arXiv:2301.00431v1 [math.GR] 1 Jan 2023

非阿基米德局部域 $\mathbb{F}$ 上 SL(2, $\mathbb{F}$) 的美妙紧化

CORINA CIOBOTARU

Abstract. 我们计算了 SL(2, $\mathbb{F}$) 的对称簇的美妙紧化，其中 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，且 $p \neq 2$；这些紧化来自 SL(2, $\mathbb{F}$) 的抽象对合或 $\mathbb{F}$-对合。对于每一种美妙紧化，我们都找到了相应对称簇的聚点的 SL(2, $\mathbb{F}$)-稳定子，并将其与 [CL22] 中得到的沙布蒂极限进行比较。

1. Introduction

美妙紧化源于计数几何中的特定问题。通俗地说，美妙紧化是通过群 G 的一个不可约线性表示，将对称簇 G/H 紧化的一种方式，其中 G 是代数群，而 $H \leq G$ 是 G 的一个对合自同构的不动点集。这一过程将赋予该紧化的 G-闭轨道一些显著性质。原则上，G/H 的美妙紧化并不依赖于所选的 G 的不可约线性表示，而且 G 的一个博雷尔子群在 G/H 中只有一个开且稠密的轨道。DeConcini 和 Procesi 在 [DCP83] 中率先研究了伴随型复半单群 G （即中心平凡的半单群）的美妙紧化。此后，美妙紧化在代数几何中得到了广泛研究，并在数学的许多领域具有重要应用（参见 [EJ08] 的引言）。若以任意域 k （不一定代数闭）替代复数，且该域的特征为 $\neq 2$，DeConcini 和 Springer 在 [DCS99] 中进一步将 [DCP83] 的结果推广到了定义在 k 上的任意伴随型半单群 G，以及定义在 k 上的 G 的对合自同构的不动点群 H。

本文聚焦于 SL(2, $\mathbb{F}$) 对称簇的奇妙紧化，其中 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，且带有 $p \neq 2$；这些对称簇来自 SL(2, $\mathbb{F}$) 的各种抽象对合和 $\mathbb{F}$-对合。请注意，SL(2, $\mathbb{F}$) 并非伴随型。具体而言，我们感兴趣的是计算这些对称簇的奇妙紧化中聚点的 SL(2, $\mathbb{F}$)-稳定子，并将其与 [CL22] 中得到的沙布蒂极限进行比较。尽管本文用于构造奇妙紧化的一些技术与成熟文献（例如 [EJ08]）中的技术相似，但我们将大量运用 [BH09]，关于 SL(2, $\mathbb{F}$) 的 Bruhat–Tits 树及其视觉边界的一些结果；这与 [DCS99] 中采用的方法形成对照。

我们先固定记号。在本文中，我们始终设素数为 $p \neq 2$。令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，令 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{F}$ 的任意二次扩张。分别令 $k_{\mathbb{F}}$、$k_{\mathbb{E}}$ 为 $\mathbb{F}$、$\mathbb{E}$ 的剩余域，并分别令 $\omega_{\mathbb{F}}$、$\omega_{\mathbb{E}}$ 为 $\mathbb{F}$、$\mathbb{E}$ 的一致化子。回忆 $k_{\mathbb{F}}^*/(k_{\mathbb{F}}^*)^2 = \{1, S\}$，其中 $S \in k_{\mathbb{F}}^*$ 为某个非平方元。于是 $\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2 = \{1, \omega_{\mathbb{F}}, S, S\omega_{\mathbb{F}}\}$ ([Ser12，定理 3 的推论以及 4] 或 [SJ98，第 41 页，第 12] 节)。若 $\mathbb{E}$ 是分歧的，则 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\sqrt{\omega_{\mathbb{F}}})$，或 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\sqrt{S\omega_{\mathbb{F}}})$（其中 $\omega_{\mathbb{F}} \neq \omega_{\mathbb{E}}$）；若 $\mathbb{E}$ 是非分歧的，则 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\sqrt{S})$（其中 $\omega_{\mathbb{F}} = \omega_{\mathbb{E}}$）。我们选取 $\mathbb{E}$ 上的唯一赋值 $|\cdot|_{\mathbb{E}}$

Date: 2023年1月2日。
corina.ciobotaru@gmail.com。

它延拓了 $\mathbb{F}$上的给定赋值 $|\cdot|_{\mathbb{F}}$。选取 $\alpha \in \{\sqrt{\omega_{\mathbb{F}}}, \sqrt{S}, \sqrt{S\omega_{\mathbb{F}}}\}$，因此 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$。注意，每个元素 $x \in \mathbb{E}$都可以唯一地写成 $x = a + b\alpha$，其中 a、$b \in \mathbb{F}$。对于分歧扩张，我们可以考虑 $\omega_{\mathbb{E}}^2 = \omega_{\mathbb{F}}$。令 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}} := \{x \in \mathbb{F} \mid |x|_{\mathbb{F}} \le 1\}$ 表示 $\mathbb{F}$ 的整数环，则 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ 在 $\mathbb{F}$中是紧开集。对于 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$，有 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}_p$、$\omega_{\mathbb{Q}_p} = p$、$k_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{F}_p$、$\mathbb{F}_p^*/(\mathbb{F}_p^*)^2 = \{1, S_p\}$。

我们将 $\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 称为 SL(2,$\mathbb{F}$) 的 Bruhat–Tits 树，其顶点是 $\mathbb{F}^2$ 中 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-格的等价类（其构造见 [Ser12]）。树 $\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 是一棵无限正则树，每个顶点的度为$|k_{\mathbb{F}}|+1$。$\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 的无穷远边界 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 是射影空间 $P^1(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \cup \{\infty\}$。此外，端点 $\infty \in \partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 对应于向量 $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right] \in P^1(\mathbb{F})$。其余端点 $\xi \in \partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 对应于向量 $\left[\begin{smallmatrix}1\\x\end{smallmatrix}\right] \in P^1(\mathbb{F})$，其中 $x \in \mathbb{F}$。举一个具体例子，SL(2,$\mathbb{Q}_p$) 的 Bruhat–Tits 树是 $p+1 = |\mathbb{F}_p| + 1$-正则树。$\mathcal{T}_{\mathbb{Q}_p}$ 的无穷远边界 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{Q}_p}$ 是射影空间 $P^1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \cup \{\infty\}$。

令 ρ : SL(2,$\mathbb{F}$) $\to$ GL($\mathbb{F}^2$) 为 SL(2,$\mathbb{F}$) 在 $\mathbb{F}$ 上由 $g \in$ SL(2,$\mathbb{F}$) $\mapsto \rho(g) := g$ 给出的表示。容易证明，ρ 是 SL(2,$\mathbb{F}$) 的不可约连续表示，其中拓扑取局部紧群 SL(2,$\mathbb{F}$) 和 GL($\mathbb{F}^2$) 的紧开拓扑。根据已知理论，ρ 具有一个主权（见 [Tit71，定理 2.5]）。

对于抽象对合 θ: SL(2,$\mathbb{F}$) $\to$SL(2,$\mathbb{F}$)，即 θ 是 SL(2,$\mathbb{F}$) 的抽象自同构且满足 θ^2 =Id，我们考虑:

（1）SL(2,$\mathbb{F}$) 在 End($\mathbb{F}^2$) 上的作用定义为 $g \cdot_\theta D := \rho(g)D\rho(\theta(g^{-1}))$，其中对每个 $g \in$SL(2,$\mathbb{F}$) 和 $D \in$End($\mathbb{F}^2$) 均成立；（2）连续映射 ψ_θ : SL(2,$\mathbb{F}$) $\to \mathbb{P}$(End($\mathbb{F}^2$)) 定义为 $g \mapsto \psi_\theta(g) := [\rho(g)\rho(\theta(g^{-1}))] = [\rho(g\theta(g^{-1}))]$,; （3）以及 θ 的不动点群，记为 $H_\theta := \{g \in \text{SL}(2,\mathbb{F}) \mid \theta(g) = g\}$。

定义 1.1. 我们取 $X_\theta := \psi_\theta(\text{SL}(2,\mathbb{F}))\overline{} = [\text{SL}(2,\mathbb{F})\ \cdot_\theta \overline{\text{Id}_{\mathbb{F}^2}}] \subset \mathbb{P}(\text{End}(\mathbb{F}^2))$，并滥用术语，将其称为 SL(2,$\mathbb{F}$) $/H_\theta$ 关于对合 θ 的美妙紧化。

我们将在下文的证明中看到，SL(2,$\mathbb{F}$) 的一个博雷尔子群在 SL(2,$\mathbb{F}$)$/H_\theta$ 上可能有多个开轨道，这些轨道两两不相交，且在 SL(2,$\mathbb{F}$)$/H_\theta$ 中并不稠密。这是因为 SL(2,$\mathbb{F}$) 不是伴随型。滥用记号，对于任意 $g \in$ SL(2,$\mathbb{F}$) 以及任意 $[D] \in X_\theta \subset \mathbb{P}$(End($\mathbb{F}^2$))，我们用 $g \cdot_\theta [D]$ 表示 $[\rho(g)D\rho(\theta(g^{-1}))] \in X_\theta$，其中 $D \in$ End($\mathbb{F}^2$) 是$[D] \in \mathbb{P}$(End($\mathbb{F}^2$)) 的某个（因而是任意一个）代表元。

By the kn根据其理论，这些奇妙紧化并不取决于不可约表示 ρ SL(2,$\mathbb{F}$)（证明见 [AB18，第 7] 节或 [DCS99，命题 3.10]）。Th e three 本文的主要结果如下。它们分别在第2、3、4节中得到证明，其中读者 可参阅相关记号。

定理 1.2. 考虑 SL(2,$\mathbb{F}$)×SL(2,$\mathbb{F}$) 的对合 $\theta(x,y) := (y,x)$，其中 $H_\theta := Diag(G)$ =SL(2,$\mathbb{F}$) 是不动点群，且 SL(2,$\mathbb{F}$)× SL(2,$\mathbb{F}$) 通过 $(g_1,g_2)\cdot_\theta A = \rho(g_1)A\rho(g_2^{-1})$ 作用于 End($\mathbb{F}^2$)。则 SL(2,$\mathbb{F}$) × SL(2,$\mathbb{F}$) 在 X_θ 中关于作用 $\cdot_\theta$ 有 2 个轨道:

(1) $\text{Id}_{\mathbb{F}^2}$ 的开 SL(2,$\mathbb{F}$)×SL(2,$\mathbb{F}$)-轨道，其 SL(2,$\mathbb{F}$)×SL(2,$\mathbb{F}$)-稳定子为 $Diag$(SL(2,$\mathbb{F}$)×SL(2,$\mathbb{F}$)) = SL(2,$\mathbb{F}$) (2) $[1,0;0,0] \in \mathbb{P}$(End($\mathbb{F}^2$)) 的闭 SL(2,$\mathbb{F}$) × SL(2,$\mathbb{F}$)-轨道；其 SL(2,$\mathbb{F}$) × SL(2,$\mathbb{F}$)-稳定子为 $B^+ \times B^-$。

定理 1.3. 设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，且 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$ 是 $\mathbb{F}$ 的任意二次扩张。取 θ 为由 $\mathbb{E}$ 中关于 $\mathbb{F}$,$\theta(a+\alpha b) := a - \alpha b$ 的“共轭”诱导的 SL(2,$\mathbb{E}$) 的对合，其中任意 $a,b \in \mathbb{F}$ 均成立。关于作用，SL(2,$\mathbb{E}$) 在 X_θ 中有 2 个轨道
$\cdot_\theta$:

(1) $\text{Id}_{\mathbb{E}^2}$ 的开 SL(2,$\mathbb{E}$)-轨道，其 SL(2,$\mathbb{E}$)-稳定子为 SL(2,$\mathbb{F}$)；(2) $[0,1;0,0] \in \mathbb{P}$(End($\mathbb{E}^2$)) 的闭 SL(2,$\mathbb{E}$)-轨道，其 SL(2,$\mathbb{E}$)-稳定子为子群$\{\left(\begin{smallmatrix}a-\alpha b & z\\ 0 & a+\alpha b\end{smallmatrix}\right) \mid a,b \in \mathbb{F}$ with $a^2 - \alpha^2 b^2 = 1, z \in \mathbb{E}\} \le B_{\mathbb{E}}^+$.

定理 1.4. 设 $m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2 = \{1, \omega_{\mathbb{F}}, S, S\omega_{\mathbb{F}}\}$。考虑 $A_m := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 以及相应的 SL(2, $\mathbb{F}$) 的内对合 $\mathbb{F}$, 其由 $\sigma_m := \iota_{A_m}$ 给出（见第 4 节）。关于作用 $\cdot_{\sigma_m}$, SL(2, $\mathbb{F}$) 在X_{σ_m} 中有 2 个轨道:

(1) $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$ 的开 SL(2, $\mathbb{F}$)-轨道, 其 SL(2, $\mathbb{F}$)-稳定子为 $H_{\sigma_m}(2)$ $[1, 0$ 的闭 SL(2, $\mathbb{F}$)-轨道; $\mathbf{0}, 0] \in \mathbb{P}$ (End($\mathbb{F}^2$)), 其 SL(2, $\mathbb{F}$)-稳定子是子群$\{\mu_2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{F}\}$, 它属于博雷尔子群 $B^+ \leq$ SL(2, $\mathbb{F}$), 其中 μ_2 是 $\mathbb{F}$ 中的单位根群。

将定理 1.3 和 1.4 中分别计算出的聚点 $[0, 1; 0, 0]$ 和 $[1, 0; 0, 0]$ 的稳定子, 与 [CL22] 定理 1.4 和 1.6 中分别计算出的沙布蒂极限进行比较, 读者会发现我们得到了相同的子群。SL($n, \mathbb{F}$) 的一般情形将在未来的研究项目中讨论。

致谢。Ciobotaru 受到欧盟地平线 2020 研究与创新计划玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议编号 754513 以及奥胡斯大学研究基金会的支持。她还获得了奥伯沃尔法赫数学研究所（MFO）的部分支持。她感谢这两个机构提供的理想工作条件, 并感谢 Linus Kramer 和 Maneesh Thakur 就参考文献 [Tit71] 进行的非常有帮助的讨论。此外, Ciobotaru 感谢 Arielle Leitner 在我们的合作论文 [CL22] 中所开展的精彩合作; 该论文促成了本文的诞生。她还感谢 Arielle Leitner 阅读本文并提出有益意见。

2. The wonderful compactification of SL(2, $\mathbb{F}$) 的奇妙紧化

首先回顾与 $\theta(x, y) := (y, x)$ 的对合相关联的通常奇妙紧化, 其中 $G :=$ SL(2, $\mathbb{F}$) $\times$ SL(2, $\mathbb{F}$), 且 $Diag(G) =$ SL(2, $\mathbb{F}$) 是该对合θ的不动点群。我们按如下方式对 SL(2, $\mathbb{F}$) $= G/Diag(G)$ 进行紧化。考虑 ρ(SL(2, $\mathbb{F}$)) $\leq$ GL($\mathbb{F}^2$) $\subseteq$End($\mathbb{F}^2$), 并令 SL(2, $\mathbb{F}$) $\times$ SL(2, $\mathbb{F}$) 通过 $(g_1, g_2) \cdot_\theta A = \rho(g_1) A \rho(g_2^{-1})$ 作用于 End($\mathbb{F}^2$), 其中 $(g_1, g_2) \in$SL(2, $\mathbb{F}$) $\times$ SL(2, $\mathbb{F}$) 且 $A \in$ End($\mathbb{F}^2$)。于是, SL(2, $\mathbb{F}$) $\times$ SL(2, $\mathbb{F}$) 中 $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$ 的稳定子恰好是$Diag(G) =$ SL(2, $\mathbb{F}$), 并且 ρ(SL(2, $\mathbb{F}$)) = (SL(2, $\mathbb{F}$) $\times$ SL(2, $\mathbb{F}$)) $\cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$。

接下来我们考虑映射

$$\psi_\theta \colon \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}) \to \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2)), \text{ 定义为 } (g_1, g_2) \mapsto \psi_\theta(g_1, g_2) := [\rho(g_1 g_2^{-1})]$$

并希望理解其闭包

$$X_\theta \colon \overline{\psi_\theta(\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}))} = \overline{[(\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{F})) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]} = \overline{[\rho(\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}))]} \text{ in } \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2$$

称为关于对合 θ 的 SL(2, $\mathbb{F}$) $= G/Diag(G)$ 的美妙紧化, 其中 $\mathbb{P}$(End($\mathbb{F}^2$)) 赋予通常拓扑。

记

$$\begin{aligned} T &:= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^* \right\} \qquad U^+ := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{F} \right\} \qquad U^- := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{F} \right\} \\ B^+ &:= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{F}, x \in \mathbb{F}^* \right\} \qquad B^- = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x^{-1} \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{F}, x \in \mathbb{F}^* \right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 T 是 SL(2, $\mathbb{F}$) 的极大环面, U^+ 是博雷尔子群 B^+ 的幺幂根基, 而U^- 是对向 Borel 子群 B^- 的幺幂根基。根据 X_θ 的定义:

引理 2.1. 关于作用 $\cdot_\theta$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$ 在 $\mathbb{P}$(End($\mathbb{F}^2$)) 中的 SL(2, $\mathbb{F}$) $\times$ SL(2, $\mathbb{F}$) 轨道在 X_θ 中稠密。

为了证明定理 1.2, 我们需要以下记号。令

$$\mathbb{P}_0 := \{x = [1, x_2; x_3, x_4] \in \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))\}$$

并注意到它在 $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 中是开集。记 $X_{\theta,0} := \mathbb{P}_0 \cap X_\theta$，并注意到它在 X_θ 中同样是开集。集合 $X_{\theta,0}$ 称为 X_θ 中的大胞腔。

回顾一下 $B^+ = TU^+$ 以及 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的如下分解

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ for } a \neq 0. \tag{2}$$

由此很容易验证以下事实。

引理 2.2. 集合 U^-TU^+ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中稠密，特别地，$\overline{[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]}$ 在 $\psi_\theta(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})) = [\rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}))]$，中稠密，因此也在 $[\rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}))]$ 中稠密。

证明。引理的第一部分可由对具有 $a = 0$ 的矩阵进行简单逼近，并利用 (2) 中给出的分解得到。引理的其余部分直接由 U^-TU^+ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的稠密性推出。□

引理 2.3. 我们有

$$X_{\theta,0} \cap [\rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}))] = [(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$$

$$X_\theta = \bigcup_{(g_1,g_2) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})} (g_1, g_2) \cdot_\theta X_{\theta,0}$$

$$X_{\theta,0} = \overline{[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]} \cap \mathbb{P}_0.$$

证明。由分解 2 可知

$$[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = X_{\theta,0} \cap [\rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}))] = \mathbb{P}_0 \cap [\rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}))].$$

由于 $\overline{[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]} = X_\theta$，我们立即得到 $X_{\theta,\,0} = \overline{[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]} \cap \mathbb{P}_0$，即集合 $[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 在 $\mathbb{P}_0$ 中的闭包。

设 $C \in X_{\theta 0}$。由于 $C \in \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$，我们有 $C = [x_1, x_2;\ x_3,\ x_4]_0$。若 $x_1 \neq 0$，则 $C \in X_{\theta,\,0}$，证毕。若 $x_1 = 0$，则经过一些简单计算，可以找到某个 $(g_1, g_2) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$，使得 $\rho(g_1)C\rho(g_2^{-1}) \in \mathbb{P}_0$。于是证毕。□

定理 1.2 的证明。由引理 2.3，只需计算集合 $\overline{(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}}$，然后精确计算其闭包 $[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] \cap \mathbb{P}_0$。我们有

$$\begin{aligned} (U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a, b \in \mathbb{F} \right\} \\ &\left\{ \begin{pmatrix} x & -xb \\ ax & -axb + x^{-1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a, b \in \mathbb{F} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = \{[1, -b; a, -ab + x^{-2}] \mid x \in \mathbb{F}^*, a, b \in \mathbb{F}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

那么，集合 $[(U^-T \times U^+) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ in $\mathbb{P}_0$ 的唯一聚点为形如 $[1, -b;\ a, -ab]$ 的点，其中 $a, b \in \mathbb{F}$ 任意。此外，很容易看出，集合 $[T \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ in $\mathbb{P}_0$ 的唯一聚点就是 $[1, 0; 0, 0]_0$。注意，元素 $[1, -b;\ a, -ab]$ 表示 $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 中一个行列式为零的矩阵。同样，$\{[1, -b;\ a, -ab] \mid a, b \in \mathbb{F}\}$ 是元素 $[1, 0; 0, 0] \in \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 的 $(U^-T \times U^+)$-轨道。由上述计算以及作用 $\cdot_\theta$ 连续可知，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道 $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$ 是开集。显然，$[1, 0; 0, 0]$ 在 $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 中的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道是闭集；通过简单计算可得，$[1, 0; 0, 0]$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的稳定子恰为 $B^+ \times B^-$。定理得证。□

3. 二次扩张 The wonderful compactification of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ for quadratic $\mathbb{E}/\mathbb{F}$

设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，$\mathbb{E}=\mathbb{F}(\alpha)$ 是 $\mathbb{F}$ 的任意二次扩张。记 $\theta\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{E}$ 中关于 $\mathbb{F}$ 的"共轭"，$\theta(a+\alpha b):=a-\alpha b$，其中 $a,b\in\mathbb{F}$ 任意。该映射 θ 诱导出 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 的一个抽象对合，其定义为

$$\left(\begin{smallmatrix} x & y\\ z & t\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{E})\mapsto \theta\left(\left(\begin{smallmatrix} x & y\\ z & t\end{smallmatrix}\right)\right):=\begin{pmatrix}\theta(x) & \theta(y)\\ \theta(z) & \theta(t)\end{pmatrix}$$

其不动点群 $H_\theta:=\{g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})\mid \theta(g)=g\}$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$（分别为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$）中端点 $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ 的稳定子是博雷尔子群

$$B^+_{\mathbb{F}}:=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)\mid b\in\mathbb{F},a\in\mathbb{F}^\times\},\qquad \text{resp. } B^+_{\mathbb{E}}:=\{\left(\begin{smallmatrix} x & y\\ 0 & x^{-1}\end{smallmatrix}\right)\mid y\in\mathbb{E},x\in\mathbb{E}^\times\}.$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$（分别为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$）中端点 $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ 的稳定子是对置博雷尔子群

$$B^-_{\mathbb{F}}:=\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ b & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)\mid b\in\mathbb{F},a\in F^\times\},\qquad \text{resp. } B^-_{\mathbb{E}}:=\{\left(\begin{smallmatrix} x & 0\\ y & x^{-1}\end{smallmatrix}\right)\mid y\in\mathbb{E},x\in E^\times\}.$$

Let

$$T_{\mathbb{E}}:=\left\{\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\mid x\in\mathbb{E}^*\right\}\qquad U_{\mathbb{E}}:=\left\{\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mid y\in\mathbb{E}\right\}\qquad U^-_{\mathbb{E}}:=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix}\mid y\in\mathbb{E}\right\}.$$

给定抽象对合 $\theta:\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$，我们考虑 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 在 $\mathrm{End}(\mathbb{E}^2)$ 上的作用，其定义为 $g\cdot_\theta D:=\rho(g)D\rho(\theta(g^{-1}))$，对每个 $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 和 $D\in\mathrm{End}(\mathbb{E}^2)$ 均成立。关于作用 $\cdot_\theta$，$\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 中的稳定子是子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$。于是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})\cdot_\theta\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}\cong\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$，我们考虑连续映射

$$\psi_\theta:\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})\to\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{E}^2)),\ \text{ given by } g\mapsto\psi_\theta(g):=[\rho(g)\rho(\theta(g^{-1}))]=[\rho(g\theta(g^{-1}))].$$

我们想要理解关于对合 θ 和映射 ψ_θ的以下闭包：

$$X_\theta:=\overline{\psi_\theta(\mathrm{SL}(2,\mathbb{E}))}=\overline{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})\cdot_\theta\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]}=\overline{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})]}\text{ in }\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{E}^2)).$$

定义3.1。我们将上述闭包 X_θ 视为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的一种紧化，并称其为关于对合 θ的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的美妙紧化。

根据定义，我们有以下显然的引理：

引理3.2。相对于作用 $\cdot_\theta$，$\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}$ 在 $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{E}^2))$中的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$-轨道在$X_\theta$中稠密。

为了计算 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的美妙紧化，我们首先需要求出 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在边界 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$上的轨道数。

Le引理 3.3。边界 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}\cong P^1\mathbb{E}=\mathbb{E}\cup\{\infty\}$ 上至多有 5 个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道：
(1) $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道是闭的 (2) 对每个 $m\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2,$，$\left[\begin{smallmatrix}1\\m\alpha\end{smallmatrix}\right]$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道是开的，并且可能与另一个 m 的轨道重合。

证明。显然，$\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 中关于 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 上的锥拓扑是闭的（见 [FTN91] 第 4 页）。

考虑子群 $B:=\{\left(\begin{smallmatrix} d^{-1} & 0\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\mid c\in\mathbb{F},\ d\in\mathbb{F}^*\}$ 属于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$。那么，$\left[\begin{smallmatrix}1\\m\alpha\end{smallmatrix}\right]$在 B 下的像为 $\left[\begin{smallmatrix}1\\cd+d^2m\alpha\end{smallmatrix}\right]$；当 m 取遍 $\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$中的所有值时，它覆盖整个 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}-\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$。此外，对于每个 $m\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2,$，容易看出集合 $\{\left[\begin{smallmatrix}1\\cd+d^2m\alpha\end{smallmatrix}\right]\mid c\in\mathcal{O}_{\mathbb{F}},d\in\mathcal{O}^*_{\mathbb{F}}\}$ 在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 中是开集，这里考虑的是 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$上的锥拓扑。因此，对于每个 $m\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$，$\left[\begin{smallmatrix}1\\m\alpha\end{smallmatrix}\right]$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道是开集。□

考虑 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}(\alpha))$中的矩阵

$$g_1 := \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}, \qquad g_m := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{m\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for } m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$$

使得

$$g_m\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ m\alpha \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right].$$

令 $I := \{\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}, g_m \mid m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2\}$，以及 $I_m := \{g_m \mid m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2\}$。

引理 3.4. 根据上述记号，我们有：

(1) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E}) = \bigsqcup_{g_i \in I} B_{\mathbb{E}}^- g_i \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$(2) 对任意 $g_m \in I_m$，集合 $B_{\mathbb{E}}^- g_m \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) = U_{\mathbb{E}}^- T_{\mathbb{E}} g_m \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 中是开集；此外，集合$\bigsqcup_{g_m \in I_m} U_{\mathbb{E}}^- T_{\mathbb{E}} g_m \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$中稠密。(3) $\psi_\theta(\bigsqcup_{g_m \in I_m} U_{\mathbb{E}}^- T_{\mathbb{E}} g_m)$ 在 $\psi_\theta(\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})) = [\mathrm{SL}(2,\mathbb{E}) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]$中开且稠密，因此

$$\overline{\psi_\theta(\bigsqcup_{g_m \in I_m} U_{\mathbb{E}}^- T_{\mathbb{E}} g_m)} = \overline{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{E}) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]}.$$

证明。设 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$，且设 $\xi_0 := \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$。$\xi_0$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$-稳定子为 $B_{\mathbb{E}}^-$。

若 $g^{-1}(\xi_0)$ 属于 ξ_0 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道，则 $g \in B_{\mathbb{E}}^- \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$。否则，需要考虑 4 种情形，分别对应于引理 3.3 中 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 的开 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道。相应地作用一个元素 $h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$，可得 $hg^{-1}(\xi_0) \in \{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ m\alpha \end{smallmatrix}\right] \mid \overline{m} \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2\}$。进一步，再相应地乘以来自 I_m 的元素 g_m，可得 $g_m h g^{-1}(\xi_0) = \xi_0$，因此 $g^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) g_m^{-1} B_{\mathbb{F}}^-$，从而得到所需的 $g \in B_{\mathbb{F}}^- g_m \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$。这就证明了引理的第 (1) 部分。

我们来证明第 (2) 部分。取 $g_m \in I_m$。由引理 3.3，$\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ m\alpha \end{smallmatrix}\right] = g_m^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right)$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 中是开集。由于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/B_{\mathbb{E}}^- \cong \partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 上的锥拓扑等价于由 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/B_{\mathbb{E}}^-$ 的连续开典范投影所诱导的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/B_{\mathbb{E}}^-$ 上的商拓扑，因此 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) g_m^{-1} B_{\mathbb{E}}^-$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 中是开集；再取逆映射（它是连续的），可知集合 $B_{\mathbb{E}}^- g_m \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 中也是开集。

还需证明$\bigsqcup_{g_m \in I_m} U_{\mathbb{E}}^- T_{\mathbb{E}} g_m \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中稠密；由第 (1) 部分，只需$g_m \in I_m$证明对于任意固定的 $g_m \in I_m$，开集 $B_{\mathbb{E}}^- g_m \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的聚点恰好是 $B_{\mathbb{E}}^- \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的元素。再次利用 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})/B_{\mathbb{E}}^- \cong \partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 上的锥拓扑以及引理 3.3 的证明中使用的群 B，很容易得到该引理的第 (2) 部分。

第（3）部分 可由第（2）部分、$B_{\mathbb{E}}^- = U_{\mathbb{E}}^- T_{\mathbb{E}}$这一事实以及映射的连续性轻易得出 ψ_θ. □

本节将考虑集合

$$\mathbb{P}_0 := \{x = [x_1, 1; x_3, x_4] \in \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{E}^2))\}$$

它在 $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{E}^2))$中是开集。然后我们记

$$X_{\theta,0} := \mathbb{P}_0 \cap X_\theta$$

且它在 X_θ中是开集。和之前一样，集合$X_{\theta,\,0}$ 称为 X_θ中的大胞腔。

根据引理 3.4，建议再次研究集合 $(U_{\mathbb{E}}^- T_{\mathbb{E}} g_i) \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}$（对于任意 $g_i \in I$），以及它们的闭包。

我们有

(4)

$$
\begin{aligned}
(U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}})\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \theta\left(\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -a & x \end{pmatrix} \right) \mid x\in\mathbb{E}^*, a\in\mathbb{E} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(x^{-1}) & 0 \\ \theta(-a) & \theta(x) \end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{E}^*, a\in\mathbb{E} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\theta(x^{-1}) & 0 \\ a\theta(x^{-1})+x^{-1}\theta(-a) & x^{-1}\theta(x) \end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{E}^*, a\in\mathbb{E} \right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow [(U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}})\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}] = \{[x\theta(x^{-1}),0;a\theta(x^{-1})+x^{-1}\theta(-a),x^{-1}\theta(x)] \mid x\in\mathbb{E}^*, a\in\mathbb{E}\}.
\end{aligned}
$$

对于任意 $g_m\in I_m$，我们也有:

(5)

$$
\begin{aligned}
(U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{m\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{m\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -a & x \end{pmatrix} \right) \mid x\in\mathbb{E}^*, a\in\mathbb{E} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x & -\frac{x}{m\alpha} \\ a & -\frac{a}{m\alpha}+x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(x^{-1})+\frac{\theta(a)}{m\alpha} & -\frac{\theta(x)}{m\alpha} \\ -\theta(a) & \theta(x) \end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{E}^*, a\in\mathbb{E} \right\} \\
&\xrightarrow[x^{-1}\theta(x^{-1})]{multiply} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{m\alpha} \\ \frac{a}{x} & -\frac{a}{mx\alpha}+x^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(x^{-2})+\frac{\theta(a)}{m\theta(x)\alpha} & -\frac{1}{m\alpha} \\ -\frac{\theta(a)}{\theta(x)} & 1 \end{pmatrix} \right] \mid x\in\mathbb{E}^*, a\in\mathbb{E} \right\} = \\
&= [(U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}})\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}] \subset \mathbb{P}_0.
\end{aligned}
$$

于是，集合 $[(U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]$ 的唯一聚点为点 $[-\theta(b),1;-b\theta(b)\ b]$，其中 $b\in\mathbb{E}$。这些元素是在取序列 $\{x_{n_k}:=\omega_{\mathbb{E}}^{-n_k}\}_{k\geq 0}$ 和 $\{a_{n_k}:=bx_{n_k}\}_{k\geq 0}$时出现的，其中 $0<n_k\to\infty$ 且 $b\in\mathbb{E}$。对于形如 $\{x_{n_k}:=\omega_{\mathbb{E}}^{n_k}\}_{k\geq 0}$ 的序列，我们得不到任何极限。另外，请注意，集合 $\{[-\theta(b),1;-b\theta(b)\ b]\mid b\in\mathbb{E}\}$ 是元素$[0,1;0,0]\in\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{E}^2))$ 在作用 $\cdot_{\theta}$ 下的 $U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}$-轨道。

由引理 3.4 以及上文对 (4) 和 (5) 的计算可得:

引理 3.5。回忆记号 $I_m:=\{g_m\mid m\in\mathbb{E}^*/(\mathbb{E}^*)^2\}$。于是:

$$
X_{\theta,0}\cap\psi_{\theta}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})) = [(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]
$$

$$
X_{\theta,0} = \overline{[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]}\cap\mathbb{P}_0
$$

$$
X_{\theta} = \bigcup_{g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})} g\cdot_{\theta}X_{\theta,0}.
$$

证明。从上述计算可明显看出

$$
[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}] = X_{\theta,0}\cap\psi_{\theta}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})) = \mathbb{P}_0\cap\psi_{\theta}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})).
$$

由于~~根据引理 3.4(3)，$[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}] = X_{\theta}$~~，我们立即得到

$$
X_{\theta,0} = \overline{[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\cdot_{\theta}\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]}\cap\mathbb{P}_0.
$$

令 $C\in X_{\theta}$。由于 $C\in\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{E}^2))$，我们有 $C=[x_1,x_2;\ x_3,x_4]$。若 $x_2\neq 0$，则 $C\in X_{\theta,\ 0}$，于是证明完毕。若 $x_1=0$，则经过一些简单计算，可以找到某个 $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$，使得 $\rho(g)C\rho(\theta(g^{-1}))\in\mathbb{P}_0$。于是证明完毕。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 1.3 的证明。由引理 3.5 可知，关于 $\cdot_\theta$ 作用， X_θ 中的 SL(2, $\mathbb{E}$)-轨道由集合 $X_{\theta,\ 0}$中各点所给出的 SL(2, $\mathbb{E}$)-轨道确定。此外，(5) 中的计算表明，集合 $[(U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\ \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]$ 在 $\mathbb{P}_0$ 中的唯一聚点是点$[-\theta(b), 1;\ -b\theta(b)\ b]$，其中 $b\in\mathbb{E}$，它是元素 $[0,1$的 $U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}$-轨道；以及关于作用 $\cdot_\theta$， $0, 0]\in\mathbb{P}$ (End($\mathbb{E}^2$))。此外，很容易看出，集合 $[T_{\mathbb{E}}\cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]$ 在 $\mathbb{P}_0$ 中的唯一聚点正是 $[0,1;0,0]$。

此外，通过简单计算

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(d) & -\theta(b) \\ -\theta(c) & \theta(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\theta(c) & a\theta(a) \\ -c\theta(c) & c\theta(a) \end{pmatrix}$$

这表明点 $[0,1;0,0]$ 的 SL(2, $\mathbb{E}$)-轨道确实是 X_θ 中的闭集。

由于 $[(\ \bigsqcup\ U_{\mathbb{E}}^{-}T_{\mathbb{E}}g_m)\ \cdot_\theta \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]$ 已经属于点 $[1,0;0,1]=[\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]_{g_m\in I_m}$ 关于 $\cdot_\theta$ 作用的 SL(2, $\mathbb{E}$)-轨道，定理得证。

□

推论 3.6. 关于作用 $\cdot_\theta$，点 $[1,0;0,1]=[\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}]$ 在 SL(2, $\mathbb{E}$) 中的稳定子是 SL(2, $\mathbb{F}$)，而点 $[0,1;\ 0,0]$ 在 SL(2, $\mathbb{E}$) 中的稳定子是子群 $\{\left(\begin{smallmatrix} a-\alpha b & z \\ 0 & a+\alpha b \end{smallmatrix}\right)\mid a,b\in\mathbb{F}$，其中 $a^2-\alpha^2b^2=1, z\in\mathbb{E}\}\leq B_{\mathbb{E}}^{+}$.

证明。第二部分直接由计算得出

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta(d) & -\theta(b) \\ -\theta(c) & \theta(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\theta(c) & a\theta(a) \\ -c\theta(c) & c\theta(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

4. The wonderful compactification of SL(2, $\mathbb{F}$)/H_σ

第三种奇妙紧化由 σ SL(2, $\mathbb{F}$) 的内对合族给出，其不动点群为 $H_\sigma=\{g\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\mid \sigma(g)=g\}$。本节将使用 (1) 中的记号。

接下来的几段将概述 [HW02] 中关于 SL(2, k) 的 k-对合的相应结果，其中 k 是特征不为 2 的域。设 $\overline{k}$ 为 k 的代数闭包。

回顾一下，映射 ϕ: SL(2, $\overline{k}$) $\to$SL(2, $\overline{k}$) 是一个 k-自同构（或等价地，是一个定义在 k 上的自同构），如果 ϕ 是双射有理 k-同态，且其逆映射也是一个有理 k-同态， [Hel00，第 2.2] 节。SL(2, $\overline{k}$) 的一个二阶抽象自同构 θ 称为 SL(2,$\overline{k}$) 的抽象对合。SL(2, $\overline{k}$) 的一个 k-对合 θ 是一个定义在 SL(2, $\overline{k}$) 的 k 上的对合，而 θ 在 SL(2, k) 上的限制是 SL(2, k) 的一个 k-对合。给定 $g\in$ SL(2, $\overline{k}$)，记 ι_g 为由 $x\mapsto \iota_g(x):=gxg^{-1}$ 定义的 SL(2,$\overline{k}$) 的内自同构。

定义在 k 上的连通约化代数群的 k-对合同构类在 [Hel00] 中给出。SL(n, k) 的 k-对合的同构类的一个简单刻画见 [HWD06]。我们记录 SL(2, k) 的 k-对合的分类:

定理 4.1. *[*[HW02]定理 1，推论 1，推论 *2]*。SL(2, k) 的每个 k-同构类的 k-对合都具有形式 ι_A，其中 $A=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{smallmatrix}\right)\in$GL(2, k)。SL(2, k) 的两个这样的 k-对合 ι_A和$A\in\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ m' & 0 \end{smallmatrix}\right)\}\subset$GL(2, k) 共轭，当且仅当 m和 m'属于 k^*的同一个平方类。特别地，SL(2, k) 的 k-对合有 $order(k^*/(k^*)^2)$ 个 k-同构类。

定义 4.2. 给定群 G 的一个对合 σ， σ 的不动点群为 $H_\sigma:=\{x\in G\mid \sigma(x)=x\}$。

对于 $\mathrm{SL}(2,k)$ 的一个 k-对合 σ，商空间 $\mathrm{SL}(2,k)/H_\sigma$ 称为一个 k-对称簇，而 $\mathrm{SL}(2,k)/H_\sigma$ 的许多结构由 H_σ 决定。

命题 4.3 ([HW02] 第 3 节)。设 $\sigma=\iota_A$，其中 $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\m&0\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}(2,k)$，是 $\mathrm{SL}(2,k)$ 的一个 k-对合。那么 $H_\sigma=\{\left(\begin{smallmatrix}x&y\\my&x\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,k)\mid x^2-my^2=1\}$。

定理 4.4 ([HW02] 第 3.2 节)。设 $k=\mathbb{Q}_p$, $\sigma=\iota_A$，其中 $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\m&0\end{smallmatrix}\right)$ 且 $\overline{m}\in\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$。那么，当且仅当 $\bar{m}\neq 1$ 时，H_σ 是各向异性的。若 $\bar{m}=1$，则 H_σ 是各向同性的，并且与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)$ 的极大 $\mathbb{Q}_p$-分裂环面共轭，即 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)$ 的对角子群。

定理 4.5（[BH09] 定理 4.18）。设 $k=\mathbb{Q}_p$, $\sigma=\iota_A$ 满足 $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\m&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $\overline{m}\in\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$。则

(1) 若 $\overline{m}\neq\overline{1}$，则 $|B^+\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)/H_\sigma|=2$；
(2) 若 $\overline{m}=\overline{1}$，则 $|B^+\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q}_p)/H_\sigma|=6$。

定理 4.5 中的相同结论应当适用于任意有限域扩张 $\mathbb{F}$ of $\mathbb{Q}_p$。下面我们将给出这类结果的纯几何证明。

当 $k=\mathbb{F}$是 $\mathbb{Q}_p$的有限域扩张时，我们还记录不动点群 H_σ的如下几何解释。为固定记号，设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$的有限域扩张。我们将 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的 Bruhat–Tits 树记为 $\mathcal{T}_\mathbb{F}$，其顶点是 $\mathbb{F}^2$中 $\mathcal{O}_\mathbb{F}$-格的等价类（其构造见 [Ser12]）。树 $\mathcal{T}_\mathbb{F}$是一棵正则无限树，每个顶点的度均为 $|k_\mathbb{F}|+1$，其中 $k_\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 的剩余域。$\mathcal{T}_\mathbb{F}$ 的无穷远边界 $\partial\mathcal{T}_\mathbb{F}$ 是射影空间$P^1(\mathbb{F})\cong\mathbb{F}\cup\{\infty\}$。此外，端点 $\infty\in\partial\mathcal{T}_\mathbb{F}$对应向量 $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\in P^1(\mathbb{F})$。其余端点 $\xi\in\partial\mathcal{T}_\mathbb{F}$对应向量 $\left[\begin{smallmatrix}1\\x\end{smallmatrix}\right]\in P^1(\mathbb{F})$，其中 $x\in\mathbb{F}$。

定理 4.6（[CL22] 推论 4.8）。设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，$A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\m&0\end{smallmatrix}\right)$，其中$m\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$，且 $\sigma:=\iota_A$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的相应 $\mathbb{F}$-对合。取 $K_m:=\mathbb{F}(\sqrt{m})$ 为一个域扩张。那么，方程 $A(\xi)=\xi$ 的解中，满足 $\xi\in P^1K_a$ 的只有 $\xi_\pm:=\left[\begin{smallmatrix}1\\\pm\sqrt{m}\end{smallmatrix}\right]$ 和 $H_\sigma=\mathrm{Fix}_{\mathrm{SL}(2,K_m)}(\{\xi_-,\xi_+\})\cap\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})=\{\left(\begin{smallmatrix}x&y\\my&x\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\mid x^2-my^2=1\}$。此外，

（1）若 $m=1$，则 $\xi_\pm:=\left[\begin{smallmatrix}1\\\pm1\end{smallmatrix}\right]$，且 H_σ 包含 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中所有以 $\xi_\pm$ 为排斥端点和吸引端点的双曲元素。特别地，H_σ 在 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F})$ 共轭下等于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的整个对角子群，因此 H_σ 是非紧阿贝尔群。（2）若 $m\neq1$，则 $\xi_\pm:=\left[\begin{smallmatrix}1\\\pm\sqrt{m}\end{smallmatrix}\right]\in P^1K_m-P^1\mathbb{F}$，且 H_σ 是紧阿贝尔群。

现在，给定定理 4.1 中的对合 $\sigma:=\iota_A$，我们考虑 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\mathrm{End}(\mathbb{F}^2)$ 上的如下作用：$g\cdot_\sigma D:=\rho(g)D\rho(\sigma(g^{-1}))$，其中对每个 $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 和 $D\in\mathrm{End}(\mathbb{F}^2)$ 都成立。关于作用 $\cdot_\sigma$，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中元素 $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$ 的稳定子是子群 H_σ。于是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\cdot_\sigma\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}\cong\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/H_\sigma$，我们考虑连续映射

$$\psi_\sigma:\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\to\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2)),\ \text{ given by } g\mapsto\psi_\sigma(g):=[\rho(g)\rho(\sigma(g^{-1}))]=[\rho(g\sigma(g^{-1}))].$$

我们希望理解关于对合 σ 和映射 ψ_σ 的如下闭包：

$$X_\sigma:=\overline{\psi_\sigma(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}))}=\overline{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\cdot_\sigma\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]}=\overline{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/H_\sigma]}\text{ in }\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2)).$$

定义 4.7。我们将上述闭包 X_σ 视为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/H_\sigma$ 的紧化，并称其为关于对合 σ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/H_\sigma$ 的美妙紧化。

直接由定义可得以下显然的引理：

引理 4.8. 关于作用 $\cdot_\sigma$，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 中的 $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$ 轨道在X_σ中稠密。

为了证明定理 1.4，我们还需要集合

$$\mathbb{P}_0:=\{x=[1,x_2;x_3,x_4]\in\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))\}$$

它在 $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 中是开集。接着记

$$X_{\sigma,0} := \mathbb{P}_0 \cap X_\sigma$$

而且它在 X_σ 中是开集。集合$X_{\sigma,\ 0}$ 也称为 X_σ 中的大胞腔。

与第2节中利用 U^-TU 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的稠密性不同，利用双陪集 $B^+\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/H_\sigma$ 只含有限个元素这一事实会方便得多。下面我们将明确计算每个 $\overline{m} \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$，对应的这些双陪集，并找出在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中为开的双陪集。在此过程中，我们将运用定理 4.6 所提供的几何图像。由于下文的构造只需将博雷尔子群 B^+ 替换为其任意一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-共轭子群即可，因此我们将使用相反的 B^-。

回顾一下，对于任意局部紧群 G 及其任意闭子群 $H \leq G$，齐性空间 G/H 上的商拓扑定义为使典范投影 $p\colon G \to G/H$ 连续且为开映射的拓扑。此外，可以证明，对于 G/H 的任意紧子集 Q，存在 G 的一个紧子集 K，使得 $p(K) = Q$（参见 [BdlHV08，附录 B，引理 B.1.1]）。

情形 $\overline{m} = \overline{1}$ 和 $\overline{m} \neq \overline{1}$ 的表现不同，因为对于后者，我们将使用一个二次扩张 $\mathbb{F}$。

情形 $\overline{m} = \overline{1}$。

回顾 [CL22] 中的以下显然引理。

引理 4.9。设 K 是 $\mathbb{Q}_p$的有限域扩张。对角子群$Diag(K) := \{\left(\begin{smallmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mid d \in K^*\} \leq \mathrm{SL}(2,K)$ 在边界 $\partial\mathcal{T}_K$上有 6 个轨道：

(1) $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ 的 $Diag(K)$-轨道以及 $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$的 $Diag(K)$-轨道(2) 对于每个 $\overline{m} \in K^*/(K^*)^2$，$\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \overline{m} \end{smallmatrix}\right]$的 $Diag(K)$-轨道。

证明。子群 $Diag(K)$ 逐点固定端点 $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ 和 $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$。对于每个 $\overline{m} \in K^*/(K^*)^2$，，$\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \overline{m} \end{smallmatrix}\right]$的 $Diag(K)$-轨道由形如$\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ d^2\overline{m} \end{smallmatrix}\right]$的向量组成，这些轨道覆盖整个边界$\partial\mathcal{T}_E - \{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\}$。□

由引理 4.9 可立即得到：

引理 4.10. 设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$的一个有限域扩张，$A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，且 $\sigma_1 := \iota_A$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 上相应的$\mathbb{F}$-对合，其对应的不动点群为 H_{σ_1}。则

$$H_{\sigma_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) Diag(\mathbb{F}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1},$$

H_{σ_1} 在边界 $\partial\mathcal{T}_\mathbb{F}$上恰有 6 个轨道，相应的 H_{σ_1}-轨道在边界$\partial\mathcal{T}_\mathbb{F}$ 上由以下 6 个代表元给出：

$\{\left[\begin{smallmatrix} 1-\overline{m} \\ 1+\overline{m} \end{smallmatrix}\right] \mid \overline{m} \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2\} \cup \{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\} \subset \partial\mathcal{T}_\mathbb{F}$。

令为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的矩阵

$$g_1 := \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \qquad g_2 := \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad g_m := \left(\begin{smallmatrix} 1+m & m-1 \\ \frac{m}{m-1} & 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ for } m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2 \text{ with } m \neq 1$$

使得

$$g_1\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \qquad g_2\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \qquad g_m\left(\left[\begin{smallmatrix} 1-m \\ 1+m \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right].$$

令 $I := \{\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}, g_1, g_2, g_m \mid m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2, m \neq 1\}$，以及 $I_m := \{g_m \mid m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2, m \neq 1\} \cup \{\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}\}$，并约定对于 $m = 1 \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$，取 $g_m := \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$。

引理 4.11。采用上述记号，我们有：

(1) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) = \bigsqcup_{g_i \in I} B^- g_i H_{\sigma_1}$(2) 对任意 $g_m \in I_m$，集合 $B^- g_m H_{\sigma_1} = U^- T g_m H_{\sigma_1}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中是开集，而且集合$\bigsqcup_{g_m \in I_m} U^- T g_m H_{\sigma_1}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中稠密

(3) $\psi_{\sigma_1}(\bigsqcup U^-Tg_m)$ 在 $\psi_{\sigma_1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})) = [\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 中开且稠密，因此$_{g_m\in I_m}$

$$\overline{\psi_{\sigma_1}(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U^-Tg_m)} = \overline{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]}.$$

证明。令 $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 且令 $\xi_0 := \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$。注意， ξ_0 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-稳定子恰为 $B^- = \left\{\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x^{-1}\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{F}, x\in\mathbb{F}^*\right\}$。

若 $g^{-1}(\xi_0) = \xi_0$，则 $g\in B^-$，因此 $g\in B^-H_{\sigma_1}$。若 $g^{-1}(\xi_0)\neq\xi_0$，则需考虑 6 种情形，分别对应于 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 中的 H_{σ_1}-轨道。相应地作用一个元素 $h\in H_{\sigma_1}$，可得 $hg^{-1}(\xi_0)\in\{\left[\begin{smallmatrix}1-\overline{m}\\1+\overline{m}\end{smallmatrix}\right] \mid \overline{m}\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2\}\cup\{\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\}$。此外，再相应地乘以一个来自 I 的元素 g_i，可得 $g_ihg^{-1}(\xi_0) = \xi_0$，因此 $g^{-1}\in H_{\sigma_1}g_i^{-1}B^-$，从而得到所需的 $g\in B^-g_iH_{\sigma_1}$。这就证明了引理的第 (1) 部分。

我们来证明（2）。（取 $g_m\in I_m$。由于根据引理 4.10，群 H_{σ_1} 与 $Diag(\mathbb{F})$ 共轭，并且向量 $\left[\begin{smallmatrix}1\\\overline{m}\end{smallmatrix}\right]\in\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 的 $Diag(\mathbb{F})$-轨道（其中 $\overline{m}\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$，相对于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^-\cong\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的锥拓扑显然是开的），因此 $\left[\begin{smallmatrix}1-\overline{m}\\1+\overline{m}\end{smallmatrix}\right]\in\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 的 H_{σ_1}-轨道在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 中是开的。由于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^-\cong\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的锥拓扑等价于由 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^-$ 的连续开典范投影诱导的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^-$ 上的商拓扑，我们有 $H_{\sigma_1}g_m^{-1}B^-$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中是开的；再取连续的逆映射，可得集合 $B^-g_mH_{\sigma_1}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中也是开的。

还需证明$\bigsqcup U^-Tg_mH_{\sigma_1}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中稠密。根据第 (1) 部分，只需证明：对于任意固定的 $g_m\in I_m$，开集 $B^-g_mH_{\sigma_1}$ 的聚点恰好是 $B^-g_1H_{\sigma_1}\cup B^-g_2H_{\sigma_1}$ 中的元素。事实上，由于 H_{σ_1} 与对角子群$Diag(\mathbb{F})$ 共轭，其吸引端点和排斥端点为 $\{\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\}$。注意，对于任意固定的 $g_m\in I_m$，开集 $H_{\sigma_1}\left[\begin{smallmatrix}1-\overline{m}\\1+\overline{m}\end{smallmatrix}\right]$ 在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 中的唯一聚点是 $\{\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\}$。再次利用 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^-\cong\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的锥拓扑，存在序列 $\{b_n\}_{n\geq1}\subset B^-$ 和 $\{h_n\}_{n\geq1}\subset H_{\sigma_1}$，使得 $\{b_ng_mh_n\}_{n\geq1}$ 相对于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 上的拓扑收敛于 g_1 或 g_2。于是第 (2) 部分得证。

第（3）部分可由第（2）部分、 $B^- = U^-T$这一事实以及映射ψ_{σ_1}的连续性轻易推出。□

根据引理 4.11，建议研究集合 $(U^-Tg_i)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$（对任意 $g_i\in I$），以及它们的闭包。

我们有

(6)

$$\begin{aligned}(U^-Tg_1)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2} &= \left\{\begin{pmatrix}x & 0\\ a & x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^{-1} & 0\\ -a & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{F}^*, a\in\mathbb{F}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}x & 0\\ a & x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x^{-1}\\ x & -a\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{F}^*, a\in\mathbb{F}\right\}\\ &= \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2ax^{-1}-3x^{-2}\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{F}^*, a\in\mathbb{F}\right\}\Rightarrow\\ &\Rightarrow [(U^-Tg_1)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = \{[0,1;-1,2ax^{-1}-3x^{-2}] \mid x\in\mathbb{F}^*, a\in\mathbb{F}\}\subset[\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}].\end{aligned}$$

(7)

$$
\begin{aligned}
(U^-Tg_2)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -a & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ x & -a \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2ax^{-1} - x^{-2} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow [(U^-Tg_2)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = \{[0,1;-1,ax^{-1}-x^{-2}] \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F}\} \subset [\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}].
\end{aligned}
$$

现在，对于每个满足 $m \neq 1$ 的 $m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2,$ ，我们有：

(8)

$$
\begin{aligned}
&(U^-Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+m & m-1 \\ \frac{m}{m-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-m \\ \frac{m}{1-m} & 1+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -a & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3m-1}{1-m} & 4m \\ \frac{1-2m}{(1-m)^2} & \frac{3m-1}{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ x & -a \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 4mx^2 & \frac{3m-1}{1-m} - 4max \\ 4max + \frac{3m-1}{m-1} & 2ax^{-1}\frac{3m-1}{1-m} + x^{-2}\frac{1-2m}{(1-m)^2} - 4ma^2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow [(U^-Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = \\
&= \{[1, \frac{3m-1}{(1-m)4mx^2} - ax^{-1}; ax^{-1} + \frac{3m-1}{(m-1)4mx^2}, \frac{2a}{4mx^2}\frac{3m-1}{1-m} + \frac{1-2m}{(1-m)^2 4mx^4} - a^2x^{-2}] \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F}\}.
\end{aligned}
$$

那么，集合 $[(U^-Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 的唯一聚点是点 $[1,-b;\ b,-b^2]$，其中$b \in \mathbb{F}$。这些元素可由取序列 $\{x_{n_k} = \omega_{\mathbb{F}}^{-n_k}\}_{k\geq 0}$ 和 $\{a_{n_k} := bx_{n_k}\}_{k\geq 0}$得到，其中$0 < n_k \to \infty$ 且 $b \in \mathbb{F}$。对于形式为 $\{x_{n_k} = \omega_{\mathbb{F}}^{n_k}\}_{k\geq 0}$ 的序列，我们得不到任何极限。

对于情形 $m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$，其中 $m = 1$，按照上述约定，我们取 $g_m := \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$，并且我们有：

(9)

$$
\begin{aligned}
(U^-T)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -a & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^{-1} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ x & -a \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x^2 & -xa \\ ax & -a^2 + x^{-2} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F} \right\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow [(U^-T)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = \{[1, -x^{-1}a; ax^{-1}, -a^2x^{-2} + x^{-4}] \mid x \in \mathbb{F}^*, a \in \mathbb{F}\}.
\end{aligned}
$$

那么，集合 $[(U^-Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 的唯一聚点是点 $[1,-b;\ b,-b^2]$，其中$b \in \mathbb{F}$。这些元素可由取序列 $\{x_{n_k} = \omega_{\mathbb{F}}^{-n_k}\}_{k\geq 0}$ 和 $\{a_{n_k} := bx_{n_k}\}_{k\geq 0}$得到，其中$0 < n_k \to \infty$ 且 $b \in \mathbb{F}$。对于形式为 $\{x_{n_k} = \omega_{\mathbb{F}}^{n_k}\}_{k\geq 0}$ 的序列，我们得不到任何极限。

另外，注意到集合 $\{[1,-b;\ b,-b^2] \mid b \in \mathbb{F}\}$ 是元素 $[1,0;0,0] \in \mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 在作用 $\cdot_{\sigma_1}$ 下的 U^-T-轨道。

由引理 4.11 以及上述从 (6) 到 (9) 的计算可得：

引理 4.12。回顾记号 $I_m := \{g_m \mid m \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2, m \neq 1\} \cup \{\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}\}$。那么：

$$
X_{\sigma_1,0} \cap \psi_{\sigma_1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})) = [(\bigsqcup_{g_m \in I_m} U^-Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]
$$

$$X_{\sigma_1,0} = \overline{[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U^{-}Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]}\cap\mathbb{P}_0$$

$$X_{\sigma_1} = \bigcup_{g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})} g\cdot_{\sigma_1} X_{\sigma_1,0}.$$

证明。由上述计算可知

$$[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U^{-}Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = X_{\sigma_1,0}\cap\psi_{\sigma_1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})) = \mathbb{P}_0\cap\psi_{\sigma_1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})).$$

根据引理 4.11(3)，由于 $[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U^{-}Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] = X_{\sigma_1}$，我们立即得到

$$X_{\sigma_1,0} = \overline{[(\bigsqcup_{g_m\in I_m} U^{-}Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]}\cap\mathbb{P}_0.$$

令 $C\in X_{\sigma_1}$。由于 $C\in\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$，我们有 $C=[x_1,x_2;\ x_3,x_4]$。若 $x_1\neq 0$，则 $C\in X_{\sigma_1,\,0}$，结论得证。若 $x_1=0$，则经过一些简单计算，可以找到某个 $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$，使得 $\rho(g)C\rho(\sigma_1(g^{-1}))\in\mathbb{P}_0$。于是结论得证。□

定理 1.4 的证明。根据引理 4.12，X_{σ_1} 中的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道由集合 $X_{\sigma_1,\,0}$ 中各点所确定的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道给出，这些轨道是相对于 $\cdot_{\sigma_1}$ 作用而言的。此外，(8) 和 (9) 中的计算表明，集合 $[(U^{-}Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 在 $\mathbb{P}_0$ 中的聚点只有 $[1,-b;\ b,-b^2]$（其中 $b\in\mathbb{F}$），而集合 $[T\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 在 $\mathbb{P}_0$ 中的聚点只有 $[1,0;\ 0,0]$。此外，集合 $\{[1,-b;\ b,-b^2]\mid b\in\mathbb{F}\}$ 是元素 $[1,0;\,0,0]\in\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 在作用 $\cdot_{\sigma_1}$ 下的 $U^{-}T$-轨道。进一步，经过简单计算

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-c\\-b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2&-ac\\ca&-c^2\end{pmatrix}$$

这表明，点 $[1,0;\,0,0]$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道在 X_{σ_1} 中确实是闭的。

由于 $[(\bigsqcup U^{-}Tg_m)\cdot_{\sigma_1}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 已经属于点 $[1,0;\,0,1]=[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]_{g_m\in I_m}$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道（关于 $\cdot_{\sigma_1}$ 作用），定理得证。

□

推论 4.13. 关于作用 $\cdot_{\sigma_1}$，点 $[1,0;\,0,1]=[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的稳定子为 H_{σ_1}；点 $[1,0;\ 0,0]$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的稳定子是子群 $\{\mu_2\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mid b\in\mathbb{F}\}$，它是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的博雷尔 $B^{+}\leq$，其中 μ_2 是 $\mathbb{F}$ 中的单位根群。

证明。这直接由计算得出

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-c\\-b&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2&-ac\\ca&-c^2\end{pmatrix}.$$

□

情形 $\overline{m}\neq\overline{1}$。

回顾一下，对于 $m\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$，在满足 $\overline{m}\neq\overline{1}$ 时，我们考虑 $A:=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\m&0\end{smallmatrix}\right)$，它对应于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的 $\mathbb{F}$-对合 $\sigma_m:=\iota_A$。

根据 [CL22]，也回顾一下引理 5.3：

引理 4.14。设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限域扩张，$A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\m&0\end{smallmatrix}\right)$，其中 $m\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$, $m\neq 1$，且 $\sigma_m:=\iota_A$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 上相应的 $\mathbb{F}$-对合。则 $H_{\sigma_m}:=\{g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\mid\sigma_m(g)=g\}$ 在边界 $\partial T_{\mathbb{F}}$ 上至多有 8 个轨道。

现在选取一个代表元集合 $I\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$，使得对于 $g_i\in I$，$g_i^{-1}\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)\in\partial T_{\mathbb{F}}$ 的 H_{σ_m}-轨道两两不相交，并覆盖边界 $\partial T_{\mathbb{F}}$。根据引理 4.14，我们知道 I 是一个有限集合。

引理 4.15。使用上述记号，我们有：
(1) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) = \bigsqcup B^- g_i H_{\sigma_m}{}^{g_i\in I}$(2) 对任意 $g_i \in I$，集合 $B^- g_i H_{\sigma_m} = U^- T g_i H_{\sigma_m}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中是开集 (3) $\psi_{\sigma_m}(\bigsqcup U^- T g_i)$ 在 $\psi_{\sigma_m}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})) = [\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \cdot_{\sigma_m} \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 中开且稠密，因此$_{g_i\in I}$

$$\overline{\psi_{\sigma_m}(\bigsqcup_{g_i\in I} U^- T g_i)} = \overline{[\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}) \cdot_{\sigma_m} \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]}.$$

证明。令 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$，并令 $\xi_0 := \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$。注意，$\xi_0$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-稳定子恰为 $B^- = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x^{-1}\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{F}, x \in \mathbb{F}^*\right\}$。

若 $g^{-1}(\xi_0) = \xi_0$，则 $g \in B^-$，从而 $g \in B^- H_{\sigma_m}$。若 $g^{-1}(\xi_0) \neq \xi_0$，则恰有$|I| < \infty$ 种情况需要考虑，每种情况都对应于 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 中的 H_{σ_m}-轨道。相应地作用一个元素 $h \in H_{\sigma_m}$，可得 $hg^{-1}(\xi_0) \in \{g_i^{-1}(\xi_0) \mid g_i \in I\}$。此外，再相应地乘以一个来自 I 的元素 g_i，可得 $g_i h g^{-1}(\xi_0) = \xi_0$，从而得到 $g^{-1} \in H_{\sigma_m} g_i^{-1} B^-$，这就得到了所需的 $g \in B^- g_i H_{\sigma_m}$。这证明了引理的第 (1) 部分。

我们来证明（2）。考虑二次域扩张 $\mathbb{E} := \mathbb{F}(\sqrt{m})$。由定理 4.6(2) 可知，这两个端点 $\xi_\pm := \left[\begin{smallmatrix}1\\ \pm\sqrt{m}\end{smallmatrix}\right]$ 属于 $P^1\mathbb{E} - P^1\mathbb{F} = \partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}} - \partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$。此外，群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 作用于 $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$，并保持端点子集 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 不变；事实上，相对于 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 上的锥拓扑，子集 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 中是闭的。现在，再由定理 4.6 可知，$\mathrm{Fix}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})}(\{\xi_-,\xi_+\})$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})$ 中对角群 $Diag(\mathbb{E})$ 的一个共轭；并且由引理 4.11(2) 的同一证明可知，$\mathrm{Fix}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})}(\{\xi_-,\xi_+\})$ 在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}} - \{\xi_\pm\}$ 上有 4 个开轨道。特别地，这意味着 $\mathrm{Fix}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})}(\{\xi_-,\xi_+\})$ 的开轨道覆盖 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$，而 $\mathrm{Fix}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})}(\{\xi_-,\xi_+\})$ 在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ 中的一个开轨道与闭集 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 的交，相对于 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的锥拓扑仍然是开集。此外，由 [CL22][Lemma 5.3] 中引理 4.14 的证明可知，$H_{\sigma_m} = \mathrm{Fix}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})}(\{\xi_-,\xi_+\}) \cap \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\mathrm{Fix}^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{E})}(\{\xi_-,\xi_+\})$ 与 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 相交的任一开轨道上至多有两个轨道。由于 H_{σ_m} 是紧的，且 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的作用是连续的，因此 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的任意 H_{σ_m}-轨道相对于 $\partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的锥拓扑都是开集。由于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^-$ 上的商拓扑与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^- \cong \partial\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ 上的锥拓扑等价，前者由从 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})/B^-$ 的连续开典范投影诱导而来，因此 $H_{\sigma_m} g_i^{-1} B^-$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中是开集；再取逆映射（它是连续的），可知集合 $B^- g_i H_{\sigma_1}$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中也是开集。

（3）可由（1）和（2）轻易推出。 □

Take $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ then we have:

(10)

$$\begin{aligned}
[(U^- T g) \cdot_{\sigma_m} \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] &= \left\{ \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x^{-1}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -y & x\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ 1 & 0\end{pmatrix} \right] \mid x \in \mathbb{F}^*, y \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \left[\begin{pmatrix} xa & xb \\ ya + x^{-1}c & yb + x^{-1}d\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & a \\ md & -mb\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mx} \\ x & \frac{-y}{m}\end{pmatrix} \right] \mid x \in \mathbb{F}^*, y \in \mathbb{F} \right\} \\
&= \left\{ \left[\begin{pmatrix} xa & xb \\ ya + \frac{c}{x} & yb + \frac{d}{x}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa & -\frac{c}{mx} - \frac{ya}{m} \\ -mxb & \frac{d}{x} + by\end{pmatrix} \right] \mid x \in \mathbb{F}^*, y \in \mathbb{F} \right\} \\
&\xrightarrow[x^{-2}]{multiply} \left\{ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{ya}{x} + \frac{c}{x^2} & \frac{yb}{x} + \frac{d}{x^2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\frac{c}{mx^2} - \frac{ya}{mx} \\ -mb & \frac{d}{x^2} + \frac{by}{x}\end{pmatrix} \right] \mid x \in \mathbb{F}^*, y \in \mathbb{F} \right\}
\end{aligned}$$

那么，集合 $[(U^- T g) \cdot_{\sigma_m} \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}] \subset \mathbb{P}_0$ 的聚点只有这些点

$$\left\{ \left[\begin{pmatrix} a & b \\ za & zb\end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -\frac{za}{m} \\ -mb & bz\end{pmatrix} \right] = [1, -\frac{z}{m}; z, -\frac{z^2}{m}] \mid z \in \mathbb{F} \right\}$$

因为我们总有 $a^2-mb^2\neq 0$。这些元素出现在取序列 $\{x_{n_k}=\omega_{\mathbb{F}}^{-n_k}\}_{k\geq 0}$和 $\{y_{n_k}:=zx_{n_k}\}_{k\geq 0}$ 时，其中 $0<n_k\to\infty$ 和 $z\in\mathbb{F}$。对于形如 $\{x_{n_k}=\omega_{\mathbb{F}}^{n_k}\}_{k\geq 0}$ 的序列，我们得不到任何极限。

此外，注意到集合 $\{[1,-\frac{z}{m};\ z,-\frac{z^2}{m}]\mid z\in\mathbb{F}\}$是元素 $[1,0;0,0]\in\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$ 在作用 $\cdot_{\sigma_m}$下的 U^-T-轨道。

注记4.16. 将引理 4.15(1) 和 (2) 与计算（10）结合起来。因此，由于$\psi_{\sigma_m}(\bigsqcup U^-Tg_i)\subset\mathbb{P}_0$是开集，且等于 $\psi_{\sigma_m}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}))=[\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})\cdot_{\sigma_m}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$，我们注意到大$g_i\in I$胞 $X_{\sigma,\ 0}:=\mathbb{P}_0\cap X_{\sigma_m}$ 在 X_{σ_m} 中恰好是集合 X_{σ_m}。

定理 1.4 的证明。根据注记4.16，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 在 X_{σ_m} 上的轨道（相对于 $\cdot_{\sigma_m}$ 作用）由集合 $X_{\sigma_m,\ 0}$中各点对应的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道确定。此外，(10) 中的计算表明，$[(\bigsqcup U^-Tg)\cdot_{\sigma_m}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$在 $\mathbb{P}_0$中的唯一聚点是这些点：$[1,-\frac{z}{m};\ z,-\frac{z^2}{m}]$,$g\in I$

关于 $z\in\mathbb{F}$，它们恰好是元素 $[1,0$ 的 U^-T-轨道；相对于作用 $\cdot_{\sigma_m}$，$0,0]\in\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{F}^2))$。此外，集合 $[T\cdot_{\sigma_m}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 在 $\mathbb{P}_0$ 中唯一的聚点是 $[1,0;\ 0,0]$。

Further, b通过简单的计算 tation

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\m&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{m}\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&\frac{-c}{m}\\-bm&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&\frac{-ac}{m}\\ca&\frac{-c^2}{m}\end{pmatrix}.$$

这表明点 $[1,0;0,0]$ 的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道确实在 X_{σ_m} 中是闭的 .

由于 $[(\bigsqcup U^-Tg_i)\cdot_{\sigma_m}\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 已经是点 $[1,0;0,1]=[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 关于 $\cdot_{\sigma_m}$ 作用的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$-轨道，定理得证。

□

推论 4.17。相对于作用 $\cdot_{\sigma_m}$，点 $[1,0;0,1]=[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}]$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的稳定子是 H_{σ_m}；点 $[1,0;\ 0,0]$ 在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 中的稳定子是子群 $\{\mu_2\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mid b\in\mathbb{F}\}$，它属于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F})$ 的博雷尔子群 $B^+\leq$，其中 μ_2 是 $\mathbb{F}$ 中的单位根群 2^{nd}。

证明。这直接由计算 tion

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\m&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{m}\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&\frac{-c}{m}\\-bm&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&\frac{-ac}{m}\\ca&\frac{-c^2}{m}\end{pmatrix}$$

取 $\begin{pmatrix}a^2&\frac{-ac}{m}\\ca&\frac{-c^2}{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. 即可得到

□

References

[AB18] Ana B˘alibanu, *Part II: The wonderful compactification*, 2018。讲义笔记 https://people.math.harvard.edu/~ana/part2.pdf。↑2[BdlHV08] Bachir Bekka、Pierre de la Harpe 和 Alain Valette, *Kazhdan's property (T)*, 《新数学专著》, 第11卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2008。MR2415834 ↑10[BH09] Stacy L Beun 和 Aloysius G Helminck, *flag varieties of* 2 *k* *On the classification of orbits of symmetric subgroups acting on* **37** 2009 4, 1334 1352 ↑1 9 SL(,), 《代数通讯》（）, 第–期。,[CL22] Corina Ciobotaru 和 Arielle Leitner, *Chabauty Limits of Groups of Involutions In* 2 *F* *for local* SL(,), 。arXiv: 。v。,,,, *fields* 2022 2208 12247 1 ↑1 3 9 10 13 14 [83] DCP C. De Concini 和 C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, 载于: 《不变量理论》, 《数学讲义》, 第 996, 1983 1 44 ↑1 卷, Springer（）, –。DCS C. De Concini 和 T.A. Springer, *Compactification of symmetric varieties*, 《变换群》4（ [99] 1999 273 300, 10 1007 01237359 ↑1 2 ）, –, DOI https://doi.org/。/BF。, EJ Sam Evens 和 Benjamin F. Jones, , 2008。arXiv:0801.0456。↑1[FTN91] Alessandro Fig´a-Talamanca 和 Claudio Nebbia, *Harmonic Analysis and Representation Theory forGroups Acting on Homogenous Trees*, 《伦敦数学学会讲义系列》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1991 ↑5 。Hel A. G. Helminck, *On the classification of k-involutions*, 《Adv. Math.》153（2000）, 第1期, 1–117, DOI 10.1006/aima.1998.1884。MR1771689 ↑8 [00] *On the wonderful compactification*

[HWD06] Aloysius G. Helminck、Ling Wu 和 Christopher E. Dometrius, *Involutions of* SL(n, k), （$n > 2$）, 《应用数学学报》90（2006）, 第1-2期, 91–119, DOI 10.1007/s10440-006-9032-7。MR2242950 ↑8[HW02] Aloysius G Helminck 和 Ling Wu, *Classification of involutions of* SL(2, k), 《代数通讯》 **30** 2002 1, 193 203 ↑8 9 （）, 第–期。, SJ Paul J. Sally Jr., *An Introduction to p-adic Fields*,
[98]
Harmonic Analysis and the Representation Theory of SL
2, **46** 1998 1 47, 10 1023 1007583108067 ↑1 《数学物理通讯》 （）, –, DOI doi.org/。/A:。
[12] *A course in arithmetic* 7, 2012 ↑1 2 9
Ser Jean-Pierre Serre, , 第[74] *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups (after A. Borel and J. Tits)*卷。施普林格
9
科学与商业媒体, 。„[74] *Abstract homomorphisms of simple algebraic groups (after A. Borel and J. Tits)*Ste Robert Stei
nberg, , S´eminaire Bourbaki, 第 25`届年会（1972/1973）, 报告编号435, Springer, 柏林, 1974年, 第307–326页。《数学讲义》, 第383卷。MR 0414732 ↑[Tit71] J. Tits, *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*, 《J. Reine Angew. Math.》247（1971）, 196–220, DOI 10.1515/crll.1971.247.196（法语）。MR277536 ↑2, 3