arXiv:2301.00432v1 [math.FA] 1 Jan 2023

# 横截性定理的定量版本的下界

Andrew Murdza 和 Khai T. Nguyen

北卡罗来纳州立大学数学系，电子邮箱:
apmurdza@ncsu.edu，khai@math.ncsu.edu

2023年1月3日

摘要

本文研究横截性定理的定量版本。更确切地说，给定连续函数 $f \in \mathcal{C}([0,1]^d, \mathbb{R}^m)$ 和一个维数为 $p$ 的流形 $W \subset \mathbb{R}^m$，将利用幂函数证明关于集合 $\mathcal{Z}_W^f = \{x \in [0,1]^d \colon f(x) \in W\}$ 的 $(d+p-m)$ 维豪斯多夫测度的定量上界的锐性结果，该结果已在 [8], 中得到。

关键词。横截性引理，定量估计

美国数学学会数学主题分类。46T20

## 1 引言

设 $g \colon X \to Y$ 是两个光滑流形之间的 $\mathcal{C}^1$ 映射，其中 $X$ 的维数为 $d$， $Y$ 的维数为 $m$。对于任意维数为 $p$ 的光滑子流形 $W \subseteq Y$，若函数 $g$ 与 $W$ 横截，则记作 $g \pitchfork W$，当且仅当

$$(dg)_p(T_pX) + T_{g(p)}(W) \;=\; T_{g(p)}(Y) \quad \text{for all } p \in g^{-1}(W).$$

横截性引理是研究托姆横截性定理的关键 [10,11, 12], ，它表明横截映射的集合是稠密的 [9]。特别地，对于任意连续函数 $f \colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^m$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\mathcal{C}^1$ 函数 $f_\varepsilon \colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^m$，使得

$$\|f_\varepsilon - f\|_{\mathcal{C}^1} \;\leq\; \varepsilon \qquad \text{and} \qquad f_\varepsilon \pitchfork W.$$

对于每个 $h \in \mathcal{C}\big([0,1]^d、\ \mathbb{R}^m\big)$，考虑集合

$$\mathcal{Z}_W^h \;:=\; \Big\{x \in [0,1]^d : h(x) \in W\Big\}. \tag{1.1}$$

若 $h$ 光滑且与 $W$横截，则 $\mathcal{Z}_W^h$ 是一个 $(d+p-m)$ 维光滑流形。因此，其 $(d+p-m)$ 维豪斯多夫测度有限。秉承度量熵的思想,

度量熵曾用于研究双曲守恒律 [1, 2, 3, 7] 和 Hamilton-Jacobi方程 [4, 5, 6], 的解集的紧性估计。一个自然的问题是，对 $\mathcal{Z}_W^f$的测度进行定量分析。也就是说，通过对 $f$进行 $\varepsilon$ 扰动，能使该测度变得多小？为了更精确地表述结果，给定 $f \in \mathcal{C}([0,1]^d, \mathbb{R}^m)$，定义

$$\mathcal{N}_W^f(\varepsilon) := \inf_{\|h-f\|_{\mathcal{C}^0} \le \varepsilon} \mathcal{H}^{d+p-m}\left(\mathcal{Z}_W^h\right) \tag{1.2}$$

是所有满足 $\|h-f\|_{\mathcal{C}^0} \le \varepsilon$ 的函数 $h \in \mathcal{C}\left([0,1]^d, \mathbb{R}^m\right)$ 中 $\mathcal{Z}_W^h$的最小（$d+p-m$）豪斯多夫测度。在 [8], 中，最近已证明了数量 $\mathcal{N}_W^f(\varepsilon)$ 的一个上界，并将其应用于定量估计具有严格凸通量的标量守恒律的熵弱解中的激波曲线数量。具体而言，对于 $f \in \mathcal{C}^\alpha([0,1]^d, \mathbb{R}^m)$，若其 H¨older 范数为 $\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\,\alpha}}$ 且 $\varepsilon > 0$ 足够小，则存在一个仅依赖于 $W$ 的常数 $C_W > 0$ ，使得

$$\mathcal{N}_W^f(\varepsilon) \le C_W \cdot \left(\frac{\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}}{\varepsilon}\right)^{\frac{m-p}{\alpha}}. \tag{1.3}$$

证明了关于 $\varepsilon$的爆破速率 $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{m-p}{\alpha}}$是 [8, 例 3.1] 中幂函数意义下的最佳上界，该结论适用于标量情形（$d = m = 1$）中的一类 Lipschitz 函数（$\alpha = 1$）。然而，多维情形下这一问题仍未解决。因此，本文旨在探讨一般连续函数 $f \in \mathcal{C}([0,1]^d, \mathbb{R}^m)$ 在满足 $d, m \ge 1$时，估计式（1.3）的尖锐性。特别地，我们为 H¨older 连续函数类得到了如下定量下界。

定理 1.1 假设 $p < m \le p + d$ 和 $W \subset \mathbb{R}^m$ 是一个维数为 $p$ 的 $\mathcal{C}^1$流形。对于任意 $0 < \alpha \le 1$ 和 $\lambda > 0$，存在一个具有指数 $\alpha$ 且霍尔德范数为 $\lambda$ 的霍尔德连续函数 $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^m$，使得

$$\mathcal{N}_W^f(\varepsilon) \ge C_{[W,\alpha,\lambda]} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{4\cdot\sqrt{\alpha|\log_2 \varepsilon|}}}\right)^{\frac{m-p}{\alpha}}$$

其中某个常数 $C_{[W,\alpha,\lambda]} > 0$ 仅取决于 $W$、 $\alpha$ 和 $\lambda$。

这里的常数 $C_{[W,\alpha,\lambda]}$ 在注 2.4 中得到了明确计算。此外，通过使用定义2.1中的连续模及其逆函数，将在第2节的定理 2.3 中证明关于连续函数的一般结果。这可以很容易地推广到连续函数 $f\colon X \to Y$ 的情形，其中 $X$、$Y$ 是光滑流形，而 $W \subseteq Y$ 是 $Y$ 的光滑子流形。最后，我们指出，定理 1.1 中的因子 $2^{4\cdot\sqrt{\alpha|\log_2 \varepsilon|}}$ 是必要的。事实上，我们将在命题 2.1 中证明，对于 $\alpha = d = m = 1$、 $p = 0$ 和 $W = \{0\}$ 的情形，(1.3) 中关于 $\mathcal{N}_W^f(\varepsilon)$ 的估计实际上并不精确。这引出了关于 $\mathcal{N}_W^f(\varepsilon)$ 的精确估计这一开放问题。

## 2 $\mathcal{N}_W^f(\varepsilon)$ 的下界

在本节中，我们将为构造出的连续 $f \in \mathcal{C}\left([0,1]^d\right.$建立 $\mathcal{Z}_W^f$的豪斯多夫测度的定量下界估计；该 $\left.\mathbb{R}^m\right)$ 具有给定的连续模

且集合 $W \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个 $\mathcal{C}^1$ 流形，$\dim(W) = p$。为简便起见，我们假设 $W$ 仅由一个坐标图 $\mathbb{R}^m$构成，即，

(A1). 存在一个 $\mathcal{C}^1$ 微分同胚 $\phi$，其定义在开子集 $U$、$V \subset \mathbb{R}^m$ 之间，使得 $W \subset U$且 $\phi(W) = \mathbb{R}^p \times \{0\} \cap V$ 且

$$0 < \gamma_W \doteq 2\sqrt{m-p} \cdot \left( \frac{\sup_{x \in U} |\nabla \phi(x)|}{\inf_{x \in U} |\nabla \phi(x)|} \right) < \infty. \tag{2.4}$$

对于由多个坐标图组成的一般 $\mathcal{C}^1$ 流形 $W$，只需将 $f$ 的构造限制在 $W$ 的一个坐标图中，该坐标图在所有其他坐标图中具有最小常数 $\gamma_W$。为了得到主要结果，我们现在回顾连续模及其逆函数的一些基本概念。

定义2.1 给定子集 $U \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 $V \subseteq \mathbb{R}^m$，设 $h : U \to V$ 连续。$h$ 的最小连续模定义为

$$\omega_h(\delta) = \sup_{x,y \in U, |x-y| \leq \delta} |h(y) - h(x)| \qquad \text{for all } \delta \in [0, \operatorname{diam}(U)]. \tag{2.5}$$

逆函数 数 $h$ 的最小连续模的逆函数是映射 $s \to \Psi_h(s)$，其定义为

$$\Psi_h(s) := \sup \{\delta \geq 0 : |h(x) - h(y)| \leq s \ \text{ for all } |x-y| \leq \delta, x, y \in U\} \tag{2.6}$$

对所有 $s \geq 0$均成立。

显然，对于所有带有 $M_h$ 的 $s \in [M_h, \infty[$，$\Psi_h(s) = \infty$：$= \sup_{x,\ y \in U} |h(x) - h(y)|$。特别地，如果 $h$ 是常函数，则对于所有 $s \geq 0$，$\Psi_h(s) = \infty$。否则，由于 $h$ 的连续性，有

$$\Psi_h(0) = 0 \qquad \text{and} \qquad 0 < \Psi_h(s) \leq \operatorname{diam}(U) \qquad \text{for all } s \in ]0, M_h[.$$

此外，$\Psi_h(\cdot)$：$[0, \infty[ \to [0, \infty[$ 是递增且超可加的

$$\Psi_h(s_1 + s_2) \geq \Psi_h(s_1) + \Psi_h(s_2) \qquad \text{for all } s_1, s_2 \geq 0.$$

如果映射 $\delta \to \omega_h(\delta)$ 关于 $[0, \operatorname{diam}(U)[$ 严格递增，那么 $\Psi_h$ 是 $\omega_h$ 的逆函数，即

$$\Psi_h(s) = \omega_h^{-1}(s) \qquad \text{for all } s \in [0, M_h[.$$

根据上述观察，我们将连续模定义如下：

定义 2.2 若函数 $\beta$：$[0, \infty] \to [0, \infty]$ 递增、次可加，并且满足以下条件，则称其为连续模

$$\lim_{\delta \to 0+} \beta(\delta) = \beta(0) = 0.$$

我们称连续函数 $f$：$U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ 以 $\beta$ 作为连续模，若

$$\sup_{x,y \in U, |x-y| \leq s} |f(x) - f(y)| \leq \beta(s) \qquad \text{for all } s \geq 0. \tag{2.7}$$

本文的主要结果表述如下:

定理 2.3 除了 (A1) 外，假设 $p < m \leq p + d$。对于每个连续模 $\beta$，都存在一个连续函数 $f$: $[0,1]^d \to \mathbb{R}^m$，它以 $\beta$ 为连续模，并且对于充分小的 $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{N}_W^f(\varepsilon) \;\geq\; \left(\frac{16}{\Psi_\beta(\gamma_W \varepsilon)}\right)^{m-p} \cdot 2^{-4(m-p)\cdot\sqrt{\left|\log_2(\Psi_\beta(\gamma_W\varepsilon))\right|}}. \tag{2.8}$$

证明。证明分为三个主要步骤:

步骤 1。考虑 $W = \{0\}$ 和 $p = 0$ 的情形。我们断言

(G). 存在一个连续函数 $\tilde{f}$: $[0,1]^d \to \mathbb{R}^m$，它以 $\beta$ 为连续模，并且对于每个 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot \beta(2^{-5})$，都有

$$\mathcal{N}_{\{0\}}^{\tilde{f}}(\varepsilon) \;\geq\; \left(\frac{16}{\Psi_\beta(2\sqrt{m}\varepsilon)}\right)^{m} \cdot 2^{-4m\cdot\sqrt{\left|\log_2\left(\Psi_\beta\left(2\sqrt{m}\varepsilon\right)\right)\right|}} \tag{2.9}$$

其中 $\Psi_\beta$ 是 $\beta$ 的最小连续模的逆函数。

构造 ˜所需函数 $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ 在 (G) 中的构造将按如下方式进行:

1. 首先，将 $[0,1]$ 划分为可数无穷多个子区间 $[s_n, s_{n+1}]$，使得

$$s_1 \;=\; 0, \qquad s_n \;=\; \sum_{\ell=1}^{n} 2^{-\ell} \qquad \text{for all } n \geq 2.$$

对于每个 $n \geq 1$，我们定义 $u_n$: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 如下:

$$u_n(s) \;=\; \sum_{k=0}^{2^{n^2}-1} c_n(s - s_n - 4k\ell_n), \qquad \ell_n \;=\; 2^{-n^2-n-2},$$

其中 $c_n$: $[0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个示例函数，且 $\operatorname{supp}(c_n) \subseteq [0, 4\ell_n]$，满足对所有 $s \in [0, 2\ell_n]$

$$c_n(s) \;=\; -\,c_n(4\ell_n - s) \;=\; \frac{\beta(s)}{2} \cdot \chi_{[0,\ell_n[}(s) + \frac{\beta(2\ell_n - s)}{2} \cdot \chi_{[\ell_n, 2\ell_n]}(s)\,. \tag{2.10}$$

˜ ˜ ˜ ˜函数 $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^m)$ 定义如下:

$$\tilde{f}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot (r(x_1), \ldots, r(x_m)) \quad \text{for all } x = (x_1, \ldots, x_d) \in [0,1]^d \tag{2.11}$$

with

$$r(s) \;\doteq\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) \qquad \text{for all } s \in [0,1].$$

˜由于 $r$ 的连续模被 $\beta$所界定，因此 $f$ 的连续模也被 $\beta$所界定。事实上，对于每个 $s \geq 0$，可估计

$$\begin{aligned} \omega_{\tilde{f}}(s) \;&=\; \sup_{x,y\in[0,1]^d, |x-y|\leq s} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \\ &=\; \sup_{x,y\in[0,1]^d, |x-y|\leq s} \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |r(x_i) - r(y_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \beta(s). \end{aligned}$$

假设对于每个满足

$$\frac{1}{2\sqrt{m}}\cdot\beta\left(\frac{\ell_{n_0+1}}{2}\right)\ \le\ \varepsilon\ \le\ \frac{1}{2\sqrt{m}}\cdot\beta\left(\frac{\ell_{n_0}}{2}\right), \tag{2.12}$$

成立

$$\mathcal{N}^{\tilde{f}}_{\{0\}}(\varepsilon)\ =\ \inf_{\|g-f\|_{\mathcal{C}^0}\le\varepsilon}\mathcal{H}^{d-m}\left(\mathcal{Z}^{g}_{\{0\}}\right)\ \ge\ 2^{mn_0^2}. \tag{2.13}$$

在这种情况下，根据式 (2.6) 中最小连续模的逆函数的性质，我们有

$$\Psi_\beta(2\sqrt{m}\varepsilon)\ \ge\ \Psi_\beta\left(\beta\left(\frac{\ell_{n_0+1}}{2}\right)\right)\ \ge\ \frac{\ell_{n_0+1}}{2}\ =\ 2^{-(n_0+1)^2-(n_0+1)-3}\ \ge\ 2^{-(n_0+2)^2}.$$

因此，有

$$n_0\ \ge\ -2+\sqrt{-\log_2\Psi_\beta\big(2\sqrt{m}\varepsilon\big)}$$

由式 (2.13) 可得式 (2.9)。

2. 在接下来的两个步骤中，我们将证明式 (2.13)。对于每个 $n\ge 1$ 和 $k\in\{0,1,\dots,2^{n^2}-1\}$, 令

$$a_{n,k}\ =\ s_n+(4k+1)\ell_n,\qquad b_{n,k}\ =\ s_n+(4k+3)\ell_n,$$

我们记为

$$\square_{n,\iota}\ =\ [a_{n,\iota_1},b_{n,\iota_1}]\times\cdots\times[a_{n,\iota_m},b_{n,\iota_m}]\quad\text{for all }\iota\in\{0,1,\dots,2^{n^2}-1\}^m. \tag{2.14}$$

固定 $g\in\mathcal{C}\big([0,1]^d、\ \mathbb{R}^m\big)$，使得 $\|\tilde{f}-g\|_{\mathcal{C}^0}\le\varepsilon_\circ$ 根据 $\mathcal{Z}^g_{\{0\}}$ 的定义，我们有
e

$$\mathcal{Z}^g_{\{0\}}\ \supseteq\ \bigcup_{n\ge1,\iota\in\{0,1,\dots,2^{n^2}-1\}^m}\left(\bigcup_{z\in[0,1]^{d-m}}\mathcal{Z}_{n,\iota}(z)\times\{z\}\right)$$

with

$$\mathcal{Z}_{n,\iota}(z)\ =\ \{y\in\square_{n,\iota}:g(y_1,...,y_m,z_1,...,z_{d-m})=0\}.$$

假设对于每个 $1\le n\le n_0$ 和 $\iota\in\{0,1,\dots,2^{n^2}-1\}^m$，集合

$$\mathcal{Z}_{n,\iota}(z)\ \neq\ \varnothing\qquad\text{for all }z\in[0,1]^{d-m}. \tag{2.15}$$

在这种情况下，我们可以将 $\mathcal{Z}^g_{\{0\}}$ 的 $(d-m)$-豪斯多夫测度上界估计为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{d-m}\left(\mathcal{Z}^g_{\{0\}}\right)\ &\ge\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\iota\in\{0,1,\dots,2^{n^2}-1\}^m}\mathcal{H}^{d-m}\left(\bigcup_{z\in[0,1]^{d-m}}\mathcal{Z}_{n,\iota}(z)\times\{z\}\right)\\ &\ge\ \sum_{n=1}^{n_0}\sum_{\iota\in\{0,1,\dots,2^{n^2}-1\}^m}\mathcal{H}^{d-m}\left([0,1]^{d-m}\right)\ =\ \sum_{n=1}^{n_0}2^{mn^2}\ \ge\ 2^{mn_0^2},\end{aligned}$$

由此得到（2.13）。

3. 为完成证明，我们需要验证（2.15）。固定 $n \in \{1, \dots, n_0\}$、$\iota \in \{0, 1, \dots, 2^{n^2}-1\}^m$ 和 $z \in [0,1]^{d-m}$，考虑连续映射 $h^z : \square_{n,\iota} \to \mathbb{R}^m$，使得

$$h^z(y) \;=\; y + \frac{\sqrt{m}\cdot \ell_n}{\beta(\ell_n/2)} \cdot g(y,z) \qquad \text{for all } y \in \square_{n,\iota}. \tag{2.16}$$

注意，$\square_{n,\iota} \subseteq [0,1]^m$ 是一个边长为 $2\ell_n$、中心位于 $c^{\iota,n}_i$ 的立方体，其中

$$c^{\iota,n}_i \;=\; s_n + (4\iota_i + 2)\ell_n \qquad \text{for all } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

回顾 (2.11)、(2.12) 和 $\|f - g\|_{\mathcal{C}^0} \le \varepsilon$，对每个 $y \in \square_{n,\iota}$ 以及 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$，令 $s := y_i - s_n - 4\iota_i\ell_n \in [\ell_n, 3\ell_n]$，我们估计

$$\begin{aligned} \left|h^z_i(y) - c^{\iota,n}_i\right| \;&=\; \left| y_i + \frac{\sqrt{m}\cdot\ell_n}{\beta(\ell_n/2)} \cdot g_i(y,z) - s_n - (4\iota_i+2)\ell_n \right| \\ &\le\; \frac{\sqrt{m}\cdot\ell_n}{\beta(\ell_n/2)} \cdot \varepsilon + \left| y_i + \frac{\sqrt{m}\cdot\ell_n}{\beta(\ell_n/2)} \cdot f_i(y,z) - s_n - (4\iota_i+2)\ell_n \right| \\ &\le\; \frac{\ell_n}{2} + \left| y_i + \frac{\ell_n}{\beta(\ell_n/2)} r(y_i) - s_n - (4\iota_i+2)\ell_n \right| \\ &=\; \frac{\ell_n}{2} + \left| s - 2\ell_n + \ell_n \cdot \frac{c_n(s)}{\beta(\ell_n/2)} \right|. \end{aligned} \tag{2.17}$$

根据 (2.10) 中 $c_n$ 的定义，$s \in [\ell_n, 2\ell_n]$ 和 $s \in [2\ell_n, 3\ell_n]$ 两种情形类似，因此我们将对 $s \in [\ell_n, 2\ell_n]$时的$\left|h^z_i(y) - c^{\iota,n}_i\right|$进行估计。在这种情况下，我们有

$$\left|h^z_i(y) - c^{\iota,n}_i\right| \;=\; \frac{\ell_n}{2} + \left| s - 2\ell_n + \ell_n \cdot \frac{\beta(2\ell_n - s)}{2\beta(\ell_n/2)} \right|$$

若 $s \ge \dfrac{3\ell_n}{2}$，则$\left|h^z_i(y) - c^{\iota,n}_i\right| \le \dfrac{\ell_n}{2} + \max\left\{ 2\ell_n - s, \ell_n \cdot \dfrac{\beta(2\ell_n - s)}{2\beta(\ell_n/2)} \right\} \le \ell_n$。

否则，若$\ell_n \le s < \dfrac{3\ell_n}{2}$，则由 $\beta$的次可加性，我们有

$$-\ell_n \;=\; -\frac{\ell_n}{2} - \left(\ell_n - \ell_n \cdot \frac{\beta(\ell_n/2)}{2\beta(\ell_n/2)}\right) \;\le\; h^z_i(y) - c^{\iota,n}_i \;\le\; \frac{\ell_n}{2} - \frac{\ell_n}{2} + \ell_n \cdot \frac{\beta(\ell_n)}{2\beta(\ell_n/2)} \;\le\; \ell_n.$$

因此，映射 $y \mapsto h^z(y)$ 在 $\square_{n,\iota}$ 中保持不变。最后，根据布劳威尔不动点定理，$h^z$存在一个不动点 $y_z \in \square_{n,\iota}$，而 (2.16) 表明 $y_z$ 属于 (2.15) 中的集合 $\mathcal{Z}_{n,\iota}(z)$。关于 (G) 的证明完成。

步骤 2。对于任意给定的 $r_0 > 0$，我们将证明 $W = [-r_0, r_0]^p \times \{0\}^{m-p}$ 情形下的结果。由 (G)，存在一个函数 $\tilde{g} \in \mathcal{C}([0,1]^d, \mathbb{R}^{m-p})$，使得

- $\tilde{g}$ 以 $\beta$ 作为连续模；
- 对于每个 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\sqrt{m-p}} \cdot \beta(2^{-5})$，都有

$$\mathcal{N}^g_{\{0\}}(\varepsilon) \;\ge\; \left(\frac{16}{\Psi_\beta(2\sqrt{m-p}\cdot\varepsilon)}\right)^{m-p} \cdot 2^{-4(m-p)\cdot\sqrt{\left|\log_2\left(\Psi_\beta\left(2\sqrt{m-p}\cdot\varepsilon\right)\right)\right|}}. \tag{2.18}$$

由下式定义的连续函数 $g\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^m$

$$g(x) \;=\; (0, \tilde{g}(x)) \qquad \text{for all } x \in [0,1]^d,$$

以 $\beta$ 作为连续模。此外，如果 $0 < \varepsilon \leq \min\left\{\frac{1}{2\sqrt{m-p}} \cdot \beta(2^{-5})\;\; r_0\right\}$，那么对于每个满足 $\|h-g\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon$ 的函数 $h = (h_1, ..., h_m) \in \mathcal{C}([0,1]^d, \mathbb{R}^m)$，都有

$$h_i(x) \;\in\; [-r_0, r_0] \qquad \text{for all } i \in \{1, \ldots, p\}, x \in [0,1]^d.$$

因此，我们可以将 $\mathcal{Z}_W^h$ 的 $(d-m+p)$ 维豪斯多夫测度上界估计为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{d-m+p}\left(\mathcal{Z}_W^h\right) \;&=\; \mathcal{H}^{d+m-p}\left(\left\{x \in [0,1]^d : h(x) \in [-r_0, r_0]^p \times \{0\}^{m-p}\right\}\right) \\
&=\; \mathcal{H}^{d-m+p}\left(\{x \in [0,1]^d : (h_{p+1}(x), ..., h_m(x)) \in \{0\}^{m-p}\}\right) \\
&\geq\; \inf_{\|b-\tilde{g}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon} \mathcal{H}^{d-m+p}\left(\mathcal{Z}_{\{0\}}^b\right).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

将 (2.18) 代入 (2.19)，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_W^g(\varepsilon) \;&=\; \inf_{\|h-g\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon} \mathcal{H}^{d-m+p}\left(\mathcal{Z}_W^h\right) \;\geq\; \inf_{\|b-\tilde{g}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon} \mathcal{H}^{d-m+p}\left(\mathcal{Z}_{\{0\}}^b\right) \\
&\geq\; \left(\frac{16}{\Psi_\beta(2\sqrt{m-p} \cdot \varepsilon)}\right)^{m-p} \cdot 2^{-4(m-p)\cdot\sqrt{\left|\log_2\left(\Psi_\beta\left(2\sqrt{m-p}\cdot\varepsilon\right)\right)\right|}}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

步骤 3. 为完成证明，我们将为满足 (A1) 的 $\mathcal{C}^1$-光滑流形 $W \subset \mathbb{R}^m$ 建立 (2.8)。不失一般性，假设存在某个 $r_0 > 0$

$$W_{r_0} \;\doteq\; [-\tilde{r}_0, \tilde{r}_0]^p \times \{0\}^{m-p} \;\subseteq\; \phi(W),$$

对于步骤 2 中的 $r_0 = \tilde{r}_0/\lambda_2$，我们考虑 $g$，其中

$$\lambda_1 \;\doteq\; \inf_{x \in U} |\nabla \phi(x)| \qquad \text{and} \qquad \lambda_2 \;\doteq\; \sup_{x \in U} |\nabla \phi(x)|. \tag{2.21}$$

所需的函数 $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^m$ 定义为

$$f(x) \;=\; \phi^{-1} \circ [\lambda_1 \cdot g(x)] \qquad \text{for all } x \in [0,1]. \tag{2.22}$$

事实上，$f$ 以 $\beta$ 为连续模，因为对任意 $x$、$y \in [0,1]^d$，都有

$$|f(y) - f(x)| \;\leq\; \frac{\lambda_1 \cdot |g(y) - g(x)|}{\inf_{z \in U} |\nabla \phi(z)|} \;=\; |g(y) - g(x)|.$$

为验证 (2.8)，令 $h \in \mathcal{C}([0,1]^d, \mathbb{R}^m)$ 满足 $\|h - f\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon$。由 (2.21) 和 (2.22) 可得

$$\left\|\frac{\phi \circ h}{\lambda_1} - g\right\|_{\mathcal{C}^0} \;=\; \frac{1}{\lambda_1} \cdot \|\phi \circ h - \phi \circ f\|_{\mathcal{C}^0} \;\leq\; \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \|h - f\|_{\mathcal{C}^0} \;\leq\; \frac{\lambda_2 \varepsilon}{\lambda_1},$$

这就意味着

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{d-m+p}\left(\mathcal{Z}_W^h\right) \;&=\; \mathcal{H}^{d-m+p}\left(\left\{x \in [0,1]^d : (\phi \circ h)(x) \in \phi(W)\right\}\right) \\
&\geq\; \mathcal{H}^{d-m+p}\left(\left\{x \in [0,1]^d : (\phi \circ h)(x) \in [-\tilde{r}_0, \tilde{r}_0]^p \times \{0\}^{m-p}\right\}\right) \\
&=\; \mathcal{H}^{d-m+p}\left(\mathcal{Z}_{W_{r_0}}^{\phi \circ h}\right) \;\geq\; \mathcal{N}_{W_{r_0}}^g\left(\frac{\lambda_2 \varepsilon}{\lambda_1}\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

最后，回顾 (2.20)，对于每个满足 $\|h-f\|_{\mathcal{C}^0} \le \varepsilon$ 的 $h \in \mathcal{C}([0,1]^d, \mathbb{R}^m)$，我们得到

$$\mathcal{H}^{d-m+p}\left(\mathcal{Z}_W^h\right) \;\ge\; \left(\frac{16}{\Psi_\beta(2\sqrt{m-p}\cdot\lambda_2\varepsilon/\lambda_1)}\right)^{m-p} \cdot 2^{-4(m-p)\cdot\sqrt{\left|\log_2\left(\Psi_\beta\left(2\sqrt{m-p}\cdot\lambda_2\varepsilon/\lambda_1\right)\right)\right|}},$$

并且 (2.4) 得出 (2.8)。 □

注意，若 $\beta(s) = \lambda s^\alpha$ 对于某个 $\lambda > 0$ 和 $\alpha \in ]0,1]$，则由 (2.6) 可知

$$\Psi_\beta(s) \;=\; \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{for all } s \in [0,\infty[.$$

在这种情况下，通过直接计算，我们可以得到 (2.8) 中的显式估计。更确切地说，有如下结论。

注 2.4 在定理 2.3 的相同设定下，若 $\beta(s) = \lambda s^\alpha$ 对于某个 $\lambda > 0, \alpha \in (0,1]$，则存在一个 H¨older 连续函数 $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}^m$，其指数为 $\alpha$，H¨older 范数为 $\lambda$，使得

$$\mathcal{N}_W^f(\varepsilon) \;\ge\; C_{[W,\alpha,\lambda]} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{m-p}{\alpha}} \cdot 2^{-\frac{4(m-p)}{\alpha^{1/2}}\cdot\sqrt{\left|\log_2(\gamma_W\varepsilon/\lambda)\right|}}.$$

这特别地推出定理 1.1。

最后，注意定理 2.3 中的因子 $2^{-4m\cdot\sqrt{\left|\log_2\left(\Psi_\beta\left(2\sqrt{m}\varepsilon\right)\right)\right|}}$ 是必要的。换言之，对于情形 $\alpha = d = m = 1, p = 0$ 和 $W = \{0\}$，(1.3) 中关于 $\mathcal{N}_W^f(\varepsilon)$ 的估计实际上并非尖锐。

命题 2.1 假设对所有 $s \ge 0$，$d = m = 1$、$p = 0$、$W = \{0\}$ 和 $\beta(s) = s$。那么，如果将 2.8 中的因子 $2^{-4(m-p)\cdot\sqrt{\left|\log_2(\Psi_\beta(\gamma_W\varepsilon))\right|}}$ 替换为任意正数，定理 2.3 将不成立。

证明。反证法，假设存在一个函数 $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 和一个常数 $C_f \in (0,1]$，使得 $f$ 以 $\beta$ 为连续模，并且

$$\mathcal{N}_{\{0\}}^f \;\ge\; \frac{C_f}{\varepsilon} \qquad \text{for all } \varepsilon > 0 \text{ small.} \tag{2.24}$$

1. 我们首先断言，对每个 $0 < \varepsilon \le \dfrac{C_f^2}{12}$，都存在 $(y_i)_{i=1}^N \in [0,1]^N$，使得

$$N \;\ge\; \frac{C_f^2}{18\varepsilon}, \qquad |f(y_i)| \;\ge\; \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y_i - y_j| \;\ge\; \frac{2\varepsilon}{C_f} \quad \text{for all } i \ne j. \tag{2.25}$$

事实上，将 $[0,1]$ 划分为 $K_0 = \lceil \frac{C_f}{3\varepsilon} \rceil$ 个长度为 $[a_i, a_{i+1}]$ 的子区间

$$\frac{2\varepsilon}{C_f} \;\le\; \ell_i \;\le\; \frac{3\varepsilon}{C_f} \qquad \text{for all } i \in \{0,\dots,K_0-1\}, \tag{2.26}$$

我们考虑一个函数 $h_\varepsilon \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$，它在 $[a_i, a_{i+1}]$ 中对每个 $i \in \{0,\dots,K_0-1\}$ 的定义如下：

• 如果 $\max_{x\in[a_i,a_{i+1}]}|f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}$，那么我们设

$$h_\varepsilon(x) \;=\; \begin{cases} f(a_i)+x-a_i, & a_i\le x\le a_i-f(a_i)+\dfrac{\varepsilon}{2},\\ \dfrac{\varepsilon}{2}, & a_i-f(a_i)+\dfrac{\varepsilon}{2}\le x\le a_{i+1}+f(a_{i+1})-\dfrac{\varepsilon}{2},\\ f(a_{i+1})-x+a_{i+1}, & a_{i+1}+f(a_{i+1})-\dfrac{\varepsilon}{2}\le x\le a_{i+1}. \end{cases} \tag{2.27}$$

显然 ， $h_\varepsilon$在 $[a_i,a_{i+1}]$上至多有 2 个零点，而 $\|h_\varepsilon-f\|_{\mathcal{C}^0}\le\|h_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0}+\|f\|_{\mathcal{C}^0}\le\varepsilon$ .

• 否则，若 $\max_{x\in[a_i,a_{i+1}]}|f(x)|>\frac{\varepsilon}{2}$，则我们将 $[a_i,a_{i+1}]$ 划分为 $K_1=\lceil\frac{3}{C_f}\rceil$ 个长度至多为 $\varepsilon$的子区间$\big[a_i^j,a_i^{j+1}\big]$。对于每个 $j\in\{0,\dots,K_1-1\}$，令

$$h_\varepsilon\big(\theta\cdot a_i^j+(1-\theta)\cdot a_i^{j+1}\big) \;=\; \theta\cdot f\big(a_i^j\big)+\big(1-\theta\big)\cdot f(a_i^{j+1}\big),\qquad \theta\in[0,1]. \tag{2.28}$$

在此情况下， $h_\varepsilon$ 在 $[a_i,a_{i+1}]$ 上至多有 $\frac{3}{C_f}+1$ 个零点，并且

$$\|h_\varepsilon-f\|_{\mathcal{C}^0([a_i,a_{i+1}])} \;\le\; \max_{0\le j\le K_1-1}\;\sup_{|x-y|\le a_i^{j+1}-a_i^j}|f(x)-f(y)| \;\le\; \beta(\varepsilon) \;=\; \varepsilon.$$

因此，令 $\mathcal{I}=\big\{i\in\{0,\dots,K_0-1\}\colon \max_{x\in[a_i,a_{i+1}]}|f(x)|>\varepsilon/2\big\}$，且 $\eta=\#\mathcal{I}$。由 (1.2) 和 (2.24)，我们有

$$\frac{C_f}{\varepsilon} \;\le\; \mathcal{H}^0\left(\mathcal{Z}^{h_\varepsilon}_{\{0\}}\right) \;\le\; \eta\cdot\left(\frac{3}{C_f}+1\right)+(K_0-\eta)\cdot 2 \;\le\; \eta\cdot\left(\frac{3}{C_f}+1\right)+\left(\frac{3}{C_f}+1-\eta\right)\cdot 2,$$

并且由 (2.24) 得

$$\eta \;\ge\; \frac{C_f^2-6\varepsilon-2\varepsilon C_f}{(3-C_f)\varepsilon} \;\ge\; \frac{C_f^2}{9\varepsilon}.$$

对于每个 $i\in\mathcal{I}$，令 $z_i\in\operatorname{argmax}_{x\in[a_i,a_{i+1}]}|f(x)|$ 满足 $|f(z_i)|\ge\varepsilon/2$。由 (2.26) 的第一个不等式，可以从集合 $\{z_i$ 中选取所需的点集 $y_i$，其至少包含 $N\ge\frac{C_f^2}{18\varepsilon}$ 个点：$i\in\mathcal{I}\}$，并满足 (2.25)。

2. 利用 (2.25)，我们证明

$$\mathcal{N}^f_{\{0\}}(\varepsilon/4) \;\le\; \left(1-\frac{7C_f^2}{36}\right)\cdot\frac{4}{\varepsilon}\qquad \text{for all } 0\le\varepsilon\le\frac{C_f^2}{12} \tag{2.29}$$

将 $[0,1]$ 划分为 $K_\varepsilon=\lceil\frac{4}{\varepsilon}\rceil$ 个长度小于 $\varepsilon/4$ 的子区间 $[b_k,b_{k+1}]$，令 $g_\varepsilon\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ 为连续函数，使得对所有 $k\in\{0,\dots,K_\varepsilon-1\}$，都有

$$g_\varepsilon\big(\theta\cdot b_k+(1-\theta)\cdot b_{k+1}\big) \;=\; \theta\cdot f\big(b_k\big)+\big(1-\theta\big)\cdot f(b_{k+1}\big),\qquad \theta\in[0,1].$$

经过微小调整，我们可以假设，对于每个 $k\in\{1,\dots,K_\varepsilon\}$， $f(b_k)\ne 0$，从而 $g_\varepsilon$在每个区间 $[b_k,b_{k+1}]$上至多有一个零点。根据构造可知，

$$\|g_\varepsilon-f\|_{C^0} \;\le\; \max_{0\le k\le K_\varepsilon-1}|f(b_{k+1})-f(b_k)| \;\le\; \max_{0\le k\le K_\varepsilon-1}|b_{k+1}-b_k| \;\le\; \frac{\varepsilon}{4}.$$

对于每个满足以下条件的 $k \in \{0, \dots, K_\varepsilon - 1\}$：存在某个 $i \in \{0, \dots, N\}$ 使得 $y_i \in [b_k, b_{k+1}]$，对所有 $x \in [b_k, b_{k+1}]$，都有

$$|g_\varepsilon(x)| \;\geq\; |f(x)| - \frac{\varepsilon}{4} \;\geq\; |f(y_i)| - |\beta(|x - y_i|)| - \frac{\varepsilon}{4} \;>\; \frac{\varepsilon}{4} - |b_{k+1} - b_k| \;>\; 0.$$

I在这种情况下，$g_\varepsilon$ 在至少 $N$ 个区间 $[b_k, b_{k+1}]$上非零。因此，我们有

$$\mathcal{N}^f_{\{0\}}(\varepsilon/4) \;\leq\; \mathcal{H}^0\left(\mathcal{Z}^{g_\varepsilon}_{\{0\}}\right) \;\leq\; K_\varepsilon - N \;\leq\; \frac{4}{\varepsilon} + 1 - \frac{C_f^2}{18\varepsilon}$$

由此得到 (2.29)。

3. 最后，将 (2.25) 应用 $n$次，我们得到

$$\mathcal{N}^f_{\{0\}}\left(\frac{\varepsilon}{4^n}\right) \;\leq\; \left(1 - \frac{7C_f^2}{36}\right)^n \cdot \frac{4^n}{\varepsilon}.$$

因此，当 $\varepsilon$ 替换为 $\dfrac{\varepsilon}{4^n}$ 且 $n \geq 1$ 足够大以使$\left(1 - \frac{7C_f^2}{36}\right)^n < C_f$ 时，(2.24) 不成立。证明至此完成。 □

致谢。K. T. Nguyen 的这项研究部分得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2154201 的支持。

## 参考文献

[1] F. Ancona、O. Glass 和 K. T. Nguyen, 《标量平衡律的下界紧性估计》, 《纯粹与应用数学通讯》65(9), 1303-1329, 2012.[2] F. Ancona、O. Glass 和 K. T. Nguyen, 《双曲守恒律系统的紧性估计》, Ann. Inst. H. Poincar ´e Anal. Non Lin ´eaire, 32(6), 1229-1257, 2015.[3] F. Ancona、O. Glass 和 K. T. Nguyen, 《无一致凸性标量守恒律的柯尔莫哥洛夫熵紧性估计》, SIAM 数学分析杂志, 51 (4), 3020–3051, 2019.[4] F. Ancona、P. Cannarsa 和 K. T. Nguyen：《哈密顿-雅可比方程的定量紧性》, 《理性力学与分析档案》219 (2016), no. 2, 793– 828[5] F. Ancona、P. Cannarsa 和 K. T. Nguyen：《依赖于空间的哈密顿-雅可比方程的紧性估计》, 《中央研究院数学研究所集刊》11 (2016), 63–113
[6] S. Bianchini、P. Dutta 和 K. T. Nguyen：《一致方向凸哈密顿量的哈密顿-雅可比方程度量熵》, 《工业与应用数学学会数学分析杂志》54 (2022), 5551–5575。

[7] R. Capuani、P. Dutta Prerona 和 K. T. Nguyen, 《有界总广义变差函数的度量熵》, SIAM 数学分析杂志 53 (1), 1168 – 1190, 2021.[8] A. Murdza 和 K.T. Nguyen, 《横截性定理的定量版本》, 数学科学通讯, 即将出版。[9] J.M. Bloom, 《流形映射的局部结构》。文学学士论文, 哈佛大学 2004。（链接: https://www.math.harvard.edu/media/ThesisXFinal.pdf）[10]Ren´e Thom, 《可微流形的若干全局性质》, 《瑞士数学评论》28 (1954), no. 1, 17-86.[11] R. M. Hardt andT Rivi`ere, 《连接有理同伦型奇点》, 《数学学报》200 (2008), 15-83.[12] S. Li, 《欧几里得子流形的一般横截性札记》, 《数学手稿》162 (2020), 213-219。