arXiv:2301.00458v1 [math.RT] 1 Jan 2023

约化群的岩泽代数表示：pro-p-伊wahori子群

ARANYA LAHIRI 和 JISHNU RAY

ABSTRACT. 本文将 Clozel 和 Ray 的结果（分别针对 SL_2 和 SL_n）推广，给出连通分裂约化群 $\mathbb{G}$ 在 $\mathbb{Q}_p$上之 pro-p 伊wahori子群的岩泽代数的显式环论表示，该表示以一组完备的生成元和关系为基础。

1. INTRODUCTION

本文研究定义于$\mathbb{Q}_p$上并在其上分裂的连通约化群 G 的 pro-p 伊wahori子群的岩泽代数；该子群由 $\mathbb{Q}_p$-值点 G :=G($\mathbb{Q}_p$) 构成。

回顾一下，对于一个 pro-p 群 G 和一个整数环为 $\mathcal{O}$ 的有限扩张 $L/\mathbb{Q}_p$，对 G 的开正规子群集合 $\mathcal{N}(G)$ 取射影极限，

$$\Lambda(G) := \mathcal{O}[[G]] := \varprojlim_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}[G/N],$$

赋予适当的射影极限拓扑后，称为完备群环或称为岩泽代数，其对象为 G，系数环为 $\mathcal{O}$。它是一个完备的伪紧拓扑环，在研究 p-进群的表示和数论时发挥着重要作用，这得益于它与 p-进局部 Langlands 纲领的联系。读者可在优秀的综述文章[AB06] 中找到关于 p-进群的岩泽代数的若干环论性质，以及关于它们的若干公开问题。

本文对 $\Lambda(I)$ 给出环论表述，其中 I 是p连通约化群 G的 pro-Iwahori 子群，并满足上述假设。我们假设 $p > h+1$，其中 h 是约化群的 Coxeter 数（见第2.1节）。在此假设下，pro-p Iwahori 子群 I 是 p-饱和的（按 Lazard 的意义，见定理2.4。1, [LS22]）。本文的主要结果如下：

定理 1.0.1。 对于 $p > h+1$，岩泽代数 $\Lambda(I)$ 作为拓扑环自然同构于 $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ (见定理 *6.0.2*)。

其中， $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上的非交换幂级数环，涉及一定数量的变量（取决于 G）； $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{A}$的一个双边理想，来源于 p-进群 G上的 Chevalley 关系。

2020年数学主题分类。主要分类：11R23，20G25；次要分类：16L30。关键词与短语。
岩泽代数，pro-p 伊瓦索里，约化群。

这一方向上的首项成果由 Clozel 在 [Clo11], 中完成，随后在[Clo17] 中得到进一步研究，并在 [Clo18] 中用于所提出的“p-进基变换映射”背景下。他在那里给出了伊瓦萨瓦代数 $\Lambda(I_{\mathbb{Q}_p})$ 的显式环论表示，其中对象是 $SL_2(\mathbb{Q}_p)$的 pro-p伊wahori子群 $I_{\mathbb{Q}_p}$ ；同时也给出了 $\Lambda(I_L)$的表示，其中对象是 $SL_2(L)$的 pro-p 伊wahori子群 I_L ，这里取某个非分歧扩张 $L/\mathbb{Q}_p$。后来，本文第二作者将这一结果推广到了 $SL_n(\mathbb{Q}_p)$的 pro-p伊wahori子群（见[Ray20]）。他还在[Ray18a]中解决了一般一致 pro-p 群的情形。

这里我们沿用了 Clozel 以及第二作者关于 SL_2 和 SL_n的思想体系。这里的主要技术挑战在于，pro-p 伊wahori子群可以赋予一个 p-赋值，相对于该赋值它是 p-饱和的，但一般而言并不是一致群。本质上的主要区别在于，对于一致的 pro-p群，其关联分次代数是一个交换多项式环，而在我们的设置中则并非如此。

Clozel 能够亲手完成计算，是因为变量数量相对较少，且变量之间的关系简单、易于计算。第二作者在 [Ray20]中所使用的技术同样是显式的，但涉及一些颇为繁琐的大矩阵计算。

Clozel 对岩泽代数的显式环论表示的主要兴趣，似乎源于这样一个事实：他可以提出一个 p-进基变换映射的形式候选，该映射介于 $\Lambda(I_L)$ 与 $\to \Lambda(I_{\mathbb{Q}_p})$ 之间。但即使 Clozel 本人也指出，这种基变换映射的正确设置或许涉及与 pro-p 伊wahori子群相应的刚性解析群相关联的刚性解析分布代数。就目前而言，我们尚不确定这种形式基变换映射的意义，因此为了便于阐述和计算，我们将自身限制在定义于$\mathbb{Q}_p$上的群。相同的技术也应能推广到定义于非分歧扩张$L/\mathbb{Q}_p$ 上的群；利用显式表示，定义一个介于 $\Lambda(I_L)$ 与 $\to \Lambda($ $I_{\mathbb{Q}_p})$ 之间的“形式基变换映射”应当并不困难。

1.1. 主定理思路概述。在正式开始写作之前，我们先简要且略显粗略地介绍一下证明主定理所涉及的主要思路。

G 的 pro-p 伊wahori子群 I 上的自然 p-赋值使其成为一个 p-饱和群，这进而意味着 I 作为一个 $\mathbb{Q}_p$-解析流形与 $\mathbb{Z}_p^d$ 同胚。因此，岩泽代数 $\Lambda(I)$ 作为一个 $\mathbb{Z}_p$-模同构于 $\mathbb{Z}_p[[X_1, \cdots, X_d]]$。现在， I 的李代数的 Chevalley 基之间的 Chevalley 关系会在变量 X_i之间诱导出关系。我们将在此证明，这构成了一组完备的生成元与关系。

证明中的一个关键观察是，实际上只需证明模p 岩泽代数 $\Omega(I)$ 的类似命题：$= \Lambda(I)$ $\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$。模$p$ 约化后，Chevalley 关系更易处理。接下来的证明归结为计算 $\Omega(I)$ 的伴随分次向量空间的维数，如定理 4.0.3所示。我们为本文读者指出一些有用的背景与对比：

- 借助第一作者与 Sorensen 在先前论文（[LS22]）中的结果，我们大幅简化了计算。关键在于系统地写出 p-赋值以及 pro-p伊wahori子群的有序基。第二作者发表 [Ray20], 时，文献中尚无此类结果，因此他不得不进行冗长的计算。这种简化也使我们能够处理 Chevalley 关系，而无须将其拆分成过多情形。

- 我们将 [Ray20] 中正根集上的字典序替换为 Papi 在 [Pap94] 中构造的任意加法序。在此过程中，我们或许能进一步阐明 I 中有序基所采用的看似随意的次序选择[Ray20]。
- 我们还为定理 4.0.3 提供了一种更具概念性的证明；事实上，该定理是本文技术层面的核心。

- 在 [WE21] 中，作者还给出了岩泽代数的一个模环论表示。不过，他们的方法与我们的截然不同，我们目前尚不清楚这两种方法之间的联系。

1.2. 岩泽理论中的应用。设 E 是数域 F 上的一条无复乘椭圆曲线，在 F 上方、位于 p 之上的各处具有良好普通约化。考虑平凡化扩张 $F_\infty := F[E_{p^\infty}] = \cup_{n\geq 1} F[E_{p^n}]$，其中 E_{p^n} 是 $E(\overline{F})$ 的 p^n-挠点。该平凡化扩张的伽罗瓦群 G 对所有素数 p 都是 $GL(2,\mathbb{Z}_p)$ 的紧开子群；而对于除有限多个素数 p 之外的所有素数， $G = GL(2,\mathbb{Z}_p)$ 也是如此。塞尔默群 $\mathrm{Sel}(E/F_\infty)$ 在该平凡化扩张上的庞特里亚金对偶 $\mathcal{X}_\infty$ 携带着关于 E 的多种算术信息，而它作为岩泽模的结构具有深远的数论后果。猜想（见 [Coa99，猜想 1.7]）认为， $\mathcal{X}_\infty$ 是一个有限生成的 $\Lambda(G)$- 挠模。关于该猜想成立的情形，参见定理 1.10 及其后面的例子（同上）。关于这个对偶塞尔默群作为岩泽模的显式结构，也已有一项部分结果。更确切地说， $\mathcal{X}_\infty$ 伪同构于若干循环岩泽模的直和：

$$\mathcal{X}_\infty \sim \oplus_{i=1}^{m} \Lambda(G)/L_i,$$

其中， L_i 是岩泽代数 $\Lambda(G)$ 中的左反身理想（参见 [CSS03，第 74] 页的结构定理）。目前尚不清楚这些左反身理想的明确描述。因此，一个自然的问题是：能否利用岩泽代数 $\Lambda(G)$ 的显式表示，明确描述这些具有算术意义的自反理想。关于双侧自反理想不存在性以及模-p 岩泽代数 $\Omega(G)$，文献中已经取得了一些进展。若元素 $x \in \Omega(G)$ 满足 $x\Omega(G) = \Omega(G)x$ ，则称其为正规元，而由正规元生成的理想是 $\Omega(G)$ 的双侧自反理想。当 G是 $\mathbb{Z}_p$ 上的分裂半单单连通 Chevalley 群的第一同余核时，在一定假设下，可以利用第二作者在 [Ray18b] 中给出的其岩泽代数的显式表示，证明 $\Omega(G)$ 的每个非零正规元都必须是单位元（参见 [HRW21，定理 5.1]）。因此，不存在任何由正规元生成的双侧非平凡自反理想

在模-p 岩泽代数中。请注意，这种利用显式表示来证明关于正规元的此类结果（同上）的技术同样适用于素数 $p = 3$，因而推广了 Ardakov、Wei 和 Jhang 的早期结果；他们所采用的技术也完全不同（参见 [AWZ08，定理 A]）。岩泽代数的这种显式表示也可用于重新证明关于模-p岩泽代数中心的已知结果（参见 [HRW21，命题 7.1]）。必须指出，[HRW21]中的技术仅涉及第一同余核，因此其底层群是均匀的 pro-p。这是一个自然的问题，我们相信其答案应当是肯定的：推广（同上）中的结果，并研究本文所提出的 pro-p伊wahori子群的显式表示，是否可用于探究相应岩泽代数的单侧或双侧自反理想。

Acknowledgement

作者感谢 Peter Schneider 和 Claus Sorensen 在本项目期间进行的多次讨论。第二作者得到 Inspire 研究基金的资助。

2. Preliminaries

2.1. Iwahori 分解。设 p 是一个素数。为清晰起见，我们将假定基域为 $\mathbb{Q}_p$ 来讨论所有内容；并先说明，本预备部分中的大多数结果在相应文献中通常都以适当推广的形式表述，适用于有限扩张 $L/\mathbb{Q}_p$。

固定一个在 $\mathbb{Q}_p$上分裂的连通约化群 G，并选取一个 $\mathbb{Q}_p$-分裂极大环面 T $\subset$ G。令 (X^*(T) Φ, X_*(T) $\Phi^\vee$) 为相应的根数据。固定一组正根 Φ^+，其单根为 $\Delta \subset \Phi^+$，并令 $\Phi^- = -\Phi^+$。令 ht(·) 为 Φ上的高度函数；回顾一下，G 的 Coxeter 数为 $h = 1 +$ht(θ)，其中 θ 是最高根。

设 $G =$ G($\mathbb{Q}_p$) 具有通常的局部有限拓扑，类似地，$T =$ T($\mathbb{Q}_p$) 也如此。进一步地，我们用 $T^0 \subset T$ 表示极大紧子群，用T^1 表示其 Sylow pro-p-子群。回忆一下，对每个 $\alpha \in \Phi$，都可以附加一个由 T 正规化的幺幂根子群 U$_\alpha$。令 $U_\alpha =$ U$_\alpha$($\mathbb{Q}_p$)，并注意到它具有一个自然同构 $u_\alpha : \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} U_\alpha$，使得对所有 $t \in T$ 和 $x \in \mathbb{Q}_p$，均有 $tu_\alpha(x)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)x)$。这给出了由子群 $U_{\alpha,r} = u_\alpha((p^r))$ 构成的 U_α 的一个滤过，其中 $r \in \mathbb{Z}$ 取遍变化值。

我们考虑与 Φ^+ 对应的整个伊wahori子群 J。若假设 G 是半单且单连通的，那么 J 在几何上可解释为稳定子：它稳定与 G 的 Bruhat-Tits 建筑 $\mathcal{B}(G)$ 的根数据相对应的极大面（或小室）。我们不探讨 J 的几何方面，而只指出，所谓的 Iwahori 分解说明，乘法定义了一个同胚，

$$\prod_{\alpha\in\Phi^-} U_{\alpha,1} \times T^0 \times \prod_{\alpha\in\Phi^+} U_{\alpha,0} \xrightarrow{\sim} J.$$

我们将注意力集中于 J 的 Sylow pro-p 子群，即 pro-p 伊wahori子群 I。同样，乘法给出一个同胚，

$$\prod_{\alpha\in\Phi^-} U_{\alpha,1}\times T^1\times\prod_{\alpha\in\Phi^+} U_{\alpha,0}\xrightarrow{\sim} I. \tag{2.1.0}$$

这里，关于 Φ^- 和 Φ^+ 的乘积，其排列顺序是任意选定的，参见 [OS19 的引理 2。3] 以及 [OS19] 中第 2.1 节的引理 i。从第 2.4 节开始，我们将固定该乘积的一个排列顺序，以便讨论有序基以及依赖于有序基的后续内容。

2.2. p-饱和群。为使本文在一定程度上自成一体，我们在此汇集若干定义，这些定义与群 p 上的 G -赋值有关，其中该群可以是任意的 pro-p、无挠、紧 p-进李群。回顾一下，群 p 上的 [Sch11 第 23 章第 169] ω 页所述的 G -赋值是一个实值函数，

ω： $G\setminus\{1\}\to(\frac{1}{p-1},\infty)$，按约定 $\omega(1)=\infty$，满足
(1) $\omega(g^{-1}h)\geq\min(\omega(g)\ \omega(h)),$ (
2) $\omega([g,h])\geq\omega(g)+\omega(h),$ (3) $\omega($
$g^p)=\omega(g)+1.$

群g_1、$\cdots$、g_r中的元素序列（G配备了一个 p-赋值 ω，称为有序基 [Sch11，定义，第 26 章，第 182]，如果它满足G、ω）
(1) $\mathbb{Z}_p^d\to G,(x_1,\cdots,x_d)\to g_1^{x_1}\cdots g_d^{x_d}$ is a homeomorphism,
(2) $\omega(g_1^{x_1}\cdots g_d^{x_d})=\min_{1\leq i\leq d}(\omega(g_i)+v_p(x_i))$ for any $x_1,\cdots,x_d\in\mathbb{Z}_p$.

最后，一个 p-赋值群（G、ω）配备赋值 ω，称为饱和的[Sch11，定义，第 26 章，第 187] 如果任意 g 满足 $\omega(g)>\frac{p}{p-1}$ 是 p-次幂，且底数属于 G。

2.3. 正根集上的加法序。我们以所需的形式回顾 [Pap94]中的结果，以便稍后证明引理5.3.1 。

令 W 为根系 Φ 对应的韦伊群。令 $\Delta=\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$ 为单根集，Φ^+ 为对应的正根集，且令 $\Phi^-=-\Phi^+$。再令 s_1、$\cdots$、s_n 为对应于单根的反射。

定义 2.3.1. 若 $S:=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_r\}\subset\Phi^+$ 是 Φ 的正根子集，则称 S 与 $w\in W$ 相关联，当且仅当存在 w 的一个约化表达式 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}$，使得 $\sigma_1=\delta_{i_1},\sigma_j=s_{i_1}\cdots s_{i_{j-1}}(\delta_{i_j})$，$\delta_{i_j}\in\Delta$。

特别地，注意到，若 w_0 是韦伊群的最长元素，则 Φ^+ 与 w_0 相关联。

定义 2.3.2. 若 Φ^+ 的有序子集 $(S,<)$ 满足以下两个条件，则称其为相容有序。

(1) I 若 $\lambda,\mu\in S$ 满足 $\lambda<\mu$，且 $\lambda+\mu\in\Phi$，则 $\lambda+\mu\in S$ 和 $\lambda<\lambda+\mu<\mu$。

(2) 若 $\lambda+\mu\in S$、λ、$\mu\in\Phi^+$，则 λ 或 μ（或两者）属于 S，且其中之一先于$\lambda+\mu$。

的主要结果 [Pap94] 是

定理 2.3.3 (第 662 页中的定理 [Pap94])。 子集 $S \subset \Phi^+$ 当且仅当它与某个 w 相关联时，才能赋予相容序 W。

由于我们已经观察到 Φ^+ 与 w_0相关联，作为2.3.3 的推论，我们得到

推论 2.3.4. 我们可以在 Φ^+ 上赋予相容序。

2.4. pro-p 伊wahori 的有序基。 我们略作修改，并省略证明，回顾 [LS22第 3]节中我们需要的内容。

在 [LS22] 中已证明，pro-p伊wahori子群 I 可以赋予一个 p-赋值 ω，使得 I 是饱和的。对我们而言，使用 I, ω) 的有序基，并能够明确写出这些基元素的赋值，将十分重要。

我们任意固定 Φ^- 中元素的一个排序，使根上的高度函数递增；以任意方式排列 Δ 中的元素，并按照定义 2.3.2意义下任意但固定的相容序排列 Φ^+ 中的元素。最后，我们将这些排序合并为一个全序 Φ，使得对于任意 $\beta \in \Phi^-$， $\delta \in \Delta$， $\alpha \in \Phi^+$ 都有$\beta < \delta < \alpha$。

定理 2.4.1。 [LS22，命题 3.4，推论 3。6] 给定 $p - 1 > h$， （I， ω）的一个有序基及其对应的赋值为（I， ω）由下式给出

- $u_\beta(p)_{\beta\in\Phi^-}$, $\omega(u_\beta(p)) = 1 + \frac{\mathrm{ht}(\beta)}{h}$,
- $\delta^\vee(1+p)_{\delta\in\Delta}$, $\omega(\delta^\vee(1+p)) = 1$,
- $u_\alpha(1)_{\alpha\in\Phi^+}$, , $\omega(u_\alpha(1)) = \frac{\mathrm{ht}(\alpha)}{h}$.

其中，我们按照上述选定的 Φ 的全序来排列有序基中的元素。

注意，[LS22] 的描述选取了 e^p 作为 $1+(p)$ 的一个有序基。此处，为了使计算更加直接，自然的选择似乎是 $1+p$。从此处起，我们将记号改为写作 h_δ，而不写作 $\delta^\vee$，以与 [Ray20]中使用的记号保持一致。

注 2.4.2. 为便于日后参考，我们指出，对于上文提到的有序基中的任意元素 g，都有 $\frac{1}{h} \leq \omega(g) \leq 1$.

2.5. 岩泽代数. 设 G 是任意一个全不连通紧群，并令 $\mathcal{N}(G)$ 为 G 中开正规子群的集合。那么我们知道

$$G = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}(G)} G/N$$

是有限群 G/N （赋予离散拓扑）在拓扑群范畴中的射影极限。由相应群环的函子性可知，随着 N 在 $\mathcal{N}(G)$ 中变化，代数群环 $\mathcal{O}[G/N]$ 构成一个环的射影系。该射影极限

$$\Lambda(G) := \mathcal{O}[[G]] := \varprojlim_{N\in\mathcal{N}(G)} \mathcal{O}[G/N]$$

称为 G 在 $\mathcal{O}$ 上的完备群环或岩泽代数。为 $\Lambda(G)$ 赋予由 $\mathcal{O}[G/N]$ 的自然拓扑诱导的射影极限拓扑后，它便成为一个完备的伪紧拓扑环。

由 $g \to \delta_g$ 给出的 $G \to \Lambda(G)$ 的嵌入提升为群环 $\mathcal{O}[G]$ 到 $\Lambda(G)$ 的单射嵌入，且其像稠密。

现在，设 (G,ω) 是 $\mathbb{Z}_p$ 上的一个 p-饱和群，带有一个 p-赋值 ω，并选定有序基 $(h_1,\cdots,h_d)$。在这种情况下，我们得到解析流形之间的一个同胚

$$\begin{aligned} c : \mathbb{Z}_p^d &\to G \\ (x_1,\cdots,x_d) &\mapsto h_1^{x_1}\cdots h_d^{x_d}. \end{aligned}$$

我们使用标准记号 $b_j = h_j - 1 \in \Lambda(G)$；对于 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_d) \in \mathbf{N}^d$，令 $\mathbf{b}^\alpha = b_1^{\alpha_1}\cdots b_d^{\alpha_d}$。那么，任意元素 $\lambda \in \Lambda(G)$ 都可写成 $\lambda := \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha$，其中 $c_\alpha \in \mathcal{O}$，并且我们可以自然地赋予它赋值，

$$\tilde{\omega}_\Lambda(\sum_\alpha c_\alpha \mathbf{b}^\alpha) = \inf_\alpha (v(c_\alpha) + \sum_{i=1}^d \alpha_i \omega(h_i)). \tag{2.5.0}$$

经拉回并取对偶后，我们得到一个拓扑 $\mathbb{Z}_p$-模的同构

$$\begin{aligned} c_\star : \Lambda(\mathbb{Z}_p^d) &\cong \Lambda(G) \\ \delta_{e_i} &\to \delta_{h_i}. \end{aligned}$$

根据 [Sch11，20.1] 我们知道 $\Lambda(\mathbb{Z}_p^d) \cong \mathbb{Z}_p[[X_1,\cdots,X_d]]$ 是 d 变量的幂级数环，作为拓扑环。

利用 2.4.1 我们因此将其改写为 I，

引理 2.5.1（Lazard）。以下对象作为 $\mathbb{Z}_p$-模同构，同构由下式给出，

$$\begin{aligned} \tilde{c} : \mathbb{Z}_p[[U_\beta, V_\alpha, W_\delta : \beta \in \Phi^-, \alpha \in \Phi^+, \delta \in \Delta]] &\cong \Lambda(I) \\ 1 + V_\alpha &\to u_\alpha(1), \\ 1 + W_\delta &\to h_\delta(1+p), \\ 1 + U_\beta &\to u_\beta(p). \end{aligned}$$

2.6. 分次结构。对于任意 p 值群 G，赋值 $\tilde{\omega}$ 在 $\Lambda(G)$ 上诱导出自然滤子，如下所示。对 $v \geq 0$，定义

$$\begin{aligned} \Lambda(G)_v &:= \{\lambda \in \Lambda(G) \big| \tilde{\omega}(\lambda) \geq v\}, \\ \Lambda(G)_{v^+} &:= \{\lambda \in \Lambda(G) \big| \tilde{\omega}(\lambda) > v\}. \end{aligned}$$

这给出了一个滤过以及关联分次代数

$$\mathrm{gr}^v\Lambda(G) := \Lambda(G)_v / \Lambda(G)_{v^+}; \quad \mathrm{gr}\Lambda(G) = \bigoplus_{v \geq 0} \mathrm{gr}^v\Lambda(G).$$

在此滤过下，$\Lambda(I)$ 按 $\frac{1}{h}\mathbb{N}$ 进行滤过。

这是因为 $\mathrm{gr}^v\Lambda(I)$ 由彼此独立的元素 $p^s\prod_{\beta\in\Phi^-}U_\beta^{n_\beta}\prod_{\delta\in\Delta}W_\delta^{n_\delta}\prod_{\alpha\in\Phi^+}V_\alpha^{n_\alpha}$ 生成，满足

$$s+\sum_{\beta\in\Phi^-}\frac{h+\mathrm{ht}(\beta)}{h}n_\beta+\sum_{\delta\in\Delta}\frac{1}{h}n_\delta+\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\mathrm{ht}(\alpha)}{h}n_\alpha=v.$$

$\Lambda(I)$ 上的滤过诱导出 $\Omega(I)=\Lambda(I)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{F}_p$ 的自然滤子，因而也诱导出一个分次结构。我们将利用这一点来计算 $\mathrm{gr}^v\Omega(I)$ 作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间的维数。我们知道，$\mathrm{gr}^v\Omega(I)$ 由 $\prod_{\beta\in\Phi^-}U_\beta^{n_\beta}\prod_{\delta\in\Delta}W_\delta^{n_\delta}\prod_{\alpha\in\Phi^+}V_\alpha^{n_\alpha}$生成，其中

$$\sum_{\beta\in\Phi^-}\frac{h+\mathrm{ht}(\beta)}{h}n_\beta+\sum_{\delta\in\Delta}\frac{1}{h}n_\delta+\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\mathrm{ht}(\alpha)}{h}n_\alpha=v.$$

如果我们将 $v\in\frac{1}{h}\mathbb{N}$ 替换为 $m=vh$，滤过分层并不会改变。这一变化为岩泽代数的生成元赋予了如下赋值（为简便起见，我们仍将其记作 $\tilde{\omega}$）。

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\omega}(u_\beta(p)) & = & h+\mathrm{ht}(\beta),\\ \tilde{\omega}((h_\delta(1+p)) & = & h,\\ \tilde{\omega}(u_\alpha(1)) & = & \mathrm{ht}(\alpha).\end{array}$$

上述论述重新得到以下事实，而这一事实实际上归功于 Lazard。

定理 2.6.1。$\mathrm{gr}^m\Omega(I)$ 作为 $\mathbb{F}_p$-向量空间的维数，等于次数为 m 的变量$\{U_\beta,V_\alpha,W_\delta$上的齐次对称多项式空间的维数：$\beta\in\Phi^-$、$\alpha\in\Phi^+$、$\delta\in\Delta\}$，其中变量的次数被赋予为有序基对应的移位赋值，$\deg(U_\beta)=h+\mathrm{ht}(\beta)$，$\deg(W_\delta)=h$，以及 $\deg(V_\alpha)=\mathrm{ht}(\alpha)$。

3. Relations in the Iwasawa Algebra

3.1. Chevalley 关系。I 的 Chevalley 基上的 Chevalley 关系转化为定义岩泽代数的非交换变量之间的关系。正如引言中所述，本文的主要结果是证明这些关系构成岩泽代数的一组定义关系。

Chevalley 关系如下（参见[Ste16，第 23]页）：

(Diag) $h_\alpha(u)h_\beta(t)=h_\beta(t)h_\alpha(u)$。(Diag-uni) $h_\delta(t)x_\alpha(u)h_\delta(t)^{-1}=x_\alpha(t^{\langle\alpha,\delta\rangle}u)$，其中 $\langle\alpha,\delta\rangle\in\mathbb{Z}$. (Uni-1) 若 $\alpha+\beta\neq0$且 $\alpha+\beta\notin\Phi$，则有 $x_{\alpha_1}(t)x_{\alpha_2}(u)=x_{\alpha_2}(u)x_{\alpha_1}(t)$。(Uni-2) 若 $\alpha_1+\alpha_2\neq0$ 且 $\alpha_1+\alpha_2\in\Phi$，则有 $x_\alpha(t)x_\beta(u)=\prod_{i,j>0}x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^iu^j)x_\beta(u)x_\alpha(t)$，其中 c_{ij} 是依赖于 α 和 β的唯一整数。(Uni-3) 设 $\alpha\in\Phi^+$。写作 $\alpha=\sum_{\delta_i\in\Delta}n_i\delta_i$，则对某些

非负整数 n_i。我们得到

$$x_\alpha(1)x_{-\alpha}(p) = x_{-\alpha}(p)^Q \prod_{\delta_i\in\Delta} h_{\delta_i}(1+p)^{n_i} x_\alpha(1)^Q,$$

其中 $Q = (1+p)^{-1}$.

我们给出 **(Uni-3)** 的证明；其他关系与 [Ste16] 中的完全相同。对于任意根$\alpha \in \Phi^+$，都有一个同态

$$\phi_\alpha : SL_2(\mathbb{Q}_p) \to \langle x_\alpha(t), x_{-\alpha}(t); t \in \mathbb{Q}_p\rangle$$

使得

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(1+tE_{12}) &= x_\alpha(t),\\ \phi_\alpha(1+tE_{21}) &= x_{-\alpha}(t),\\ \phi_\alpha(tE_{11}+t^{-1}E_{22}) &= h_\alpha(t),\end{aligned}$$

其中 E_{ij} 是在第（i, j）个条目为 1、其他位置为 0 的 2×2 矩阵。在 $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ 中，我们有以下矩阵关系

$$(1+E_{12})(1+pE_{21}) = \big(1+p(1+p)^{-1}E_{21}\big)\big((1+p)E_{11}+(1+p)^{-1}E_{22}\big)\big(1+(1+p)^{-1}E_{12}\big).$$

由于 ϕ_α 是一个同态，我们得到

$$x_\alpha(1)x_{-\alpha}(p) = x_{-\alpha}(p(1+p)^{-1})h_\alpha(1+p)x_\alpha((1+p)^{-1}),$$

这意味着

$$x_\alpha(1)x_{-\alpha}(p) = x_{-\alpha}(p)^{(1+p)^{-1}} \prod_{\delta_i\in\Delta} h_{\delta_i}(1+p)^{n_i} x_\alpha(1)^{(1+p)^{-1}}.$$

3.2. 岩泽代数中的关系。岩泽代数中相应的关系为

(R-1) $(1+W_{\delta_1})(1+W_{\delta_2}) = (1+W_{\delta_2})(1+W_{\delta_1})$。 **（R-2）** $(1+W_\delta)(1+V_\alpha) = (1+V_\alpha)^M(1+W_\delta)$ $\alpha\in\Phi^+, M = (1+p)^{\langle\alpha,\ \delta\rangle}$ **(R-3)** $(1+W_\delta)(1+U_\beta) = (1+U_\beta)^M(1+W_\delta)$ $\beta\in\Phi^-, M = (1+p)^{\langle\beta,\ \delta\rangle}$ **(R-4)** $V_\alpha U_\beta = U_\beta V_\alpha, \alpha\in\Phi^+, \beta\in\Phi^-,$ $\alpha+\beta\neq 0, \alpha+\beta\notin\Phi$. **(R-5)** 对于 $\alpha_1,\alpha_2\in\Phi^+$, $(1+V_{\alpha_1})(1+V_{\alpha_2}) = \prod_{\substack{i,j>0\\ i\alpha_1+j\alpha_2\in\Phi}}^{i} (1+V_{i\alpha_1+j\alpha_2})^{c_{ij}}(1+V_{\alpha_2})(1+V_{\alpha_1})$。

(R-6) 对于 $\beta_1,\beta_2\in\Phi^-$, $(1+U_{\beta_1})(1+U_{\beta_2}) = \prod_{\substack{i,j>0\\ i\beta_1+j\beta_2\in\Phi}} (1+U_{i\beta_1+j\beta_2})^{c_{ij}p^{i+j-1}}(1+U_{\beta_2})(1+U_{\beta_1})$。

(R-7) 对于 $\alpha\in\Phi^+, \beta\in\Phi^-,$

$$(1+V_\alpha)(1+U_\beta) = \prod_{\substack{i,j>0\\ i\alpha+j\beta\in\Phi^-}} (1+U_{i\alpha+j\beta})^{c_{ij}p^{j-1}} \prod_{\substack{i,j>0\\ i\alpha+j\beta\in\Phi^+}} (1+V_{i\alpha+j\beta})^{c_{ij}p^j}(1+U_\beta)(1+V_\alpha).$$

（R-8） 令 $\alpha = \sum_i n_i\delta_i$, $(1+V_\alpha)(1+U_{-\alpha}) = (1+U_{-\alpha})^Q \prod_{\delta_i\in\Delta}(1+W_{\delta_i})^{n_i}(1+V_\alpha)^Q$, 其中 $Q = (1+p)^{-1}$.

4. Explicit presentation of the Iwasawa algebra

令 $|\Phi|+|\Delta|=d$，并将 $S:=\{V_\alpha, W_\delta, U_\beta, \alpha\in\Phi^+, \delta\in\Delta, \beta\in\Phi^-\}$ 按照定理 2.4.1 中规定的次序作全序。令 $X:=\{X_1,\cdots,X_d\}$。显然，存在 $\psi:\ X\to S$ 之间的自然双射，将 X_j 送到 j 的第 S 个元素。

令 $\mathcal{A}$ 为变量 X_1、$\cdots$、X_d 上系数取自 $\mathbb{Z}_p$ 的非交换幂级数的通用 p-进代数，并采用集合 S 中的排序。注意，$\mathcal{A}$ 中任意一个次数为 n 的单项式都可以表示为 $a_iX_{i(1)}\cdots X_{i(n)}$，其中 i 是一个映射 $i:\{1,\cdots,n\}\to\{1,\cdots,d\}$。因此，记 $X_i:=X_{i(1)}\cdots X_{i(n)}$，我们可以写成

$$\mathcal{A}:=\Big\{f=\sum_n\sum_i a_iX_i\Big|\ a_i\in\mathbb{Z}_p\Big\}.$$

$\mathcal{A}$ 的拓扑由赋值给出

$$v_{\mathcal{A}}(f=\sum_n\sum_i a_iX_i)=\inf_i(v_p(a_i)+|i|),$$

其中 $|i|=i(1)+\cdots+i(n)$。极大理想 $\mathfrak{m}_{\mathcal{A}}:=(p,X_1,\cdots,X_d)$ 的幂构成了 0 的邻域基。

令 $\mathcal{R}\subset\mathcal{A}$为由以下关系在 $\mathcal{A}$ 中生成的闭双边理想 **(R-1)**-**(R-8)**(将它们改写为变量之间的关系之后 X_i，使用 ψ）。令 $\overline{\mathcal{A}}$为 p 模 $\mathcal{A}$ 的约化。与 [Clo11，引理 1 相同的证明。3]给出

引理 4.0.1. 设 $\overline{\mathcal{R}}$ 是 $\overline{\mathcal{A}}$中 $\mathcal{R}$ 的像。那么 $\overline{\mathcal{R}}$ 是 $\overline{A}$中由关系 **(R-1)**-**(R-8)** 生成的闭双边理想。

令 $A:=\mathbb{Z}_p\{X_1,\cdots,X_d\}$ 为变量 X_1、$\cdots$、X_d上的非交换多项式环。自然包含映射 $A\to\mathcal{A}$ 具有稠密像。

引理 4.0.2. 我们（滥用记号）定义一个自然映射 $\psi:A\to\Lambda(I)$，将$X_i\in A$映射到岩泽代数 $\Lambda(I)$ 中 $S:=\{V_\alpha, W_\delta, U_\beta, \alpha\in\Phi^+, \delta\in\Delta, \beta\in\Phi^-\}$之间对应的第 i 个元素。于是 ψ 连续延拓为满同态$\mathcal{A}\to\Lambda(I)$。

证明。利用引理 2.5.1 并通过 ψ 作识别，我们可以将元素 $\mu\in\Lambda(I)$ 写作$\mu=\sum_i a_i\psi(X_i)$，并且有

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\omega}_\Lambda(\mu) & = & \inf_i(v_p(a_i)+\sum_{j=1}^d i(j)\omega(h_j))\ (\text{from (2.5.0)}),\\ & \geq & \inf_i(\frac{v_p(a_i)}{h}+\sum_{j=1}^d i(j)\frac{1}{h})\ (\text{as } \omega(h_d)\geq\frac{1}{h},\ \text{remark 2.4.2}),\\ & \geq & \frac{1}{h}v_{\mathcal{A}}(\sum_i a_i(X_i)).\end{array}$$

因此，该映射是连续的。根据 ψ 的定义，满射性几乎是显而易见的。 □

考虑 $\overline{\mathcal{A}}$ 关于极大理想 $\mathfrak{m}_{\overline{\mathcal{A}}}$ 的幂所给出的自然滤过，记作 $F^n\overline{\mathcal{A}}$。我们有 $F^n\overline{\mathcal{A}}/F^{n+1}\overline{\mathcal{A}}=\mathrm{gr}^n\overline{\mathcal{A}}$。滤过 F^n 在 $\overline{\mathcal{B}}=\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{R}}$ 上诱导出一个滤过

$$F^n\overline{\mathcal{B}}=F^n\overline{\mathcal{A}}+\overline{\mathcal{R}},$$

因此是一个分次

$$\mathrm{gr}^n\overline{\mathcal{B}}=F^n\overline{\mathcal{B}}/F^{n+1}\overline{\mathcal{B}}.$$

定理 4.0.3。在上述记号下，对于 $n \geq 0$，我们有

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{gr}^n \overline{\mathcal{B}} \leq \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{gr}^n \Omega(I).$$

该定理的证明是本文的核心内容，贯穿整个第5节。

5. Bounding the dimension

5.1. 定理 **4.0.3** 的证明思路。显然，当 $n = 0$ 时，gr^0 等于 $\mathbb{F}_p$，两边都等于 1。当 $n = 1$ 时，$\mathrm{gr}^1\overline{\mathcal{B}}$ 是空间 $F^1\overline{\mathcal{A}}/F^2\overline{\mathcal{A}}$ 的一个商，其基为 $\{V_\alpha, U_\beta\}$，其中 α 遍历所有单根（即 $\mathrm{ht}(\alpha) = 1$），而 β 是最高根的负值（因此 $h + \mathrm{ht}(\beta) = 1$）。于是

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{gr}^1 \overline{\mathcal{B}} \leq |\Delta| + 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{gr}^1 \Omega(I).$$

对于一般情形，我们首先对适当的滤过取模，化简所有关系 **(R-1)** – **(R-8)**（见第 5.2 节中的命题 5.2）。命题 5.2.1 说明，两个变量以错误顺序相乘，与以正确顺序相乘的变量乘积之间有何关系（正确顺序即定理 2.4.1 规定的顺序）。接下来，我们证明可以通过一系列换位，将 $\mathrm{gr}^n\overline{\mathcal{B}}$ 中顺序错误的变量重新排列为正确顺序，并且每一步都能减少逆序的数量（见第 5.3 节中的引理 5.3）。由此可得 $\dim^{\mathbb{F}_p}\mathrm{gr}^n\overline{\mathcal{B}} \leq \dim^{\mathbb{F}_p} \mathrm{gr}^n\Omega(I)$，因为 $\mathrm{gr}^n\Omega(I)$ 由齐次对称多项式构成。

我们先通过分析某些二项式系数模p 的约化，来开始证明定理 4.0.3 。这对于研究变量在 $\overline{\mathcal{R}}$.内部适当次数的滤过模下的关系是必要的

引理 5.1.1. 令 $1 \leq c \leq p-1$, $k \geq 1$, $p^k \nmid r$ 和 $1 \leq r < p^k$，则有

$$\binom{cp^k}{r} \equiv 0 \pmod{p}$$

证明. 对任意正整数 n，将 n 写成以 p为基数的形式，即 $n = \sum_{i=0}^{d} a_i p^d$，其中 $0 \leq a_i \leq p-1$且 $a_d \neq 0$。定义函数 $s_p(n) := \sum_{i=0}^{d} a_i$. 回顾一下 $v_p(n!) = {}^{n-s_p(n)}\,{}_{p-1}$。因此我们有

$$\begin{aligned} v_p\left(\tbinom{cp^k}{r}\right) &= \tfrac{cp^k - s_p(cp^k)}{p-1} - \tfrac{r - s_p(r)}{p-1} - \tfrac{cp^k - r - s_p(cp^k - r)}{p-1} \\ &= \tfrac{s_p(cp^k - r) + s_p(r) - s_p(cp^k)}{p-1} \end{aligned}$$

由[HLS11，命题 2.1] 可得

$$\begin{array}{rcl} s_p(cp^k - r) & = & s_p(c-1) + (p-1)k - s_p(r-1) \\ s_p(cp^k - r) + s_p(r) - s_p(cp^k) & = & s_p(c-1) + (p-1)k - s_p(r-1) + s_p(r) - c \\ = c - 1 + (p-1)k - s_p(r-1) + s_p(r) - c & = & (p-1)k + s_p(r) - s_p(r-1) - 1 \end{array}$$

由于我们假设 $r < p^k$，因此有 $s_p(r-1) < (p-1)k$，当然还有 $s_p(r) - 1 \geq 0$。因此我们得到

$$v_p(\binom{cp^k}{r}) = (p-1)k + s_p(r) - s_p(r-1) - 1 > (p-1)k - (p-1)k = 0$$

又由于它是一个整数，我们得到 $v_p(\binom{cp^k}{r}) \geq 1$，这正是我们需要证明的。

□

5.2. 模适当滤过的关系。回顾一下，$\deg(W_\delta) = h$，$\deg(V_\alpha) = \mathrm{ht}(\alpha)$，$\deg(U_\beta) = h + \mathrm{ht}(\beta)$。

关系 (R-1) 和 (R-4) 中的变量模任意滤过都可交换。在下面的命题中，我们计算其他关系模适当滤过的情况。我们将看到，最终只剩下以下三个关系 (R-5')、(R-7') 和 (R-8')，其中变量模适当阶数的滤过不交换。

命题 5.2.1。我们有
(R-2') $W_\delta V_\alpha = V_\alpha W_\delta$ (模 $\mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha)+h+1}$)。(R-3') $W_\delta U_\beta = U_\beta W_\delta$ (模 $\mathrm{Fil}^{2h+\mathrm{ht}(\beta)+1}$)。(R-5') $V_{\alpha_1} V_{\alpha_2} = \sum_{i,j>0 i\alpha_1+j\alpha_2\in\Phi} c_{ij} V_{i\alpha_1+j\alpha_2} + V_{\alpha_2} V_{\alpha_1}$ (模 $\mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha_1)+\mathrm{ht}(\alpha_2)^{+}+1}$)。(R-6') $U_{\beta_1} U_{\beta_2} = U_{\beta_2} U_{\beta_1}$ (模 $\mathrm{Fil}^{2h+\mathrm{ht}(\beta_1)+\mathrm{ht}(\beta_2)^{+}+1}$)。(R-7') $V_\alpha U_\beta = c_{11} U_{\alpha+\beta} + U_\beta V_\alpha$ (模 $\mathrm{Fil}^{h+\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)+1}$)。
(R-8') $V_\alpha U_{-\alpha} = \sum_{\delta_i\in\Delta} n_i W_{\delta_i} + U_{-\alpha} V_\alpha$ (模 Fil^{h+1})。

证明。考虑关系 (R-2)

$$(1+W_\delta)(1+V_\alpha) = (1+V_\alpha)^M (1+W_\delta), \alpha \in \Phi^+, M = (1+p)^{\langle\alpha,\delta\rangle}.$$

注意，$\deg(W_\delta V_\alpha) = h + \mathrm{ht}(\alpha)$，因此我们感兴趣的是研究模 $\mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha)+h+1}$ 下的关系 (R-1)。

我们要证明关系 (R-2) 化简为

$$(1+W_\delta)(1+V_\alpha) = (1+V_\alpha)(1+W_\delta) \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha)+h+1}).$$

我们将通过证明以下内容来说明

$$(1+V_\alpha)^M \equiv (1+V_\alpha) \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha)+h+1}).$$

我们注意到 $M \equiv 1$ （模 p）且

$$(1+V_\alpha)^M = 1 + MV_\alpha + \binom{M}{2} V_\alpha^2 + \cdots$$

由于对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$V_\alpha^m = \mathrm{ht}(\alpha)m$ 的次数为 $V_\alpha^m \equiv 0$，因此只要 $\mathrm{ht}(\alpha)m > \mathrm{ht}(\alpha)+h$，我们就有 (模 $\mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha)+h+1}$)。所以，只要我们能证明对于 $m \geq 2$ 且 $\mathrm{ht}(\alpha)m \leq \mathrm{ht}(\alpha)+h$，有 $\binom{M}{m} \equiv 0$ (模 p)，就完成了。换言之，若 $\mathrm{ht}(\alpha)(m-1) \leq h$，则结论成立。但注意，若 $\mathrm{ht}(\alpha)(m-1) \leq h$，那么显然 $m-1 \leq h$。因此，只要我们能证明对于

$m-1\leq h$，结论就成立。根据假设， $h<p-1$，因此若 $m-1\leq h<p-1$，则 $m<p$。所以显然在这种情况下有 $\binom{M}{m}\equiv 0$ (模 p)。
这证明了（R-2'）。
接下来我们要证明关系（R-3）

$$(1+W_\delta)(1+U_\beta)=(1+U_\beta)^M(1+W_\delta),\beta\in\Phi^-,M=(1+p)^{\langle\beta,\delta\rangle},$$

可化为

$$(1+W_\delta)(1+U_\beta)=(1+U_\beta)(1+W_\delta)\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{2h+\mathrm{ht}(\beta)+1}).$$

正如上一个关系一样，我们要证明

$$(1+U_\beta)^M\equiv 1+U_\beta\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{2h+\mathrm{ht}(\beta)+1}).$$

当（ht(β) $+h$）$m>2h+$ ht(β)时，则有 $U_\beta^m\equiv 0$ （模 Fil$^{2h+\mathrm{ht}(\beta)+1}$），因此我们需要处理 $m\geq 2$ 以及（ht(β) $+h$）$m\leq 2h+$ ht(β)，或者重写为（ht(β) $+h$）（$m-1$） $\leq h$。不过，基本上沿用上述相同的论证，我们归结为 $m-1\leq h$ 的情形，而上述计算仍然成立，从而证明了（R-3'）。

接下来考虑关系 (R-6)。我们要证明，对于 $\beta_1,\beta_2\in\Phi^-$，关系

$$(1+U_{\beta_1})(1+U_{\beta_2})=\prod_{\substack{i,j>0\\ i\beta_1+j\beta_2\in\Phi}}(1+U_{i\beta_1+j\beta_2})^{c_{ij}p^{i+j-1}}(1+U_{\beta_2})(1+U_{\beta_1}),$$

化简为

$$(1+U_{\beta_1})(1+U_{\beta_2})=(1+U_{\beta_2})(1+U_{\beta_1})\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{2h+\mathrm{ht}(\beta_1)+\mathrm{ht}(\beta_2)+1}).$$

我们需要仔细分析 $(1+U_{i\beta_1+j\beta_2})^{c_{ij}p^{i+j-1}}$。和往常一样

$$\deg(U^m_{i\beta_1+j\beta_2})=m(h+\mathrm{ht}(i\beta_1+j\beta_2)).$$

因此，对于任意满足 m(h + ht($i\beta_1+j\beta_2$)) $>2h+$ ht(β_1) $+$ ht(β_2) 的 m，我们有

$$\deg(U^m_{i\beta_1+j\beta_2})\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{2h+\mathrm{ht}(\beta_1)+\mathrm{ht}(\beta_2)}+1).$$

从现在起，我们可以放心地作出如下假设，

$$\begin{array}{rcl} m(h+\mathrm{ht}(i\beta_1+j\beta_2)) & \leq & 2h+\mathrm{ht}(\beta_1)+\mathrm{ht}(\beta_2)\\ \text{gives } m & \leq & \frac{2h+\mathrm{ht}(\beta_1)+\mathrm{ht}(\beta_2)}{h+\mathrm{ht}(i\beta_1+j\beta_2)}\\ & \leq & 2h-2\ (\text{as } h+\mathrm{ht}(i\beta_1+j\beta_2)\geq 1)\\ & \leq & 2(p-1)-2=2p-4\ (\text{as } p>1+h). \end{array}$$

对于任意素数 $p\geq 3$ 以及任意 $k\geq 2$，我们有 $p^k>2p-4$。因此我们有

$$\binom{c_{ij}p^{i+j-1}}{m}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),\ m\leq 2p-4 \text{ and } i+j-1\geq 2.$$

剩下需要处理的情形是 $i+j=2$ 或 $i=1,\ j=1$。注意，根据引理 5.1.1，$\binom{c_{ij}p}{m} \equiv 0$ (模 p) 对于 $m<p$。因此我们可以作出假设 $m \geq p$。但在这种情况下，我们有

$$\begin{array}{rcl} m(h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2)) & \geq & p(h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2)) \\ & > & (1+h)(h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2)) = h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2)+h(h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2)) \\ & \geq & h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2)+h \ (\text{as } h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2) \geq 1) \\ & = & 2h+\mathrm{ht}(\beta_1+\beta_2). \end{array}$$

因此，这证明了（R-6'）。

接下来考虑关系（R-5）。我们要证明该关系，$\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+$,

$$(1+V_{\alpha_1})(1+V_{\alpha_2}) = \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha_1+j\alpha_2 \in \Phi}} (1+V_{i\alpha_1+j\alpha_2})^{c_{ij}} (1+V_{\alpha_2})(1+V_{\alpha_1}),$$

可化简为

$$V_{\alpha_1}V_{\alpha_2} = \sum_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha_1+j\alpha_2 \in \Phi}} c_{ij}V_{i\alpha_1+j\alpha_2} + V_{\alpha_2}V_{\alpha_1} \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha_1)+\mathrm{ht}(\alpha_2)+1}).$$

这由以下观察可得:

$$(1+V_{i\alpha_1+j\alpha_2})^{c_{ij}} \equiv 1+c_{ij}V_{i\alpha_1+j\alpha_2} \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^{\mathrm{ht}(\alpha_1)+\mathrm{ht}(\alpha_2)+1})$$

根据次数计算，并且 $\mathsf{deg}(V_{i\alpha_1+j\alpha_2}) > \mathsf{deg}(V_{\alpha_i}) = \mathsf{ht}(\alpha_1) + \mathsf{ht}(\alpha_2)$ 对于 $i \in \{1,2\}$。这证明了（R-5'）。

接下来考虑关系（R-7）。对于 $\alpha \in \Phi^+, \beta \in \Phi^-$,

$$(1+V_\alpha)(1+U_\beta) = \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha+j\beta \in \Phi^-}} (1+U_{i\alpha+j\beta})^{c_{ij}p^{j-1}} \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha+j\beta \in \Phi^+}} (1+V_{i\alpha+j\beta})^{c_{ij}p^j} (1+U_\beta)(1+V_\alpha).$$

我们先处理 $i\alpha+j\beta \in \Phi^-$ 的情形。对于 $\mathsf{deg}\ U^m_{i\alpha+j\beta} = m(h+\mathsf{ht}(i\alpha+j\beta)) > h+\mathsf{ht}(\beta)+\mathsf{ht}(\alpha)$，有 $U^m_{i\alpha+j\beta} = 0$ (模 $\mathrm{Fil}^{h+\mathrm{ht}(\beta)+\mathrm{ht}(\alpha)+1}$)。因此，我们可以将讨论限制在 $m(h+\mathsf{ht}(i\alpha+j\beta)) \leq h+\mathsf{ht}(\beta)+\mathsf{ht}(\alpha)$ 的情形。

$$\begin{array}{rcl} m(h+\mathrm{ht}(i\alpha+j\beta)) & \leq & h+\mathrm{ht}(\beta)+\mathrm{ht}(\alpha) \\ \text{gives } m & \leq & \frac{h+\mathrm{ht}(\beta)+\mathrm{ht}(\alpha)}{h+\mathrm{ht}(i\alpha+j\beta)} \\ & \leq & 2h-2 \ (\text{as } h+\mathrm{ht}(i\alpha+j\beta) \geq 1, \mathrm{ht}(\beta) \leq -1, \mathrm{ht}(\alpha) \leq h-1) \\ & \leq & 2(p-1)-2 = 2p-4 \ (\text{as } p > 1+h). \end{array}$$

根据引理 5.1.1，类似于我们在推导 **(R-6')** 时所给出的论证，我们可以看出，如果 $j-1 \geq 2$，那么在对 m施加此限制后，相应的项在模滤过下均不会有贡献，因为系数模 p变为平凡。

当 $j-1=1$ 或 $j=2$ 时，我们可能会有来自 $m=p$ 项的贡献。在这种情况下，我们有: $\mathsf{deg}(U_{i\alpha+2\beta})^p = p(h+\mathsf{ht}(i\alpha+2\beta)) > (h+1)(h+\mathsf{ht}(i\alpha+2\beta))$。

注意，由于 $h+\mathrm{ht}(i\alpha+2\beta)>1$，$(h+1)(h+\mathrm{ht}(i\alpha+2\beta))\geq 2(h+1)$。因此，当然，$(h+1)(h+\mathrm{ht}(i\alpha+2\beta))>h+\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)$，若 $\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)<1$。所以我们假设 $\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)\geq 1$

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta) & \geq & 1\\ \text{hence}\quad i\mathrm{ht}(\alpha) & \geq & i(1-\mathrm{ht}(\beta))\\ \text{which gives}\quad i\mathrm{ht}(\alpha)+2\mathrm{ht}(\beta) & \geq & i(1-\mathrm{ht}(\beta))+2\mathrm{ht}(\beta)=i+(2-i)\mathrm{ht}(\beta).\end{array}$$

因此，如果 $2-i\leq 0$，那么右边肯定是 >0，但这不可能，因为我们假设 $i\alpha+2\beta$ 是一个负根。因此可知，i 只能取值 1。但在这种情况下，由于 $p>1+h$，

$$\begin{aligned}p(h+\mathrm{ht}(\alpha)+2\mathrm{ht}(\beta)) &> (h+1)(h+\mathrm{ht}(\alpha)+2\mathrm{ht}(\beta))\\ &= (h+\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta))+h\big(h+\mathrm{ht}(\alpha)+2\mathrm{ht}(\beta)\big)+\mathrm{ht}(\beta)\\ &= (h+\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta))+h\big(h+\mathrm{ht}(\alpha+2\beta)\big)+\mathrm{ht}(\beta)\\ &> (h+\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta))+(h+\mathrm{ht}(\beta))\ (\text{as } h+\mathrm{ht}(\alpha+2\beta)>1)\\ &> h+\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)\ (\text{as } h+\mathrm{ht}(\beta)>1).\end{aligned}$$

当 $j=1$ 时，对于所有 m，都有 $m(h+\mathrm{ht}(i\alpha+\beta))\geq h+\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)$，且只有在 $m=1$、$i=1$ 时等号成立。因此，我们可能得到的唯一贡献是 $(1+c_{11}U_{\alpha+\beta})$。

现在来看方程 (R-7) 中来自正根部分的贡献，即来自项 $\prod_{\substack{i,j>0\\ i\alpha+j\beta\in\Phi^+}}(1+V_{i\alpha+j\beta})^{c_{ij}p^j}$. 的贡献

按照与上文相同的思路（即用 $2p-4$ 对 m 进行界定，然后证明二项式系数模 p 后变为平凡），这次 $j\geq 2$ 也立即被排除。计算过程类似，故略去。

当 $j=1$ 时，我们再次只关注 $m=p$ 项。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned}\deg(V_{i\alpha+\beta})^p=p\big(\mathrm{ht}(i\alpha+\beta)\big) &> (h+1)\Big(i\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)\Big)\\ &= i\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)+h\big(\mathrm{ht}(i\alpha+\beta)\big)\\ &\geq h+\mathrm{ht}\alpha+\mathrm{ht}(\beta)\ (\text{as } i>0,\mathrm{ht}(i\alpha+\beta)>0).\end{aligned}$$

因此，关系（R-7）化简为

$(1+V_\alpha)(1+U_\beta)=(1+c_{11}U_{\alpha+\beta})(1+U_\beta)(1+V_\alpha)$（模 $\mathrm{Fil}^{h+\mathrm{ht}(\beta)+\mathrm{ht}(\alpha)+1}$），当 $\alpha+\beta\in\Phi^-$.现在，$\deg(U_{\alpha+\beta}V_\alpha)=h+2\mathrm{ht}(\alpha)+\mathrm{ht}(\beta)>h+\mathrm{ht}(\beta)+\mathrm{ht}(\alpha)$ 且

$$\begin{aligned}\deg(U_{\alpha+\beta}U_\beta) &= 2h+\mathrm{ht}(\alpha)+2\mathrm{ht}(\beta)\\ &= h+\mathrm{ht}(\beta)+\mathrm{ht}(\alpha)+(h+\mathrm{ht}(\beta))\\ &> h+\mathrm{ht}(\beta)+\mathrm{ht}(\alpha)\ (\text{as } h+\mathrm{ht}(\beta)>1).\end{aligned}$$

因此，进一步化简后，我们得到

$$V_\alpha U_\beta = c_{11} U_{\alpha+\beta} + U_\beta V_\alpha \ (\text{mod Fil}^{h+\text{ht}(\beta)+\text{ht}(\alpha)+1})$$

这恰好就是关系 (R-7')。 □

现在考虑关系 (R-8)。首先，我们将证明 $(1+U_{-\alpha})^Q = (1+U_{-\alpha})$ (模 Fil^{h+1})。如果 $(h + \text{ht}(-\alpha))$ $m > h$，那么 $U_{-\alpha}^m = 0$ (模 Fil^{h+1})。因此，我们需要考虑以下情形：$m \geq 2$ 且 $(h + \text{ht}(-\alpha))$ $m \leq h$。但此时仍有 $m \leq h < p-1$，所以 $\binom{Q}{m} = 0$ (模 p)，因为 $Q = 1$ (模 p)。

接下来，我们将证明 $(1 + V_\alpha)^Q = (1 + V_\alpha)$ (模 Fil^{h+1})。如果 $m\text{ht}(\alpha) > h$，那么 V_α^m 的次数严格大于 h。如果 $m\text{ht}(\alpha) \leq h$，那么 $m \leq h < p-1$，因此再次有 $\binom{Q}{m} = 0$ (模 p)。因此，关系 (R-8) 化简为

$$(1 + V_\alpha)(1 + U_{-\alpha}) = (1 + U_{-\alpha}) \prod_{\delta_i \in \Delta} (1 + W_{\delta_i})^{n_i} (1 + V_\alpha) \ (\text{mod Fil}^{h+1}).$$

由于 $\deg(W_{\delta_i}) = h$ 和 $n_i \geq 0$，进一步化简可得

$$V_\alpha U_{-\alpha} = \sum_{\delta_i \in \Delta} n_i W_{\delta_i} + U_{-\alpha} V_\alpha \ (\text{mod Fil}^{h+1}).$$

5.3. 模滤过计算逆序。回顾一下，$\{X_1, \cdots, X_d\}$ 是生成非交换 p-进幂级数环 $\mathcal{A}$的有序变量集。我们用$X^i := X_{i_1} \cdots X_{i_w}$表示单项式 $X_{i(1)} \cdots X_{i(w)}$。这样，我们可以通过一系列换位将 X^i 变为良序单项式（$b \to i_b$ 递增）。考虑变换 $(b, b+1) \to (b+1, b)$，并假设 $i_b > i_{b+1}$.。我们写作

$$X^i = X^f X_b X_{b+1} X^e,$$

并考察 X^i （模 $\text{Fil}^{\deg(X^i)+1}$）。假设 (X_b, X_{b+1}) 是$\{U_\beta, W_{\delta_i}, V_\alpha, \beta \in \Phi^-, \delta_i \in \Delta, \alpha \in \Phi^+\}$中的任意一对变量，但顺序错误（例如，令 $(X_b, X_{b+1}) = (W_\delta, V_\alpha)$，来自关系(**R-2'**)）。由命题5.2.1可知，顺序错误的变量在适当次数的滤过模意义下可交换，但以下关系除外：(**R-5'**)、(**R-7'**) 和(**R-8'**)。因此，除这三个关系外，

$$X_b X_{b+1} = X_{b+1} X_b \ (\text{mod Fil}^{\deg(X_b)+\deg(X_{b+1})+1}).$$

因此，我们可以在适当的滤过模下减少逆序的数量，并将顺序错误的变量调整为正确顺序。对于关系 (R-5')、(R-7') 和 (R-8')，我们必须明确计算逆序的数量。

引理 5.3.1. 设 (X_b, X_{b+1}) 是关系 (R-5')、(R-7') 和 (R-8') 左边所产生的错误顺序中的三对变量 $(V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2})$、$(V_\alpha, U_\beta)$ 或 $(V_\alpha, U_{-\alpha})$ 之一，它们满足以下形式的方程

$$X_b X_{b+1} = X_{b+1} X_b + \ \textit{linear terms in } X_i \ (\text{mod Fil}^{\deg(X_b)+\deg(X_{b+1})+1}).$$

那么，$X^f X_{b+1} X_b X^e$和 $X^f X_i X^e$中的逆序数都严格小于 X^i中的逆序数。也就是说，这两步操作 $X_b X_{b+1} \to X_{b+1} X_b$和 $X_b X_{b+1} \to X_i$使模 $\text{Fil}^{\deg(X_b)+\deg(X_{b+1})^{+1}}$的逆序数减少。

证明。首先，我们来计算 X^i中的逆序数。设 ξ 和 μ 表示乘积 X^i中的指标$\neq b$、$b+1$。

考虑关系（R-5'）。 X^i 中的逆序数最初如下：

$$\mathrm{inv} = \sum_{\substack{\xi<\mu \\ i_\xi > i_\mu}} 1 + \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu \in [\mathrm{I}(V_{\alpha_2}),\mathrm{I}(V_{\alpha_1}))}} 1 + \left(2 \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu < \mathrm{I}(V_{\alpha_2})}} 1\right) + \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi \in (\mathrm{I}(V_{\alpha_2}),\mathrm{I}(V_{\alpha_1})]}} 1 + \left(2 \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi > \mathrm{I}(V_{\alpha_1})}} 1\right) + 1,$$

其中 I(∗) := index(∗) 是变量 $*$ 的指标。
由于 I(V_{α_2}) <I(V_{α_1})，变换 $V_{\alpha_1}V_{\alpha_2} \to V_{\alpha_2}V_{\alpha_1}$ 显然会减少逆序数，而将 $V_{\alpha_1}V_{\alpha_2}$ 改为 $c_{ij}V_{i\alpha_1+j\alpha_2}$ 后，我们得到

$$\mathrm{inv}' = \sum_{\substack{\xi<\mu \\ i_\xi > i_\mu}} 1 + \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu < \mathrm{I}(V_{i\alpha_1+j\alpha_2})}} 1 + \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi > \mathrm{I}(V_{i\alpha_1+j\alpha_2})}} 1$$

由于其　　选择一个加法序（第2.3节中正根集合上的序），

$$\mathrm{I}(V_{\alpha_2}) < \mathrm{I}(V_{i\alpha_1+j\alpha_2}) < \mathrm{I}(V_{\alpha_1}). \tag{5.3.1}$$

因此，inv′ 的第二项为

$$\sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu < \mathrm{I}(V_{i\alpha_1+j\alpha_2})}} 1 \le \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu < \mathrm{I}(V_{\alpha_1})}} 1 = \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu \in [\mathrm{I}(V_{\alpha_2}),\mathrm{I}(V_{\alpha_1}))}} 1 + \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu < \mathrm{I}(V_{\alpha_2})}} 1 \le \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu \in [\mathrm{I}(V_{\alpha_2}),\mathrm{I}(V_{\alpha_1}))}} 1 + \left(2 \sum_{\substack{\mu>b+1 \\ i_\mu < \mathrm{I}(V_{\alpha_2})}} 1\right),$$

而 inv′ 的第三项为

$$\sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi > \mathrm{I}(V_{i\alpha_1+j\alpha_2})}} 1 \le \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi > \mathrm{I}(V_{\alpha_2})}} 1 = \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi \in (\mathrm{I}(V_{\alpha_2}),\mathrm{I}(V_{\alpha_1})]}} 1 + \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi > \mathrm{I}(V_{\alpha_1})}} 1 \le \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi \in (\mathrm{I}(V_{\alpha_2}),\mathrm{I}(V_{\alpha_1})]}} 1 + \left(2 \sum_{\substack{\xi<b \\ i_\xi > \mathrm{I}(V_{\alpha_1})}} 1\right).$$

因此，inv′ <inv. 满足关系（R-5'）。
关系 (R-7') 和 (R-8')的证明类似，故略去；对应于 (5.3.1) 的关键必要条件分别为：关系 U_βI(<) $U_{\alpha+\beta}$I(<) V_αI() ；对于关系 (R-7') ，以及 I(<) W_{δ_i}I(<) V_αI() 是关系 (R-8') 的对应条件。□

6. Proof of the main theorem

本节分两步回顾并证明主定理。这两部分的证明与 Clozel 的证明完全相同（参见 [Clo11，第 554 页，定理 1.2 和 1.4]），我们在此回顾这些证明以求完整。

定理 6.0.1. 模-p 岩泽代数 Ω(I) 自然同构于 $\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{R}}$。

证明。自然映射 ψ： $\mathcal{A} \to \Lambda(I)$ 将 $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^n$ 映至 $\mathcal{M}_{\Lambda(I)}^n$，其中 $\mathcal{M}_{\Lambda(I)}$ 是 $\Lambda(I)$ 的极大理想。对 p 取模得到 ψ 的约化映射，它与两边的自然滤过相容，因而诱导出自然映射 $\mathrm{gr}^\bullet\psi$: $\mathrm{gr}^\bullet\mathcal{A} \to \mathrm{gr}^\bullet\Lambda(I)$。由于 ψ 是满射，诱导的关联分次映射也是满射。因此，由定理 4.0.3可知它是同构。由于 $\mathcal{B}$ 上的滤过是完备的，这便证明了该定理。□

定理 6.0.2. 岩泽代数 $\Lambda(I)$ 与 $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ 自然同构。

我们重现这一证明，其论证也与 Clozel 相应命题的论证相同。

证明。 ψ 的约化为： $\mathcal{A}/\mathcal{R} \to \Lambda(I)$是 $\overline{\psi}$。回想一下， $\overline{\mathcal{R}}$ 是 $\mathcal{R}$ 在 $\overline{\mathcal{A}}$中的像。假设 $f \in \mathcal{A}$满足 $\psi(f) = 0$。于是，根据定理 6.0.1，我们有$\overline{f} \in \overline{\mathcal{R}}$。因此 $f = r_1 + pf_1$,$r_1 \in \mathcal{R}$, $f_1 \in \mathcal{A}$。然后，对两边应用 ψ ，得到 $\psi(f_1) = 0$。归纳地，我们得到一个表达式 $f = r^n + p^n f_n$ ，其中 $r_n \in \mathcal{R}$ 且 $f_n \in \mathcal{A}$。由于 $p^n f_n$ 在 $\mathcal{A}$中趋于 0，且 $\mathcal{R}$ 是闭的，我们可知 $f \in \mathcal{R}$。□

References

[AB06] K Ardakov 和 K Brown. 岩泽代数的环论性质：一篇综述. Documenta Mathematica，约翰·H. Coates 六十寿辰特刊 (2006)：7–33，2006.[AWZ08] Konstantin Ardakov、Feng Wei 和 James J Zhang. 岩泽代数中的自反理想. Ad- vances in Mathematics, 218(3):865–901, 2008.[Clo11] Laurent Clozel. 岩泽代数的表示： $\Gamma_1 SL(2, \mathbb{Z}_p)$的情形. Doc. Math., 16:545– 559, 2011.[Clo17] L. Clozel. p-进赋范的全局解析表示： $GL(2)$的 pro-p-伊wahori子群与基变换，I：岩泽代数与基变换映射. Bull. Iranian Math. Soc., 43(4):55–76, 2017.[Clo18] Laurent Clozel. p-进赋范的全局解析表示： $GL(2)$的 pro-p 伊wahori子群与基变换，II：一个 Steinberg 张量积定理. 载于《算术群的上同调》，Springer Proc. Math. Stat. 第245卷，第1–33页. Springer, Cham, 2018.[Coa99] John Coates. 无复乘椭圆曲线的 GL_2 岩泽理论片段. 载于《椭圆曲线算术理论》（Cetraro，1997），Lecture Notes in Math. 第1716卷，第1–50页. Springer, Berlin, 1999.[CSS03] John Coates、Peter Schneider 和 Ramdorai Sujatha. 岩泽代数上的模. J. Inst. Math. Jussieu, 2(1):73–108, 2003.[HLS11] Kevin Hare、Shanta Laishram 和 Thomas Stoll. Stolarsky 猜想与多项式值的数位和. Proceedings of the American Mathematical Society, 139(1):39–49, 2011.[HRW21] Dong Han、Jishnu Ray 和 Feng Wei. 切瓦莱群的岩泽代数中的正规元. manuscripta mathematica, 165(3):415–451, 2021.[LS22] Aranya Lahiri 和 Claus Sorensen. p-进主系列表示中的刚性向量. 即将在 Israel Journal of Mathematics 发表，arXiv: 2205.02952., 2022.[OS19] Rachel Ollivier 和 Peter Schneider. 模 p pro-p 伊wahori-Hecke Ext-代数. 载于《约化群的表示》，Proc. Sympos. Pure Math. 第101卷，第255–308页. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019.[Pap94] Paolo Papi. 根系中特殊排序的一种刻画. Proceedings of the American Mathematical Society, 120(3):661–665, 1994.[Ray18a] Jishnu Ray. 岩泽代数的显式环论表示. Comptes Rendus Mathe- matique, 356(11):1075–1080, 2018.[Ray18b] Jishnu Ray. $\mathbb{Z}_p$上的半单单连通切瓦莱群第一同余核的岩泽代数表示. Journal of Algebra, 511:405–419, 2018.[Ray20] Jishnu Ray. 岩泽代数的显式表示：$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$的 pro-$p$ 伊wahori子群的情形. Forum Math., 32(2):319–338, 2020.[Sch11] Peter Schneider. p-进李群，Grundlehren der Mathematischen Wis- senschaften 第344卷 [《数学科学基础原理》]. Springer, Heidelberg, 2011.[Ste16] Robert Steinberg.《切瓦莱群讲义》，University Lecture Series 第66卷. Ameri- can Mathematical Society, Providence, RI, 2016. John Faulkner 和 Robert Wilson 整理的笔记；1968年原版的修订更正版 [MR0466335],序言由 Robert R. Snapp 撰写。

[WE21] Carl Wang-Erickson. 高阶米田积结构与模 p 的岩泽代数。arXiv:2101.06295，2021。

(Lahiri) University of California San Diego电子邮箱：arlahiri@ucsd.edu

(Ray) Harish Chandra Research Institute, Chhatnag Road, Jhunsi, Prayagraj (Allahabad) 211 019 India电子邮箱：jishnuray@hri.res.in；jishnuray1992@gmail.com