arXiv:2301.00441v1 [math.NT] 1 Jan 2023

关于戴德金和的受限平均

PAOLO MINELLI、ATHANASIOS SOURMELIDIS 和 MARC TECHNAU

摘要。我们研究固定 $\alpha \le 1/2$ 时，集合 $\mathcal{F}_\alpha(Q) := \{ v/w \in \mathbb{Q} : 0 < w \le Q\} \cap [0, \alpha)$ 中有理数上的戴德金和的平均值。在先前的工作中，我们得到了 $\alpha = 1/2$ 的渐近公式，以定量形式证实了 Ito 猜想。本文将我们此前的结果推广到所有固定有理数 α，进而推广到几乎所有无理数 α。作为中间步骤，我们得到一项结果，对欧几里得算法按超额运行时间平均值渐近展开第二项中出现的偏差进行定量刻画；这一结果本身也具有独立的研究价值。

1. 引言与主要结果

本文关注有关戴德金和的分布问题，以及与有理数连分数展开相关的问题。

1.1. 戴德金和。 戴德金和源于戴德金的 η 函数相对于模群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1 & \\ & 1\end{smallmatrix}\right)\}$ 的乘子系统，最早见于戴德金为黎曼文集所撰写的补编 [6]。介绍它们的一种简便方法如下。令 $\lfloor x \rfloor$ 表示$x \in \mathbb{R}$的整数部分。若以 $((\cdot))$ 表示锯齿函数，

$$((x)) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

于是，对于任意一对 $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $b \neq 0$，戴德金和 $s(a, b)$ 定义为

$$s(a, b) = \sum_{n=1}^{b} \left(\!\!\left(\frac{n}{b}\right)\!\!\right) \left(\!\!\left(\frac{na}{b}\right)\!\!\right).$$

日期：2023年1月3日。2020 年数学主题分类：主要分类 11A55；次要分类 11F20、11K50、11J25。关键词与短语：欧几里得算法、连分数、戴德金和、平均值、渐近分析。本文撰写期间，PM 获奥地利科学基金（FWF）项目 I-3466 资助、项目 F-5510-N26 资助（该项目属于特别研究计划“准蒙特卡洛方法：理论与应用”），并获克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会 KAW 2019.0503 资助。AS 获 FWF 项目 M 3246-N 资助。MT 获 FWF–ANR 联合项目 *ArithRand*（FWF I 4945-N 和 ANR-20-CE91-0006）资助。

可以验证，对于任意非零整数 k，$s(a,b) = s(ka,kb)$。因此，$s(a/b) := s(a,b)$ 在 $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ 上定义了一个良定义函数。

本文研究戴德金和的平均值。利用对称性 $s(1-x) = -s(x)$，容易看出

$$\sum_x s(x) = 0, \tag{1.1}$$

当 x 遍历分母固定的 $[0,1]$ 中的分数时，结论成立。将求和范围扩展到分母有界的 $[0,1]$ 中所有分数时，结论也同样成立。另一方面，若将范围限制为 $[0,1/2]$ 中的分数，那么 Ito [13] 根据数值证据提出猜想：上述和除以项数后发散至 $+\infty$。[16] 的主要结果是证明了这一猜想的一个定量版本。为陈述该结果，令

$$\mathscr{F}(Q) := \left\{ \frac{v}{w} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] : w \leq Q \right\}$$

表示阶数为 Q 的法里分数 集合。此外，对于任意 $\alpha \in (0,1)$，令

$$\mathscr{F}_\alpha(Q) := \mathscr{F}(Q) \cap [0,\alpha), \quad \mathscr{F}_\alpha^{\mathrm{c}}(Q) := \mathscr{F}(Q) \cap (1-\alpha, 1].$$

[16] 的主要结果由此表明

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)} \sum_{x \in \mathscr{F}_{1/2}(Q)} s(x) = \frac{1}{16} \log Q + O(1). \tag{1.2}$$

本文的主要目标是证明 (1.2) 的以下推广：允许用任意截断 α 代替 $1/2$。对于有理数 α，我们有以下结果：

定理 1.1. 设 $\alpha = v/w$ 是 $(0, 1/2]$ 中的一个既约有理数。那么

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)} \sum_{x \in \mathscr{F}_\alpha(Q)} s(x) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) \log Q + O_\alpha(1).$$

(1.2) 中首项的形式引出了一个问题：对应的结果对于无理 α 会是什么样子。由于可被有理数很好逼近的无理 α 会给我们的分析带来困难，因此我们无法在此完全解决这一问题。不过，我们可以证明以下部分结果：

定理 1.2。存在一个具有满勒贝格测度的子集 $\mathcal{S} \subseteq [0,1/2]$，使得对于每个 $\alpha \in \mathcal{S}$，都有渐近公式

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)} \sum_{x \in \mathscr{F}_\alpha(Q)} s(x) = \frac{1}{12} \log Q + o_\alpha(\log Q) \quad (as\ Q \to \infty).$$

1.2. 欧几里得算法步数的渐近分析。 戴德金和、连分数展开与欧几里得算法之间存在一个众所周知的联系。为概述这一点，我们需要引入一些记号。任意有理数 $x \in [0,1)$ 都有一个连分数展开

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n] := 0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1.3}$$

其部分商为 部分商 a_1， a_2，……， $a_n \in \mathbb{N}$。若要求 $a_n \neq 1$——本文后续将始终如此——众所周知， n ，且部分商由 x 唯一确定。数 n（也记作 $L(x)$）可解释为某种欧几里得算法变体的步数，而部分商之和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 也有类似的解释。我们还令

$$\Sigma_{\mathrm{odd}}(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ odd}}}^{n} a_j, \quad \Sigma_{\mathrm{even}}(x) = \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ even}}}^{n} a_j, \quad \Sigma_{\pm}(x) = \Sigma_{\mathrm{odd}}(x) - \Sigma_{\mathrm{even}}(x).$$

戴德金和与连分数展开之间的联系由 Barkan [2] 和 Hickerson [12]提出的公式给出：

$$s(x) = \frac{(-1)^n - 1}{8} + \frac{x - (-1)^n [0; a_n, \dots, a_2, a_1] + \Sigma_{\pm}(x)}{12}. \tag{1.4}$$

因此，对诸如 (1.1) 这样的和的研究，与连分数的分布性质，或某些欧几里得算法步数的统计性质，密切相关。

对此类性质的研究历史悠久，可追溯至 Lochs [15] 和 Heilbronn [10], 的开创性工作；他们确定了经典欧几里得算法平均步数渐近公式的主项

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{a \le b \\ \gcd(a,b)=1}} L\Big(\frac{a}{b}\Big) = A_1 \log b + O\Big((\log\log b)^4\Big) \quad (\text{as } b \to \infty);$$

这里， $\varphi(n)$ 是欧拉函数， A_1 是一个明确给出的非零常数，且误差项是绝对的。后来，Porter [18] 得到了同一平均值的渐近公式，其中包含两个显著项。这些结果涉及分母固定、对分子取平均的情形。

关于分子和分母的平均值，Vallée [23] 得到了一个误差项按幂律衰减的渐近公式。Ustinov [22], 对此作出了改进，得到了一个误差项衰减速度更快的渐近公式，优于从 Porter 的结果中可以推导出的公式

在误差项的衰减速度方面，优于从 Porter 的结果中可以推导出的结果

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)}\sum_{x\in\mathscr{F}(Q)} L(x) = B_1\log Q + B_2 + O\Big((\log Q)^5/Q\Big),$$

其中 B_1 和 B_2 是明确给出的非零常数。在研究欧几里得算法不同变体的统计性质时，Vallée [24]还得到了所谓超额 欧几里得算法步数期望的渐近公式的首项。该算法针对给定的有理数 $a/b \in$ 生成$0,1]$ 负连分数展开

$$\frac{a}{b} = [\![1; b_1, b_2, \dots, b_n]\!] \coloneqq 1 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \dots \cfrac{}{\dots - \cfrac{1}{b_n}}}}.$$

Zhabitskaya [25] 改进了 Vallée 的结果，证明若 $\ell(a/b) = m$表示 a/b的负连分数展开中的部分商个数，则

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)}\sum_{x\in\mathscr{F}(Q)} \ell(x) = C_1(\log Q)^2 + C_2\log Q + C_3 + O\Big((\log Q)^6/Q\Big);$$

这里 C_1， C_2， C_3是明确给出的非零常数，其中前两个由下式给出

$$C_1 = \frac{1}{2\zeta(2)}, \quad C_2 = \frac{1}{\zeta(2)}\left(2\gamma - \frac{3}{2} - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) \tag{1.5}$$

并且 γ 表示欧拉–马歇罗尼常数。关于经典欧几里得算法和超额欧几里得算法步数的期望与方差的更多结果，我们还可参阅 Baladi 和 Vallée [1]，、Bykovskiĭ [4]、、Dixon [7, 8]，、Hensley [11] 以及 Ustinov [20, 21]的相关研究。

在 [16] 中采用的 Ito 猜想研究方法，关键在于 Myerson 的观察 [17, 引理 5]：

$$\ell(x) = \Sigma_{\mathrm{odd}}(x) - \epsilon(x) \quad \text{and} \quad \ell(1-x) = \Sigma_{\mathrm{even}}(x) + \epsilon(x) \tag{1.6}$$

对于某个[1] ϵ（x） $\in$ {0,1}，并在于建立渐近公式

$$\sum_{x\in\mathscr{F}_{1/2}(Q)} \ell(x) = c_1Q^2(\log Q)^2 + c_2Q^2\log Q + O\Big(Q^2\Big),$$

其中 $2c_1 = C_1$ 和 $2c_2 = C_2 + 3/4$ ，常数 C_1 和 C_2 由 (1.5) 给出。因此，获得类似于上述渐近公式的结果，是证明定理 1.1 和定理 1.2 的关键步骤。

[1]这里， ε 是一个修正项，它与我们在连分数展开式 (1.3) 中确保唯一性的方式有关。

为了陈述下一个定理，我们对区间 $(0,1]$ 中的既约有理数 $\alpha = v/w$ 引入如下量：

$$F(\alpha) \coloneqq \frac{1}{\alpha w^2} \sum_{r<w} (1 - \{\alpha r\})\zeta(2, r/w),$$

其中

$$\zeta(s,x) \coloneqq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+x)^s} \quad (\Re s > 1,\ x \in (0,1]),$$

表示赫尔维茨ζ函数。

定理 1.3。令 Q 为正整数，$\alpha = v/w$ 为 $(0,1]$ 中的既约有理数，其中 $w < Q^{1/2}$。另令 $E(\alpha) \coloneqq \ell(\alpha) + (\log w)^2$。则

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)} \sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha(Q)} \ell(x) = \frac{\alpha(\log Q)^2}{2\zeta(2)} + \frac{\alpha \log Q}{\zeta(2)} \left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + F(\alpha) - \frac{3}{2}\right) + O(E(\alpha)).$$

此外，如果 $\alpha < 1$，则

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)} \sum_{x\in\mathscr{F}^{\mathrm{c}}_\alpha(Q)} \ell(x) = \frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)} \sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha(Q)} \ell(x) - \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) \log Q + O(E(1-\alpha)).$$

1.3. **本文结构**。在第 2 节中，我们汇集若干技术性引理。在第 3 节中，我们假设命题 3.1 成立并证明主要结果；该命题的证明紧接着在第 4 节给出。最后，在第 5 节中，我们以关于定理 1.2 的一些评注作结。

1.4. **记号**。我们使用兰道记号 $f(x) = O(g(x))$ 和维诺格拉多夫记号 $f(x) \ll g(x)$，表示存在某个常数 $C > 0$，使得 $|f(x)| \leq Cg(x)$ 对所有允许的 x 值都成立（“允许的”具体含义将由上下文明确）。除非另有说明，C 对其他参数的依赖关系均用下标标明。类似地，如果 $g(x)$ 对所有充分大的 x 都为正，且 $f(x)/g(x)$ 在 $x \to \infty$ 时趋于零，则我们写作“$f(x) = o(g(x))$ as $x \to \infty$”。

给定两个互素整数 a 和 $q \neq 0$，我们用 $\mathrm{inv}_q(a)$ 表示剩余类 $(a \bmod q)^{-1}$ 中最小的正整数。

带星号的和 $\sum^*$ 表示还要满足求和条件“最大公约数$(p, q) = 1$”。类似于 $\sum$ 这样的和，默认对所有不超过 x 的 $n = 1, 2, \ldots\ldots n \leq x$ 求和。

2. 辅助结果

2.1. **关于模逆的引理**。我们需要了解模逆元的分布情况。下一个引理本身是一个更一般的分布结果的特例（见 [19, 定理 13]），该结果由指数和的韦伊界推出，正是我们所需要的。

引理 2.1。 设 p 为正整数， $\alpha \in (0,1]$, $X_2 > X_1 \geq 0$. 那么，对任意$\epsilon > 0$，以下两个和

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{X_1 \leq q \leq X_2 \\ \mathrm{inv}_p(q) \leq \alpha p}} 1 \quad \textit{and} \quad \sideset{}{^*}\sum_{\substack{X_1 \leq q \leq X_2 \\ \mathrm{inv}_p(q) > (1-\alpha)p}} 1$$

渐近相等于

$$\alpha \frac{\varphi(p)}{p}(X_2 - X_1) + O_\epsilon\left(\frac{X_2 - X_1 + p}{p^{1/2-\epsilon}}\right).$$

证明。 证明与 [16, 引理 A.1] 的证明完全相同，其中考虑了特殊情形$\alpha = 1/2$ 。细节从略。□

下一个结果使我们能够从 $\mathrm{inv}_p(q)$ 转到 $\mathrm{inv}_q(p)$。该结果的一个特殊情形已在 [16, 引理 4.1]中使用。

引理 2.2。 设 p、 $q \geq 2$ 为互素整数，且 $\alpha = v/w$ 为 $(0,1]$ 中的既约有理数，其中 $w \leq p$ 或 $w \leq q$。则

$$\mathrm{inv}_p(q) \leq \alpha p \quad \textit{if and only if} \quad \mathrm{inv}_q(p) > (1-\alpha)q.$$

证明。 我们从著名恒等式开始

$$q\,\mathrm{inv}_p(q) + p\,\mathrm{inv}_q(p) = 1 + pq$$

（参见 [16, 引理 4 的证明1]）。由此，通过重新整理各项，我们得到

$$\mathrm{inv}_p(q) \leq \alpha p \quad \text{if and only if} \quad \mathrm{inv}_q(p) \geq (1-\alpha)q + \frac{1}{p}.$$

同样地,

$$\mathrm{inv}_q(p) > (1-\alpha)q \quad \text{if and only if} \quad \mathrm{inv}_p(q) < \alpha p + \frac{1}{q}.$$

现在，只需利用 $w \leq p$或 $w \leq q$这两个假设中的任意一个，即可轻易得到该结果。□

L引理 2.3。 设 $\alpha = v/w$ 是 $(0,1]$ 中的一个既约有理数。假设 *th* *at*

$$\delta_\alpha(q) = \sideset{}{^*}\sum_{(1-\alpha)q < p \leq q} 1 \quad \textit{and} \quad \kappa_\alpha(q) = \sum_{r<w}(1 - \{\alpha r\}) \sum_{\substack{d \mid q \\ d \equiv r \bmod w}} \mu\left(\frac{q}{d}\right).$$

那么，对于每个整数 $q \geq 1$，都有 $\delta_\alpha(q) = \alpha\varphi(q) + \kappa_\alpha(q)$ 。

证明。我们首先使用莫比乌斯反演，重写其中隐含的求和条件 $\gcd(p,q) = 1$ $\sum^*$。因此,

$$\delta_\alpha(q) = \sum_{(1-\alpha)q < p \leq q} \sum_{d \mid \gcd(p,q)} \mu(d) = \sum_{d \mid q} \mu(d) \sharp\{\, p \in \mathbb{N} : (1-\alpha)q < p \leq q,\, d \mid p \,\}.$$

右侧集合的基数为 $\alpha q/d + \{(1-\alpha)q/d\}$。因此，

$$\delta_\alpha(q) = \alpha \sum_{d|q} \mu(d)\frac{q}{d} + \sum_{d|q} \mu(d)\Big\{(1-\alpha)\frac{q}{d}\Big\}.$$

右侧的第一项和等于 $\varphi(q)$。将第二项和中的各项按模 w 的剩余类 d 分组后，得到函数 $\kappa_\alpha(q)$。□

2.2. 连分数。Lochs [15] 和 Heil- bronn [10] 研究（普通）连分数展开长度的统计问题时，关键的一步是将问题转化为计数某些丢番图不等式的解的问题。这里我们需要一个适用于负连分数展开的版本。Zhabitskaya [25, 最初给出了这样的版本，见引理 2]。在 [16,引理 4.3] 中，作者采用了这一结果的一个受限变体；下文我们将其推广到任意有理数截断的情形。

引理 2.4。设 α 是一个有理数，属于$(0,1]$，且 Q 是一个正整数。若$N_\alpha(Q)$ 表示数 a/b （其中 $1 \le a < \alpha b$、 $q \le Q$）的负连分数展开长度之和，而 $T_\alpha(Q)$ 表示以下等式与不等式组的解 $(a_1, q_1, a_2, q_2, m, n, a, b) \in \mathbb{N}^8$ 的个数

$$\begin{cases} a_1q_2 - a_2q_1 = 1, & 1 \le a_1 \le \alpha q_1, \quad 1 \le a_2 \le q_2, \\ na_2 - ma_1 = a, & nq_2 - mq_1 = b, \quad 1 \le a < b \le Q, \\ 1 \le m < n, & 1 \le q_1 < q_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

then

$$N_\alpha(Q) = T_\alpha(Q) + O\Big(\ell(\alpha)Q^2\Big).$$

证明。根据 [25, 引理 2]，我们知道 $N_\alpha(Q)$ 除去误差项 $O(Q^2)$ 后，等于下列方程的解的个数

$$\begin{cases} a_1q_2 - a_2q_1 = 1, & 1 \le a_1 \le q_1, \quad 1 \le a_2 \le q_2, \\ na_2 - ma_1 = a, & nq_2 - mq_1 = b, \quad 1 \le a < \alpha b \le \alpha Q, \\ 1 \le m < n, & 1 \le q_1 < q_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

特别地，由上述方程组的每个解生成的数对 $(p_1,\ q_1)$ 和 $(p_2,\ q_2)$，是 a/b 的负连分数展开中除 a/b 本身 [25, 引理 1] 以外的相邻渐近分数。此外，这些渐近分数构成的序列单调递减并趋于 a/b。因此，若 $a_1 \le \alpha q_1$，则 $a/b < a_1/q_1 \le \alpha$。

通常来说，若 a/b 小于 α，其渐近分数也不一定如此。不过，若 $\ell(a/b) \ge \ell(\alpha)$，那么 a/b 的第 $\ell(\alpha)$ 个渐近分数将小于或等于 α，后续的渐近分数也会如此，因为它们构成一个严格递减序列。事实上，若 $\alpha = [\![1;\ t_1,\ \ldots,\ t_u]\!]$ 且 $a/b = [\![1;\ s_1 \ldots,\ s_v]\!] < \alpha$，其中 $u \le v$，则 $[\![1;\ s_1,\ \ldots,\ s_u]\!] \le \alpha$。因为若 $[\![1;\ s_1]\!] \le \alpha$，结论便成立。否则，不等式 $a/b < \alpha < [\![1; s_1]\!]$ 意味着 $s_1 = t_1$。若此时$[\![1; t_1,\ s_2]\!] \le \alpha$，结论便成立。否则，不等式 $a/b < \alpha < [\![1;\ t_1,\ s_2]\!]$

意味着 $s_2 = t_2$。至多重复这些步骤 $\ell(\alpha)$ 次，即可得到所需的不等式。

因此，对于每一对 (a, b)，方程组 (2.1) 和 (2.2) 的解数之差至多为 $\ell(\alpha)$。由于我们统计了 $O(Q^2)$ 对数对 (a, b)，引理得证。□

引理 2.4 中的八个变量可以化简为四个。这就是下一个引理的内容。

引理 2.5。设 α 是区间 $(0, 1]$ 中的一个有理数，且 Q 是一个正整数。若$R_\alpha(Q)$ 表示下列不等式组的解数 $(p, q, n, m) \in \mathbb{N}^4$

$$\begin{cases} \gcd(p, q) = 1, & p \geq 2, \quad q \geq 1, \\ 2 \leq nq + kp \leq Q, & 1 \leq k < n, \\ \mathrm{inv}_p(q) \leq \alpha p, \end{cases} \tag{2.3}$$

then

$$N_\alpha(Q) = R_\alpha(Q) + O\Big(\ell(\alpha)Q^2\Big).$$

证明。如同在 [16, 引理 4.4], 中那样，可以证明 $T_\alpha(Q) = R_\alpha(Q) + O(Q^2)$。□

2.3. **辅助渐近公式**。本节最后列出一些公式，这些公式将在接下来的证明中使用。

引理 2.6。设 $\Psi(Q) = aQ^2(\log Q)^2 + bQ^2 \log Q + O(Q^2)$。则

$$\sum_{d \leq Q} \mu(d)\Psi\left(\frac{Q}{d}\right) = \frac{a}{\zeta(2)}Q^2(\log Q)^2 + \frac{1}{\zeta(2)}\left(b - 2a\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)Q^2 \log Q + O(Q^2).$$

证明。证明参见，例如，[25, 推论 3]。□

引理 2.7。以下渐近公式对任意 $x \geq 2$ 均成立：

(1) $\displaystyle\sum_{q<x} \varphi(q) = \frac{x^2}{2\zeta(2)} + O(x \log x),$

(2) $\displaystyle\sum_{q<x} \frac{\varphi(q)}{q} = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\log x),$

(3) $\displaystyle\sum_{q<x} \frac{\varphi(q)}{q^2} = \frac{1}{\zeta(2)}\left(\log x + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$

(4) $\displaystyle\sum_{q<x} \frac{\varphi(q)}{q^2} \log q = \frac{(\log x)^2}{2\zeta(2)} + O(1).$

此外，若 $\alpha := v/w$ 是单位区间内的既约有理数，且 κ_α 如引理 *2.3* 中所定义，则对于 $x > w$

$$\sum_{q<x} \frac{\kappa_\alpha(q)}{q^2} = \sum_{r<w} \frac{(1 - \{\alpha r\})\zeta(2, r/w)}{w^2\zeta(2)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

证明。 前两个公式是众所周知的，第三个公式的证明可见于 [3, 推论 4.5]。公式 (4) 可由公式 (3) 和分部求和轻易推出。最后一个公式直接由 $\kappa_\alpha(q)$ 和 $\zeta(s,\ x)$ 的定义，以及利用欧拉 – 麦克劳林求和公式计算众所周知的调和和得到。□

引理 2.8. 对于任意 $U \geq 2$，以下渐近公式成立：

$$(1)\ \sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\frac{\varphi(q)}{kq^2} = \frac{(\log U)^2}{\zeta(2)} + \frac{\log U}{\zeta(2)}\left(2\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + O(1),$$

$$(2)\ \sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\frac{\varphi(q)}{q^2} = \frac{U\log U}{\zeta(2)} + O(U) = \sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\frac{\varphi(q)}{qk},$$

$$(3)\ \sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\frac{\varphi(q)k}{q^2} = \frac{U^2\log U}{2\zeta(2)} + O\big(U^2\big) = \sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\frac{\varphi(q)}{k}.$$

证明. 这些结论可由前一个引理中的公式直接推出。 □

3. 主要结果的证明

本节陈述我们的主要技术结果（下文的命题 3.1），并说明如何由此推出定理 1.3。随后，我们将证明定理 1.1 和定理 1.2。命题 3.1 的证明见 § 4。

关键步骤是渐近地计算方程组 (2.3) 的解的数量。出于技术上的考虑，按各解分量的大小对这些解进行分组，并分别计算每组中的解的数量，结果更为方便。为固定相关记号，设 $U = Q^{1/2}$，并考虑以下五种情形：

- $p \leq q \leq U$; (‘Case 1’)
- $p \leq q,\ U < q$; (‘Case 2’)
- $q < p \leq U$; (‘Case 3’)
- $q < p,\ U < p,\ n \leq U$; (‘Case 4’)
- $q < p,\ U < p,\ U < n$. (‘Case 5’)

命题 3.1。 设 $\alpha = v/w$ 为区间 $(0, 1]$ 中的一个既约有理数，且 $Q \geq 1$ 为实数。对于 $i = 1$、2、3、4、5，令 $R_{i,\alpha}(U)$ 表示满足附加条件*“Case i”*的方程组 *(2.3)* 的解的数量。于是我们得到如下渐近公式：

$$(1)\ R_{1,\alpha}(U) = \frac{\alpha\log 2}{2\zeta(2)}U^4\log U + O(U^4),$$

$$(2)\ R_{2,\alpha}(U) = \frac{\alpha\log 2}{2\zeta(2)}U^4\log U + O(U^4),$$

(3) $\dfrac{R_{3,\alpha}(U)}{U^4} = \dfrac{\alpha(\log U)^2}{4\zeta(2)} + \dfrac{\alpha\log U}{2\zeta(2)}\left(\gamma - \dfrac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + F(\alpha) - \log 2\right) + O((\log w)^2),$

(4) $R_{4,\alpha}(U) = \dfrac{\alpha U^4(\log U)^2}{4\zeta(2)} + \dfrac{\alpha U^4\log U}{2\zeta(2)}(\gamma - \log 2) + O(U^4),$

(5) $R_{5,\alpha}(U) = \dfrac{\alpha U^4(\log U)^2}{2\zeta(2)} + \dfrac{\alpha U^4\log U}{2\zeta(2)}\left(2\gamma - \dfrac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + F(\alpha) - 3\right) + O(U^4).$

暂且假设命题 3.1 的结论成立，我们现在可以证明主要结果了。

定理 *1.3* 的证明。 设 $Q \geq 1$ 为一个整数，并令 $U = Q^{1/2}$。由引理 2.5 和命题 3.1 可知

$$\begin{aligned} N_\alpha(Q) &= \sum_{i\leq 5} R_{i,\alpha}(U) + O(\ell(\alpha)Q^2) \\ &= \frac{\alpha Q^2(\log Q)^2}{4\zeta(2)} + \frac{\alpha Q^2\log Q}{2\zeta(2)}\left(2\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + F(\alpha) - \frac{3}{2}\right) + O\Big(E(\alpha)Q^2\Big). \end{aligned}$$

此外，由莫比乌斯反演可得，

$$\sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha(Q)} \ell(x) = \sum_{d\leq Q} \mu(d) N_\alpha\left(\frac{Q}{d}\right).$$

现在由上式、引理 2.6 以及众所周知的公式 $\sharp\mathscr{F}(Q) = Q^2/(2\zeta(2)) + O(Q)$，即可得到该定理的第一个公式。

T该定理的第二个公式可由第一个公式得出，只需注意到 t

$$\frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)} \sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha^c(Q)} \ell(x) = \frac{1}{\sharp\mathscr{F}(Q)}\left(\sum_{x\in\mathscr{F}_1(Q)} \ell(x) - \sum_{x\in\mathscr{F}_{1-\alpha}(Q)} \ell(x) + O(\ell(1-\alpha))\right)$$

并且

$$F(1) - (1-\alpha)F(1-\alpha) = -(1-\alpha)F(1-\alpha) = \alpha F(\alpha) - \zeta(2)\left(1 - \frac{1}{w^2}\right). \quad \square$$

定理 *1.1* 的证明。 若 x 的连分数展开为 $x = [0;\, a_1, \ldots, a_n]$，则由 (1.4) 得 $s(x) = \Sigma_\pm(x)/12 + O(1)$，其中隐含常数为绝对常数。由 (1.6) 可得

$$12 \sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha(Q)} s(x) + O\Big(Q^2\Big) = \sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha(Q)} (\ell(x) - \ell(1-x)) = \sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha(Q)} \ell(x) - \sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha^c(Q)} \ell(x).$$

现在由定理 1.3 即可得出该定理。 $\square$

定理 *1.2* 的证明。设

$$\mathcal{S} \coloneqq \left\{\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots] \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} : \sum_{m\leq M} a_m \ll_\alpha \phi^{M/2}\right\},$$

其中 ϕ 是黄金比例。利用连分数的度量理论中的标准技巧（例如参见 [14]），很容易证明集合 $\mathcal{S}$具有全勒贝格测度。

设 $\alpha \in \mathcal{S}$ 和 $f(Q)$ 是单调递增的正函数，使得当 $Q \to \infty$ 时，$f(Q) = o(\log Q)$。若 $p_n/q_n := [0; a_1, \dots, a_n]$ 表示 α 的第 n 个渐近分数，那么我们知道

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log q_n}{n} \geq \log \phi.$$

我们利用这一性质以及描述集合 $\mathcal{S}$ 的性质来证明定理 1.2。

事实上，设 Q 是任意充分大的正整数。存在一个正整数 $N = N(Q)$，不妨设它为偶数，使得

$$\phi^{N-1} < (f(Q)\log Q)^{1/2} \leq \phi^N \leq q_N. \tag{3.1}$$

注意，由 (1.6) 可知

$$\ell\left(\frac{p_N}{q_N}\right) + \ell\left(1 - \frac{p_N}{q_N}\right) < \ell\left(\frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}\right) + \ell\left(1 - \frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}\right) = \sum_{m\leq N+1} a_m \ll_\alpha \phi^{N/2}$$

and

$$\log q_N < \log q_{N+1} \leq \log \prod_{m\leq N+1} (a_n + 1) \ll_\alpha \phi^{N/2}.$$

因此，定理 1.3 中当 $\beta := p_N/q_N$ 和 $\beta' := p_{N+1}/q_{N+1}$ 时出现的误差项均有上界 $O_\alpha\big((f(Q)\log Q)^{1/2}\big)$。

由于 β和 β'是 α的相邻渐近分数，我们知道 $\beta' - \beta = 1/(q_N q_{N+1})$。结合关系式 (3.1) 和定理 1.3，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta(\beta', \beta) &:= \frac{1}{\sharp\mathcal{F}(Q)}\left(\sum_{x\in\mathcal{F}_{\beta'}(Q)} \ell(x) - \sum_{x\in\mathcal{F}_\beta^c(Q)} \ell(x)\right)\\ &= \left(1 + \frac{\beta' F(\beta') - \beta F(\beta)}{\zeta(2)}\right)\log Q + O_\alpha\left(\frac{\log Q}{f(Q)} + (f(Q)\log Q)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

然而，

$$\begin{aligned}\beta' F(\beta') - \beta F(\beta) &= \sum_{r<q_{N+1}} \frac{(1 - \{\beta' r\})}{q_{N+1}^2}\left(\frac{q_{N+1}^2}{r^2} + O(1)\right) +\\ &\quad - \sum_{r<q_N} \frac{(1 - \{\beta r\})}{q_N^2}\left(\frac{q_N^2}{r^2} + O(1)\right)\\ &= \sum_{r<q_N} \frac{\{\beta r\} - \{\beta' r\}}{r^2} + O\left(\frac{1}{q_N}\right),\end{aligned}$$

wh由$\{\beta r\} - \{\beta' r\} = -r/(q_N q_{N+1})$可知，最后一个和也等于 $O(1/q_N)$.

综上，我们推得

$$\Delta(\beta',\beta)=\log Q+O_\alpha\left(\frac{\log Q}{f(Q)}+(f(Q)\log Q)^{1/2}\right).$$

类似的计算表明， $\Delta(\beta,\beta')$ 与 $\Delta(\beta',\beta)$ 具有相同的渐近行为。由关系式可得定理

$$\frac{12}{\sharp\mathscr{F}(Q)}\sum_{x\in\mathscr{F}_\alpha(Q)}s(x)=\Delta(\alpha,\alpha')$$

以及不等式 $\beta<\alpha<\beta'$ 和 $\Delta(\beta,\beta')\le\Delta(\alpha,\alpha)\le\Delta(\beta',\beta)$。 □

4. 命题 3.1 的证明

本节旨在证明命题 3.1，我们采用与 [16]相同的步骤。因此，为了简化证明的某些部分，我们大量参考了 [16] 。

情形 1. 我们计算方程的解 $R_{1,\alpha}(U)$ 的个数

$$\begin{cases}\gcd(p,q)=1, & 2\le p\le q\le U,\\ 2\le nq+kp\le U^2, & 1\le k<n,\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p.\end{cases}$$

仿照 [16, § 5，将情形 1] 中的 αp 替换为 $p/2$，我们得到

$$R_{1,\alpha}(U)=\frac{U^4}{2}\sum_{\substack{2\le p\le U\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p}}{\sum_{q\le U}}^{*}\frac{1}{q(p+q)}+O\Big(U^3\Big)=\frac{\alpha\log 2}{2\zeta(2)}U^4\log U+O\Big(U^4\Big).$$

情形 2. 我们计算以下方程的解的个数 $R_{2,\ \alpha}(U)$

$$\begin{cases}\gcd(p,q)=1, & 2\le p\le q,\quad U<q,\\ 2\le nq+kp\le U^2, & 1\le k<n,\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p.\end{cases}\tag{4.1}$$

注意，在这种情况下，不等式 $n\le U^2/q<U$ 也成立。

考虑满足条件 $1\le k<n$ 和 $n+k>U$ 的数对 $(n,\ k)\in\mathbb{N}^2$。此时，上述方程组的解的个数小于去掉互素性和模逆限制后同一方程组的解的个数。根据 [25, (54)–(56)] ，该个数估计为 $O(U^4)$。

设 $\mathscr{C}:=\{(p,\ q)\in\mathbb{Z}^2:$ 最大公约数$(p,\ q)=1\}$。只需考虑满足附加限制 $n+k\le U$ 的系统 (4.1) 的解的数量。若固定这样的一对 $(n,\ k)$，则 (4.1) 的解域可以表示为格

$$\mathscr{L}_{1,\alpha}(n,k)=\left\{(p,q)\in\mathscr{C}:2\le p\le\frac{U^2}{n+k},\,U<q\le\frac{U^2-kp}{n},\,\mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p\right\}$$

不含该格

$$\mathscr{L}_{2,\alpha}(n,k)=\left\{(p,q)\in\mathscr{C}: U<p\le\frac{U^2}{n+k},\, U<q\le p,\, \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p\right\}.$$

$\mathscr{L}_1(n,\ k)$ 和 $\mathscr{L}_2(n,\ k)$ 的整数点数等于

$$S_{1,\alpha}(n,k):=\sum_{p\le U^2/(n+k)}A_{(p,\alpha)}\left(U,\frac{U^2-kp}{n}\right),$$

and

$$S_{2,\alpha}(n,k):=\sum_{U<p\le U^2/(n+k)}A_{(p,\alpha)}(U,p),$$

其中，$A_{(p,\alpha)}(x,\ y)$ 的定义与引理 2.1 中相同。仿照 [16, §5 中的情形 2]，用 $A_{(p,\alpha)}$ 代替 $A_{(p,1/2)}$，可得

$$R_{2,\alpha}(U)=\alpha\frac{\log 2}{2\zeta(2)}U^4\log U+O\Big(U^4\Big).$$

情形3. 我们统计满足以下条件的解 $R_{3,\ \alpha}(U)$ 的数量：

$$\begin{cases}\gcd(p,q)=1, & 1\le q<p\le U,\\ 2\le nq+kp\le Q, & 1\le k<n,\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p,\end{cases}.$$

与情形 1 类似（另见 [25, (58)–(60)]），上述方程组的解的数量在相差一个阶为 $O(U^3\log\ U)$ 的误差项的意义下，等于

$$\frac{U^4}{2}\sum_{\substack{p\le U\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p}}\sum_{q<p}^{*}\frac{1}{q(p+q)}. \tag{4.2}$$

我们将上面的第一个二重和改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{w<p\le U\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p}}\sum_{p^{1/2}\le q<p}^{*}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{w<p\le U\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p}}\sum_{q<p^{1/2}}^{*}\frac{1}{pq}+\sum_{\substack{p\le w\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p}}\sum_{q<p}^{*}\frac{1}{pq}-\sum_{\substack{p\le U\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p}}\sum_{q<p}^{*}\frac{1}{p(p+q)}\\ &=:S_1(U)+S_2(U)+S(\alpha)-S_4(U).\end{aligned}$$

通过分部求和和引理 2.1，我们得到对于固定的 $\epsilon\in(0,\ 1/2)$,

$$S_4(U)=\sum_{p\le U}\frac{1}{p}\left[\frac{A_{(p,\alpha)}(1,p)}{2p}+\int_1^p\frac{A_{(p,\alpha)}(1,u)\mathrm{d}u}{(u+p)^2}\right]=\frac{\alpha\log 2\log U}{\zeta(2)}+O(1). \tag{4.3}$$

为了估计 $S_1(U)$，我们首先应用引理 2.2，得到

$$S_1(U)=\sum_{w^{1/2}<q<U}\frac{1}{q}\sum_{\substack{v_q<p\le V_q\\ \mathrm{inv}_q(p)>(1-\alpha)q}}^{*}\frac{1}{p},$$

其中 $v_q := \max\{w, q\}$，而 $V_q := \min\{U, q^2\}$。随后应用分部求和与引理 2.1，可得

$$\sum_{\substack{v_q < p \le V_q \\ \mathrm{inv}_q(p) > (1-\alpha)q}}^{*} \frac{1}{p} = \frac{B_{(q,\alpha)}(v_q, V_q)}{V_q} + \int_{v_q}^{V_q} \frac{B_{(q,\alpha)}(v_q, u)\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{\alpha\varphi(q)}{q} \log \frac{V_q}{v_q} + O_\epsilon\Big(q^{-1/2+2\epsilon}\Big)$$

因此，对于固定的 $\epsilon \in (0, 1/4)$，我们可得

$$\begin{aligned} S_1(U) &= \sum_{w^{1/2} < q \le w} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2} \log \frac{q^2}{w} + \sum_{w < q \le U^{1/2}} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2} \log q + \\ &\quad + \sum_{U^{1/2} < q < U} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2} \log \frac{U}{q} + O(1) \\ &= \sum_{q \le U^{1/2}} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2} \log q + \sum_{U^{1/2} < q < U} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2} \log \frac{U}{q} + O\Big((\log w)^2\Big). \end{aligned}$$

对于 $S(\alpha)$，我们有平凡估计 $O((\log w)^2)$。

剩下的任务是估计 $S_2(U)$，为此我们首先应用引理 2.2。这里注意，为此我们必须从 $S_2(U)$ 中去掉对应于 $q = 1$ 的和。由于 $p > w$，这个和总是包含在 $S_2(U)$ 中。因此，

$$S_2(U) = \sum_{w < p \le U} \frac{1}{p} + \sum_{2 \le q < U^{1/2}} \frac{1}{q} \sum_{\substack{u_q < p \le U \\ \mathrm{inv}_q(p) > (1-\alpha)q}}^{*} \frac{1}{p},$$

其中 $u_q := \max\{w,\ q^2\}$。由于

$$\sharp\{\, p \le x : p \equiv \mathrm{inv}_p(b) \bmod q \,\} = \frac{x}{q} + O(1)$$

对于任意互素整数 $1 \le b \le q$，由分部求和可得

$$\sum_{\substack{u_q < p \le U \\ p \equiv \mathrm{inv}_q(b)}} \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \log \frac{U}{u_q} + O\Big(q^{-2}\Big).$$

因此，

$$\begin{aligned} S_2(U) &= \log \frac{U}{w} + O(1) + \sum_{2 \le q < U^{1/2}} \frac{1}{q} \sum_{(1-\alpha)q < b \le q}^{*} \left(\frac{1}{q} \log \frac{U}{u_q} + O\Big(q^{-2}\Big) \right) \\ &= \log \frac{U}{w} + \sum_{2 \le q \le w^{1/2}} \frac{\delta_\alpha(q)}{q^2} \log \frac{U}{w} + \sum_{w^{1/2} < q < U^{1/2}} \frac{\delta_\alpha(q)}{q^2} \log \frac{U}{q^2} + O(1). \end{aligned}$$

其中 $\delta_\alpha(q) \le q$ 在引理 2.3 中定义。根据上述引理，我们得出

$$\begin{aligned} S_2(U) &= \log U \sum_{q\le U^{1/2}} \frac{\delta_\alpha(q)}{q^2} - 2\sum_{q<U^{1/2}} \frac{\delta_\alpha(q)}{q^2}\log q + O\Big((\log w)^2\Big) \\ &= \log U \sum_{q\le U^{1/2}} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2} - 2\sum_{q<U^{1/2}} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2}\log q + \\ &\quad + \log U \sum_{q\le U^{1/2}} \frac{\kappa_\alpha(q)}{q^2} - 2\sum_{q<U^{1/2}} \frac{\kappa_\alpha(q)}{q^2}\log q + O\Big((\log w)^2\Big). \end{aligned}$$

注意到 $\kappa_\alpha(q) \le d(q)$，其中 $d(n)$ 表示 n的约数个数。因此，上面最后一行中的最后一个和为 $O(1)$，于是，

$$S_1(U) + S_2(U) = \sum_{q\le U} \frac{\alpha\varphi(q)}{q^2}\log\frac{U}{q} + \log U \sum_{q\le U^{1/2}} \frac{\kappa_\alpha(q)}{q^2} + O\Big((\log w)^2\Big).$$

由引理 2.7 以及关系式 (4.2) 和 (4.3)，可得

$$R_{3,\alpha}(U) = \frac{\alpha U^4(\log U)^2}{4\zeta(2)} + \frac{\alpha U^4\log U}{2\zeta(2)}\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + F(\alpha) - \log 2\right) + O\Big(U^4(\log w)^2\Big).$$

情形 4. 我们计算下式的解的个数 $R_{4,\alpha}(U)$

$$\begin{cases} \gcd(p,q) = 1, & 1 \le q < p, \quad U < p, \\ 2 \le nq + kp \le U^2, & 1 \le k < n \le U, \\ \operatorname{inv}_p(q) \le \alpha p. \end{cases} \tag{4.4}$$

与情形 2 类似，我们固定 k 和 n，并计算上述方程组在 $n + k \le U$ 时以及在 $n + k > U$ 时的解的个数。

若 $n + k > U$，则 (4.4) 的解的个数小于去掉互素性和模逆限制后同一方程组的解的个数。该数量已在 [25, (64)–(65)] 中计算为 $O(U^4)$。

若此时 $n + k \le U$，则 (4.4) 的解域可表示为若干格的并集

$$\mathscr{L}_{1,\alpha}(n,k) = \left\{ (p,q) \in \mathscr{C} : U < p \le \frac{U^2}{n+k},\ 1 \le q < p,\ \operatorname{inv}_p(q) \le \alpha p \right\}$$

and

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{2,\alpha}(n,k) &= \left\{ (p,q) \in \mathscr{C} : \frac{U^2}{n+k} < p \le \frac{U^2}{k},\ 2 \le q \le \frac{U^2 - kp}{n},\ \operatorname{inv}_p(q) \le \alpha p \right\} \\ &= \left\{ (p,q) \in \mathscr{C} : 2 \le q \le \frac{U^2}{n+k} - \theta,\ \frac{U^2}{n+k} < p \le \frac{U^2 - nq}{k},\ \operatorname{inv}_q(p) > (1-\alpha)q \right\} \end{aligned}$$

不包括整数点格

$$\mathscr{L}_{3,\alpha}(n,k)=\left\{(p,1):\frac{U^2}{n+k}<p\le\frac{U^2}{k}\right\},$$

其中我们还在 $\mathscr{L}_{2,\alpha}(n,k)$ 中应用了引理 2.2，并引入了一个$\theta\in[0,1]$ 可以变化的参数。 $\mathscr{L}_1(n,k)$、 $\mathscr{L}_3(n,k)$ 和 $\mathscr{L}_2(n,k)$ 的点数分别等于

$$S_{1,\alpha}(n,k)\coloneqq\sum_{U<p\le U^2/(n+k)}A_{(p,\alpha)}(1,p),\quad S_{3,\alpha}(n,k)\coloneqq\sum_{U^2/(n+k)<p\le U^2/k}1,$$

and

$$S_{2,\alpha}(n,k)\coloneqq\sum_{2\le q\le U^2/(n+k)-\theta}B_{(q,\alpha)}\left(\frac{U^2}{n+k}\frac{U^2-nq}{k}\right).$$

分别地。按照 [16, § 5 情形 4]，中的方法，并使用引理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned}S_{1,\alpha}(n,k)&=\sum_{U<p\le U^2/(n+k)}\frac{\alpha\varphi(p)}{2}+O_\epsilon\left(\frac{U^2}{n+k}\sum_{U<p\le U^2/(n+k)}\frac{1}{p^{1/2-\epsilon}}\right)\\&=\frac{\alpha U^4}{2\zeta(2)(n+k)^2}+O_\epsilon\left(U^2+\frac{U^2}{n+k}\log\frac{U^2}{n+k}+\frac{U^{3+2\epsilon}}{(n+k)^{3/2+\epsilon}}\right),\end{aligned}$$

$$S_{2,\alpha}(n,k)=\frac{\alpha nU^4}{2\zeta(2)k(n+k)^2}+O_\epsilon\left(\frac{nU^2}{k(n+k)}\log\frac{U^2}{n+k}+\frac{nU^{3+2\epsilon}}{k(n+k)^{3/2+\epsilon}}\right)$$

and

$$S_{3,\alpha}(n,k)\ll\frac{nU^2}{k(n+k)}.$$

因此，固定 $\epsilon\in(0,1/4)$ 后，我们得出

$$R_{4,\alpha}(U)=\frac{\alpha}{4\zeta(2)}U^4(\log U)^2+\frac{\alpha}{2\zeta(2)}(\gamma-\log 2)U^4\log U+O\Big(U^4\Big).$$

情形 5。 我们计算方程 $R_{5,\alpha}(U)$ 的解的数量

$$\begin{cases}\gcd(p,q)=1, & 1\le q<p,\quad U<p,\\ 2\le nq+kp\le U^2, & 1\le k<n,\quad U<n,\\ \mathrm{inv}_p(q)\le\alpha p,\end{cases}$$

除了与 $q=1$ 对应的解的数量外，这等价于

$$\begin{cases}\gcd(p,q)=1, & 2\le q<p,\quad U<p,\\ 2\le nq+kp\le U^2, & 1\le k<n,\quad U<n,\\ \mathrm{inv}_q(p)>(1-\alpha)q,\end{cases}\tag{4.5}$$

由引理 2.2 可知。我们可以只考虑 $k+q<U$ 的情形，否则，方程组 (4.5) 无解。若 $S(k,\ q)$ 表示固定 k 和 q 时方程组 (4.5) 的解的数量，那么

$$R_{5,\alpha}(U)=\sum_{k<U-1}\sum_{U<n\le U^2-k\lceil U\rceil}\sum_{U<p\le(U^2-n)/k}1+\sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q\ge 2}S(k,q), \tag{4.6}$$

其中$\lceil x\rceil$ 是上取整函数。

直接计算可得

$$\sum_{k<U-1}\sum_{U<n\le U^2-k\lceil U\rceil}\sum_{U<p\le(U^2-n)/k}1=\frac{U^4}{2k}+O\Big(U^3\Big). \tag{4.7}$$

另一方面

$$\begin{aligned}S(k,q)&=\sum_{U<n\le(U^2-k\lceil U\rceil)/q}\sum_{\substack{(1-\alpha)q<b\le q\\ \gcd(b,q)=1}}\sum_{\substack{U<p\le(U^2-nq/k)\\ p\equiv \mathrm{inv}_q(b)}}1\\&=\sum_{U<n\le(U^2-k\lceil U\rceil)/q}\sum_{\substack{(1-\alpha)q<b\le q\\ \gcd(b,q)=1}}\left(\frac{1}{q}\left(\frac{U^2-nq}{k}-U\right)+O(1)\right)\\&=\sum_{U<n\le(U^2-k\lceil U\rceil)/q}\left(\frac{\delta_\alpha(q)}{q}\left(\frac{U^2-nq}{k}-U\right)+O(q)\right).\end{aligned}$$

回想一下，$\kappa_\alpha(q)\le d(q)$。由引理 2.3 可知，对于 $q>1$,

$$\begin{aligned}S(k,q)&=\frac{\alpha\varphi(q)}{q}\sum_{U<n\le(U^2-k\lceil U\rceil)/q}\left(\frac{U^2-nq}{k}-U\right)+\frac{\kappa_\alpha(q)}{kq}\sum_{n\le(U^2-k\lceil U\rceil)/q}\Big(U^2-nq\Big)+\\&\quad+O\left(U^2+\frac{U^3d(q)}{q^2}+\frac{U^3d(q)}{kq}\right)\\&=:\Sigma(k,q)+\frac{\kappa_\alpha(q)U^4}{2kq^2}+O\left(U^2+\frac{U^3d(q)}{q^2}+\frac{U^3d(q)}{kq}\right).\end{aligned}$$

与 [16, §5中的情形类似，在情形 5] 中用 α 代替 $1/2$，我们得到 $q>1$

$$\Sigma(k,q)=\frac{\alpha\varphi(q)U^4}{2kq^2}-\frac{\alpha\varphi(q)U^3}{q^2}-\frac{\alpha\varphi(q)U^3}{kq}+\frac{\alpha\varphi(q)kU^2}{2q^2}+\frac{\alpha\varphi(q)U^2}{2k}+O\Big(U^2\Big).$$

由（4.6）和（4.7）可推得

$$R_{5,\alpha}(U)=\sum_{k<U-1}\left(\frac{U^4}{2k}-\frac{\alpha U^4}{2k}-\frac{U^4(1-\alpha)}{2k}\right)+\frac{\alpha U^4}{2}\sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\frac{\varphi(q)}{kq^2}+$$
$$+\frac{U^4}{2}\sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\frac{\kappa_\alpha(q)}{kq^2}-\alpha U^3\sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\left(\frac{\varphi(q)}{q^2}+\frac{\varphi(q)}{kq}\right)+$$
$$+\frac{\alpha U^2}{2}\sum_{\substack{k\\k+q<U}}\sum_{q}\left(\frac{\varphi(q)k}{q^2}+\frac{\varphi(q)}{q}\right)+O\Big(U^4\Big).$$

上述各和均已在引理 2.7 和引理 2.8 中计算。因此，我们得出

$$R_{5,\alpha}(U)=\frac{\alpha U^4(\log U)^2}{2\zeta(2)}+\frac{\alpha U^4\log U}{2\zeta(2)}\left(2\gamma-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-3+F(\alpha)\right)+O\Big(U^4\Big).$$

5. 评述与一些启发式方法

在最后这一节中，我们简要讨论所得结果。具体而言，我们想将这样的直觉形式化：在无理数切口处，样本的主要贡献来自任意接近 0 的点。为此，我们借鉴了 [5]中的一个初等论证。

引理 5.1. 设 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个单调递增函数，且满足 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$，并定义集合

$$\mathcal{S}(g,Q)=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}:b\le Q\ \ and\ \ \frac{a}{b}\le\frac{1}{g(Q)}\right\}.$$

那么我们有

$$\sum_{\frac{a}{b}\in\mathcal{S}(g,Q)}s(b,a)\ll\frac{Q^2}{g(Q)^2}\log^2(Q).$$

证明。 我们首先写出

$$\sum_{\frac{a}{b}\in\mathcal{S}(g,Q)}s(b,a)=\sum_{a<Q/g(Q)}\ \sum_{ag(Q)<b<Q}s(b,a)$$

由于 $s(b,\ a)=s\Big(\bar{b},a\Big)$，其中 $\bar{b}$ 表示 b 模 a的约化，关系式 (1.1) 意味着

$$\sum_{ag(Q)<b<Q}s(b,a)\ll\max_{S}\left|\sum_{k\in S}s(k,a)\right|,$$

其中，最大值遍历模 a的剩余类集合的所有子集。此外，众所周知（例如参见 [9]的引言），

$$\sum_{k<a}^{*} |s(k,a)| \ll a\log^2 a.$$

利用上述事实，我们得出

$$\sum_{a<Q/g(Q)} \sum_{ag(Q)<b<Q} s(b,a) \ll \sum_{a<Q/g(Q)} a\log^2 a \ll \frac{Q^2}{g(Q)^2}\log^2(Q). \qquad \square$$

引理 5.2. 设 g（x）$=$对数 x 和 $\mathcal{S}$（g, Q）如引理 *5.1* 中所述。那么

$$\frac{1}{\mathcal{F}(Q)} \sum_{\frac{a}{b}\in\mathcal{S}(g,Q)} s(a,b) = \frac{1}{12}\log Q + O\left(\log\log Q\right).$$

证明。 根据戴德金和的互反律

$$s(a,b) + s(b,a) = \frac{1}{12}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab}\right) - \frac{1}{4}$$

以及引理 5.1，我们得到

$$\sum_{\frac{a}{b}\in\mathcal{S}(g,Q)} s(a,b) = \frac{1}{12} \sum_{\frac{a}{b}\in\mathcal{S}(g,Q)} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab}\right) + O\Big(Q^2\Big) = \frac{1}{12} \sum_{\frac{a}{b}\in\mathcal{S}(g,Q)} \frac{b}{a} + O\Big(Q^2\Big).$$

Th该引理可由莫比乌斯反演并计算所得的二重和得出。 $\square$

参考文献

[1]V. Baladi 和 B. Vallée. 欧几里得算法是高斯的. 《数论杂志》, 110(2):331–386, 2005. doi: 10.1016/j.jnt.2004.08.008.[2] Ph. Barkan. 关于戴德金和与有限连分数. 巴黎科学院报告 Sér. A-B, 284(16):A923–A926, 1977.[3] F. P. Boca. 矩阵的乘积 $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ 和 $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$ 以及约化二次无理数的分布. 《纯粹与应用数学杂志》, 606:149–165, 2007. doi:10.1515/crelle.2007.038.[4] V. A. Bykovskiĭ. 有限连分数长度离散度的一个估计. Fundam. Prikl. Mat., 11(6):15–26, 2005.[5] J. B. Conrey, E. Fransen, R. Klein 和 C. Scott. 戴德金和的平均值. 《数论杂志》, 56(2):214–226, 1996. doi: 10.1006/jnth.1996.0014.[6]R. Dedekind. 对前述片段的说明 [XXVII]. 载于《伯恩哈德·黎曼数学著作全集》. 多佛出版社，纽约，1953.[7] J. D. Dixon. 欧几里得算法的步数. 《数论杂志》, 2:414–422, 1970. doi: 10.1016/0022-314X(70)90044-2.[8] J. D. Dixon. 关于欧几里得算法步数的一个简单估计. 《美国数学月刊》, 78:374–376, 1971. ISSN 0002-9890. doi:10.2307/2316901.

[9] K. Girstmair 和 J. Schoißengeier. 戴德金和的算术平均值. 《算术学报》, 116(2):189–198, 2005. doi: 10.4064/aa116-2-6.[10] H. Heilbronn. 一类有限连分数的平均长度. 载于《数论与分析论文集》, 为纪念 E. Landau, 页码 87–96. Plenum, 纽约, 1968.[11] D. Hensley. 欧几里得算法的步数. 《数论杂志》, 49(2):142–182, 1994. doi: 10.1006/jnth.1994.1088.[12] D. Hickerson. 连分数与戴德金和的稠密性结果. 《纯粹与应用数学杂志》, 290:113–116, 1977. doi: 10.1515/crll.1977.290.113.[13] H. Ito. 椭圆戴德金和的一个稠密性结果. 《算术学报》, 112(2):199–208, 2004. doi: 10.4064/aa112-2-7.[14]A. Ya. Khinchin. 连分数. 芝加哥大学出版社, 芝加哥, 1964.[15]G. Lochs. 与真分数相对应的正规连分数的部分分母统计. 《数学月刊》, 65:27–52, 1961.[16] P. Minelli, A. Sourmelidis 和 M. Technau. 欧几里得算法步数的偏差及 Ito 关于戴德金和的猜想. 《数学年刊》, 即将出版. doi: 10.1007/s00208-022-02452-2.[17]G. Myerson. 关于半正规有限连分数. 《数学档案》, 48: 420–425, 1987. doi: 10.1007/BF01189635.[18] J. W. Porter. 关于 Heilbronn 定理. 《数学》, 22(1):20–28, 1975. doi: 10.1112/S0025579300004459.[19] I. E. Shparlinski. 模双曲线. 《日本数学杂志》, 7(2):235–294, 2012. doi:10.1007/s11537-012-1140-8.[20] A. V. Ustinov. 有限连分数的统计性质. 《数学科学杂志》, 纽约, 137(2):186–211, 2005. doi: 10.1007/s10958-006-0268-6.[21] A. V. Ustinov. 连分数理论中一个问题的方差计算. 《数学文集》, 198(6):139–158, 2007. doi: 10.1007/s10958-007-0378-9.[22] A. V. Ustinov. 欧几里得算法步数的第一矩和第二矩的渐近行为. 《俄罗斯科学院通报：数学辑》, 72(5):189–224, 2008. doi: 10.1070/IM2008v072n05ABEH002427.[23]B. Vallée. 一类欧几里得算法分析的统一框架. 载于 LATIN 2000：理论信息学。第四届拉丁美洲研讨会, 埃斯特角城, 乌拉圭, 2000年4月10—14日。论文集, 页码 343–354. 施普林格, 柏林, 2000. ISBN 3-540-67306-7. doi: 10.1007/10719839.[24] B. Vallée. 一类欧几里得算法的动力学分析. 《理论计算机科学》, 297(1-3):447–486, 2003. doi: 10.1016/S0304-3975(02)00652-7.[25] E. N. Zhabitskaya. 约化正规连分数的平均长度. 《数学文集》, 200(8):1181–1214, 2009. doi: 10.1070/SM2009v200n08ABEH004034.

Paolo Minelli，瑞典斯德哥尔摩皇家理工学院数学系；AthanasiosSourmelidis 和 Marc Technau，奥地利格拉茨格拉茨工业大学分析与数论研究所，Kopernikusgasse 24/II，8010 格拉茨

电子邮件地址： pminelli@kth.se电子邮件地址：
mtechnau@math.tugraz.at电子邮件地址：
sourmelidis@math.tugraz.at