为一个可积分布

$$\bar{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \times_{\mathrm{Diff}(S)} \ker Th_S$$

位于 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}\mathrm{iso}_S(M)$ 上，其余维为 $\dim H^1(S;\mathbb{R}) + \dim H^k(S;\mathcal{O}_S)$。在遗忘映射 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}\mathrm{iso}_S(M) \to \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 下，$\bar{\mathcal{D}}$的像是在 (45) 中的等漂移分布 $\underline{\mathcal{D}}$in。根据 (7)，$\mathcal{G}$ 的每个叶都是 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 中某个等漂移叶 $\mathcal{L}$ 在丛投影 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}\mathrm{iso}_{S,\mu}(M) \to \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 下的原像的一个连通分支，其中 S 上存在某个体积密度 μ。因此，$\bar{\mathcal{D}}$的每个叶 $\mathcal{G}$都是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}\mathrm{iso}_{S,\mu}(M)$ 中余维为 $\dim H^1(S;\mathbb{R})$ 的分裂光滑子流形。

根据 [26, 15]，$\mathrm{Ham}(M)$ 在 $\bar{\mathcal{D}}$的叶上具有传递作用，我们需要下面这个稍强的结论。

命题 3.5. $\mathrm{Ham}_c(M)$ 在等作用叶状结构 $\bar{\mathcal{D}}$ 的每个叶 $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}\,\text{等}S}(M)$ 上的作用都存在局部光滑截面。

证明。设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 中的一个等体积叶，并令 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}\,\text{等}S,\ \mu}(M)|_{\mathcal{L}}$ 表示它在丛投影 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}\,\text{等}S,\ \mu}(M) \to \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{iso}}(M)$ 下的原像。只需证明 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}\,\text{等}S,\ \mu}(M)|_{\mathcal{L}}$ 上的作用存在局部光滑截面。(5) 中的微分同胚限制后仍是一个微分同胚

$$\mathrm{Gr}_{S,\mu}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}(M)|_{\mathcal{L}} = \mathrm{Emb}_S^{\mathrm{iso}}(M)|_{\mathcal{L}} \times_{\mathrm{Diff}(S)} \mathrm{Den}(S)_\mu. \tag{50}$$

根据命题 3.1，$\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $\mathrm{Emb}_S^{\mathrm{iso}}(M)|_{\mathcal{L}}$ 上的作用存在局部光滑截面。根据命题2.10(b)，$\mathrm{Diff}(S)$ 在 $\mathrm{Den}(S)_\mu$ 上的作用也存在局部光滑截面。利用附录中的引理 A.1，我们得出 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 (50) 中的伴随丛上的作用存在局部光滑截面。 □

引理 3.6 ([15])。定义在 $(\mathrm{Emb}_S^{\mathrm{iso}}(M) \times \mathrm{Den}_\times(S)\ \mathcal{D} \times \ker\ Th_S)$ 上的叶向微分 2-形式为

$$\Omega_{(\varphi,\alpha)}((u_\varphi, d\lambda),(v_\varphi, d\gamma)) := \int_S (\omega(u_\varphi, v_\varphi)\alpha - \varphi^* i_{u_\varphi}\omega \wedge \gamma + \varphi^* i_{v_\varphi}\omega \wedge \lambda), \tag{51}$$

是闭的，并且在 Diff(S) 作用下保持不变。此外，其核由 Diff(S) 作用的无穷小生成元张成。

根据引理 3.6，(51) 中的叶向微分 2-形式 Ω 可下降为 $(\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}S}(M)\ \bar{\mathcal{D}})$ 上的叶向辛形式 $\bar{\Omega}$。因此，等漂移分布 $\bar{\mathcal{D}}$ 在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}S}(M)^{\bar{}}$ 中的每个叶 $\mathcal{G}$ 都带有一个辛形式，即 Ω 的限制，我们仍用同一个字母表示。根据命题 3.5，$\mathcal{G}$ 是加权各向同性非线性格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}S}(M)$ 上 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 作用的一个轨道。此作用是哈密顿作用，其动量映射 [15] 是单射且 Ham(M)-等变的

$$J : \mathcal{G} \subseteq \mathrm{Gr}_S^{\mathrm{wt\,iso}}(M) \to \mathfrak{ham}_c(M)^*, \quad \langle J(N,\nu), X_f\rangle = \int_N f\nu. \tag{52}$$

这里我们使用 Symp(M)-等变同构 $\mathfrak{ham}_c(M) = C_0^\infty(M)$，其中后者表示 M 上所有紧支撑函数所构成的李代数，这些函数相对于刘维尔形式的积分在 M 的所有闭连通分支上均为零。

对于连通的 S，下面的定理在拉格朗日情形下归功于 Weinstein [26]，而在各向同性子流形情形下归功于 Lee [15]。

$^{\bar{}}$定理 3.7（[26, 15]）。式 (52) 中的动量映射 $J\colon(\mathcal{G},\Omega) \to \mathfrak{ham}_c(M)^*$ 是单射，并将其映到哈密顿群 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的一个余伴随轨道上。该余伴随轨道上的 Kostant-Kirillov-Souriau 辛形式 $^{\bar{}}$form ω_{KKS} 满足 $J^*\omega_{\mathrm{KKS}} = \Omega$。

在这一一般性下，该定理可由上述讨论和以下广为人知的结果推出（例如参见 [9] 中的附录）：

命题 3.8。设 G 在 $(\mathcal{M},\Omega)$ 上的作用是传递的，且等变动量映射 $J : \mathcal{M} \to \mathfrak{g}^*$ 是单射。那么 J 是单射，并将其映到 G 的一个余伴随轨道上。此外，它将该余伴随轨道上的 Kostant–Kirillov–Souriau 辛形式 ω_{KKS} 拉回为辛形式 Ω。

在闭连通流形 S 上施加附加限制 $H^1(S;\mathbb{R}) = 0$ 后，通过 Marsden-Weinstein 理想流体对偶对中的辛约化，也可以得到哈密顿群的同一余伴随轨道，如 [7]所示。

3.3 各向同性非线性旗流形

本节将上一节的构造推广到非线性旗。

与第 2.3 节一样，我们令 $\iota = (\iota_1, \dots, \iota_{r-1})$ 表示一组固定嵌入 $\iota_i\colon S_i \to S_{i+1}$。令 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\,\iota}(M)$ 表示 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$ 在典范丛投影 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\,\iota}(M) \to \mathrm{Gr}_{S_r}(M)$ 下的原像，参见备注 2.11]。这是 $\mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\,\iota}(M)$ 中的一个分裂光滑子流形，称为 M 中类型为 $(\mathcal{S},\iota)$ 的各向同性非线性旗流形。利用引理 3.4，并对旗的深度应用归纳法，可以很容易地证明典范包含映射

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\iota}(M) \subseteq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_i}(M) \tag{53}$$

是一个分裂光滑子流形。

令 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\mathrm{iso}\mathcal{S},\,\iota}(M)$ 表示在典范丛投影 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\,\iota}(M) \to \mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\,\iota}(M)$ 下，$\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\,\iota}(M)$ 的原像。这是 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\,\iota}(M)$ 中的一个分裂光滑子流形，称为

M 中类型为 $(\mathcal{S},\iota)$ 的加权各向同性非线性旗流形。式 (25) 中的微分同胚限制为丛在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\ \iota}(M)$ 上的一个微分同胚,

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt\,iso}}_{\mathcal{S},\iota}(M)=\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)}\mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S}).$$

典范包含映射 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}\mathcal{S},\ \iota}(M)\subseteq\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}S_i}(M)$ 根据 (53) 是一个分裂光滑子流形。

与第 2.4 节中一样，我们固定 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_r)\in\mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S})$，并令 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}\mathcal{S},\ \iota,\ \mu}(M)$ 表示在典范丛投影 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\ \iota,\ \mu}(M)\to\mathrm{Flag}_{\mathcal{S},\ \iota}(M)$ 下 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\ \iota}(M)$ 的原像。这是 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{\mathcal{S},\ \iota,\ \mu}(M)$ 中的一个分裂光滑子流形，称为 M 中类型为 $(\mathcal{S},\iota,\mu)$ 的加权各向同性非线性旗流形。(26) 中的微分同胚限制为一个微分同胚

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt\,iso}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)=\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)}\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}. \tag{54}$$

利用 (53)，并按照定理 2.11(c) 的证明进行推导，可以很容易地证明典范包含映射 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}\mathcal{S},\ \iota,\ \mu}(M)\subseteq\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{各向同性}S_i,\ \mu_i}(M)$ 是一个分裂光滑子流形。

回想一下,式 (28) 中的 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)$ 等变线性映射 $h_{\mathcal{S},\iota}\colon\mathrm{Den}(\mathcal{S})\to H(\mathcal{S},\iota)$，其核

$$\ker Th_{\mathcal{S},\iota}=\{(d\gamma_1,\dots,d\gamma_r):\gamma_i\in\Omega^{k_i-1}(S_i;\mathcal{O}_{S_i}),\iota_{i-1}^{*}\gamma_i=0\},$$

在 $\mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S})$ 上的限制也记为 $h_{\mathcal{S},\iota}$。与等漂移分布的乘积给出 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)\times\mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S})$ 上的可积布 $\mathcal{D}\times\ker Th_{\mathcal{S},\iota}$，其余维有限，维数为 $\dim H^1(S_r;\mathbb{R})+\dim H(\mathcal{S},\iota)$。这个 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)$ 不变分布下降为一个可积布

$$\bar{\mathcal{D}}=\mathcal{D}\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)}\ker Th_{\mathcal{S},\iota}$$

在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}\mathrm{iso}_{\mathcal{S},\iota}(M)$ 上的分布，且余维相同。通过遗忘映射，$\bar{\mathcal{D}}$ 的像是 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S}},_{\iota}(M)$ 上的一个余维为 $\dim H^1(S_r;\mathbb{R})$ 的可积分布；它与通过主丛投影从 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$ 上的 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)$ 不变等漂移分布 $\mathcal{D}$ 下降得到的分布重合。利用命题 2.10(c) 和 (54)，可知 $\bar{\mathcal{D}}$ 的每个叶 $\mathcal{F}$ 都是丛投影 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}\mathrm{iso}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)\to\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$ 下，某个 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$ 中等漂移叶 $\mathcal{L}$ 的原像中的一个连通分支，其中 $\mathcal{S}$ 上有某个体积密度 μ。因此，$\bar{\mathcal{D}}$ 的每个叶 $\mathcal{F}$ 都是 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}\mathrm{iso}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)$ 中余维为 $\dim H^1(S_r;\mathbb{R})$ 的分裂光滑子流形。

注记 3.9. 若 $H^1(S_r;\mathbb{R})=0$，则等作用叶状结构 $\bar{\mathcal{D}}$ 的叶是 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{等}\mathcal{S},\ \iota,\ \mu}(M)$ 的连通分支。

命题 3.10. 等作用叶状结构 $\bar{}$中的每个叶 $\mathcal{F}\subseteq\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{等}\mathcal{S},\ \iota}(M)$ 上的 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 作用都存在局部光滑截面。

证明. 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)$ 中的一个等体积叶，并令 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{等}S,\ \iota,\ \mu}(M)|_{\mathcal{L}}$ 表示它在典范投影 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}_{S,\ \iota,\ \mu}(M)\to\mathrm{Gr}_{S_r}(M)$ 下的原像。只需证明 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}{}_{\text{等}S,\ \iota,\ \mu}(M)|_{\mathcal{L}}$ 上的作用存在局部光滑截面。(54) 中的微分同胚限制为一个微分同胚

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt\,iso}}_{S,\iota,\mu}(M)|_{\mathcal{L}}=\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)|_{\mathcal{L}}\times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)}\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\mu}. \tag{55}$$

根据命题 3.1，$\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)|_{\mathcal{L}}$ 上的作用存在局部光滑截面。根据命题 2.10(c)，$\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\iota)$ 在 $\mathrm{Den}(\mathcal{S})_{\iota,\ \mu}$ 上的作用也存在局部光滑截面。借助引理 A.1，我们得出 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 在伴随丛 (55) 上的作用存在局部光滑截面。 □

推论 3.11。$\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\ \iota}(M)$ 上的等作用叶状结构的每个叶上都存在局部光滑截面。

3.4 加权各向同性非线性旗流形作为余伴随轨道 s

本节描述由加权各向同性非线性旗组成的哈密顿群的余伴随轨道。

我们的目标是在 $(\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 各向同性$\mathcal{S},\ \iota(M)\ \bar{\mathcal{D}})$ 上定义叶向辛形式 $\bar{}\Omega$。我们从 $(\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_i}(M)\ \times$ $\mathrm{Den}_\times(S_i)\ \mathcal{D}_i \times \ker\ Th_{S_i})$ 上的叶向微分 2-形式 Ω_i 开始，这些形式针对 $i = 1$、.....、r，按照引理 3.6 中的定义。令 $j_i := \iota_{r-1} \circ \cdots \circ \iota_i \in \mathrm{Emb}(S_i, S_r)$。我们考虑

$$q_i := j_i^* \times \mathrm{pr}_i : \mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M) \times \mathrm{Den}_\times(\mathcal{S}) \to \mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_i}(M) \times \mathrm{Den}_\times(S_i),$$

该映射将分布 $\mathcal{D} \times \ker Th_{\mathcal{S},\ \iota}$ 映到 $\mathcal{D}_i \times \ker\ Th_{S_i}$。于是

$$\Omega := \sum_{i=1}^{r} q_i^* \Omega_i \tag{56}$$

是 $(\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)\ \times \mathrm{Den}_\times(\mathcal{S})\ \mathcal{D} \times \ker Th_{\mathcal{S},\ \iota})$ 上的闭叶向微分 2-形式。

注 3.12. 分布 $\mathcal{D} \times \ker Th_{\mathcal{S},\ \iota}$ 在 Tq_i 下的像通常严格包含于分布 $\mathcal{D}_i \times \ker\ Th_{S_i}$。原因是第 i 个因子上的投影 $\mathrm{pr}_i\colon \ker Th_{\mathcal{S},\ \iota} \to \ker\ Th_{S_i}$ 通常不是满射。例如，在例 3.18 的情形中，$\iota\colon \{1, \ldots, k\} \to S^1$，其中 $k \geq 2$: 到第二个因子的投影为 $d\{\gamma \in C^\infty(S^1)\colon\ \gamma \circ \iota = 0\}$，严格包含于 $\ker\ Th_{S^1} = dC^\infty(S^1)$。

$\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\ \iota)$ 在 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)\ \times \mathrm{Den}_\times(\mathcal{S})$ 上的作用，

$$g \cdot (\varphi, (\alpha_i)) = (\varphi \circ g_r, (g_i^* \alpha_i)),\ \text{for}\ g = (g_1, \ldots, g_r) \in \mathrm{Diff}(\mathcal{S}; \iota), \tag{57}$$

其无穷小生成元具有如下形式

$$\zeta_Z(\varphi, (\alpha_i)) = (T\varphi \circ Z_r, (di_{Z_i} \alpha_i)),\ \text{for}\ Z = (Z_1, \ldots, Z_r) \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}; \iota). \tag{58}$$

它们属于可积分布 $\mathcal{D} \times \ker Th_{\mathcal{S},\iota}$。注意，$q_i = j_i^* \times \mathrm{pr}_i$ 在同态 $g \in \mathrm{Diff}(\mathcal{S}; \iota) \mapsto g_i \in \mathrm{Diff}(S_i)$ 下是等变的，因为 $j_i \circ g_i = g_r \circ j_i$ 对所有 i 均成立。现在，由于 Ω_i 在 $\mathrm{Diff}(S_i)$ 作用下不变，且根据 (56)，我们可推出 Ω 在 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S}; \iota)$ 作用下不变。

下一个引理是引理 3.6 的推广：

引理 3.13。叶状微分形式 Ω 的核由 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S};\ \iota)$ 在 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M)\ \times \mathrm{Den}_\times(\mathcal{S})$ 上的作用 (57) 的无穷小生成元张成。

证明。引理 3.6 中叶状二形式的公式给出了 Ω 的类似公式：

$$\begin{aligned}\Omega_{(\varphi,(\alpha_i))}((u_\varphi, (d\lambda_i)), (v_\varphi, (d\gamma_i))) = &\sum_{i=1}^{r} \int_{S_i} j_i^* \omega(u_\varphi, v_\varphi) \alpha_i \\ &- \sum_{i=1}^{r} \int_{S_i} j_i^* (\varphi^* i_{u_\varphi} \omega) \wedge \gamma_i + \sum_{i=1}^{r} \int_{S_i} j_i^* (\varphi^* i_{v_\varphi} \omega) \wedge \lambda_i. \end{aligned} \tag{59}$$

Ω 与无穷小生成元 ζ_Z 的缩并（见式 (58)）对于所有 $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}; \iota)$ 都为零。这可由 Ω_i 与 $\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_i}(M)\ \times \mathrm{Den}_\times(S_i)$ 上的无穷小生成元 ζ_{Z_i} 的类似结论，以及无穷小生成元 ζ_Z 和 ζ_{Z_i} 之间 q_i 相关这一事实得出。

对于逆命题，我们从一个任意的相切向量出发

$$(u_\varphi, (d\lambda_i)) \in \ker \Omega_{(\varphi,(\alpha_i))} \subseteq \mathcal{D}_\varphi \times \ker h_{\mathcal{S},\iota}.$$

我们需要找到 $Z=(Z_i)\in\mathfrak{X}(\mathcal{S};\iota)$，使得 $u_\varphi=T\varphi\circ Z_r$和 $d\lambda_i=di_{Z_i}\alpha_i$。特别是，第 r 个分量 Z_r必须与 S_r中的非线性旗 $\Sigma=(\Sigma_1,\ldots,\Sigma_{r-1})$相切，其中$\Sigma_i:=j_i(S_i)$。

($^{u_\varphi}$, $(d\lambda_i)$) 属于 Ω 的核这一条件等价于

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{S_i}j_i^*(\varphi^*i_{u_\varphi}\omega)\wedge\gamma_i=0,\ \text{for all}\ \gamma_i\in\Omega^{k_i-1}(S_i;\mathcal{O}_{S_i}),\iota_{i-1}^*\gamma_i=0, \tag{60}$$

and

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{S_i}j_i^*\omega(u_\varphi,v_\varphi)\alpha_i+\sum_{i=1}^{r}\int_{S_i}j_i^*(\varphi^*i_{v_\varphi}\omega)\wedge\lambda_i=0,\ \text{for all}\ v_\varphi\in\mathcal{D}_\varphi. \tag{61}$$

在 (60) 中选取$i=1$的微分形式 $\gamma_i=0$，.....，$r-1$，可得对于所有满足 $\iota_{r-1}^*\gamma_r=0$的 $\gamma_r\in$，$\int_{S_r}\varphi^*i_{u_\varphi}\omega\wedge\gamma_r=0\Omega^{k_r-1}(S_r;\mathcal{O}_{S_r})$。这保证了 $\varphi^*i_{u_\varphi}\omega=0$，也就是说，$u_\varphi$ 的取值位于 M 中 $\varphi(S_r)$ 的辛正交补内。

反设 $u_\varphi\in\mathcal{D}_\varphi$ 并非处处与各向同性子流形 $\varphi(S_r)\subseteq M$ 相切。子集 $S_r\setminus\Sigma_{r-1}$ 在 S_r 中稠密（因为 $\dim S_{r-1}<\dim S_r$），因此存在 $x\in S_r\setminus\Sigma_{r-1}$，使得 $u_\varphi(x)$ 不与 $\varphi(S_r)$ 相切。我们选取另一个取值位于 M 中 $\varphi(S_r)$ 的辛正交补内的相切向量 $v_\varphi\in\mathcal{D}_\varphi$，即 $\varphi^*i_{v_\varphi}\omega=0$，其支集位于 $S_r\setminus\Sigma_{r-1}$中 x 的一个开邻域内。Weinstein 的各向同性嵌入定理 [24] 允许我们选取 v_φ，使得 $\omega(u_\varphi,v_\varphi)\in C^\infty(S_r)$ 是一个非零且处处非负的函数。将 v_φ 代入 (61)，除 $\int_{S_r}\omega(u_\varphi,v_\varphi)\alpha_r>0$ 外，其余各项均为零，从而导致矛盾。因此，存在 $Z_r\in\mathfrak{X}(S_r)$，使得 $u_\varphi=T\varphi\circ Z_r$。

将单位元 (61) 用我们的 $u_\varphi=T\varphi\circ Z_r$和任意的 $v_\varphi\in\mathcal{D}_\varphi$重写，即取任意的 $h\in C^\infty(S)$，使得 $\varphi^*i_{v_\varphi}\omega=dh$，可得：

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{S_i}j_i^*(i_{Z_r}dh)\alpha_i=\sum_{i=1}^{r}\int_{S_i}j_i^*(dh)\wedge\lambda_i,\ \text{for all}\ h\in C^\infty(S). \tag{62}$$

我们需要证明 $Z_r\in\mathfrak{X}(S_r)$ 与非线性旗$\Sigma_1\subseteq\cdots\subseteq\Sigma_{r-1}\subseteq S_r$的所有子流形相切。我们依次证明，从 Σ_{r-1} 开始，到 Σ_1结束。

我们反设 Z_r 与 $\Sigma_{r-1}\subseteq S_r$不相切。由于 $\dim\Sigma_{r-2}<\dim\Sigma_{r-1}$，我们可以找到一点 $x\in\Sigma_{r-1}\setminus\Sigma_{r-2}$，使得 $Z_r(x)$ 与 Σ_{r-1}不相切。我们选取支撑在 Σ_{r-1} 的管状邻域内的 $h\in C^\infty(S)$，使其满足以下性质：h 在 Σ_{r-1}上消失（从而当 $i=1$、.....、$r-1$时，$j_i^*dh=0$），并且 $i_{Z_r}dh$ 限制在 Σ_{r-1}上时，是一个在 x 处取正值、在 Σ_{r-2}上消失的隆起函数（从而当 $i=1$、.....、$r-2$时，$j_i^*(i_{Z_r}dh)=0$）。将其代入 (62) 后，只有三项不为零，得到

$$\int_{S_{r-1}}j_{r-1}^*(i_{Z_r}dh)\alpha_{r-1}=\int_{S_r}hd(i_{Z_r}\alpha_r-\lambda_r).$$

左侧对 S_{r-1} 的积分在用一个支集位于 Σ_{r-1} 的管状 ε邻域内、且在 Σ_{r-1}的 $\varepsilon/2$邻域内为常数的函数对 h 进行截断时不会改变；而通过使 ε 足够小，右侧对 S_r 的积分的绝对值可以任意小。这就导致了矛盾。因此，Z_r 必须与 Σ_{r-1}相切，所以存在一个与 Z_r有 j_{r-1} 关联的 $Z_{r-1}\in\mathfrak{X}(S_{r-1})$。

以类似的方式，我们逐步处理非线性旗 Σ 的所有其余子流形 Σ_{r-2}、...、Σ_1，并找到与 Z_r 相关的 $Z_i\in\mathfrak{X}(S_i)$ j_i。知道这一点后，恒等式 (62) 变为

$$\sum_{i=1}^{r}\int_{S_i}j_i^*dh\wedge(\lambda_i-i_{Z_i}\alpha_i)=0,\ \text{for all}\ h\in C^\infty(S),$$

这意味着对于所有 i，$d(\lambda_i - i_{Z_i}\alpha_i) = 0$。因此，$({}^{u}\varphi, (d\lambda_i)) = (T\varphi \circ Z_r, (di_{Z_i}\alpha_i))$ 是 $Z = (Z_i) \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}; \iota)$ 在 $(\varphi, (\alpha_i))$ 处的无穷小生成元。这保证了 Ω 的核由 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S}; \iota)$ 作用的无穷小生成元张成。 □

作为一个伴 ¯因此，Ω 可下降为相关纤维丛上的叶向辛形式 Ω le

$$(\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\iota}(M), \bar{\mathcal{D}}) = (\mathrm{Emb}^{\mathrm{iso}}_{S_r}(M) \times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)} \mathrm{Den}_{\times}(\mathcal{S}), \mathcal{D} \times_{\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)} \ker Th_{\mathcal{S},\iota}).$$

将 ¯Ω 限制在 $(\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 等$\mathcal{S},\ \iota,\ \mu(M)\ \bar{\mathcal{D}})$ 上，所得形式同样是叶向辛形式。因此，$\mathcal{D}$ 的每个叶¯都是辛的。

设 $\mathcal{F}$ 表示等漂移分布 $\bar{\mathcal{D}}$ 在 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 等$\mathcal{S},\ \iota(M)$ 上的一片叶，并赋予其辛形式 Ω。将 (18) 限制到该叶上，得到一个 $\mathrm{Ham}(M)$ 等变光滑映射

$$J\colon \mathcal{F} \to \mathfrak{ham}_c(M)^*, \qquad \langle J(\mathcal{N}, \nu), X_f \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{N_i} f\nu_i, \tag{63}$$

其中，我们按照 (52) 将 $\mathfrak{ham}_c(M)$ 与 $= C_0^\infty(M)$ 视为相同。该映射是 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $(\mathcal{F}, \Omega)$ 上作用的动量映射（哈密顿作用）。事实上，将 (56) 与 (52) 中的动量映射表达式结合起来，便可直接得到这一结论。此外，根据命题 2.5，J 是单射。由命题 3.10 可知，$\mathrm{Ham}_c(M)$ 在 $\mathcal{F}$ 上的作用是传递的。利用命题 3.8，我们由此得到定理 3.7 的以下推广。

¯定理 3.14。动量映射 $J\colon (\mathcal{F}, \Omega) \to \mathfrak{ham}_c(M)^*$ 在 (63) 中是一一映射到哈密顿群 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的一个余伴随轨道上。该余伴随轨道上的 Kostant-Kirillov-Souriau 辛形式 ω_{KKS} 满足 $J^*\omega_{\mathrm{KKS}} = \Omega$。

注 3.15。在第 3.3 节中，我们看到包含映射

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M) \subseteq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}_{S_i,\mu_i}(M).$$

是一个分裂光滑子流形。定理 3.14 中描述的辛叶 $\mathcal{F}$ 是定理 3.7 中描述的辛叶乘积 $\prod_{i=1}^{r} \mathcal{G}_i$ 的一个分裂辛子流形。要证明它确实是一个分裂光滑子流形，可以仿照定理 2.11(c) 的证明，利用 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\iota}(M)$ 中的每个等体积叶都是 $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S_i}(M)$ 中等体积叶乘积里的分裂光滑子流形这一事实。后者可利用引理 3.4，按旗的深度进行归纳证明。

注记 3.16。$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 各向同性$\mathcal{S},\iota(M)$ 上的叶向辛形式 ¯Ω 可视为一种泊松结构，其辛叶是定理 3.14 中的等辛叶 $\mathcal{F}$（关于带权拉格朗日子流形的非线性格拉斯曼流形中的等辛叶，见注记 3.4 [26] ）。限制（18），我们得到一个泊松动量映射

$$J : \mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}\,\mathrm{iso}}_{\mathcal{S},\iota}(M) \to \mathfrak{ham}_c(M)^*, \quad \langle J(\mathcal{N}, \nu), X_f \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{N_i} f\nu_i,$$

它对应 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 对加权各向同性非线性旗的泊松作用，其中我们按前文将$\mathfrak{ham}_c(M) = C_0^\infty($ $M)$ 视为相同。

例 3.17. 设 M 是一个辛流形，其中含有与球面 S^r 微分同胚的各向同性子流形 $r > 1$。我们采用例 2.19 中的设定，描述 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的一些由嵌套带权球面构成的余伴随轨道。由于 $H^1(S^r; \mathbb{R}) = 0$,

根据注记 3.9，$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$ 各向同性$\mathcal{S},\ \iota,\ \mu(M)$ 的每个连通分支都是 $\mathrm{Ham}_c(M)$ 的一个余伴随轨道。与 (44) 类似，我们得到

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt\,iso}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(M)=\left\{(\mathcal{N},\nu)\in\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt\,iso}}_{\mathcal{S},\iota}(M)\,\middle|\,\begin{array}{l}\{\int_{N_i^+}\nu_i,\int_{N_i^-}\nu_i\}=\{a_i^+,a_i^-\},\text{ where }N_i^+\text{ and }N_i^-\\ \text{denote the connected components of }N_i\setminus N_{i-1}\end{array}\right\}.$$

例 3.18. 在 [3]，中研究的由带标记点的涡旋环构成的 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的余伴随轨道，是定理 3.14 所述加权非线性旗的余伴随轨道中维数最低的例子。

其类型为 $(\mathcal{S},\iota)$，其中 $\iota\colon\{1,\dots,k\}\to S^1$, $\iota(i)=t_i$ 个连续点位于圆上。我们得到上同调空间

$$H(\mathcal{S},\iota)\cong\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k,$$

其中，上同调类 $[\mu]\in H(\mathcal{S},\iota)$ 由其在 $\{1,\dots,k\}$（分别为 $S^1\setminus\{t_1,\dots,t_k\}$）的连通分支上的积分确定。它们是 $\Gamma_i=\int_{\{i\}}\mu_0$ 和 $w_i=\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mu_1$，对于 $i=1,\dots,k$。$\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)$ 在 $H(\mathcal{S},\iota)$ 上的作用可分解为经由二面体群 D_{2k} 在$\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$上的作用。更准确地说，让二面体群作用于一个正则 k 边形，其中将 Γ_i 赋给顶点 i，将 w_i 赋给边 $[i,i+1]$。对于一般密度 $\mu\in\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S})$，轨道$H(\mathcal{S},\iota)_{[\mu]}$由 $2k$ 个元素组成。当且仅当 $\Gamma_1=\cdots=\Gamma_k$和$w_1=\cdots=w_k$时，该轨道是一个单点集。

我们将 $\mathbb{R}^2$ 中类型为 $(\mathcal{S},\iota)$ 的加权旗记作 $((\{x_1,\dots,x_k\},\nu_0),(C,\nu_1))$。曲线 C 所围成的面积 a 唯一确定一个等漂移叶 $\mathcal{L}_a\subset\mathrm{Gr}^{\mathrm{iso}}_{S^1}(\mathbb{R}^2)$，如例 3.3 所示。由定理 3.14 可知，$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt}}$等叶片$\mathcal{S},\ \iota,\ \mu(\mathbb{R}^2)|_{\mathcal{L}_a}$ 的每个连通分支都是 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^2)$ 的一个余伴随轨道。利用上文对 $\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)$ 在 $H(\mathcal{S},\iota)$ 上的作用的描述，我们得到

$$\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt\,iso}}_{\mathcal{S},\iota,\mu}(\mathbb{R}^2)|_{\mathcal{L}_a}=\left\{((\{x_1,\dots,x_k\},\nu_0),(C,\nu_1))\,\middle|\,\begin{array}{c}x_i\text{ consecutive points in }C\in\mathcal{L}_a,\ \exists\sigma\in D_{2k}\\ \text{s.t. }\int_{\{x_i\}}\nu_0=\sigma(\Gamma_i),\int_{x_i}^{x_{i+1}}\nu_1=\sigma(w_i)\end{array}\right\}.\tag{64}$$

特别地，这些不变量包括环路 C 所围成的面积 a、点涡量 Γ_i，以及环路上两个相邻点之间的净涡量 $w_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\nu_1$。

例3.19。设 $\mathcal{L}_{[a_1,a_2]}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中拉格朗日二维环面的等叶片之并，如例 3.3 所示，其中 $[a_1,a_2]$ 是作用积分对 $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ 的 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 轨道。设 S_1 是 k 个互不相交的圆之并，$S_2=\mathbb{T}^2$ 是二维环面，且 $\iota\colon S_1\to S_2$ 是一个嵌入，它将第 i 个圆映到圆 $\{t_i\}\times S^1\subseteq\mathbb{T}^2$，该圆上的相邻点为 t_1，…，$t_k\in S^1$。对于固定密度 $\mu\in\mathrm{Den}_\times(\mathcal{S})$，我们旨在描述 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^4)$ 的余伴随轨道，这些轨道是 $\mathrm{Flag}^{\mathrm{wt\,iso}}_{\mathcal{S}\ \iota,\ ,\ \mu}(\mathbb{R}^4)|_{\mathcal{L}_{[a_1,a_2]}}$ 的连通分支。为此，我们需要同构

$$H(\mathcal{S},\iota)\cong\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$$

由对 S_1 的各个分量积分 μ_1，以及对两个相邻嵌入圆之间的环面曲面积分 μ_2 给出。与前一个例子一样，$\mathrm{Diff}(\mathcal{S},\iota)$ 在 $H(\mathcal{S},\iota)$ 上的作用可分解为经由二面体群的作用。现在可以借助二面体群，像式 (64) 那样表示这些 $\mathrm{Ham}_c(\mathbb{R}^4)$ 的余伴随轨道。因此，不变量为：嵌入二维环面的两个作用积分所构成的 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 轨道，环面上 k 个同位环的总权重，以及环面上每对相邻同位环之间的部分权重。

A 伴随丛上的传递作用

本附录中的流形和李群可能是无限维的，并假定它们如 [14] 中所述建模于便利向量空间。

回顾一下，如果每个点x_0在 M 中都有一个开邻域 U，以及一个光滑映射 $\sigma : U \to G$，使得对所有 $x \in U$， $\sigma(x)x_0 = x$，则称光滑的 G 作用于 M 具有局部光滑截面。显然，这种作用是局部传递且无穷小传递的。由于缺少一般的隐函数定理，对于一般的 Fr´echet 流形，不能指望反向结论成立。

引理 A.1. 设 $P \to B$ 是一个主 G-丛，其上带有李群 H 在 P 上的作用，且该作用与主 G 作用可交换。假设结构群 G 作用于另一个流形 Q，并考虑在伴随丛 $P \times_G Q$上典范诱导的 H 作用。如果 H 在 P 上的作用和 G 在 Q 上的作用都存在局部光滑截面，那么 H 在 $P \times_G Q$ 上的作用也存在局部光滑截面。

证明. 设 $\xi_0 \in P \times_G Q$。由于典范投影 $P \times Q \to P \times_G Q$ 是一个局部平凡光滑丛 [14, 定理 37.12], ，因此存在 ξ_0 的一个开邻域 U，以及光滑映射 $\pi\colon U \to P$和 $\rho\colon U \to Q$，使得对所有 $\xi \in U$，都有

$$[\pi(\xi), \rho(\xi)] = \xi.$$

令 $p_0 := \pi(\xi_0) \in P$ 以及 $q_0 := \rho(\xi_0) \in Q$。由于 H 在 P 上的作用存在局部截面，因此存在 P 中 p_0 的一个开邻域 V以及一个光滑映射 $\sigma' : V \to H$，使得

$$\sigma'(p_0) = e_H \qquad \text{and} \qquad \sigma'(p)p_0 = p,$$

对所有 $p \in V$ 均成立。由于 G 在 Q 上的作用存在局部截面，存在 Q 中包含 q_0 的一个开邻域 W，以及一个光滑映射 $\sigma'' : W \to G$，使得

$$\sigma''(q_0) = e_G \qquad \text{and} \qquad \sigma''(q)q_0 = q,$$

对所有 $q \in W$ 均成立。或许将 U 替换为 ξ_0 的一个更小邻域后，我们可以假设对所有 $\xi \in U$，都有 $\rho(\xi) \in W$，且 $\pi(\xi)\sigma''(\rho(\xi)) \in V$。因此， $\sigma\colon U \to H$,

$$\sigma(\xi) := \sigma'\big(\pi(\xi)\sigma''(\rho(\xi))\big)$$

是一个定义良好的光滑映射。对于 $\xi \in U$，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma(\xi)\xi_0 = \sigma(\xi)[p_0, q_0] = [\sigma(\xi)p_0, q_0] = [\sigma'(\pi(\xi)\sigma''(\rho(\xi)))p_0, q_0] \\ = [\pi(\xi)\sigma''(\rho(\xi)), q_0] = [\pi(\xi), \sigma''(\rho(\xi))q_0] = [\pi(\xi), \rho(\xi)] = \xi.\end{aligned}$$

因此， σ 是 H 在 $P \times_G Q$ 上作用的所需局部光滑截面。 □

我们将光滑的 G 在 M 上作用所对应的基本向量场记为

$$\zeta_X(x) := \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} \exp(tX)x,$$

其中 $X \in \mathfrak{g}$ 且 $x \in M$。

引理 A.2. 设 G 是一个作用于光滑流形 M上的正则李群。假设每个点 x_0都属于 M，且存在一个开邻域 U以及一个光滑映射 $\sigma\colon TM|_U \to \mathfrak{g}$，使得

$$\zeta_{\sigma(X)}(x) = X, \tag{65}$$

对于所有 $x \in U$ and $X \in T_xM$。那么， G 在 M 上的作用存在局部光滑截面。

证明。我们将采用莫瑟的一种论证来构造局部截面 [21, 第 4]节。设 $c\colon [0,1]\to U$是一条光滑曲线。我们寻求一条光滑曲线 $g\colon [0,1]\to G$，使得

$$c(t)=g(t)c(0). \tag{66}$$

求导后，我们得到

$$c'(t)=\zeta_{\dot g(t)}(c(t)), \tag{67}$$

其中 $\dot g(t):=\frac{\partial}{\partial h}\big|_{h=t} g(h)g(t)^{-1}$ 表示 g的右对数导数。

由于 G是正则的（[14, 定义 38.4],），存在唯一的光滑曲线 $g=\mathrm{Evol}^r(\sigma\circ c')$取值于 G，使得 $\dot g(t)=\sigma(c'(t))$，且 $g(0)=e$。利用 (65)，我们看到 (67) 成立，因此 (66) 也成立。在 $t=1$处取值后，我们得到一个光滑映射

$$s: C^\infty([0,1],U)\to G,\qquad s(c):=g(1)=\mathrm{evol}^r\big(\sigma\circ c'\big).$$

根据构造，对于所有光滑曲线 $c\colon [0,1]\to U$，都有 $c(1)=s(c)c(0)$。

要为 G 在 M上的作用构造一个局部光滑截面，只需将 s 与一个满足 $c_x(0)=x_0$且 $c_x(1)=x$ 的光滑映射 $U\to C^\infty([0,1],U)$，$x\mapsto c_x$复合即可。后者可利用以 $x_0=0$为中心的 M 图卡轻易构造。事实上，缩小 U，使其在这样的图卡中成为以 $x_0=0$ 为中心的星形区域，我们便可使用 $c_x(t):=tx$。 □

参考文献

[1] C. Balleier 和 T. Wurzbacher, *On the geometry and quantization of symplectic Howe pairs*, 《Math. Z.》271（2012），577–591。[2] E. Binz 和 H.R. Fischer，闭流形的嵌入流形。附录由 P. Michor 撰写。载于《Lecture Notes in Phys.》139，《数学物理中的微分几何方法》（国际会议论文集，克劳斯塔尔工业大学，克劳斯塔尔-策勒费尔德，1978），第 310–329 页，Springer，柏林—纽约（1981）。[3] I. Ciuclea 和 C. Vizman, *Pointed weighted vortex loops in 2D ideal fluids*，arXiv:2212.02612。[4] D. G. Ebin 和 J. E. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, 《Ann. of Math.》92（1970），102–163。[5] F. Gay-Balmaz 和 C. Vizman, *Dual pairs in fluid dynamics*, 《Ann. Global Anal. Geom.》41（2012），1–24。[6] F. Gay-Balmaz 和 C. Vizman, *Principal bundles of embeddings*, 《Ann. Global Anal. Geom.》46（2014），293–312。[7] F. Gay-Balmaz 和 C. Vizman, *Isotropic submanifolds and coadjoint orbits of the Hamiltonian group*, 《J. Symp. Geom.》17（2019），663–702。[8] S. Haller 和 C. Vizman, *Non-linear Grassmannians as coadjoint orbits*, 《Math. Ann.》329（2004），771–785。[9] S. Haller 和 C. Vizman, *Non-linear flag manifolds as coadjoint orbits*, 《Ann. Global Anal. Geom.》58（2020），385–413。[10] S. Haller 和 C. Vizman, *A dual pair for the contact group*, 《Math. Z.》301（2022），2937–2973。[11] R. S. Hamilton，纳什–莫瑟反函数定理，《Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)》7（1982），65–222。[12] M. W. Hirsch, *Differential topology*, 《Graduate Texts in Math.》33，Springer，1976。[13] S. Jung、I. Dryden 和 J.S. Marron，主嵌套球面的分析，*Biometrika* **99**（2012），551–568。[14] A. Kriegl 和 P. W. Michor, *The Convenient Setting of Global Analysis*, 《数学调查与专著》53，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[15] B. Lee, *Geometric structures on spaces of weighted submanifolds*, 《SIGMA》5（2009），099，共 46 页。[16] J. M. Lee, 《光滑流形导论》，《Graduate Texts in Mathematics》第 218 卷，Springer，2003。

[17] Libermann, P. 和 C.-M. Marle [1987], *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*，D. Reidel 出版公司。[18] J.E. Marsden 和 A. Weinstein， *Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids*，《Phys. D》7（1983），305–323。[19] P. W. Michor，光滑映射流形 III：非紧光滑流形的嵌入主丛。《Cahiers Topologie G´eom. Diff´erentielle》21，325–337（1980）[20] P. W. Michor，《可微映射流形》。Shiva 数学丛书 3。Shiva 出版有限公司，南特威奇（1980）[21] J. Moser， *On the volume elements on a manifold*，《Trans. Amer. Math. Soc.》120（1965），286–294。[22] C. Vizman，函数流形上的诱导微分形式， *Archivum Mathematicum*，47（2011），201–215。[23] A. Weinstein， *Lectures on symplectic manifolds.*，CBMS 区域会议讲座，会议于1976年3月8日至12日在北卡罗来纳大学举行。数学区域会议丛书第29号。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1977。[24] A. Weinstein， *Neighborhood classification of isotropic embeddings*，《J. Diff. Geom.》16（1981），125–128。[25] A. Weinstein， *The local structure of Poisson manifolds*，《J. Diff. Geom.》18（1983），523–557。[26] A. Weinstein， *Connections of Berry and Hannay type for moving Lagrangian submanifolds*，《Adv. Math.》82（1990），133–159。