arXiv:2301.00463v2 [math.CA] 3 May 2023

在 $\mathbb{F}_q^d$ 中的多重线性形式、图与 L^p-改进测度

Pablo Bhowmik Alex Iosevich DoowonKoh Thang Pham

2023年5月4日

摘要

本文旨在引入并研究以下图论范式。设

$$T_K f(x) = \int K(x,y) f(y) d\mu(y),$$

其中 f： $X \to \mathbb{R}$， X 是一个有限或无限集合，而 K 和 μ 分别表示适当的核和测度。给定一个以 n 个顶点为顶点集的连通有序图 G ，考虑多重线性形式

$$\Lambda_G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \int_{x^1,\ldots,x^n \in X} \prod_{(i,j)\in\mathcal{E}(G)} K(x^i, x^j) \prod_{l=1}^{n} f_l(x^l) d\mu(x^l),$$

其中 $\mathcal{E}(G)$是 G的边集。定义 $\Lambda_G(p_1, .., p_n)$为满足下列不等式的最小常数 $C > 0$

$$\Lambda_G(f_1, \ldots, f_n) \leq C \prod_{i=1}^{n} ||f_i||_{L^{p_i}(X,\mu)} \tag{0.1}$$

该不等式对 X上的所有非负实值函数 f_i、 $1 \leq i \leq n$均成立。基本问题是， G 的结构以及算子 T_K 的映射性质如何影响（0.1）中的尖锐指数。本文主要研究 $X = \mathbb{F}_q^d$的情形，即由 q 个元素构成的域上的 d维向量空间，并且 $K(x^i, x^j)$是球面在 $x^i - x^j$处的指示函数。接下来，我们将在超图的背景下研究这一问题，其中底层对象是多重线性算子，而非 T_K。

目录

1 引言 2 2 球面平均问题 8 3 K_2-算子的尖锐映射性质 10 4 K_3-算子的有界性问题 13 4.1 $\mathbb{F}_q^d$ 上 Δ 的有界性结果.14 4.2 二维中的尖锐限制强型估计.16

5 P_2-算子的有界性结果 **19**

6 ($C_4 + t$)-算子的映射性质 23
6.1 $\diamondsuit_t$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的有界性结果.25 6.2 $\diamondsuit_t$ 在 $\mathbb{F}_q^2$ 上的尖锐有界性结果（直至端点）.26

7 C_4-算子的有界性问题 27
7.1 C_4-算子 $\diamond$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的有界性结果.28 7.2 C_4-算子 $\diamond$ 在 $\mathbb{F}_q^2$ 上的尖锐有界性结果.31

8 P_3-算子的有界性问题 32 8.1 P_3-算子 $\sqcap$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的有界性结果.33

9 与图 K_3 + 尾巴（风筝图）相关的算子 38
9.1 $\trianglelefteq$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的有界性的充分条件.39 9.2 $\trianglelefteq$ 在二维中的有界性.41

10 Y形图的有界性问题 44 10.1 Y 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的有界性的充分条件.45

11 致谢 48

12 附录 48

1 引言

调和分析中的基本对象之一是如下形式的算子

$$T_K f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y) dy, \tag{1.1}$$

其中 K： $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是一个合适的核， f 是一个局部可积函数。关于此类算子的各种形式及其界，请参见 [21] 及其中所列的参考文献。

本文旨在研究有限域上的向量空间背景下的 (1.1) 式算子。令 $\mathbb{F}_q$ 表示具有 q 个元素的有限域，$\mathbb{F}_q^d$ 表示该域上的 d 维向量空间。令 K： $\mathbb{F}_q^d \times \mathbb{F}_q^d \to \mathbb{C}$ 为一个合适的核，并定义

$$T_K f(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_q^d} K(x,y) f(y).$$

此类算子此前已有研究（[3, 12, 14, 15]）。特别是，算子 $T_K$with $K(x,y) = S_t(x-y)$，其中 S_t 是球面的指示函数

$$S_t = \{x \in \mathbb{F}_q^d : ||x|| = t\},$$

$||x|| = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2$ 自然出现在有限域上的向量空间中埃尔德什-法尔科纳距离问题的研究中；具体来说，问题是子集 $E \subset \mathbb{F}_q^d$ 需要有多大，才能确保如果

$$\Delta(E) = \{||x-y|| : x, y \in E\},$$

于是 $|\Delta(E)| \geq \frac{q}{2}$。在此处及下文中，$|S|$ 表示该集合中的元素个数，其中 S 是一个有限集合。例如，参见（[2, 4, 10, 11, 18]）。

如果我们有兴趣研究比距离更复杂的几何对象，就需要对球面平均算子作有趣的改造。具体而言，设 $E \subset \mathbb{F}_q^d$，并假设我们想知道它确定了多少个边长为 1 的等边三角形。计数这类三角形的量定义为

$$\sum_{x,y,z \in \mathbb{F}_q^d} K(x,y)K(x,z)K(y,z)E(x)E(y)E(z), \tag{1.2}$$

其中 $K(x,y) = S_1(x-y)$。

我们可以这样理解量 (1.2)：将 x, y, z 视为顶点，并将 $K(x,y)$ 的存在视为确定连接 x 和 y 的边，依此类推。这样，量 (1.2) 就与图 K_3 相关联；它是三顶点完全图（图 1b）。

另一个自然的例子如下。令 $K(x,y) = S_1(x-y)$，并考虑计数边长为 1 的菱形的量，即

$$\sum_{x,y,z,w \in \mathbb{F}_q^d} K(x,y)K(y,z)K(z,w)K(w,x)E(x)E(y)E(z)E(w). \tag{1.3}$$

按照上述论证，我们将这个形式与图 C_4 联系起来，即四个顶点构成的环（图 1e）。

一般而言，设 K 是一个核函数，G 是一个具有 n 个顶点的连通有序图。定义

$$\Lambda_G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \frac{1}{\mathcal{N}(G)} \sum_{x^1,\ldots,x^n \in \mathbb{F}_q^d} \prod_{(i,j) \in \mathcal{E}(G)} K(x^i, x^j) \prod_{l=1}^{n} f_l(x^l), \tag{1.4}$$

其中，$\mathcal{E}(G)$ 是 G 的边集，而 $\mathcal{N}(G)$ 是归一化因子，其定义为 G 在 $\mathbb{F}_q^d$ 中不同嵌入的数量。

顺便指出，我们刚刚引入的范式很容易推广到超图的情形。如果将基本对象线性算子 T_K 替换为一个 m 重线性算子 M_K，那么问题就转化为这样一种情形：由核 K 决定的边被多重线性核 $K(x^1, \ldots, x^{m+1})$ 所诱导的超边取代。我们将在后文讨论这一问题表述。

范数 $||f||_p, 1 \leq p < \infty$ 定义为与 $\mathbb{F}_q^d$. 上的归一化计数测度相关联

更准确地说，给定 $\mathbb{F}_q^d$ 上的一个函数 f，我们定义

$$||f||_p := \left(q^{-d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty), \quad \text{and} \quad ||f||_\infty := \max_{x \in \mathbb{F}_q^d} |f(x)|.$$

定义 1.1. 设 $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1,\dots,n$ 为整数。我们将 $\Lambda_G(p_1,\dots,p_n)$ 定义为满足以下不等式的最小常数 $C > 0$

$$\Lambda_G(f_1, \dots, f_n) \le C \prod_{i=1}^{n} ||f_i||_{p_i} \tag{1.5}$$

该不等式对定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有非负实值函数 $f_i, 1 \le i \le n$ 均成立。

若存在一个与 q 无关的一致常数 $C \ge 1$，使得 $\Lambda_G(p_1, \dots, p_n) \le C$，则我们使用记号 $\Lambda_G(p_1, \dots, p_n) \lesssim 1$。

在本文余下部分中，假设核函数 $K(x, y)$ 为 $S_t(x - y)$，其中 $t \ne 0$。此外，当维数 d 为二时，我们假设 $\mathbb{F}_q$ 中的数字 3 是一个平方数，从而排除 $\mathbb{F}_q^2$ 中不出现等边三角形形状的平凡情形。

本文的主要目的是确定所有数 $1 \le p_i \le \infty, i = 1, 2, \dots, n$，使得

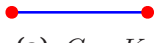
$$\Lambda_G(p_1, \dots, p_n) \lesssim 1.$$

这个问题称为算子 Λ_G 在 $\mathbb{F}_q^d$. 上的有界性问题

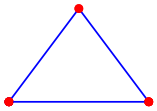
本文主要研究具有以下特定结构之一的图 G： K_2（由两个顶点和一条边构成的图）、 K_3（由三个顶点和三条边构成的环）、 K_3 +尾巴（风筝图）、 P_2（长度为 2 的路径）、 P_3（长度为 3 的路径）、 C_4（由 4 个顶点和 4 条边构成的环）、 C_4 + 对角线、 Y-形（空间站）。值得注意的是，在过去十年间，离散几何和几何测度论领域的研究者对给定集合中这些图的分布问题给予了广泛关注，例如参见 [5, 9, 7, 8, 13, 17, 19, 20]。

当图 G 是 K_2 时，我们将给出所有维数下有界性问题的完整答案。为推导这一结果，我们将运用有限域上的球面平均估计（见定理 3.5）。

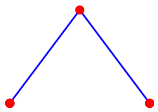
当图 G 的顶点数为 3 或 4 时，我们将在二维中得到相当好的有界性结果。特别是，当每个顶点的度至少为二（K_3、 C_4+ 一条对角线，以及 C_4）时，我们将证明算子在 $\mathbb{F}_q^2$ 上的尖锐结果（端点除外）（见定理 4.11、6.6 和 7.6）。对于三维及更高维的情形，有界性问题并不简单，我们将讨论部分结果。



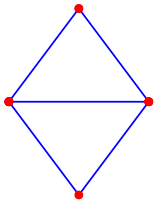
(a) $G = K_2$



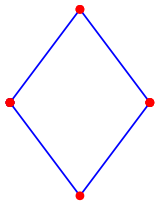
(b) $G = K_3$



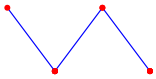
(c) $G = P_2$



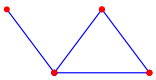
(d) $G = C_4+$ 对角线



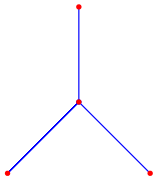
(e) $G = C_4$



(f) $G = P_3$



(g) $G = K_3+$ 尾巴



(h) $G = Y$形

很自然会有人问，能否证明一个适用于所有以 n 为顶点的连通图的一般定理。遗憾的是，这样的结果超出了本文的范围。主要困难在于最大度较大、边集稠密，或者图是否包含环。我们的结果证明将说明所有这些问题。

Notation: 令 $1 \le p_i \le \infty$ and $f_i, 1 \le i \le n$ 为定义在 $\mathbb{F}_q^d$.

- 当 $n = 2$ 时，我们记 $L(f_1, f_2) := \Lambda_G(f_1, f_2)$ 和 $L(p_1, p_2) := \Lambda_G(p_1, p_2)$。
- （$n = 3$的情形）1. 若 G 是图 K_3，我们记 $\Delta(f_1, f_2, f_3) := \Lambda_G(f_1, f_2, f_3)$ 和 $\Delta(p_1, p_2, p_3) := \Lambda_G(p_1, p_2, p_3)$。2. 若 G 是图 P_2，我们记 $\Lambda(f_1, f_2, f_3) := \Lambda_G(f_1, f_2, f_3)$ 和 $\Lambda(p_1, p_2, p_3) := \Lambda_G(p_1, p_2, p_3)$。

- （$n = 4$的情况）

  1. 若 G 是 $C_4 +$ 对角线，我们记为 $\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) := \Lambda_G(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 和 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4) := \Lambda_G(p_1, p_2, p_3, p_4)$。2. 若 G 是 C_4，我们记为 $\diamond(f_1, f_2, f_3, f_4) := \Lambda_G(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 和 $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4) := \Lambda_G(p_1, p_2, p_3, p_4)$。3. 若 G 是 P_3，我们记为 $\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) := \Lambda_G(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 和 $\sqcap(p_1, p_2, p_3, p_4) :=$

$\Lambda_G(p_1, p_2, p_3, p_4)$。

4. 如果 G 是 K_3 + 尾巴（风筝图），我们记作 $\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4) := \Lambda_G(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 和$\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4) := \Lambda_G(p_1, p_2, p_3, p_4)$。

5. 如果 G是 Y形（空间站），我们记作 $Y(f_1, f_2, f_3, f_4) := \Lambda_G(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 和 $Y(p_1, p_2, p_3, p_4) := \Lambda_G(p_1, p_2, p_3, p_4)$。

- 如果不等式 (1.5) 对 $\mathbb{F}_q^d$.上的所有特征函数都成立，我们就记作 $\Lambda_G(p_1, \ldots, p_n) \lessapprox 1$

- 我们用 $\mathbb{F}_q^*$表示 $\mathbb{F}_q$中所有非零元素的集合。
- 对于 $t \in \mathbb{F}_q^*$，我们将 S_t^{n-1}表示为 $\mathbb{F}_q^n$ 中以原点为球心、半径为 t 的球面：

$$S_t^{n-1} := \{x \in \mathbb{F}_q^n : ||x|| = t\}.$$

除非本文另有说明，d表示 $\mathbb{F}_q^d$的一般维数，$d \geq 2$.当 $n = d$时，为简便起见，我们用 S_t 代替 S_t^{d-1}。

- 我们将集合 S_t 与其指示函数 1_{S_t}等同，即 $S_t(x) = 1_{S_t}(x)$。
- 我们用 δ_0 表示 $\mathbb{F}_q^d$.中零向量集合的指示函数
- 对于正数 A、$B > 0$，若对于某个与 q无关的常数 $C > 0$，$A \leq CB$，则记为 $A \lesssim B$；其中 $\mathbb{F}_q$. 为底层有限域的大小。记号 $A \sim B$ 表示 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$.

我们还研究与图 G 及其具有 n个顶点的子图 G' 相关联的算子之间的有界性关系。在全文中，我们始终假设图 G 及其子图 G'是 $\mathbb{F}_q^d$中的、具有 $|G| = |G'|$ 的连通有序图；对于 G中的两个顶点 x、y，当 $||x - y|| = t \neq 0$.时，称它们是连通的。

在定理 5.6 中，我们将看到，任意满足 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$. 1 的指数 $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq \infty$，都满足 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1。注意，P_2 可视为 K_3 的子图，而算子 Λ 和 Δ 分别与图 P_2 和 K_3 相关。因此，鉴于定理 5.6，我们可能会提出这样一个问题：“与图 G 相比，与其子图相关联的算子是否会产生限制较少的映射指数？”更确切地说，我们可以提出以下问题。

问题 1.2. 假设 G' 是图 G 的一个子图，且在 $\mathbb{F}_q^d$. 中有 n 个顶点。令 $1 \leq p_i \leq\infty, 1 \leq i \leq n$.。如果 $\Lambda_G(p_1, \ldots, p_n)$. 1，那么 $\Lambda_{G'}(p_1, \ldots, p_n)$. 1 是否成立?

答案多少有些出人意料：是否定的！当 $G = K_3$ 和 $G' = P_2$时，正如定理 5.6 所示，问题 1.2 的答案是肯定的。然而，事实证明，存在一个图G 及其子图G'，使得答案是否定的，尽管对于本文所考察的大多数图，答案都是肯定的。例如，当G 是 C_4 + 对角线且 G' 是 C_4 时（见定理 7.7），问题 1.2 的答案是否定的。

由于问题 1.2 的一般答案并非总是肯定的，我们提出以下自然问题。

问题 1.3. 找出图 G 及其子图 G' 的普遍性质，使得问题 1.2 得到肯定的回答。

本文的主要目标是探讨关于这一问题的一个猜想，并在二维情形下予以证实。为了准确陈述我们关于该问题的猜想，先回顾图的最小度的标准定义和记号。

定义 1.4. 图 G的最小度记为 $\delta(G)$，定义为与其关联的边数最少的顶点的度。

我们提出以下猜想，它可能是问题 1.3 的一个解答。

猜想 1.5. 设 G'是 $\mathbb{F}_q^d, d \geq 2$中的图 G的一个子图，且有 n个顶点，并设$1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq i \leq n$. 此外，假设

$$\min\{\delta(G), d\} > \delta(G'). \tag{1.6}$$

那么，如果 $\Lambda_G(p_1, \ldots, p_n) \neq 1$，则有 $\Lambda_{G'}(p_1, \ldots, p_n) \neq 1$。

注意，猜想 1.5 中的条件 (1.6) 等价于以下条件：

$$(i)\ \delta(G) > \delta(G') \quad \text{and} \quad (ii)\ d > \delta(G'). \tag{1.7}$$

下面我们将针对上述猜想以及本文正文中将陈述并证明的主要定理，提出一些评论和进一步的问题。

- 本文的结果证实了猜想 1.5：对于 $\mathbb{F}_q^2$ 中所有具有 $n = 3$ 个顶点的图 G 及其子图 G'，该猜想成立，至多可能在端点处例外（见定理 10.8）。另请注意，当$d = 2$ 且 $n = 3$时，条件 (1.6) 等价于 (1.7) 中的第一个条件（i），因为δ（G）≤ 2 （见上图）。

- 我们将证明，至少对于二维中的 $n = 3$，4，猜想 1.5 的结论不可逆（关于 $n = 3$，见注 5.7；关于$n = 4$，见注 8.10、8.13、9.12、10.6。）

值得探 究猜想 1.5 的关键假设 (1.6) 是否可以放宽。

- 若将假设 (1.6) 中的 $>$ 替换为 $\geq$，则猜想 1.5 的结论一般并不成立。为说明这一点，考虑 $G = C_4+$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 中的对角线和 4 个顶点上的 $G' = C_4$，其中 $d = 2$. 。显然， G' 是 G 的子图，且 $\min\{\delta(G)\ d\} = \delta(G')\ = 2$. 然而，定理 7.7 (ii) 表明猜想 1.5 的结论并不成立。

- 如果将猜想 1.5 的主要假设 (1.6) 放宽为条件 (1.7) 中的第二个条件，我们不确定还能对猜想 1.5 的结论作何阐述。具体而言，当 (1.6) 被条件 (1.7) 的第二个陈述取代时，即 $d > \delta(G')$, 我们尚无

明确答案，即使是在 $n = 4$ 中也是如此。 $\mathbb{F}_q^2$. 例如，令 $G = Y$-形状，并在 $\mathbb{F}_q^2$. 上取一条尾巴。显然， $d = 2 > \delta(G') = 1$ 且 $1 = \delta(G) = \delta(G')$，因此这提供了一个例子：它不满足猜想 1.5 的假设 (1.6)，但满足条件 (1.7) 的第二个陈述。遗憾的是，在这篇论文中，我们尚未找到与这类图相对应的算子之间任何包含关系的有界性结果。为了排除这一不确定情形，我们将条件 (1.7) 中的两个条件都作为猜想 1.5 的假设，即条件 (1.6)。

本文其余部分安排如下：第2节回顾球面平均算子的已知结果，该算子是证明我们定理的基本工具。第3节至第10节介绍并证明与上述图相关的主要结果。附录包含一些关于 $\mathbb{F}_q^d$中两个球面交点数的技术引理。

2 球面平均问题

在有限域情形下，Carbery、Stones 和 Wiright [3] 最初提出并研究了定义在向量值多项式所确定的簇上的平均问题。Chun-Yen Shen 和排名第三的作者 [14]研究了一般簇上的这一问题。这里我们介绍球面上的平均问题的标准结果。我们采用 [14] 中的记号。

令 dx 为$\mathbb{F}_q^d$. 上的归一化计数测度。对于每个非零的 t，我们在球面 S_t上赋予归一化曲面测度 $d\sigma_t$. 。回顾

$$d\sigma_t(x) = \frac{q^d}{|S_t|} 1_{S_t}(x) dx$$

这样我们就可以将测度 $d\sigma_t$与函数 $\frac{q^d}{|S_t|} 1_{S_t}$对应起来，其中定义域为 $\mathbb{F}_q^d$.

球面平均算子 A_{S_t} 定义为

$$A_{S_t} f(x) = f * d\sigma_t(x) = \int_{S_t} f(x-y) d\sigma_t(y) = \frac{1}{|S_t|} \sum_{y \in S_t} f(x-y), \tag{2.1}$$

其中 f 是定义在 $\mathbb{F}_q^d$. 上的函数。通过变量代换，我们还可以得到

$$A_{S_t} f(x) = \frac{1}{|S_t|} \sum_{y \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x-y) f(y). \tag{2.2}$$

对于 $1 \le p$、 $r \le \infty$，我们将 $A_{S_t}(p \to r)$ 定义为使得平均估计成立的最小数

$$||f * d\sigma_t||_{L^r(\mathbb{F}_q^d, dx)} \le A_{S_t}(p \to r) ||f||_{L^p(\mathbb{F}_q^d, dx)} \tag{2.3}$$

对 $\mathbb{F}_q^d$. 上的所有测试函数 f 都成立

问题 2.1（球面平均问题）。确定所有满足以下条件的指数 $1 \le p$、 $r \le \infty$

$$A_{S_t}(p \to r) \lesssim 1.$$

记号 2.2. 从现在起，我们将球面平均算子 A_{S_t}. 简记为 A

通过用 $f = \delta_0$ 检验 (2.3)，并利用平均算子的对偶性，不难发现， $A(p \to r)$ 有界的必要条件如下：$(1/p, 1/r)$ 包含于点 (0, 0)、(0, 1)、(1, 1) 和 $(\frac{d}{d+1}, \frac{1}{d+1})$ 的凸包中。

利用 S_t 上的傅里叶衰减估计及其基数，可以证明这些必要条件也是充分的。为方便读者，尽管这一论证是标准的，且在诸如 [3, 14] 的文献中早已广为人知，我们仍给出详细证明。

定理 2.3. 设 $1 \le p, r \le \infty$ 为数，且 $(1/p, 1/r)$ 位于点 (0, 0)、(0, 1)、(1, 1) 和 $(\frac{d}{d+1}, \frac{1}{d+1})$ 的凸包上。那么我们有 $A(p \to r)$. 1。

证明。由于 $d\sigma_t$ 和 dx 的总质量均为 1，由卷积函数的 Young 不等式可知，若 $1 \le r \le p \le \infty$, 则

$$\|f * d\sigma_t\|_{L^r(\mathbb{F}_q^d, dx)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{F}_q^d, dx)}. \tag{2.4}$$

我们注意到，这些结果对于欧几里得平均问题并不成立。

根据插值和对偶性，我们只需证明以下临界估计：

$$A\left(\frac{d+1}{d} \to d+1\right) \lesssim 1.$$

众所周知，对于非零的 t,

$$|(d\sigma_t)^\vee(m)| := \left|\frac{1}{|S_t|}\sum_{x \in S_t} \chi(m \cdot x)\right| \lesssim q^{-\frac{(d-1)}{2}} \quad \text{for all} \quad m \ne (0, \dots, 0),$$

其中 χ 表示 $\mathbb{F}_q$ 的一个非平凡加法特征（参见 [11]中引理 2.2 的证明）。

由于 $|S_t| \sim q^{d-1}$，结合以下引理与傅里叶衰减估计即可完成证明。

引理 2.4. 设 $d\sigma$ 是簇 S 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的归一化曲面测度，且满足 $|S| \sim q^{d-1}$. 。若对于所有 $m \in \mathbb{F}_q^d \setminus (0, \dots, 0)$，都有 $|(d\sigma)^\vee(m)| \lesssim q^{-\frac{k}{2}}$，其中某个 $k > 0$，则有

$$A\left(\frac{k+2}{k+1} \to k+2\right) \lesssim 1.$$

引理 2.4 的证明 定义 $K = (d\sigma)^\vee - \delta_0$. 我们要证明，对于每个函数 f 在

$(\mathbb{F}_q^d, dx)$,

$$\|f * d\sigma\|_{L^{k+2}(\mathbb{F}_q^d,dx)} \lesssim \|f\|_{L^{\frac{k+2}{k+1}}(\mathbb{F}_q^d,dx)},$$

其中 dx 是 $\mathbb{F}_q^d$. 上的归一化计数测度

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$由于 $d\sigma = K + \delta_0 = K + 1$ 和 $\|f * 1\|_{L^{k+2}(\mathbb{F}_q^d,\ dx)} \lesssim \|f\|_{L^{\frac{k+2}{k+1}}(\mathbb{F}_q^d,\ dx)}$，因此只需证明对于 $(\mathbb{F}_q^d, dx)$ 上的任意 f，

$$\|f * \widehat{K}\|_{L^{k+2}(\mathbb{F}_q^d,dx)} \lesssim \|f\|_{L^{\frac{k+2}{k+1}}(\mathbb{F}_q^d,dx)}. \tag{2.5}$$

注意 到，该不等式可以通过对以下两个估计进行插值得到：

$$\|f * \widehat{K}\|_{L^2(\mathbb{F}_q^d,dx)} \lesssim q^{-\frac{k}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{F}_q^d,dx)}, \tag{2.6}$$

and

$$\|f * \widehat{K}\|_{L^\infty(\mathbb{F}_q^d,dx)} \lesssim q\|f\|_{L^1(\mathbb{F}_q^d,dx)}. \tag{2.7}$$

剩下的工作是证明上述两个估计。不等式 (2.6) 由 Plancherel 定理、$|(d\sigma)^\vee|$的大小假设以及 K. 的定义得到。另一方面，不等式$\widehat{\ }$ (2.7) 由 Young 不等式以及以下观察得到：$\|K\|_{L^\infty(\mathbb{F}_q^d,dx)} \lesssim q$.

□

凸包的边界点在定理 2.3 的应用中发挥着重要作用。更准确地说，我们将应用以下结果。

引理 2.5. 设 $1 \le p$、$r \le \infty$，并令 A 表示在球面 S_t、$t \neq 0$ 上的平均算子，其中 $\mathbb{F}_q^d$、$d \ge 2$.

(i) 若 $1 \le \frac{1}{p} \le \frac{d}{d+1}$ 和 $\frac{1}{r} = \frac{1}{dp}$，则 $A(p \to r)$. 1。
(ii) 若 $\frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p} \le 1$ 和 $\frac{1}{r} = \frac{d}{p} - d + 1$，则 $A(p \to r)$. 1。

证明. 令 L_1 和 L_2 分别表示连接两点 (0, 0)、$(d/(d+1)\ \ 1/(d+1))$ 以及两点 $(d/(d+1)\ \ 1/(d+1))$、(1, 1) 的线段。定理 2.3 意味着，对于位于 L_1 或 L_2 上的任意点 $(1/p, 1/r)$，我们有 $A(p \to r)$. 1。因此，由于 $L_1 = \{(1/p, 1/r) : 0 \le 1/p \le d/(d+1)\ \ 1/r = 1/(dp)\}$. ，引理的第一部分得证。类似地，由于 $L_2 = \{(1/p, 1/r) : d/(d+1) \le 1/p \le 1,\ 1/r = d/p - d + 1\}$，引理的第二部分也如所需得证。

□

3 K_2算子的尖锐映射性质

本节将给出与图K_2. 相关联的算子的尖锐映射性质。为此，正如下文所述，我们将该问题与球面平均问题联系起来。

照例，定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的非负实值函数 f、g 的内积定义为

$$< f, g >:= ||fg||_1 = \frac{1}{q^d}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} f(x)g(x).$$

设 $t \in \mathbb{F}_q^*$，且 f_1、f_2 是定义在 $\mathbb{F}_q^d$、$d \geq 2$. 上的非负实值函数。那么，与图 K_2 相关联的算子 L 定义为

$$L(f_1, f_2) = \frac{1}{q^d |S_t|} \sum_{x^1, x^2 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2) f_1(x^1) f_2(x^2), \tag{3.1}$$

并称其为作用在 $\mathbb{F}_q^d$. 上的 K_2-算子。这里，量 $q^d|S_t|$ 表示当图 G 为 K_2. 时，式 (1.4) 中的归一化因子 $\mathcal{N}(G)$

通过变量代换，我们可以写成

$$L(f_1, f_2) = \frac{1}{q^d} \sum_{x^1 \in \mathbb{F}_q^d} f_1(x^1) \left(\frac{1}{|S_t|} \sum_{x^2 \in \mathbb{F}_q^d} f_2(x^1 - x^2) S_t(x^2) \right) =< f_1, A f_2 >, \tag{3.2}$$

其中，A 表示与球面 S_t. 相关的平均算子。同样，我们也得到 $L(f_1, f_2) =< A f_1, f_2 >$.

按照通常的方式，我们将 K_2-算子 L 的算子范数定义如下。

定义 3.1. 设 $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$.。我们将 $L(p_1, p_2)$ 定义为使得以下估计对 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有函数 f_1, f_2 都成立的最小常数:

$$L(f_1, f_2) \leq L(p_1, p_2) ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2}.$$

主要　　本节的目标是处理满足 $L(p_1, p_2)$ 的所有数 $1 \leq p_1$、$p_2 \leq \infty$。1　　.

我们首先给出 K_2-算子 L 在 $\mathbb{F}_q^d$. 上有界性的必要条件

命题 3.2. 设 $1 \leq p_1$、$p_2 \leq \infty$.。假设 $L(p_1, p_2)$。1。那么我们有

$$\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} \leq d \quad and \quad \frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq d.$$

证明。由对称性，显然有 $L(p_1, p_2) \lesssim 1 \iff L(p_2, p_1)$。1。因此，只需证明所列出的第一个结论，即 $\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} \leq d$.

由 (3.2) 以及我们的假设 $L(p_1, p_2)$。1，必有

$$L(f_1, f_2) := \frac{1}{q^d} \sum_{x^1 \in \mathbb{F}_q^d} f_1(x^1) \left(\frac{1}{|S_t|} \sum_{x^2 \in \mathbb{F}_q^d} f_2(x^1 - x^2) S_t(x^2) \right) \lesssim ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2}.$$

我们用 $f_1 = 1_{S_t}$ 和 $f_2 = \delta_0$. 检验这个不等式。然后

$$L(f_1, f_2) = \frac{1}{q^d} \sum_{x^1 \in S_t} \frac{1}{|S_t|} = q^{-d},$$

and

$$||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} \sim (q^{-d}|S_t|)^{1/p_1} (q^{-d})^{1/p_2} \sim q^{-\frac{1}{p_1} - \frac{d}{p_2}}.$$

通过直接比较，我们得到所需结果。 □

注记 3.3。对于 $1 \le p_1, p_2 \le \infty$，可以注意到，$\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} \le d$ 和 $\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le d$ 当且仅当 $(1/p_1, 1/p_2) \in [0,1] \times [0,1]$ 位于点 (0, 0) 、 (0, 1) 、 $(\frac{d}{d+1}, \frac{d}{d+1})$ 、 (1, 0) 的凸包上。

现在转向关于指数 $1 \le p_1$、 $p_2 \le \infty$ 的充分条件，使得 $L(p_1, p_2)$ 。1. 我们将使用下面的引理，该引理表明， K_2-算子L 的有界性可以通过有限域上的球面平均估计直接确定。

对于 $1 \le p \le \infty$，记 p' 为 p 的 H¨older 共轭，即 $1/p + 1/p' = 1$.

引理 3.4. 假设 $A(p_2 \to p_1')$. 1，且 $1 \le p_1$、 $p_2 \le \infty.$ ，则有

$$L(p_1, p_2) \lesssim 1.$$

证明。由于 $L(f_1, f_2) =< f_1, Af_2 >$，由 H¨older 不等式可得

$$L(f_1, f_2) \le ||f_1||_{p_1} ||Af||_{p_1'} \lesssim ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2},$$

其中，最后一个不等式中使用了平均假设。 □

现在我们证明，对于 $L(p_1, p_2)$. 1，必要条件实际上也是充分条件。

定理 3.5（ $\mathbb{F}_q^d$ 上 K_2-算子的尖锐有界性结果）。设 $1 \le p_1, p_2 \le \infty.$ ，则有

$$L(p_1, p_2) \lesssim 1 \quad \textit{if and only if} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} \le d, \quad \frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le d.$$

证明。根据命题 3.2，只需证明对于所有满足下列条件的 $1 \le p_1, p_2 \le \infty$，均有 $L(p_1, p_2)$. 1

$$\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} \le d, \quad \frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le d.$$

根据插值定理和范数的嵌套性质，只需在临界端点 $(1/p_1, 1/p_2) \in [0,1] \times [0,1]$ 处建立估计，即 (0, 1)、(1, 0) 和 $(d/(d+1)$ $d/(d+1))$。换言之，仍需证明以下估计：

$$L(\infty, 1) \lesssim 1, \ L(1, \infty) \lesssim 1, \ L\left(\frac{d+1}{d}, \ \frac{d+1}{d}\right) \lesssim 1.$$

利用引理 3.4，问题可归结为建立以下平均估计：

$$A(1 \to 1) \lesssim 1, \quad A(\infty \to \infty) \lesssim 1, \quad A\left(\frac{d+1}{d} \to d+1\right) \lesssim 1.$$

然而，这些 平均估计由定理 2.3 显然成立。因此，证明完毕。

□

以下结果是定理 3.5 的特例，但在实践中非常有用。

推论 3.6。对于任意维数 $d \geq 2$，我们有 $L\left(\frac{d+1}{d}, \frac{d+1}{d}\right) \lesssim 1.$

证明。注意，如果 $p_1 = p_2 = \frac{d+1}{d}$，那么它满足 $\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} \leq d$ 和 $\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq d.$。因此，该结论可由定理 3.5 立即得到。 □

4 K_3-算子的有界性问题

令 $t \in \mathbb{F}_q^*.$。与图 K_3 相关的算子 Δ 可定义为

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^d} \frac{1}{|S_t||S_t^{d-2}|} \sum_{x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2) S_t(x^2 - x^3) S_t(x^3 - x^1) \prod_{i=1}^{3} f_i(x^i), \tag{4.1}$$

其中，每个 f_i、$i = 1$（2、3）都是定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的非负实值函数，而量 $q^d|S_t||S_t^{d-2}|$ 表示当 $G = K_3.$ 时，(1.4) 中的归一化因子 $\mathcal{N}(G)$。我们将算子 Δ 称为定义在 $\mathbb{F}_q^d.$ 上的 K_3-算子。

定义 4.1。令 $1 \leq p_1$、p_2、$p_3 \leq \infty.$。我们将 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 定义为使下述估计对定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有非负实值函数 f_i、$i = 1$（2、3）均成立的最佳常数：

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) \leq \Delta(p_1, p_2, p_3) ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} ||f_3||_{p_3}.$$

本节的目的 是求出满足 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$. 1. 的数 $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq \infty$。

当维数 d 为二时，我们将解决这个问题，直到端点估计。为此，我们将该问题与双线性平均算子（见 (4.2)）的估计联系起来，并证明其尖锐界。

另一方面，正如我们将看到的，在三维及更高维数 $d \geq 3$下，推导尖锐结果并不容易。不过，当某个指数 p_1, p_2, p_3 为 ∞时，我们将能够得到最优结果。我们将通过应用定理 3.5 来实现这一点；该定理给出了K_2-算子 L 在 $\mathbb{F}_q^d$.上的有界性结果

我们首先推导问题在 $\mathbb{F}_q^d, d \geq 2.$ 中的必要条件。请回想，对于 $d = 2$，我们还施加了一个额外限制，即 $3 \in \mathbb{F}_q$ 是一个平方数。

命题 4.2（ Δ有界性的必要条件）。设 $1 \leq p_1$、p_2、$p_3 \leq \infty.$。假设 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 。1. 则有

$$\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq d, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq d, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \leq d.$$

特别地，当 $d = 2$ 时，可以通过 Polymake[1] *[1, 6]* 证明 $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3)$ 包含于以下点的凸包中：(0, 0, 1)、(0, 1, 0)、$(2/3, 2/3, 0)$、$(1/2, 1/2, 1/2)$、$(2/3, 0, 2/3)$、(1, 0,0)、(0, 0, 0)、$(0, 2/3, 2/3)$。

[1]Polymake 是用于算法处理凸多面体的软件。

证明。我们只证明结论中的第一个不等式，因为根据 $\Delta(f_1, f_2, f_3)$ 的对称性，可以得出其他不等式。我们将用到一个简单事实： $x \in S_t$ 当且仅当$-x \in S_t$. 在定义 (4.1) 中，取 $f_1 = \delta_0$、$f_2 = 1_{S_t}$ 和 $f_3 = 1_{S_t}$，可得

$$||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3} \sim q^{-\frac{d}{p_1}} q^{-\frac{1}{p_2}} q^{-\frac{1}{p_3}},$$

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^d} \frac{1}{|S_t||S_t^{d-2}|} \left(\sum_{x^2, x^3 \in S_t : ||x^2 - x^3|| = t} 1 \right) \sim q^{-d},$$

其中，上述最后一个相似关系由附录中的推论 12.4 得出，并采用了我们的假设：$3 \in \mathbb{F}_q$ 是平方数，其中 $d = 2$.

直接比较这些估计，即可得到所需的必要条件。 □

注 4.3. 为了证明命题 4.2 中的必要条件是 $d = 2$ 的充分条件，我们只需建立以下临界端点估计：$\Delta(2, 2, 2) . 1$，$\Delta(\infty, \infty, \infty) . 1$，$\Delta(1, \infty, \infty) . 1$，$\Delta(\infty, 1, \infty) . 1$，$\Delta(\infty, \infty, 1) . 1$，$\Delta\left(\frac{3}{2}, 32, \infty\right) \lesssim 1$,$\Delta\left(\frac{3}{2}, \infty, \frac{3}{2}\right) \lesssim 1$, $\Delta\left(\infty, 32, \frac{3}{2}\right) \lesssim 1$. 事实上，这一论断可由对命题 4.2 第二部分给出的临界点进行插值得出。

4.1 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的 Δ 有界性结果

图 K_2 可通过从图 K_3. 中移除三个顶点中的任意一个得到。因此， $L(p_1, p_2)$ 的有界性可以确定 $\Delta(p_1, p_2, \infty)$ 的有界性。更确切地说，我们有以下结果。

引理 4.4. 设 $1 \leq a, b \leq \infty$. 。如果 $L(a, b) . 1$，则

$$\Delta(a, b, \infty) \lesssim 1, \quad \Delta(a, \infty, b) \lesssim 1, \quad and \quad \Delta(\infty, a, b) \lesssim 1.$$

证明。由对称性，为完成证明，只需证明 $\Delta(a, b, \infty) . 1$。

由 (4.1) 和 (3.1) 回忆可知

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^d} \frac{1}{|S_t||S_t^{d-2}|} \sum_{x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2) S_t(x^2 - x^3) S_t(x^3 - x^1) \prod_{i=1}^{3} f_i(x^i),$$

and

$$L(f_1, f_2) = \frac{1}{q^d |S_t|} \sum_{x^1, x^2 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2) f_1(x^1) f_2(x^2).$$

由于 f_i、$i = 1$、2、3 都是定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的非负实值函数，因此我们有

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) \leq \frac{1}{|S_t^{d-2}|} \left(\max_{x^1, x^2 \in \mathbb{F}_q^d : ||x^1 - x^2|| = t} \sum_{x^3 \in \mathbb{F}_q^d : ||x^2 - x^3|| = t = ||x^3 - x^1||} f_3(x^3) \right) L(f_1, f_2).$$

由于根据我们的假设， $|S_t^{d-2}| \sim q^{d-2}$ 和 $L(f_1, f_2) \lesssim ||f_1||_a||f_2||_b$ ，因此只需证明上述括号中的最大值为 $\lesssim q^{d-2}||f_3||_\infty$. 。令 I 表示上述最大值。

通过变量代换 $x = x^1$、 $y = x^1 - x^2$，我们得到

$$I \leq \left(\max_{x \in \mathbb{F}_q^d, y \in S_t} \sum_{x^3 \in \mathbb{F}_q^d : ||x-y-x^3|| = t = ||x^3 - x||} 1 \right) ||f_3||_\infty.$$

通过令 $z = x - x^3$ 作另一次变量代换，我们得到

$$I \leq \left(\max_{x \in \mathbb{F}_q^d, y \in S_t} \sum_{z \in S_t : ||z-y|| = t} 1 \right) ||f_3||_\infty = \left(\max_{y \in S_t} \sum_{z \in S_t : ||z-y|| = t} 1 \right) ||f_3||_\infty.$$

现在应用附录中的推论 12.4，可得 $I \lesssim q^{d-2}||f_3||_\infty$ ，如所需。

□

当 p_1、 p_2、 p_3 中有一个为 ∞ 时，我们能够得到关于 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 的尖锐有界性结果。

定理 4.5. 设 $1 \leq a$、 $b \leq \infty$ 满足 $\frac{1}{a} + \frac{d}{b} \leq d$ 且 $\frac{d}{a} + \frac{1}{b} \leq d$. 。那么我们有 $\Delta(a, b, \infty)$. 1、$\Delta(a, \infty, b)$. 1 和 $\Delta(\infty, a, b)$. 1。

证明。结合定理 3.5 和引理 4.4，立即可得该结论。 □

由命题 4.2 不难看出，当指数 p_1、 p_2、 p_3 中有一个为 ∞. 时，上述定理无法改进。特别地，我们有以下临界端点估计。

推论 4.6. 我们有 $\Delta\left(\frac{d+1}{d}、 \frac{d+1}{d}、 \infty\right) \lesssim 1$、 $\Delta\left(\frac{d+1}{d}、 \infty、 \frac{d+1}{d}\right) \lesssim 1$，以及 $\Delta\left(\infty、 \frac{d+1}{d}、 \frac{d+1}{d}\right) \lesssim 1.$

证明。令 $a = b = \frac{d+1}{d}$. 。于是我们看到 $\frac{1}{a} + \frac{d}{b} = d = \frac{d}{a} + \frac{1}{b}$，因此，该推论的结论直接由定理 4.5 得出。 □

定理 4.5 还推出以下结果。

推论 4.7. 我们有 $\Delta(\infty, \infty, \infty)$. 1, $\Delta(1, \infty, \infty)$. 1, $\Delta(\infty, 1, \infty)$. 1, $\Delta(\infty, \infty, 1)$. 1.

证明. 在定理 4.5 中取 $a = b = \infty$ ，即可得到估计 $\Delta(\infty, \infty, \infty)$. 1。现在，利用对称性，只需证明 $\Delta(1, \infty, \infty)$. 1。然而，在定理 4.5 中取 $a = 1, b = \infty$ 即可轻松证明这一点。至此，证明完成。

□

注记 4.8. 由推论 4.6、推论 4.7 和注 4.3 可知，要彻底解决关于 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 对于 $d = 2$ 的有界性问题，我们只需建立以下临界端点估计

$$\Delta\left(\frac{d+2}{d}, \frac{d+2}{d}, \frac{d+2}{d}\right) = \Delta(2, 2, 2) \lesssim 1.$$

4.2 二维情形下的尖锐限制强型估计

尽管定理 4.5 对所有维数 $d \geq 2$ 都成立，但与命题 4.2 给出的必要条件相比，它并非尖锐。在本小节中，我们将推导出二维情形下 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 在端点处的尖锐有界性结果。为此，我们需要以下定理。

定理 4.9。设 Δ 是 $\mathbb{F}_q^2$. 上的 K_3-算子。那么，对于 $\mathbb{F}_q^2$的所有子集 E、F、H，以下估计成立：$\Delta(E, F, H) \lesssim ||E||_2||F||_2||H||_2$.

对于 $1 \leq p_1$、p_2、$p_3 \leq \infty$，若限制强型 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$估计成立，则估计

$$\Delta(E, F, H) \lesssim ||E||_{p_1}||F||_{p_2}||H||_{p_3}$$

对 $\mathbb{F}_q^2$. 的所有子集 E、F、H均成立。在这种情况下，我们记为 $\Delta(p_1, p_2, p_3) \lessapprox 1$.

证明。证明分若干步进行约化。当 $d = 2$时，通过令$x = x^3$、$y = x^3 - x^1$、$z = x^3 - x^2$进行变量代换，(4.1) 变为

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} f_3(x) \left[\frac{1}{|S_t|} \sum_{y,z \in \mathbb{F}_q^2} S_t(z-y) S_t(z) S_t(y) f_1(x-y) f_2(x-z) \right].$$

我们将上述括号中的值定义为 $B(f_1, f_2)(x)$，即

$$B(f_1, f_2)(x) := \frac{1}{|S_t|} \sum_{y,z \in S_t : ||z-y|| = t} f_1(x-y) f_2(x-z). \tag{4.2}$$

我们将此算子 B 称为“双线性平均算子”。显然,

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} B(f_1, f_2)(x) f_3(x) =< B(f_1, f_2),\ f_3 > .$$

由 H¨older 不等式，我们有

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) \leq ||B(f_1, f_2)||_2 ||f_3||_2.$$

因此，定理 4.9 可由下面的约化引理立即推出 □

引理 4.10. 设 $B(f_1, f_2)$ 为按 (4.2) 定义的双线性平均算子。那么，对于 $\mathbb{F}_q^2$ 的任意子集 E, F，我们有

$$||B(E, F)||_2 \lesssim ||E||_2 ||F||_2.$$

证明。我们先表示双线性平均算子 $B(f_1, f_2)$。由 (4.2) 可知,

$$B(f_1, f_2)(x) = \frac{1}{|S_t|} \sum_{y \in S_t} f_1(x-y) \left(\sum_{z \in S_t : ||z-y|| = t} f_2(x-z) \right).$$

对于每个 $y \in S_t$，令 $\Theta(y) := \{z \in S_t : ||z-y|| = t\}$. 采用此记号，双线性平均算子可写为

$$B(f_1, f_2)(x) = \frac{1}{|S_t|} \sum_{y \in S_t} f_1(x-y) \left(\sum_{z \in \Theta(y)} f_2(x-z) \right).$$

令 η 表示 $\mathbb{F}_q^*$. 的二次特征。回忆一下，对于 $\mathbb{F}_q^*$ 中的平方数 s，有 $\eta(s) = 1$；否则，$\eta(s) = -1$。由附录中的推论 12.4 可知，对于所有 $y \in S_t$，若 $d = 2$ 且 $\eta(3) = -1.$，则 $\Theta(y)$ 为空集。在此情形下，问题是平凡的，因为对于所有 $x \in \mathbb{F}_q^2.$，$B(f_1, f_2)(x) = 0$。因此，当 $d = 2$ 时，我们总是假设 $\eta(3) = 1$。

注意，对于所有 $y \in S_t$，$|\Theta(y)| = 2$，这可由附录中推论 12.4 的最后一句得出。更确切地说，对于每个 $y \in S_t$，我们可以写成

$$\Theta(y) = \{\theta y,\ \theta^{-1} y\},$$

其中 θy 表示将 y 旋转“60 度”，且 $||y - \theta y|| = t = ||y - \theta^{-1} y||$.

根据这些观察，双线性平均算子 $B(f_1, f_2)$ 可以表示如下：

$$B(f_1, f_2)(x) = B_\theta(f_1, f_2)(x) + B_{\theta^{-1}}(f_1, f_2)(x). \tag{4.3}$$

这里，我们定义

$$B_\theta(f_1, f_2)(x) := \frac{1}{|S_t|} \sum_{y \in S_t} f_1(x-y) f_2(x - \theta y), \tag{4.4}$$

and

$$B_{\theta^{-1}}(f_1, f_2) := \frac{1}{|S_t|} \sum_{y \in S_t} f_1(x-y) f_2(x - \theta^{-1} y).$$

为了完成该引理的证明，只需建立以下两个估计：对于 $\mathbb{F}_q^d$ 的所有子集 E, F，

$$||B_\theta(E, F)||_2 \lesssim ||E||_2 ||F||_2, \tag{4.5}$$

and

$$||B_{\theta^{-1}}(E, F)||_2 \lesssim ||E||_2 ||F||_2. \tag{4.6}$$

我们只给出估计 (4.5) 的证明，因为 (4.6) 的证明相同。

现在我们开始证明估计 (4.5)。由于 $||E||_2^2 = q^{-2}|E|$ 和 $||F||_2^2 = q^{-2}|F|$，只需证明

$$||B_\theta(E, F)||_2^2 \lesssim q^{-4}|E||F|. \tag{4.7}$$

不失一般性，我们可以假设 $|E| \leq |F|$. 根据定义，可得

$$||B_\theta(E, F)||_2^2 = q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} \sum_{y, y' \in S_t} E(x-y) E(x-y') F(x-\theta y) F(x-\theta y') = I + II,$$

其中，第一项 I 是对应于 $y = y'$ 情形的值，而第二项 II 对应于 $y \neq y'$. 情形。我们有

$$I = q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{y \in S_t} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} E(x-y)F(x-\theta y).$$

将 x 替换为 $x+y$，进行变量代换后，我们得到

$$I = q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{y \in S_t} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} E(x)F(x+y-\theta y) = q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{x \in E} \left(\sum_{y \in S_t} F(x+y-\theta y) \right).$$

注意，对于所有满足 $y \neq y'$. 的 S_t 中的 y、y'，都有 $y - \theta y \neq y' - \theta y'$。由此可知，上面括号中的值不超过 $|S_t \cap F| \leq |F|.$。因此，我们得到所需的估计：

$$I \leq q^{-2}|S_t|^{-2}|E||F| \sim q^{-4}|E||F|.$$

接下来，只需证明 $II \lesssim q^{-4}|E||F|.$。由于我们假设 $|E| \leq |F|$，只需证明 $II \lesssim q^{-4}|E|^2$。

根据 II 的定义，可得

$$II = q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} \sum_{y,y' \in S_t : y \neq y'} E(x-y)E(x-y')F(x-\theta y)F(x-\theta y').$$

显然，

$$II \leq q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{y,y' \in S_t : y \neq y'} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} E(x-y)E(x-y').$$

我们将 x 替换为 $x+y.$，进行变量代换。于是得到

$$\begin{aligned} II &\leq q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} E(x) \left(\sum_{y,y' \in S_t : y \neq y'} E(x+y-y') \right) \\ &= q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} E(x) \left(\sum_{\mathbf{0} \neq u \in \mathbb{F}_q^2} E(x+u)W(u) \right), \end{aligned}$$

其中，$W(u)$ 表示满足 $u = y - y'$ 和 $y \neq y'$. 的数对 (y, y') 的数量。很容易看出，对于任意非零向量 $u \in \mathbb{F}_q^2$，都有 $W(u) \leq 2.$，因此我们得到

$$II \lesssim q^{-2}|S_t|^{-2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^2} E(x) \left(\sum_{\mathbf{0} \neq u \in \mathbb{F}_q^2} E(x+u) \right) \lesssim q^{-4}|E|^2,$$

如所要求。 □

在二维情形下，除了一个端点之外，我们能够得到 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 的最优有界性。事实上，我们有以下结果。

定理 4.11. 设 $1 \le p_1, p_2, p_3 \le \infty$，并令 Δ 为 $\mathbb{F}_q^2$. 上的 K_3-算子

(i) 若 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$. 1，则

$$\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \le 2, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{2}{p_2} + \frac{1}{p_3} \le 2, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{2}{p_3} \le 2. \tag{4.8}$$

(ii) 反过来，若 (p_1, p_2, p_3) 满足全部三个不等式 (4.8)，则对于 $(p_1, p_2, p_3) \neq$ (2,2,2)，有 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$. 1，并且我们有 Δ(2, 2, 2) $\lessapprox 1$.

证明。定理的第一部分是命题 4.2 在 $d = 2$. 下的特例。现在我们证明第二部分。如命题 4.2 所述，可以通过使用 Polymake [1, 6] 注意到，所有满足全部三个不等式 (4.8) 的点 $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}\right) \in [0,1]^3$ 都包含在临界点的凸包中

$$(1/2, 1/2, 1/2),\ (0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),\ \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right),\ \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

由定理 4.9 和 $d = 2$ 可知，对于点 $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3) =$ (1/2, 1/2, 1/2)，算子Δ 满足限制强型估计。此外，由推论 4.6 和推论 4.7 以及 $d = 2$ 可知，对于上述临界点 $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3)$，除 (1/2, 1/2, 1/2) 外，$\Delta(p_1, p_2, p_3)$. 1。因此，调用插值定理即可立即得出第二部分的结论。

□

5 P_2-算子的有界性结果

对于 $t \in \mathbb{F}_q^*$ 以及定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的函数 $f_i, i = 1, 2, 3$，与图 P_2 相关联的算子 Λ 称为 $\mathbb{F}_q^d$ 上的 P_2-算子，其定义为

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^d |S_t|^2} \sum_{x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2) S_t(x^2 - x^3) f_1(x^1) f_2(x^2) f_3(x^3), \tag{5.1}$$

其中，量 $q^d |S_t|^2$ 表示当 $G = P_2$ 时，(1.4) 中的归一化因子 $\mathcal{N}(G)$。注意，这可以写成

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) =< f_2,\ Af_1 \cdot Af_3 > . \tag{5.2}$$

定义 5.1. 设 $1 \le p_1, p_2, p_3 \le \infty$. 。我们将 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$ 定义为使下述估计对 $\mathbb{F}_q^d$ 上所有非负实值函数 f_1, f_2, f_3 均成立的最小常数:

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) \le \Lambda(p_1, p_2, p_3) ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} ||f_3||_{p_3}.$$

本节中，我们研究确定所有满足$\Lambda(p_1, p_2, p_3)$ 的数 $1 \le p_1$、p_2、$p_3 \le \infty$ 的问题。与 K_3-算子 Δ 相比，这个问题很难找到最优答案。根据公式 (5.2) 以及引理 2.5 中的平均估计，我们能够

讨论这一问题的部分结果（见定理 5.4）。

命题 5.2（ Λ 有界性的必要条件）。令 $1 \le p_1, p_2, p_3 \le \infty$. 假设 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1。则我们有

$$\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} \le d, \quad \frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} \le d, \quad \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \le d, \quad \frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \le 2d - 1.$$

此外，在此假设下，当 $d = 2$ 时，可以通过 Polymake *[1, 6]* 证明 $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3)$ 包含于以下点的凸包中：(0,1,0), $(1/2,0,1)$, (1,0, $1/2$),(1,0,0), $(5/6, 1/3, 1/2)$, $(1/2, 1/3, 5/6)$, $(2/3, 2/3, 0)$, $(0, 2/3, 2/3)$, (0, 0, 0), (0, 0, 1)。

证明。假设 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1。那么，对于 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有函数 $f_i, i = 1, 2, 3$，我们有

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^d |S_t|^2} \sum_{x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2) S_t(x^2 - x^3) f_1(x^1) f_2(x^2) f_3(x^3) \lesssim ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} ||f_3||_{p_3}.$$

我们用 $f_2 = \delta_0$,$f_1 = f_3 = 1_{S_t}$. 检验上述不等式。显然，

$$||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} ||f_3||_{p_3} = (q^{-d}|S_t|)^{\frac{1}{p_1}} q^{-\frac{d}{p_2}} (q^{-d}|S_t|)^{\frac{1}{p_3}} \sim q^{-\frac{1}{p_1} - \frac{d}{p_2} - \frac{1}{p_3}},$$

and

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) = q^{-d}.$$

因此，我们得到 $q^{-d} \lesssim q^{-\frac{1}{p_1} - \frac{d}{p_2} - \frac{1}{p_3}}$.。这意味着结论中的第一个不等式成立，即 $\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} \le d$.

为了得到结论中的第二个不等式，我们取 $f_1 = \delta_0, f_2 = 1_{S_t}$ 和 $f_3 = 1_{\mathbb{F}_q^d}$.。于是容易验证，

$$||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} ||f_3||_{p_3} \sim q^{-\frac{d}{p_1} - \frac{1}{p_2}},$$

and

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^d |S_t|^2} \sum_{x^2 \in S_t} \sum_{x^3 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^2 - x^3) = q^{-d}.$$

比较这些估计即可得到结论中的第二个不等式。

在第二个不等式的证明中交换 f_1 和 f_3 的作用，即可轻松得到结论中的第三个不等式。

为了推导出结论中的最后一个不等式，我们取 $f_1 = f_3 = \delta_0$ 和 $f_2 = 1_{S_t}$. 。然后

$$||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} ||f_3||_{p_3} \sim q^{-\frac{d}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{d}{p_3}},$$

and

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{q^d |S_t|} \sim q^{-2d+1}.$$

由此，我们得到了所需结果 $\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \le 2d - 1$. □

由对称性，不难注意到 $\Lambda(p_1,p_2,p_3) \lesssim 1 \iff \Lambda(p_3,p_2,p_1)$。1. 在下面的引理中，我们证明， P_2-算子 Λ 的有界性问题与有限域上的球面平均问题密切相关。

引理 5.3. 假设 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{r_3}=1, A(p_1 \to r_1)$. 1，且对某些 $1 \le p_1,p_2,p_3,r_1,r_3 \le \infty.$，有 $A($ $p_3 \to r_3)$. 1。那么我们有 $\Lambda(p_1,p_2,p_3)$. 1。

证明. 由于 $\Lambda(f_1,f_2,f_3) =< f_2, Af_1 \cdot Af_3 >$，结合第一个假设应用 H¨older 不等式，我们得到

$$\Lambda(f_1,f_2,f_3) \le ||Af_1||_{r_1}||f_2||_{p_2}||Af_3||_{r_3} \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3},$$

其中最后一个不等式用到了取平均的假设。因此， $\Lambda(p_1,p_2,p_3)$. 1，证毕。

□

现在我们陈述并证明 $\Lambda(p_1,p_2,p_3)$ 在 $\mathbb{F}_q^d$. 上的有界性结果

定理 5.4. 设 $1 \le p_1,p_2,p_3 \le \infty.$。那么，对于 $\mathbb{F}_q^d$ 上的 P_2-算子 Λ，以下四个陈述成立:

(i) 如果 $0 \le \frac{1}{p_1}$、 $\frac{1}{p_3} \le \frac{d}{d+1}$ 和 $\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3} \le d$，那么 $\Lambda(p_1$、 p_2、 $p_3)$。1. (ii) 如果 $0 \le \frac{1}{p_1} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_3} \le 1$ 和 $\frac{1}{dp_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3} \le d$，那么 $\Lambda(p_1$、 p_2、 $p_3)$。1. (iii) 如果 $0 \le \frac{1}{p_3} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_1} \le 1$ 和 $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{dp_3} \le d$，那么 $\Lambda($ p_1、 p_2、 $p_3)$。1. (iv) 如果 $\frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_1}$、 $\frac{1}{p_3} \le 1$ 和 $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3} \le 2d-1$，那么 $\Lambda(p_1$、 p_2、 $p_3)$。1.

证明。我们按以下步骤进行。

(i) 根据范数的嵌套性质，只需证明 $0 \le \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_3} \le \frac{d}{d+1}$ 和 $\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}=d.$ 的情形。这个方程可改写为 $\frac{1}{dp_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{dp_3}=1.$。由于 $0 \le \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_3} \le \frac{d}{d+1}$，由引理 2.5 (i) 可知，令 $\frac{1}{r_1}=\frac{1}{dp_1}, \frac{1}{r_3}=\frac{1}{dp_3}$，则有 $A(p_1 \to r_1)$. 1 且 $A(p_3 \to r_3)$. 1。

由于 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{r_3}=1$，应用引理 5.3 即可得到所需结果。

(ii) 与定理第一部分的证明类似，只需证明在 $0 \le \frac{1}{p_1} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_3} \le 1$ 和 $\frac{1}{dp_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}=d.$ 的情形下， $\Lambda(p_1,p_2,p_3)$. 1。令 $\frac{1}{r_1}=\frac{1}{dp_1}$ 和 $\frac{1}{r_3}=\frac{d}{p_3}-d+1$。由引理 2.5 可得 $A(p_1 \to r_1)$. 1 且 $A($ $p_3 \to r_3)$. 1。另请注意，$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{r_3}=1.$。因此，由引理 5.3 可得定理 5.4 (ii)。

(iii) 交换 p_1、 p_2 的角色，证明与本定理第二部分的证明完全相同。

(iv) 与之前一样，只需证明 $\frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_1}$、 $\frac{1}{p_3} \le 1$ 和 $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}=2d-1.$ 的情形。令 $\frac{1}{r_k}=\frac{d}{p_k}-d+1$ 为 $k=1$， 3。由引理 2.5 (ii) 可知， $A(p_k \to r_k)$. 1，对 $k=1$， 3。注意到 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{r_3}=1.$。因此，利用引理 5.3，我们完成证明。

□

作为定理 5.4 的一个特例，我们得到以下结论。
推论 5.5. 对于任意维数 $d \geq 2$，我们有 $\Lambda\left(\frac{d+1}{d}, \frac{d+1}{d-1}, \frac{d+1}{d}\right) \lesssim 1$.

Pr证毕。取 $p_1 = p_3 = \frac{d+1}{d}$，即可由定理 5.4 显然推出 $p_2 = \frac{d+1}{d-1}$. □

尽管我们不知道定理 5.4 是否为最优结果，但该结果将在证明下面的定理时发挥关键作用。该定理意味着，对于所有维数 $d \geq 2$，猜想 1.5 对图 K_3 及其子图 P_2 均成立（见下文推论 5.8）。

定理 5.6. 设 Δ 和 Λ 分别为与 K_3 和 P_2 相关联的算子，作用于 $\mathbb{F}_q^d$. 。那么，若对于 $1 \leq p_1$、p_2、$p_3 \leq \infty$， $\Delta(p_1, p_2, p_3)$. 1，则有 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1。

证明。假设对于 $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq \infty.$，有 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$. 1。于是，根据命题 4.2，指数 p_1, p_2, p_3 满足以下三个不等式：

$$\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq d, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq d, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \leq d. \tag{5.3}$$

为了完成证明，还需证明 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1。我们将根据 p_1 和 p_3. 的大小，分四种情形证明这一点。

情形 1：假设 $0 \leq \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_3} \leq \frac{d}{d+1}.$。条件 (5.3) 显然意味着 $\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq d.$。因此，由定理 5.4 (i)，我们得到所需结论： $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1。

情形 2：假设 $0 \leq \frac{1}{p_1} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_3} \leq 1.$。由定理 5.4 (ii)，要证明 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1，只需证明

$$\frac{1}{dp_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \leq d.$$

然而，根据 (5.3) 中的第三个不等式，显然可得该不等式，因为 $d \geq$ 2.

情形 3：假设 $0 \leq \frac{1}{p_3} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_1} \leq 1.$ 根据定理 5.4 (iii)，只需证明$\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{dp_3} \leq d.$ 然而，该不等式可由 (5.3) 中的第一个不等式轻易得到。

情形 4：假设 $\frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_1}$、 $\frac{1}{p_3} \leq 1.$根据定理 5.4 (iv)，为了证明 $\Lambda(p_1$、 p_2、 $p_3)$. 1，我们只需证明

$$\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \leq 2d - 1.$$

然而，该不等式可如下轻易证明：

$$\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} = \left(\frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) + \frac{d-1}{p_3} \leq d + \frac{d-1}{p_3} \leq 2d - 1,$$

其中，第一个不等式由 (5.3) 中的第一个不等式推出，最后一个不等式则由一个简单事实得出：
$1 \leq p_3 \leq \infty.$ □

注 5.7。定理 5.6 的逆命题不可能成立。事实上，由推论 5.5 可知， $\Lambda\left(\frac{d+1}{d}, \frac{d+1}{d-1}, \frac{d+1}{d}\right) \lesssim 1.$ 然而， $\Delta\left(\frac{d+1}{d}, \frac{d+1}{d-1}, \frac{d+1}{d}\right)$ 不可能有界；考虑命题 4.2 即可轻易证明这一点，也就是 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 有界的必要条件。

我们运用定理 5.6 推导出以下结果。

推论 5.8. 猜想 1.5 对于图 K_3 及其在 $\mathbb{F}_q^d$ 中的子图 P_2 成立， $d \geq 2.$

证明. 显然， P_2 是 $\mathbb{F}_q^d.$ 中 K_3 的子图。由于 $\delta(K_3) = 2$， $d \geq 2$，且 $\delta(P_2) = 1$，我们有 $\min\{\delta(K_3)\ d\} = 2 > \delta(P_2) = 1.$ 。因此，猜想 1.5 的所有假设对 K_3 和 $P_2.$ 均成立。于是，推论的结论立即由定理 5.6 得出。 □

6 （$C_4 + t$）算子的映射性质

我们研究与图 $C_4 +$ 的对角线相关联的算子的映射性质。在接下来的各节中，我们假设 t 是 $\mathbb{F}_q^*.$ 中的非零元素。设 f_i、 $1 \leq i \leq 4$ 是定义在 $\mathbb{F}_q^d.$ 上的非负实值函数。

算子 $\diamondsuit_t$ 与图 $C_4 +$ 对角线 t （图 1d）相关联，我们将 $\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 定义为如下量

$$\frac{1}{q^d|S_t||S_t^{d-2}|^2} \sum_{x^1,x^2,x^3,x^4 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2)S_t(x^2 - x^3)S_t(x^3 - x^4)S_t(x^4 - x^1)S_t(x^1 - x^3) \prod_{i=1}^{4} f_i(x^i). \quad (6.1)$$

算子 $\diamondsuit_t$ 称为 $\mathbb{F}_q^d.$ 上的（$C_4 + t$）算子。这里请注意，在（1.4）中，我们将量 $q^d|S_t||S_t^{d-2}|^2$ 用作归一化因子 $\mathcal{N}(G)$。

令 $x = x^1, u = x^1 - x^2, v = x^1 - x^3, w = x^1 - x^4$，进行变量代换后，我们得到

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{1}{q^d} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^d} f_1(x)T(f_2, f_3, f_4)(x) =< f_1,\ T(f_2, f_3, f_4) >, \quad (6.2)$$

其中，算子 $T(f_2, f_3, f_4)$ 定义为

$$T(f_2, f_3, f_4)(x) := \frac{1}{|S_t||S_t^{d-2}|^2} \sum_{u,v,w \in S_t} S_t(v - u)S_t(w - v)f_2(x - u)f_3(x - v)f_4(x - w). \quad (6.3)$$

定义 6.1. 设 $1 \leq p_1, p_2, p_3, p_4 \leq \infty.$ 。我们将 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 定义为使下述估计对所有非负实值函数 $f_i, 1 \leq i \leq 4$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上成立的最小常数： $\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) \leq \diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$ $||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4}.$

我们需要求出 $1 \leq p_1, p_2, p_3, p_4 \leq \infty$ ，使得

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4} \quad (6.4)$$

对于 $\mathbb{F}_q^d$. 上的所有非负实值函数 $f_i, 1 \leq i \leq 4$，该式都成立。换句话说，我们的主要问题是确定所有满足 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 的数 $1 \leq p_1, p_2, p_3, p_4 \leq \infty$ 。1.

引理 6.2（ $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 有界性的必要条件）。令 $\diamondsuit_t$ 为 $\mathbb{F}_q^d$. 上的 (C_4+t)-算子。若 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1，则有

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4} \leq d, \quad \frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4} \leq d, \quad and \quad \frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \leq 2d-2.$$

此外，在此假设下，当 $d = 2$ 时，可以通过 Polymake *[1, 6]* 证明，$(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 包含于以下点的凸包中：(0, 0, 1, 0)、(0, 1, 0, 0)、(0, 0, 0, 1)、$(1/2, 0, 1/2, 1/2)$、$(2/3, 2/3, 0, 0)$、(1, 0, 0, 0)、$(2/3, 0, 2/3, 0)$、$(1/2, 1/2, 1/2, 0)$、$(2/3, 0, 0, 2/3)$、$(0, 2/3, 2/3, 0)$、(0, 0, 0, 0)、$(0, 0, 2/3, 2/3)$。

证明。我们证明第一个结论，即

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4} \leq d. \tag{6.5}$$

由 (6.2) 和 (6.3) 可知， $\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 变为

$$\frac{1}{q^d}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} f_1(x)\left[\frac{1}{|S_t||S_t^{d-2}|^2}\sum_{v\in S_t} f_3(x-v)\left(\sum_{u,w\in S_t} S_t(v-u)S_t(w-v)f_2(x-u)f_4(x-w)\right)\right].$$

取 $f_1 = f_2 = f_4 = 1_{S_t}$ 和 $f_3 = \delta_0$，可得

$$||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}|||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4} \sim q^{-\frac{1}{p_1}}q^{-\frac{1}{p_2}}q^{-\frac{d}{p_3}}q^{-\frac{1}{p_4}}$$

and

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{1}{q^d}\sum_{x\in S_t}\frac{1}{|S_t||S_t^{d-2}|^2}\left(\sum_{u\in S_t:||x-u||=t} 1\right)\left(\sum_{w\in S_t:||x-w||=t} 1\right) \sim q^{-d},$$

由此得到所需的必要条件 (6.5)，其中上面的最后一个等价关系由附录中的推论 12.4 得出。

第二个结论由第一个结论通过对称性得出。

为证明第三个结论，即 $\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \leq 2d-2$，我们在 $f_1 = f_3 = 1_{S_t}$ 和 $f_2 = f_4 = \delta_0$. 处检验不等式 (6.4)

于是我们得到

$$||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4} = \left(\frac{|S_t|}{q^d}\right)^{1/p_1}\left(\frac{1}{q^d}\right)^{1/p_2}\left(\frac{|S_t|}{q^d}\right)^{1/p_3}\left(\frac{1}{q^d}\right)^{1/p_4} \sim q^{-\frac{1}{p_1}-\frac{d}{p_2}-\frac{1}{p_3}-\frac{d}{p_4}}.$$

另一方面，在定义 (6.1) 中取 $f_1 = f_3 = 1_{S_t}$ 和 $f_2 = f_4 = \delta_0$，可见

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{1}{q^d |S_t||S_t^{d-2}|^2} \sum_{x^1 \in S_t} \left(\sum_{x^3 \in S_t} S_t(x^1 - x^3) \right) \lesssim \frac{1}{q^d |S_t^{d-2}|} \sim q^{-2d+2}.$$

因此，由 (6.4) 可知，我们必须得到所要求的第三个结论，即 $\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} \leq 2d - \quad 2.$ □

6.1 $\diamondsuit_t$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的有界性结果

给定一个具有固定对角线（图 $C_4 +$ 对角线）的菱形，我们将证明，通过移除顶点 x^2 或顶点 x^4,

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_2||_\infty \Delta(f_1, f_3, f_4) \quad \text{and} \quad \diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_4||_\infty \Delta(f_1, f_2, f_3).$$

因此，$\diamondsuit_t(p_1, \infty, p_3, p_4)$ 和 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, \infty)$ 的上界，分别可以由 $\Delta(p_1, p_3, p_4)$ 和 $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ 的上界控制。更准确地说，我们有如下关系。

命题 6.3. 假设对于 $1 \leq p, s, r \leq \infty.$，$\Delta(p, s, r)$. 1，则有

$$\diamondsuit_t(p, \infty, s, r) \lesssim 1 \quad and \quad \diamondsuit_t(p, s, r, \infty) \lesssim 1.$$

证明。由于对于 $1 \leq p, s, r \leq \infty,$ $\Delta(p, s, r)$. 1，我们可知，对于 $\mathbb{F}_q^d$, Δ 上的所有非负函数 $f, g,$ $h,$ $(f, g, h) \lesssim ||f||_p ||g||_s ||h||_r.$ 因此，为完成证明，只需建立以下估计：对于所有非负函数 $f_i,$ $i = 1,2,3,4,$

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_2||_\infty \Delta(f_1, f_3, f_4) \tag{6.6}$$

and

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_4||_\infty \Delta(f_1, f_2, f_3). \tag{6.7}$$

由于 (6.6) 和 (6.7) 的证明相同，我们只给出估计 (6.7) 的证明。注意，根据 (6.1) 中 $\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3,$ $f_4)$ 的定义，$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 可以写成如下形式

$$\frac{1}{q^d |S_t||S_t^{d-2}|} \sum_{\substack{x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{F}_q^d \\ : ||x^1 - x^2|| = ||x^2 - x^3|| = ||x^1 - x^3|| = t}} \left(\prod_{i=1}^{3} f_i(x^i) \right) \left[\frac{1}{|S_t^{d-2}|} \sum_{x^4 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^3 - x^4) S_t(x^4 - x^1) f_4(x^4) \right].$$

对于每个满足 $||x^1 - x^3|| = t$ 的 $x^1, x^3 \in \mathbb{F}_q^d$，我们将 $M(x^1, x^3)$ 定义为上述括号中的值。接着，回顾式 (4.1) 中给出的 $\Delta(f_1, f_2, f_3)$ 的定义，可知

$$\diamondsuit_t(f_1, f_2, f_3, f_4) \leq \left(\max_{\substack{x^1, x^3 \in \mathbb{F}_q^d \\ : ||x^1 - x^3|| = t}} M(x^1, x^3) \right) \Delta(f_1, f_2, f_3).$$

因此，只需证明以下命题，即可立即得到估计 (6.7)：

$$M := \max_{\substack{x^1,x^3\in\mathbb{F}_q^d \\ :||x^1-x^3||=t}} \frac{1}{|S_t^{d-2}|} \sum_{x^4\in\mathbb{F}_q^d} S_t(x^3-x^4)S_t(x^4-x^1) \lesssim 1. \tag{6.8}$$

为证明这一断言，我们首先令 $x = x^1, y = x^1 - x^3$. 作变量代换。于是可得

$$M = \max_{x\in\mathbb{F}_q^d, y\in S_t} \frac{1}{|S_t^{d-2}|} \sum_{x^4\in\mathbb{F}_q^d} S_t(x-y-x^4)S_t(x^4-x).$$

令 $z = x - x^4$，我们有

$$M = \max_{x\in\mathbb{F}_q^d, y\in S_t} \frac{1}{|S_t^{d-2}|} \sum_{z\in S_t:||z-y||=t} 1 \sim \frac{1}{q^{d-2}} \max_{y\in S_t} \sum_{z\in S_t:||z-y||=t} 1$$

根据附录中的推论 12.4，我们得到 $M \lesssim 1$，如所需。 □

对于任意维数 $d \geq 2$，我们有以下推论。

定理 6.4. 设 $1 \leq a, b \leq \infty$ 满足

$$\frac{1}{a} + \frac{d}{b} \leq d \quad and \quad \frac{d}{a} + \frac{1}{b} \leq d. \tag{6.9}$$

也就是说，令 $(1/a, 1/b)$ 属于点 (0, 0)、(0, 1)、$(d/(d+1)\ d/(d+1))$、(1, 0) 的凸包。则有 $\diamondsuit_t(a, \infty, b, \infty)$. 1, $\diamondsuit_t(a, b, \infty, \infty)$. 1, $\diamondsuit_t(a, \infty, \infty, b)$. 1, $\diamondsuit_t(\infty, \infty, a, b)$. 1, $\diamondsuit_t(\infty, a, b, \infty)$. 1.

证明。由定理 4.5 可知，假设 (6.9) 蕴含 $\Delta(a, b, \infty)$. 1、$\Delta(a, \infty, b)$. 1 和 $\Delta(\infty, a, b)$. 1。因此，结合这些结果与命题 6.3，定理的结论立即成立。

□

6.2 端点处的尖锐有界性结果： $\diamondsuit_t$ 在 $\mathbb{F}_q^2$上的

在本小 节中，我们汇总了算子 $\diamondsuit_t$ 在二维情形下的有界性结果 s.

定理 6.5。设 $\diamondsuit_t$ 是 $\mathbb{F}_q^2$. 上的$(C_4 + t)$-算子。设 $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq \infty$.

(i) 假设 (p_1, p_2, p_3) $\neq$(2,2,2) 满足以下方程：

$$\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq 2, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{2}{p_2} + \frac{1}{p_3} \leq 2, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{2}{p_3} \leq 2.$$

于是我们有 $\diamondsuit_t(p_1, \infty, p_2, p_3)$. 1 和 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, \infty)$. 1。

(ii) 此外，我们有 $\diamondsuit_t(2, \infty, 2, 2) \lessapprox 1$ 和 $\diamondsuit_t(2, 2, 2, \infty) \lessapprox 1$，其中 $\lessapprox$ 表示 $\diamondsuit_t$ 对所有示性测试函数均有有界性。

证明。注意，将 . 替换为 $\lessapprox$. 后，命题 6.3 仍然成立。因此，结合命题 6.3 和定理 4.11 (ii)，即可直接得到该定理的结论。 □

定理 6.5 保证了算子 $\diamond_t$ 直到端点的尖锐有界性。事实上，我们有以下结果。

定理 6.6. 设 $\diamondsuit_t$ 是 $\mathbb{F}_q^2$. 上的 (C_4+t)-算子。引理 6.2 中给出的 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1 的必要条件均为充分条件，除以下两点外：(p_1,p_2,p_3,p_4) =(2, 2, 2, ∞)、(2, ∞, 2, 2)。

此外，我们有

$$\diamondsuit_t(2,\infty,2,2) \lessapprox 1 \quad and \quad \diamondsuit_t(2,2,2,\infty) \lessapprox 1. \tag{6.10}$$

证明。陈述 (6.10) 已在定理 6.5 (ii) 中证明。因此，利用插值定理和引理 6.2 的第二部分，只需证明对于临界端点 $(1/p_1,1/p_2,1/p_3,1/p_4)$， $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1 成立，其中包括以下所有点：(0, 0, 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(0, 1, 0, 0)、(0, 0, 1, 0)、(0, 0, 0, 1)、$(2/3,2/3,0,0)$、$(2/3,0,2/3,0)$、$(2/3,0,0,2/3)$、(0, $2/3,2/3$, 0)、$(0,0,2/3,2/3)$。

换言之，只需证明以下估计即可完成证明： $\diamondsuit_t(\infty,\infty,\infty,\infty)$. 1， $\diamondsuit_t$(1, ∞, ∞, ∞) . 1， $\diamondsuit_t(\infty,$ 1, ∞, ∞) . 1， $\diamondsuit_t(\infty,\infty,$ 1, ∞) . 1， $\diamondsuit_t(\infty,\infty,\infty,$ 1) . 1,$\diamondsuit_t(3/2,3/2,\infty,\infty)$. 1， $\diamondsuit_t(3/2,\infty,3/2,\infty)$. 1， $\diamondsuit_t$ $(3/2,\infty,\infty,3/2)$. 1， $\diamondsuit_t(\infty,3/2,3/2,\infty)$. 1， $\diamondsuit_t(\infty,\infty,3/2,3/2)$. 1.

然而，根据 直接计算，这些估计立即由定理 6.5 (i) 得出。 □

7 C_4-算子的有界性问题

设 $t \in \mathbb{F}_q^*$. 给定 $\mathbb{F}_q^d$ 上的非负实值函数 f_i、 $1 \le i \le 4$，我们将 $\diamondsuit(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 定义为以下值：

$$\frac{1}{q^d|S_t|^2|S_t^{d-2}|} \sum_{x^1,x^2,x^3,x^4 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1-x^2)S_t(x^2-x^3)S_t(x^3-x^4)S_t(x^4-x^1)\prod_{i=1}^4 f_i(x^i), \tag{7.1}$$

其中，量 $q^d|S_t|^2|S_t^{d-2}|$ 表示 (1.4) 中的归一化因子 $\mathcal{N}(G)$，当 $G = C_4$.由于算子 $\diamondsuit$ 与图 C_4 相关联，因此称其为 $\mathbb{F}_q^d$. 上的 C_4-算子

定义 7.1。设 $1 \le p_1$、 p_2、 p_3、 $p_4 \le \infty$. 我们将 $\diamondsuit(p_1,p_2,p_3,p_4)$ 记为使以下估计对 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有非负实值函数 f_i、 $1 \le i \le 4$ 成立的最小常数：

$$\diamondsuit(f_1,f_2,f_3,f_4) \le \diamondsuit(p_1,p_2,p_3,p_4)||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4}.$$

主要问题是找出所有指数 $1 \le p_1,p_2,p_3,p_4 \le \infty$ ，使得不等式

$$\diamondsuit(f_1,f_2,f_3,f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4} \tag{7.2}$$

对 $\mathbb{F}_q^d$. 上的所有非负实值函数 $f_i, 1 \leq i \leq 4$ 都成立。换言之，我们的主要问题是确定所有数 $1 \leq p_1, p_2, p_3, p_4 \leq \infty$ ，使得 $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1.

引理 7.2（ $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 有界性的必要条件）。假设 (7.2) 成立，即 $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4)$。1. 那么我们有

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \leq d+1, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4} \leq d+1, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4} \leq d+1,$$

$$\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4} \leq d+1, \quad \frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4} \leq 2d-2, \quad and \quad \frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \leq 2d-2.$$

特别地，当 $d = 2$ 时，可以通过 Polymake *[1, 6]* 证明，$(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 包含于以下点的凸包中：(0, 0, 1, 0)、(0, 0, 0, 1)、(0, 1, 0, 0)、$(2/3, 0, 0, 2/3)$、$(2/3, 2/3, 0, 0)$、(1, 0, 0, 0)、(0, 0, 0, 0)、$(0, 2/3, 2/3, 0)$、$(0, 0, 2/3, 2/3)$。

注 7.3。当 $d = 2$，3 时，结论中的前四个不等式并非必要。我们只需要最后两个。

证明。结论中的 6 个不等式可以通过分别将以下特定函数代入不等式 (7.2) 轻松推出：证明留给读者。

1) $f_1 = f_2 = f_3 = 1_{S_t}$，且 $f_4 = \delta_0$. 2) $f_1 = f_2 = f_4 = 1_{S_t}$，且 $f_3 = \delta_0$.
3) $f_1 = f_3 = f_4 = 1_{S_t}$，且 $f_2 = \delta_0$. 4) $f_2 = f_3 = f_4 = 1_{S_t}$，且 $f_1 = \delta_0$.
5) $f_2 = f_4 = 1_{S_t}$，且 $f_1 = f_3 = \delta_0$. 6) $f_1 = f_3 = 1_{S_t}$，且 $f_2 = f_4 = \delta_0$.

□

7.1 C_4-算子 $\diamond$在 $\mathbb{F}_q^d$上的有界性结果

本小节中，我们给出一些指数 $1 \leq p_i \leq \infty, 1 \leq i \leq 4$，使得在 p_i 之一为 ∞. 的特定情形下， $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。不过，我们的结果将适用于所有维数 $d \geq 2$.。一般而言，要推导出 C_4-算子在 $\mathbb{F}_q^d$.上的非平凡有界性结果是非常困难的。

我们首先注意到，通过分别估计 K_2-算子 L 和 P_2-算子 Λ.，可以控制 $\diamond(f_1, f_2, f_3, f_4)$的上界。

Pr命题 7.4. 对于定义在 $\mathbb{F}_q^d, d \geq 2$ 上的所有非负函数 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$，我们有 e

$$\diamond(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1}{|S_t^{d-2}|} L(f_1 f_3,\ f_2) + \Lambda(f_1, f_2, f_3)\right) ||f_4||_\infty, \\ \left(\frac{1}{|S_t^{d-2}|} L(f_2 f_4,\ f_1) + \Lambda(f_4, f_1, f_2)\right) ||f_3||_\infty, \\ \left(\frac{1}{|S_t^{d-2}|} L(f_1 f_3,\ f_4) + \Lambda(f_3, f_4, f_1)\right) ||f_2||_\infty, \\ \left(\frac{1}{|S_t^{d-2}|} L(f_2 f_4,\ f_3) + \Lambda(f_2, f_3, f_4)\right) ||f_1||_\infty. \end{cases}$$

证明. 我们仅给出第一个不等式的证明,

$$\diamond(f_1,f_2,f_3,f_4)\lesssim\frac{1}{|S_t^{d-2}|}L(f_1f_3,\ f_2)||f_4||_\infty+\Lambda(f_1,f_2,f_3)||f_4||_\infty, \tag{7.3}$$

因为通过分别将 f_4 的作用替换为 f_3、f_2、f_1，即可用相同方法轻松证明其他不等式。根据定义，$\diamond(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 的值等于

$$\frac{1}{q^d|S_t|^2|S_t^{d-2}|}\sum_{x^1,x^2,x^3\in\mathbb{F}_q^d}S_t(x^1-x^2)S_t(x^2-x^3)\left(\prod_{i=1}^3f_i(x^i)\right)\left(\sum_{x^4\in\mathbb{F}_q^d}S_t(x^3-x^4)S_t(x^4-x^1)f_4(x^4)\right).$$

对于固定的 x^1、$x^3\in\mathbb{F}_q^d$，上面括号中的求和可估计如下:

$$\sum_{x^4\in\mathbb{F}_q^d}S_t(x^3-x^4)S_t(x^4-x^1)f_4(x^4)\lesssim\begin{cases}|S_t|||f_4||_\infty & \text{if}\quad x^1=x^3,\\ q^{d-2}||f_4||_\infty & \text{if}\quad x^1\neq x^3.\end{cases}$$

注意，使用变量代换后调用附录中的推论 12.4，即可轻松得到这些估计。

设 $\diamond(f_1,f_2,f_3,f_4)=\diamond_1+\diamond_2$，其中 $\diamond_1$ 表示当 $x^1=x^3$ 时对 $\diamond(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 的贡献，而 $\diamond_2$ 表示当 $x^1\neq x^3$. 时的贡献。于是可得

$$\diamond_1\lesssim\frac{||f_4||_\infty}{q^d|S_t||S_t^{d-2}|}\sum_{x^1,x^2\in\mathbb{F}_q^d}S_t(x^1-x^2)(f_1f_3)(x^1)f_2(x^2)=\frac{1}{|S_t^{d-2}|}L(f_1f_3,\ f_2)||f_4||_\infty,$$

$$\diamond_2\lesssim\frac{||f_4||_\infty}{q^d|S_t|^2}\sum_{x^1,x^2,x^3\in\mathbb{F}_q^d:x^1\neq x^3}S_t(x^1-x^2)S_t(x^2-x^3)f_1(x^1)f_2(x^2)f_3(x^3)\lesssim\Lambda(f_1,f_2,f_3)||f_4||_\infty.$$

因此，我们得到了所需的估计（7.3）。 □

在命题 7.4 中，我们得到了 $\diamond(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 的四种不同类型的上界。利用其中每一种，我们都可以推出指数 p_1、p_2、p_3、p_4，满足 $\diamond(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，其中 p_j、$j=1$、2、3、4 中至少有一个取 ∞.

以下结果可通过将命题 7.4 中 $\diamond(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 的第一个上界与定理 3.5 和定理 5.4 结合起来证明。

定理 7.5. 设 $\diamond$ 定义在 $\mathbb{F}_q^d,d\geq2.$ 上的函数上。设 $1\leq p_1,p_2,p_3\leq\infty.$。则以下陈述成立。

(i) 如果 $\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}\leq d$ 和 $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}\leq d$，那么 $\diamond(p_1,p_2,p_3,\infty)$ 。1。 (ii) 如果 $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_4}\leq d$ 和 $\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{d}{p_4}\leq d$，那么 $\diamond(p_1,p_2,\infty,p_4)$ 。1。 (iii) 如果 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}\leq d$ 和 $\frac{d}{p_1}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4}\leq d$，那么 $\diamond(p_1,\infty,p_3,p_4)$ 。1。 (iv) 如果 $\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4}\leq d$ 和 $\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}\leq d$，那么 $\diamond(\infty,p_2,p_3,p_4)$ 。1。

证明。我们只给出定理第一部分的证明，因为其他部分的证明在以下意义上是相同的：第一部分的证明使用了命题 7.4 的第一个上界，而其他部分的证明也可以使用命题 7.4 中各自对应的上界来完成。

让我们开始证明定理的第一部分。为完成证明，我们旨在证明：对于定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有非负函数 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$,

$$\diamond(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_\infty,$$

当指数 $1 \le p_1, p_2, p_3 \le \infty$ 满足以下条件时：

$$\frac{1}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} \le d \quad \text{and} \quad \frac{d}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} \le d. \tag{7.4}$$

由命题 7.4 的第一部分可知,

$$\diamond(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim \left(\frac{1}{|S_t^{d-2}|} L(f_1 f_3,\ f_2) + \Lambda(f_1, f_2, f_3) \right) ||f_4||_\infty.$$

因此，在假设 (7.4) 下，我们的问题归结为建立以下两个估计：

$$L(f_1 f_3,\ f_2) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}, \tag{7.5}$$

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}. \tag{7.6}$$

对于 $1 \le p_1, p_3 \le \infty$，令 $1/r = 1/p_1 + 1/p_3$. 。那么条件 (7.4) 等价于

$$\frac{1}{r} + \frac{d}{p_2} \le d \quad \text{and} \quad \frac{d}{r} + \frac{1}{p_2} \le d.$$

因此这些条件这些条件使我们能够应用定理 3.5，从而得到如下估计 (7.5)：

$$L(f_1 f_3,\ f_2) \lesssim ||f_1 f_3||_r||f_2||_{p_2} \le ||f_1|||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3},$$

其中，最后一个不等式用到了 H¨older 不等式。

剩下的任务是在假设 (7.4) 下证明估计 (7.6)。为此，我们将使用定理 5.4，该定理给出了使 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1 成立的充分条件。我们直接比较条件 (7.4) 与定理 5.4 的假设。不难看出以下结论。

- (情形 1) 当 $0 \le \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_3} \le \frac{d}{d+1}$ 时，条件 (7.4) 蕴含定理 5.4 第一部分的假设。

- (情形 2) 当 $0 \le \frac{1}{p_1} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_3} \le 1$ 时，条件 (7.4) 意味着定理 5.4 第二部分的假设成立。为此，注意到若 $d/p_1 + 1/p_2 + d/p_3 \le d$，则$1/(dp_1) + 1/p_2 + d/p_3 \le d$.

- (情形 3) 当 $0 \le \frac{1}{p_3} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_1} \le 1$ 时，条件 (7.4) 意味着定理 5.4 第三部分的假设成立。

- （情形 4）当 $\frac{d}{d+1} \le \frac{1}{p_1}$、$\frac{1}{p_3} \le 1$ 时，条件 (7.4) 蕴含定理 5.4 第四部分的假设。

因此，根据定理 5.4，在假设 (7.4) 下，我们得到 $\Lambda(p_1, p_2, p_3)$. 1，正如所要求的。

□

7.2 C_4-算子 $\diamond$ on $\mathbb{F}_q^2$ 的尖锐有界性结果

回顾定理 7.5，它为任意维数 $d \ge 2$. 下的 $\diamond(p_1, p_2, p_2, p_4)$. 1 提供了充分条件。在本节中，我们证明定理 7.5 在二维情形下是尖锐的。更确切地说，利用定理 7.5，我们将证明以下最优结果。

定理 7.6. 设 $\diamond$ 为 $\mathbb{F}_q^2$. 上的 C_4-算子。对于 $1 \le p_i \le \infty$、$1 \le i \le 4$，我们有 e

$$\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4) \lesssim 1 \quad \textit{if and only if} \quad \frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{2}{p_3} + \frac{1}{p_4} \le 2, \quad \textit{and} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{2}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{2}{p_4} \le 2.$$

证明。 $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 的必要条件可直接由$d = 2$ 的引理 7.2 得出（见注 7.3）。

反过来，假设 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$ 满足以下两个不等式:

$$\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{2}{p_3} + \frac{1}{p_4} \le 2, \quad \text{and} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{2}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{2}{p_4} \le 2. \tag{7.7}$$

然后，如引理 7.2 中所述，可以通过 Polymake [1, 6] 证明，$(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 包含于点 (0, 0, 1, 0)、(0, 0, 0, 1)、(0, 1, 0, 0)、$(2/3, 0, 0, 2/3)$、$(2/3, 2/3$,0,0)、(1, 0, 0, 0)、(0, 0, 0, 0)、$(0, 2/3,$ $2/3, 0)$、$(0, 0, 2/3, 2/3)$ 的凸包中。

通过对上述 9 个临界点进行插值，要证明对于满足 (7.7) 中不等式的所有 $p_i, 1 \le i \le 4$， $\diamond(p_1, p_2, p_3,$ $p_4)$. 1，只需证明该结论对这 9 个临界点 $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 成立。利用定理 7.5 可以很容易地证明这一点。例如，对于点 $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ =$(2/3, 0, 0, 2/3)$，直接计算表明，定理 7.5 (ii) 中的假设均得到满足，因此 $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4) = \diamond(3/2, \infty, \infty, 3/2)$. 1。对于其他临界点，也可以用同样的方法轻松证明，因此省略详细证明。

□

注意，图 C_4 是图 $C_4 +$ 对角线的子图，它们分别与算子 $\diamond$ 和 $\diamondsuit_t$相关联。因此，以下定理表明，当 G 是 $C_4 +$ 对角线且 G' 是 C_4. 时，问题 1.2 的答案是否定的。不过，这并不意味着猜想 1.5 不成立，因为 C_4 和 $C_4 +$ 对角线不满足猜想 1.5 的主要假设 (1.6)。

定理 7.7. 设 $\diamondsuit_t$ 和 $\diamond$ 分别是 $\mathbb{F}_q^2$ 上的 $(C_4 + t)$-算子和 C_4-算子。设 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty.$ ，则以下陈述成立。

(i) 若 $\diamondsuit(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，则 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。

（ii）此外，存在指数 $1\le a$、b、c、$d\le\infty$，使得 $\diamondsuit_t(a,b,c,d)$. 1，但 $\diamondsuit(a,b,c,d)$ 无界。

证明。首先，我们证明结论中的陈述（ii）。为此，我们选择 (a,b,c,d) $=(3/2,\infty,3/2,\infty)$。由定理 6.5（i）可容易注意到，$\diamondsuit_t(3/2,\infty,3/2,\infty)$. 1。然而，不可能有 $\diamondsuit(3/2,\infty,3/2,\infty)$. 1，这可由定理 7.6 得出。

接下来，我们证明该定理的第一个结论。假设 $\diamondsuit(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，其中 $1\le p_i\le\infty$、$1\le i\le 4.$ 。那么，正如引理 7.2 的第二个结论所述，点 $(1/p_1,1/p_2,1/p_3,1/p_4)$ 位于具有以下临界端点的凸体上：(0, 0, 1, 0)、(0, 0, 0,1)、(0, 1, 0, 0)、$(2/3,$ 0, 0, $2/3)$、$(2/3,$ $2/3,$ 0, 0)、(1, 0, 0, 0)、(0, 0, 0, 0)、$(0,2/3,2/3,$ 0)、$(0,$ 0, $2/3,2/3)$。

应用插值定理，要证明结论 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，只需证明这 9 个临界点 $(1/p_1,1/p_2,1/p_3,1/p_4)$ 处的有界性。更确切地说，还需证明以下估计：

$\diamondsuit_t(\infty,\infty,\infty,\infty)$. 1，$\diamondsuit_t(1,\infty,\infty,\infty)$. 1，$\diamondsuit_t(\infty,1,\infty,\infty)$. 1，$\diamondsuit_t(\infty,\infty,1,\infty)$. 1,$\diamondsuit_t(\infty,\infty,\infty,1)$. 1，$\diamondsuit_t(3/2,3/2,\infty,\infty)$. 1，$\diamondsuit_t(3/2,\infty,\infty,3/2)$. 1，$\diamondsuit_t(\infty,3/2,3/2,\infty)$. 1,$\diamondsuit_t(\infty,\infty,3/2,3/2)$. 1.

然而，这些估计可通过应用定理 6.5 (i) 得出。 □

8 P_3-算子的有界性问题

对于 $\mathbb{F}_q^d$ 上的 $t\in\mathbb{F}_q^*$ 以及非负实值函数 f_i、$i=1$，2、3、4，我们将 $\sqcap(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 定义为以下数值：

$$\frac{1}{q^d|S_t|^3}\sum_{x^1,x^2,x^3,x^4\in\mathbb{F}_q^d}S_t(x^1-x^2)S_t(x^2-x^3)S_t(x^3-x^4)\prod_{i=1}^{4}f_i(x^i). \tag{8.1}$$

由于该算子 $\sqcap$ 与顶点位于 $\mathbb{F}_q^d$、$d\ge 2.$ 中的图 P_3 有关，因此我们将其称为 $\mathbb{F}_q^d$ 上的 P_3-算子。注意，在定义 $\sqcap(f_1,f_2,f_3,f_4)$ 时，我们采用归一化因子 $q^d|S_t|^3$；当 G 为 $P_3.$ 时，该因子对应于 (1.4) 中的 $\mathcal{N}(G)$。

定义 8.1. 设 $1\le p_1,p_2,p_3,p_4\le\infty.$。我们将 $\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)$ 定义为使下述估计对 $\mathbb{F}_q^d$ 上所有非负实值函数 $f_i,i=1$（2、3、4）成立的最小常数：

$$\sqcap(f_1,f_2,f_3,f_4)\le\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4}.$$

我们希望确定 $1\le p_1,p_2,p_3,p_4\le\infty$，使得

$$\sqcap(f_1,f_2,f_3,f_4)\lesssim||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4} \tag{8.2}$$

对 $\mathbb{F}_q^d$. 上所有非负实值函数 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$，都成立。换言之，我们的主要问题是找出所有满足 $\sqcap(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 的数 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$。1.

引理 8.2（ $\sqcap(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 的必要条件）。设 $\sqcap(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。则有 $\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3} \le d$, $\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4} \le d$, $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4} \le d+2$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \le d+2$,$\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \le 2d-1$, $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4} \le 2d-1$, 以及 $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \le 2d$

特别地，当 $d = 2$ 时，利用 Polymake *[1, 6],* 可以证明，$(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 包含于以下点的凸包中：(0, 1, 0, 1/2), (0, 1, 0, 0), (1/2, 0, 1/2, 1), (1/2, 0, 1, 0), (1, 1/2, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1/3, 1/3, 0), (1, 0, 1/2, 0), (1/2, 1/3, 5/6, 0), (1, 0, 0, 1), (1/2, 1/2, 1/2, 1/2), (1, 1/2, 0, 1/2), (0, 5/6, 1/3, 1/2), (0, 0, 0, 1), (0, 1/2, 0, 1), (0, 2/3, 2/3, 0), (0, 1/3, 1/3, 1), (0, 0, 1/2, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0)。

注记 8.3。当 $d = 2$ 时，上述第三、第四和第七个不等式并非必要。当 $d = 3$ 时，上述第三和第四个不等式并非必要。

证明。与命题 3.2、4.2 和 5.2 的证明一样，通过用以下特定函数分别检验不等式 (8.2)，即可得出该陈述的结论：

1) $f_1 = f_3 = 1_{S_t}$、 $f_2 = \delta_0$ 和 $f_4 = 1_{\mathbb{F}_q^d}$. 2) $f_1 = 1_{\mathbb{F}_q^d}$、 $f_2 = f_4 = 1_{S_t}$ 和 $f_3 = \delta_0$.
3) $f_2 = f_3 = f_4 = 1_{S_t}$ 和 $f_1 = \delta_0$. 4) $f_1 = f_2 = f_3 = 1_{S_t}$ 和 $f_4 = \delta_0$.5)
$f_1 = f_3 = 1_{S_t}$ 和 $f_2 = f_4 = \delta_0$. 6) $f_2 = f_4 = 1_{S_t}$ 和 $f_1 = f_3 = \delta_0$.7)
$f_2 = f_3 = 1_{S_t}$ 和 $f_1 = f_4 = \delta_0$.

□

8.1 $\mathbb{F}_q^d$ 上 $\sqcap P_3$ 算子的有界性结果

我们首先注意到， $\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 的一个上界可以由值$\Lambda(f_1, f_2, f_3)$ 控制。

命题 8.4. 设 $1 \le a, b, c \le \infty$.。若 $\Lambda(a, b, c)$. 1，则 $\sqcap(a, b, c, \infty)$. 1 且 $\sqcap(\infty, a, b, c)$. 1。

证明。对于定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的任意非负函数 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$，我们的任务是证明以下不等式：

$$\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim \begin{cases} \Lambda(f_1, f_2, f_3)\ ||f_4||_\infty, \\ ||f_1||_\infty\ \Lambda(f_2, f_3, f_4). \end{cases} \tag{8.3}$$

我们只证明第一个不等式，即

$$\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim \Lambda(f_1, f_2, f_3)\ ||f_4||. \tag{8.4}$$

根据对称性，第二个不等式可以用同样的方法轻松证明。根据 (8.1) 中的定义，

我们可以将 $\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 写成

$$\frac{1}{q^d|S_t|^2}\sum_{x^1,x^2,x^3\in\mathbb{F}_q^d} S_t(x^1-x^2)S_t(x^2-x^3)\left(\prod_{i=1}^{3} f_i(x^i)\right)\left(\frac{1}{|S_t|}\sum_{x^4\in\mathbb{F}_q^d} f_4(x^4)S_t(x^3-x^4)\right).$$

由于上述括号中的值为 $Af_4(x^3)$，显然被 $||Af_4||_\infty$ 控制，因此由 (5.1) 中 $\Lambda(f_1, f_2, f_3)$ 的定义，所需的估计 (8.4) 立即成立。 □

以下定理可由命题 8.4 和定理 5.4 推出。

定理 8.5. 考虑 $\mathbb{F}_q^d$. 上的 P_3-算子 $\sqcap$。假设指数 $1 \le a, b, c \le \infty$ 满足以下条件之一:

(i) $0 \le \frac{1}{a}, \frac{1}{c} \le \frac{d}{d+1}$ *and* $\frac{1}{a} + \frac{d}{b} + \frac{1}{c} \le d$

(ii) $0 \le \frac{1}{a} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{c} \le 1$, *and* $\frac{1}{da} + \frac{1}{b} + \frac{d}{c} \le d$

(iii) $0 \le \frac{1}{c} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{a} \le 1$, *and* $\frac{d}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{dc} \le d$

(iv) $\frac{d}{d+1} \le \frac{1}{a}, \frac{1}{c} \le 1$ *and* $\frac{d}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{c} \le 2d - 1$.

那么我们有 $\sqcap(a, b, c, \infty)$. 1 和 $\sqcap(\infty, a, b, c)$. 1。

证明. 利用定理 5.4 及 $p_1 = a$, $p_2 = b$, $p_3 = c$, 显然对于假设中的所有指数 a, b, c，都有 $\Lambda(a, b, c)$. 1。因此，该结论由命题 8.4 立即推出。

□

现在我们证明，值 $\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 可以用球面上的平均算子来表示。对于 $\mathbb{F}_q^d$ 上的函数 f、g、h，记

$$< f, g, h >:= ||fgh||_1 = \frac{1}{q^d}\sum_{x\in\mathbb{F}_q^d} f(x)g(x)h(x).$$

命题 8.6. 设 $\mathbb{F}_q^d$. 上的 f_i、$i = 1$、2、3、4 为非负实值函数。则有

$$\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) =< Af_1,\ f_2,\ A(f_3 \cdot Af_4) >=< A(f_2 \cdot Af_1),\ f_3,\ Af_4 > .$$

证明 。由对称性，要完成证明，只需证明第一个等式，即

$$\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) =< Af_1,\ f_2,\ A(f_3 \cdot Af_4) > .$$

结合（8.1）中的定义和球面平均算子 A 的定义，可得

that

$$\sqcap(f_1,f_2,f_3,f_4)=\frac{1}{q^d}\sum_{x^2\in\mathbb{F}_q^d}f_2(x^2)Af_1(x^2)\left[\frac{1}{|S_t|}\sum_{x^3\in\mathbb{F}_q^d}f_3(x^3)S_t(x^2-x^3)Af_4(x^3)\right]$$
$$=\frac{1}{q^d}\sum_{x^2\in\mathbb{F}_q^d}f_2(x^2)Af_1(x^2)A(f_3\cdot Af_4)(x^2).$$

这就得到了所需的估计。 □

结合命题 8.6 和球面上的平均估计，我们可以推导出 P_3-算子 $\sqcap$ on $\mathbb{F}_q^d$. 有界性的充分条件

定理 8. 7. 设 $1\le p_1,p_2,p_3,p_4\le\infty$ 为满足以下某一条件的指数:

(i) $0\le\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_4},\ \frac{1}{p_3}+\frac{1}{dp_4}\le\frac{d}{d+1},$ *and* $\frac{1}{dp_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{dp_3}+\frac{1}{d^2p_4}\le 1.$

(ii) $0\le\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_4}\le\frac{d}{d+1}\le\frac{1}{p_3}+\frac{1}{dp_4}\le 1,$ *and* $\frac{1}{dp_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4}\le d.$

(iii) $0\le\frac{1}{p_1},\ \frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}-d+1\le\frac{d}{d+1}\le\frac{1}{p_4}\le 1,$ *and* $\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}\le 2d-1.$

(iv) $0\le\frac{1}{p_1}\le\frac{d}{d+1}\le\frac{1}{p_4},\ \frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}-d+1\le 1,$ *and* $\frac{1}{dp_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{d^2}{p_4}\le d^2.$

(v) $0\le\frac{1}{p_4},\ \frac{1}{p_3}+\frac{1}{dp_4}\le\frac{d}{d+1}\le\frac{1}{p_1}\le 1,$ *and* $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{dp_3}+\frac{1}{d^2p_4}\le d.$

(vi) $0\le\frac{1}{p_4}\le\frac{d}{d+1}\le\frac{1}{p_1},\ \frac{1}{p_3}+\frac{1}{dp_4}\le 1,$ *and* $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4}\le 2d-1.$

(vii) $0\le\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}-d+1\le\frac{d}{d+1}\le\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_4}\le 1,$ *and* $\frac{d^2}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}\le d^2+d-1.$

(viii) $\frac{d}{d+1}\le\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_4},\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}-d+1\le 1,$ *and* $\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{d^2}{p_4}\le d^2+d-1.$

则有 $\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)$ **.** 1 且 $\sqcap(p_4,p_3,p_2,p_1)$ **.** 1。

证明。由对称性，只需证明结论的第一部分，即 $\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)$ **.** 1。为完成证明，我们首先找出保证这一结论成立的一般条件。接下来，我们将证明定理中的每个假设都满足这些一般条件。

为推导出第一个一般条件，我们假设 $1\le r_1,p_2,r\le\infty$ 满足

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{r}\le 1. \tag{8.5}$$

于是，根据命题 8.6 和 H¨older 不等式,

$$\sqcap(f_1,f_2,f_3,f_4)\le||Af_1||_{r_1}||f_2||_{p_2}||A(f_3\cdot Af_4)||_r,$$

其中我们还使用了与归一化计数测度相关的范数的嵌套性质。假设 $1\le p_1$、 $s\le\infty$ 满足球面上的以下平均估计:

$$A(p_1\to r_1)\lesssim 1\quad\text{and}\quad A(s\to r)\lesssim 1. \tag{8.6}$$

由此可得 $\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3 \cdot Af_4||_s$. 现在我们假设 $1 \leq p_3$、$t \leq \infty$ 满足

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{t}. \tag{8.7}$$

那么，由 H¨older 不等式可知

$$\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||Af_4||_t.$$

最后，若假设 $1 \leq p_4 \leq \infty$ 满足以下平均估计：

$$A(p_4 \to t) \lesssim 1, \tag{8.8}$$

那么我们得到 $\sqcap(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4}$.

总之，我们看到，只要数值 $1 \leq p_i \leq \infty, i = 1, 2, 3, 4$ 满足所有条件 (8.5)、(8.6)、(8.7)、(8.8)，就有 $\sqcap(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。因此，为完成证明，我们将证明定理中的 8 个假设各自都满足所有这些条件。

给定 $1 \leq p_1, p_4 \leq \infty$，由引理 2.5 可选取 $1 \leq r_1, t \leq \infty$，使得 (8.6) 中的第一个平均估计和 (8.8) 中的平均估计分别成立。更确切地说，我们可以如下选取$0 \leq 1/r_1$, $1/t \leq 1$：

- 若 $0 \leq \frac{1}{p_1} \leq \frac{d}{d+1}$，则取 $1/r_1 = 1/(dp_1)$。
- 若 $0 \leq \frac{1}{p_4} \leq \frac{d}{d+1}$，则取 $1/t = 1/(dp_4)$。
- 若 $\frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_1} \leq 1$，则选择 $1/r_1 = d/p_1 - d + 1$.
- 若 $\frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_4} \leq 1$，则选择 $1/t = d/p_4 - d + 1$.

下一步，我们利用条件 (8.7) 和 (8.6) 中的第二个平均估计来确定 $1 \leq r \leq \infty$ 。由于可以像上面那样选择两类 t 值，条件 (8.7) 变为

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{dp_4} \quad \text{or} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} - d + 1.$$

将这些 s 值与 (8.6) 中的第二个平均估计结合起来，应用引理 2.5 可使我们选择如下的 $1/r$ 值：

- 若 $0 \leq \frac{1}{s} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{dp_4} \leq \frac{d}{d+1}$，则取 $\frac{1}{r} = \frac{1}{dp_3} + \frac{1}{d^2p_4}$.
- 若 $\frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{s} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{dp_4} \leq 1$，则取 $\frac{1}{r} = \frac{d}{p_3} + \frac{1}{p_4} - d + 1$.
- 若 $0 \leq \frac{1}{s} = \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} - d + 1 \leq \frac{d}{d+1}$，则取 $\frac{1}{r} = \frac{1}{dp_3} + \frac{1}{p_4} - 1 + \frac{1}{d}$.
- 若 $\frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{s} = \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} - d + 1 \leq 1$，则取 $\frac{1}{r} = \frac{d}{p_3} + \frac{d^2}{p_4} - d^2 + 1$.

最后，将条件 (8.5) 与先前为 r_1 选定的两个值和为 r选定的四个值结合起来。这样便得到所需的其余条件。 □

注 8.8. 请注意，定理 8.5 是定理 8.7 的特例。不过，定理 8.5 的证明比定理 8.5 的证明简单得多。

我们不知道定理 8.5 和定理 8.7 的推论是否能推出 P_3-算子 $\sqcap$ on $\mathbb{F}_q^d$. 的尖锐有界性结果。不过，它们在证明下面的定理时发挥着重要作用。该定理指出， $\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1 的指数所受限制比 $\diamondsuit_t$ (p_1,p_2,p_3,p_4) . 1 的指数更少。具体表述如下。

定理 8.9. 设 $\diamondsuit_t$ 和 $\sqcap$ 是作用于 $\mathbb{F}_q^2$. 上函数的算子。若对于 $1 \le p_1,p_2,p_3,p_4 \le \infty$，有 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,$ $p_3,p_4)$. 1，则 $\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。

证明。假设对于 $1 \le p_1,p_2,p_3,p_4 \le \infty.$，有 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。那么，根据引理 6.2，点 $(1/p_1,$ $1/p_2,1/p_3,1/p_4)$ 属于以下各点的凸包：(0, 0, 1,0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), $(1/2, 0, 1/2, 1/2)$, $(2/3,$ $2/3, 0, 0)$, (1, 0, 0, 0), $(2/3, 0, 2/3, 0)$, $(1/2, 1/2, 1/2, 0)$, $(2/3, 0, 0, 2/3)$, $(0, 2/3, 2/3, 0)$, (0, 0, 0, 0), $(0, 0, 2/3, 2/3)$。

为完成证明，根据插值定理，只需证明对于上述每个临界点（$1/p_1$、 $1/p_2$、 $1/p_3$、 $1/p_4$），我们有

$$\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4) \lesssim 1.$$

为证明这一点，我们将使用定理 8.7 和定理 8.5。根据定理 8.7 的假设 (i)，可以注意到 $\sqcap(3/2,\infty,\infty,$ $3/2)$ 。1，这对应于点（$1/p_1$、 $1/p_2$、 $1/p_3$、 $1/p_4$） =$(2/3,\ 0,\ 0,\ 2/3)$。类似地，定理 8.7 的假设 (ii) 可用于点（$1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1/2$），即 $\sqcap(2,\ \infty,\ 2,\ 2)$ 。1。

对于其他任意点，我们可以应用定理 8.5。更准确地说，对于这些点，我们可以在假设 (i) 下应用定理 8.5：(0, 1, 0, 0)、$(2/3, 2/3, 0, 0)$、$(2/3, 0, 2/3, 0)$、$(1/2, 1/2, 1/2, 0)$、$(0, 2/3, 2/3, 0)$、(0, 0, 0, 0)、$(0, 0, 2/3, 2/3)$。点 (0, 0, 1, 0)、(0, 0, 0, 1) 可在假设 (ii) 下由定理 8.5 得到。最后，对于点 (1, 0, 0, 0)，我们可以在假设 (iii) 下应用定理 8.5，证明 $\sqcap(1,\infty,\infty,\infty)$. 1。至此，证明完成。

□

注 8.10. 定理 8.9 的逆命题一般并不成立。作为反例，我们可以取 $p_1 = 3/2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 3/2,$ $p_4 = \infty.$ 事实上，定理 8.5 的假设 (i) 与$d = 2$ 蕴含 $\sqcap(3/2, 3, 3/2, \infty)$. 1。然而， $\diamondsuit_t(3/2, 3, 3/2, \infty)$ 无法有界，这可由引理 6.2 得出。

下面的推论是定理 8.9 的推论。

推论 8.11. 猜想 1.5 对图 C_4 +对角线及其子图 P_3 在 $\mathbb{F}_q^2$. 中成立

证明。显然， P_3 是 $\mathbb{F}_q^2$. 中 C_4 + 对角线的子图。对于 $d = 2$，显然可以注意到 $\min\{\delta($ $C_4 + diagonal)\ d\} = 2 > \delta(P_3) = 1.$ 。因此，图 C_4 + 对角线及其子图 P_3 满足猜想 1.5 的所有假设。于是，该推论的陈述

可由定理 8.9 立即推出，因为算子 $\diamondsuit_t$ 和 $\sqcap$ 分别与 C_4 + 对角线及其子图 P_3相关。

□

下面的定理给出了问题 1.2 肯定答案的一个具体例子，因为算子 $\diamond$ 和 $\sqcap$ 分别与图 C_4 及其子图 P_3 相关。此外，这些图也满足猜想 1.5（见下文推论 8.14）。

定理 8.12. 设 $\diamond$ 和 $\sqcap$ 是作用于 $\mathbb{F}_q^2$. 上函数的算子。若 $\diamond(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1,$1 \le p_1,p_2,p_3,p_4 \le \infty$, 则 $\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。

证明. 根据定理 7.7 (i)，若 $\diamond(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，则 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。根据定理 8.9，若$\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，则 $\sqcap(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。因此，结论成立。 □

注 8.13. 定理 8.12 的逆命题不成立。与注 8.10 一样，若我们可以取 $p_1 = 3/2, p_2 = 3, p_3 = 3/2, p_4 = \infty$，则 $\sqcap(3/2, 3, 3/2, \infty)$. 1。然而， $\diamond(3/2, 3, 3/2, \infty)$ 无法有界，这由定理 7.6 得出。

推论 8.14. 猜想 1.5 对图 C_4 及其在 $\mathbb{F}_q^2$. 上的子图 P_3 成立

证明. 猜想 1.5 的主要假设 (1.6) 对图 C_4 及其在$\mathbb{F}_q^2$ 上的子图P_3 成立：

$$\min\{\delta(C_4), 2\} = 2 > 1 = \delta(P_3).$$

由于算子 $\diamond$ 和 $\sqcap$ 分别与图 C_4 及其子图 P_3相关联，因此该推论由定理 8.12 得出。

□

9 与图 K_3 + 尾巴（风筝图）相关的算子

给定 $t \in \mathbb{F}_q^*$以及定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的函数 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$，我们将 $\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 定义为以下数值：

$$\frac{1}{q^d|S_t|^2|S_t^{d-2}|} \sum_{x^1,x^2,x^3,x^4 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1 - x^2)S_t(x^2 - x^3)S_t(x^3 - x^4)S_t(x^3 - x^1) \prod_{i=1}^{4} f_i(x^i).$$

注意，该算子 $\trianglelefteq$ 与图 K_3 +尾巴（图 1g）相关，因此，式 (1.4) 中的归一化因子 $\mathcal{N}(G)$ 可以取为量 $q^d|S_t|^2|S_t^{d-2}|$.

定义 9.1。对于 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$，我们将 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 定义为使下述估计对 $\mathbb{F}_q^d$ 上所有非负实值函数 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ 都成立的最小常数：

$$\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4) \le \trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4}.$$

在这里，我们的主要问题是确定所有满足以下条件的指数 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$

$$\trianglelefteq (f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4} \tag{9.1}$$

对于 $\mathbb{F}_q^d$. 上的所有非负实值函数 $f_i, i = 1, 2, 3, 4$，均成立。换言之，我们需要确定所有满足 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 的数 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$。

回想一下，当 $d = 2$ 时，我们假设 $3 \in \mathbb{F}_q$ 是一个平方数。

引理 9.2（ $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 有界性的必要条件）。假设 (9.1) 成立，即 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 。1. 则我们有

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4}\le d,\quad \frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}\le d,\quad \frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\le d,$$

$$\frac{1}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}\le 2d-1,\quad and\quad \frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4}\le 2d-1.$$

特别地，如果 $d = 2$，那么可以借助 Polymake *[1, 6]* 证明，$(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 包含于以下各点构成的凸包中：(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, $1/2$), ($2/3$, 0, $2/3$,0), ($1/2$, $1/2$, $1/2$, 0), ($5/6$, 0, $1/3$, $1/2$), (1, 0, 0, 0), ($1/3$, 0, $1/3$, 1), ($5/8$, $5/8$, $1/8$, $1/2$), ($1/2$, 0, 0, 1), ($1/4$, $1/4$, $1/4$, 1), ($1/3$, $1/3$, 0, 1), (1, 0, 0, $1/2$), ($2/3$, $2/3$, 0, $1/2$), ($2/3$, $2/3$, 0, 0), (0, $1/2$, 0, 1), (0, $1/3$, $1/3$, 1), (0, 0, 0, 1), (0, $5/6$, $1/3$, $1/2$), (0, 0, $1/2$, 1), (0, 0, 0, 0), (0, $2/3$, $2/3$, 0)。

证明。为推出第一个不等式，我们在 (9.1) 中取 $f_1 = f_2 = f_4 = 1_{S_t}$ 和 $f_3 = \delta_0$. 。为得到第二个不等式，我们在 (9.1) 中取 $f_1 = f_3 = 1_{S_t}$、$f_2 = \delta_0$ 和 $f_4 = 1_{\mathbb{F}_q^d}$. 。为得到第三个不等式，我们在 (9.1) 中取 $f_1 = \delta_0$、$f_2 = f_3 = 1_{S_t}$ 和 $f_4 = 1_{\mathbb{F}_q^d}$. 。为证明第四个不等式，我们在 (9.1) 中取 $f_1 = f_3 = 1_{S_t}$ 和 $f_2 = f_4 = \delta_0$. 。最后，为得到第五个不等式，我们在 (9.1) 中取 $f_1 = f_4 = \delta_0$ 和 $f_2 = f_3 = 1_{S_t}$。 □

9.1 $\trianglelefteq$ 在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的有界性的充分条件

当指数 p_1、p_2、p_4 中有一个为 ∞ 时，$\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 的有界性问题可化归为 K_3-算子 Δ 或 P_2-算子 Λ. 的有界性问题

命题 9.3。设 $1 \le a$、b、$c \le \infty$.

(i) 如果 $\Delta(a, b, c)$. 1，那么 $\trianglelefteq(a, b, c, \infty)$. 1。

(ii) 如果 $\Lambda(a, b, c)$. 1，那么 $\trianglelefteq(\infty, a, b, c)$. 1 且 $\trianglelefteq(a, \infty, b, c)$. 1。

证明。对于 $\mathbb{F}_q^d$. 上的所有非负函数 f_i、$i = 1$、2、3、4，我们旨在证明以下不等式：

$$\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim \begin{cases} \Delta(f_1, f_2, f_3)\ ||f_4||_\infty, \\ ||f_1||_\infty\ \Lambda(f_2, f_3, f_4), \\ ||f_2||_\infty\ \Lambda(f_1, f_3, f_4). \end{cases} \tag{9.2}$$

根据定义，$\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 可表示为

$$\frac{1}{q^d|S_t||S_t^{d-2}|}\sum_{x^1,x^2,x^3\in\mathbb{F}_q^d} S_t(x^1-x^2)S_t(x^2-x^3)S_t(x^3-x^1)\left(\prod_{i=1}^3 f_i(x^i)\right)\left(\frac{1}{|S_t|}\sum_{x_4\in\mathbb{F}_q^d} S_t(x^3-x^4)f_4(x^4)\right).$$

上面括号中的求和显然被 $||f_4||_\infty$ 支配，对所有 $x^3 \in \mathbb{F}_q^d.$ 均成立。因此，回想式 (4.1) 中 $\Delta(f_1, f_2, f_3)$ 的定义，我们得到 (9.2) 中的第一个不等式：

$$\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4) \leq \Delta(f_1, f_2, f_3)||f_4||_\infty.$$

现在我们证明 (9.2) 中的第二个和第三个不等式。我们只给出第二个不等式的证明，即

$$\trianglelefteq (f_1, f_2, f_3, f_4) \leq ||f_1||_\infty \ \Lambda(f_2, f_3, f_4). \tag{9.3}$$

第三个不等式可以通过交换变量 x^1、$x^2.$ 的角色类似地证明。我们将 $\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 写成如下形式：

$$\frac{1}{q^d|S_t|^2} \sum_{x^2,x^3,x^4 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^2-x^3)S_t(x^3-x^4) \left(\prod_{i=2}^4 f_i(x^i) \right) \left(\frac{1}{|S_t^{d-2}|} \sum_{x^1 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^1-x^2)S_t(x^3-x^1)f_1(x^1) \right).$$

回顾 (5.1) 中 $\Lambda(f_2, f_3, f_4)$ 的定义。于是，要证明不等式 (9.3)，只需证明对所有满足 $||x^2 - x^3|| = t \neq 0$ 的 $x^2, x^3 \in \mathbb{F}_q^d$，上面括号中的值为 $\lesssim ||f_1||_\infty$。现在通过简单的变量代换，上面括号中的值等于

$$\frac{1}{|S_t^{d-2}|} \sum_{x^1 \in S_t} S_t((x^3 - x^2) - x^1)f_1(x^1 + x^2).$$

这显然不超过

$$\frac{1}{|S_t^{d-2}|} \sum_{x^1 \in S_t} S_t((x^3 - x^2) - x^1)||f_1||_\infty.$$

由于 $||x^3 - x^2|| = t \neq 0$，应用附录中的推论 12.4 即可得到所需的估计。 □

我们讨论 $\trianglelefteq$ 在 $\mathbb{F}_q^d.$ 上有界性的充分条件

以下结果可由命题9.3（i）得到。

定理9.4. 设 $\trianglelefteq$ 定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的函数上，$d \geq 2.$。假设 $1 \leq a,\ b \leq \infty$ 满足以下方程：

$$\frac{1}{a} + \frac{d}{b} \leq d \quad and \quad \frac{d}{a} + \frac{1}{b} \leq d.$$

那么我们有 $\trianglelefteq(a, b, \infty, \infty)$. 1，$\trianglelefteq(a, \infty, b, \infty)$. 1，$\trianglelefteq(\infty, a, b, \infty)$. 1。

证明。该结论立即由命题9.3（i）与定理 4.5 结合得到。 □

利用命题9.3（ii）可推导出以下结果。

定理 9.5. 设 $\trianglelefteq$ 定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的函数上，$d \geq 2.$ 假设 $1 \leq a, b, c \leq \infty$ 满足以下条件之一：

(i) $0 \le \frac{1}{a}, \frac{1}{c} \le \frac{d}{d+1}$ *and* $\frac{1}{a} + \frac{d}{b} + \frac{1}{c} \le d$,

(ii) $0 \le \frac{1}{a} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{c} \le 1$, *and* $\frac{1}{da} + \frac{1}{b} + \frac{d}{c} \le d$,

(iii) $0 \le \frac{1}{c} \le \frac{d}{d+1} \le \frac{1}{a} \le 1$, *and* $\frac{d}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{dc} \le d$,

(iv) $\frac{d}{d+1} \le \frac{1}{a}, \frac{1}{c} \le 1$ *and* $\frac{d}{a} + \frac{1}{b} + \frac{d}{c} \le 2d - 1$.

那么我们有 $\trianglelefteq(\infty, a, b, c) \cdot 1$ 和 $\trianglelefteq(a, \infty, b, c) \cdot 1$。

证明。根据我们对数值 a、b、c 的假设，由定理 5.4 可知 $\Lambda(a, b, c) \cdot 1$。因此，应用命题9.3（ii）即可得出结论。 □

9.2 $\trianglelefteq$ 的有界性（二维）

定理 9.4、定理 9.5 给出了适用于高维的非平凡结果。本节将说明，在二维情形下还可以进一步改进。在陈述并证明这些改进之前，我们先汇总二维情形下可由定理 9.4、定理 9.5 直接推出的结果。

为推出下述定理，我们将对 $d = 2$. 应用定理9.4

定理 9.6。设 $\trianglelefteq$ 定义在 $\mathbb{F}_q^2$. 上的函数上。那么，只要 (p_1, p_2, p_3, p_4) 是以下点之一：$(\infty, \infty, \infty, \infty)$、$(1, \infty, \infty, \infty)$、$(\infty, 1, \infty, \infty)$、$(\infty, \infty, 1, \infty)$、$(3/2, 3/2, \infty, \infty)$、$(3/2, \infty, 3/2, \infty)$、$(\infty, 3/2, 3/2, \infty)$，就有 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot 1$。

证明。利用定理9.4的第一个结论和 $d = 2$，可知当 (p_1, p_2, p_3, p_4) 取以下各点时，$\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot 1$：$(\infty, \infty, \infty, \infty)$、$(1, \infty, \infty, \infty)$、$(\infty, 1, \infty, \infty)$、$(3/2, 3/2, \infty, \infty)$。

接下来，定理9.4的第二个结论和 $d = 2$ 意味着，对于点 $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\infty, \infty, 1, \infty)$、$(3/2, \infty, 3/2, \infty)$，有 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot 1$。最后，由定理9.4的第三个结论和 $d = 2$ 可知，对于 $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\infty, 3/2, 3/2, \infty)$，$\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot 1$。因此，证明完毕。

□

下面的定理将通过将定理 9.5 与 $d = 2$. 配合应用来证明

定理 9.7. 设 $\trianglelefteq$ 定义在 $\mathbb{F}_q^2$. 上的函数上。假设 (p_1, p_2, p_3, p_4) 是以下点之一：$(\infty, \infty, \infty, 1)$、$(2, \infty, 2, 2)$、$(3/2, \infty, \infty, 3/2)$、$(\infty, \infty, 3/2, 3/2)$。则有 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot 1$。

证明。利用假设 (ii) 和定理 9.5 的第一个结论，可得 $\trianglelefteq(\infty, \infty, \infty, 1) \cdot 1$。根据假设 (i) 和定理 9.5 的第二个结论，可直接得出 $\trianglelefteq(2, \infty, 2, 2) \cdot 1$ 和 $\trianglelefteq(3/2, \infty, \infty, 3/2) \cdot 1$。最后，要证明 $\trianglelefteq(\infty, \infty, 3/2, 3/2) \cdot 1$，可使用假设 (i) 和定理 9.5 的第一个结论。

□

现在我们在介绍 $\trianglelefteq(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 与双线性平均算子之间的联系 .

命题 9.8。设 B 为如 (4.2) 中定义的双线性算子。那么，对于 $\mathbb{F}_q^2$ 上的任意非负实值函数 f_i、$i=1$、2、3、4，我们有

$$\trianglelefteq(f_1,f_2,f_3,f_4)=||B(f_1,f_2)\cdot f_3\cdot Af_4||_1,$$

其中， A 表示在 $\mathbb{F}_q^2$.中的圆上的平均算子

证明。在二维中， $\trianglelefteq(f_1,f_2,f_3,f_4)$可改写为如下形式：

$$\frac{1}{q^2|S_t|^2}\sum_{x^1,x^2,x^3,x^4\in\mathbb{F}_q^2}S_t(x^1-x^2)S_t(x^3-x^2)S_t(x^3-x^4)S_t(x^3-x^1)\prod_{i=1}^4 f_i(x^i).$$

通过作变量代换，令 $y^1=x^3-x^1$, $y^2=x^3-x^2$, $y^3=x^3$, $y^4=x^3-x^4$，则 $\trianglelefteq(f_1,f_2,f_3,f_4)$的值变为

$$\frac{1}{q^2|S_t|^2}\sum_{y^1,y^2,y^3,y^4\in\mathbb{F}_q^2}S_t(y^2-y^1)S_t(y^2)S_t(y^4)S_t(y^1)f_1(y^3-y^1)f_2(y^3-y^2)f_3(y^3)f_4(y^3-y^4).$$

这可以表示如下：

$$\frac{1}{q^2}\sum_{y^3\in\mathbb{F}_q^2}f_3(y^3)\left(\frac{1}{|S_t|}\sum_{y^4\in S_t}f_4(y^3-y^4)\right)\left(\frac{1}{|S_t|}\sum_{y^1,y^2\in S_t:||y^2-y^1||=t}f_1(y^3-y^1)f_2(y^3-y^2)\right).$$

回顾式（2.1）中平均算子的定义以及式（4.2）中双线性平均算子的定义，可得

$$\trianglelefteq(f_1,f_2,f_3,f_4)=\frac{1}{q^2}\sum_{y^3\in\mathbb{F}_q^2}f_3(y^3)Af_4(y^3)B(f_1,f_2)(y^3).$$

根据归一化范数 $||\ \ ||_1$的定义，结论得证。 □

对于 $1\le p_1,p_2,p_3,p_4\le\infty$，回顾一下，若对 $\mathbb{F}_q^2$ 的所有子集 E,F,G,H，下述估计均成立，则使用记号 $\trianglelefteq(p_1,p_2,p_3,p_4)\lessapprox 1$：

$$\trianglelefteq(E,F,G,H)\lesssim||E||_{p_1}||F||_{p_2}||G||_{p_3}||H||_{p_4},$$

这一估计称为限制强型 $\trianglelefteq(p_1,p_2,p_3,p_4)$ 估计。

下面的定理是我们关于二维情形的主要结果，它为算子 $\trianglelefteq$ 的有界性给出了新的限制强型估计。

定理 9.9. 设 $\trianglelefteq$ 定义在 $\mathbb{F}_q^2$. 上的函数上。设 $1\le p_3,p_4\le\infty$. 。那么，对于 $\mathbb{F}_q^2$的所有子集 E, F，以及定义在 $\mathbb{F}_q^2$.上的所有非负函数 f_3,f_4，以下陈述均成立。

(i) 若 $2 \le p_3 \le \infty$, $3/2 \le p_4 \le \infty$ 和 $\frac{1}{p_3} + \frac{1}{2p_4} \le \frac{1}{2}$，则有

$$\trianglelefteq(E, F, f_3, f_4) \lesssim ||E||_2 ||F||_2 ||f_3||_{p_3} ||f_4||_{p_4}.$$

(ii) 若 $2 \le p_3 \le \infty$、 $4/3 \le p_4 \le 3/2$ 和 $\frac{1}{p_3} + \frac{2}{p_4} \le \frac{3}{2}$，则有

$$\trianglelefteq(E, F, f_3, f_4) \lesssim ||E||_2 ||F||_2 ||f_3||_{p_3} ||f_4||_{p_4}.$$

证明。设 E、F 是 $\mathbb{F}_q^2$ 的子集，且 f、g 是定义在 $\mathbb{F}_q^2$. 上的非负实值函数。由命题 9.8 和 Hölder 不等式可得，对于 $2 \le p_3 \le \infty$,

$$\trianglelefteq(E, F, f_3, f_4) \le ||B(E, F)||_2 ||f_3||_{p_3} ||Af_4||_{\frac{2p_3}{p_3-2}}.$$

这里我们还注意到 $2 \le \frac{2p_3}{p_3-2} \le \infty.$。由于根据引理 4.10， $||B(E, F)||_2 \lesssim ||E||_2 ||F||_2$，我们得到

$$\trianglelefteq(E, F, f_3, f_4) \le ||E||_2 ||F||_2 ||f_3||_{p_3} ||Af_4||_{\frac{2p_3}{p_3-2}}.$$

因此，为完成证明，只需证明对于满足该定理假设的所有指数 p_3、p_4，有

$$A\left(p_4 \to \frac{2p_3}{p_3 - 2}\right) \lesssim 1. \tag{9.4}$$

为证明这一点，我们首先回顾定理 2.3 中 $d = 2$ 的情形：对于任意满足 $(1/p, 1/r)$ 位于点 (0, 0)、(0, 1)、(1, 1) 和 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ 的凸包上的数 $1 \le p$、$r \le \infty$， $A(p \to r)$. 1。再应用引理 2.5，求出表明 $A(p \to r)$. 1 的端点估计的方程。利用这些平均估计以及 $p = p_4$、$r = \frac{2p_3}{p_3-2}$，通过直接计算即可得到不等式 (9.4)，其中还用到了如下事实： $2 \le r = \frac{2p_3}{p_3-2} \le \infty.$

□

以下推论是定理 9.9 的直接结果。

推论 9.10。设 $\trianglelefteq$ 定义在 $\mathbb{F}_q^2$. 上的函数上。则有 $\trianglelefteq(2, 2, 2, \infty) \lessapprox 1.$

证明。该陈述可由直接应用定理 9.9 (i) 得出。 □

下面的定理表明， $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 的指数比 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 的指数受到更多限制（端点除外）。这也为问题 1.2 提供了肯定的答案，因为图 $K_3 +$ 尾巴是图 $C_4 +$ 对角线的子图。

定理 9.11。设 $\diamondsuit_t$ 和 $\trianglelefteq$ 是作用于 $\mathbb{F}_q^2$. 上函数的算子。假设对于 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty.$，$\diamondsuit_t($ $p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。则除了点 (2,2,2, ∞) 外，有 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。此外，有 $\trianglelefteq(2, 2, 2, \infty) \lessapprox 1.$

证明。假设 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 对于 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty.$ 那么，根据引理 6.2，点 $(1/p_1, 1/p_2,$ $1/p_3, 1/p_4)$ 包含于以下各点的凸包中：(0, 0, 1,0),

(0,1,0,0)，(0, 0, 0, 1)，$(1/2, 0, 1/2, 1/2)$，$(2/3, 2/3, 0, 0)$，(1, 0, 0, 0)，$(2/3, 0, 2/3, 0)$，$(1/2, 1/2, 1/2, 0)$，(2/3,0,0, 2/3)，$(0, 2/3, 2/3, 0)$，(0, 0, 0, 0)，$(0, 0, 2/3, 2/3)$。

由定理 9.6、9.7，强型估计 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 对上述所有点 $(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 均成立，除了 $(1/2, 1/2, 1/2, 0)$。此外，根据推论 9.10，我们知道$\trianglelefteq$(2,2,2, ∞) $\lessapprox 1$. 因此，通过对这些点进行插值即可得到所述结论。 □

注 9.12。定理 9.11 的逆命题不成立。为此，注意由定理 9.9 (ii) 可知 $\trianglelefteq(2, 2, 6, 3/2) \lessapprox 1$. 此外，根据引理 6.2，注意到 $\diamondsuit_t(2, 2, 6, 3/2)$ 不可能有界。

推论 9.13. 猜想 1.5 对图 C_4 +对角线及其子图K_3 + 尾巴，在 $\mathbb{F}_q^2$. 中直到端点均成立

证明. 算子 $\diamondsuit_t$ 和 $\trianglelefteq$ 分别与 $C_4 +$ 对角线及其子图 $K_3 +$ 尾巴在 $\mathbb{F}_q^2$ 中相关联。因此，利用定理 9.11，证明可归结为说明 C_4 +对角线及其子图 $K_3 +$ 尾巴满足猜想 1.5 的主要假设 (1.6)。然而，显然

$$\min\{\delta(C_4 + diagonal), 2\} = 2 > 1 = \delta(K_3 + tail).$$

因此，证明完成。 □

下面的定理表明，尽管对应于图 C_4 和 $K_3 +$ 尾巴的算子并非彼此的子图所对应的算子，但它们的有界性指数之间存在包含关系。

定理 9.14. 设 $\diamond$ 和 $\trianglelefteq$ 定义在 $\mathbb{F}_q^2$ 上的函数上，且 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$. 那么，如果 $\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1，则有 $\trianglelefteq(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。

证明。首先，由定理 7.6 可知，$\diamond$(2, 2, 2, ∞) 不可能有界。现在假设$\diamond(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。那么 $(p_1, p_2, p_3, p_4) \neq$ (2, 2, 2, ∞)。利用定理 7.7，可得 $\diamondsuit_t(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。于是，结论立即由定理 9.11 得出。 □

结合注 9.12 和定理 7.7，显然定理 9.14 的逆命题不成立。请注意，定理 9.14 给出了一个满足猜想 1.5 的例子，且无需假设 G' 是图 G.的子图

10 Y形图的有界性问题

本节中，我们研究图 1h 中 Y 形图对应算子的有界性。对于 $t \in \mathbb{F}_q^*$，Y 形算子 Y 定义为

$$Y(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{1}{q^d |S_t|^3} \sum_{x^1, x^2, x^3, x^4 \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^3 - x^1) S_t(x^3 - x^2) S_t(x^3 - x^4) \prod_{i=1}^{4} f_i(x^i), \qquad (10.1)$$

其中函数 f_i、$i=1$、2、3、4 定义在 $\mathbb{F}_q^d$. 上。注意，该算子 Y 与 Y 形图有关，因此 (1.4) 中的归一化因子 $\mathcal{N}(G)$ 可以取为 $q^d|S_t|^3$.

Y形算子的算子范数按标准方式定义。

定义 10.1. 对于 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$，算子范数 $Y(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 定义为满足以下估计的最小常数，其中对 $\mathbb{F}_q^d$ 上所有非负实值函数 $f_i, i=1,2,3,4$ 均成立：

$$Y(f_1, f_2, f_3, f_4) \le Y(p_1, p_2, p_3, p_4)||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}||f_3||_{p_3}||f_4||_{p_4}. \tag{10.2}$$

我们的目标是找出所有满足 $\preceq(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1 的数 $1 \le p_1, p_2, p_3, p_4 \le \infty$。

引理 10.2（$Y(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 有界性的必要条件）。设 $1 \le p_i \le \infty, 1 \le i \le 4.$。假设 $Y(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1。那么以下不等式均成立：

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{d}{p_3}+\frac{1}{p_4} \le d, \quad \frac{d}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \le 3d-2, \quad \frac{d}{p_1}+\frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3} \le 2d-1,$$

$$\frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \le 2d-1, \frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \le 2d-1, \quad \frac{d}{p_1}+\frac{1}{p_3} \le d, \quad \frac{d}{p_2}+\frac{1}{p_3} \le d, \quad \frac{1}{p_3}+\frac{d}{p_4} \le d.$$

特别地，若 $d=2$，则可通过 Polymake *[1, 6]* 证明，$(1/p_1, 1/p_2, 1/p_3, 1/p_4)$ 包含在以下点的凸包中：(0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1/2), (1, 0, 1/2, 0), (1/2, 1, 0, 1/2), (1, 1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2, 0, 1), (1, 0, 1/3, 1/3), (1/2, 5/6, 1/3, 0), (1, 1/2, 0, 0), (1/2, 0, 1/3, 5/6), (1/2, 1, 0, 0), (1, 1/3, 1/3, 0), (1/2, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 2/3, 2/3), (0, 5/6, 1/3, 1/2), (0, 1, 0, 1/2), (0, 1/2, 1/3, 5/6), (0, 1/2, 0, 1), (0, 2/3, 2/3, 0)。

证明。通过直接计算，分别将以下特定函数代入不等式 (10.2) 进行检验，即可轻易得出引理的结论：

1) $f_1 = f_2 = f_4 = 1_{S_t}$, $f_3 = \delta_0$.
2) $f_1 = f_2 = f_4 = \delta_0$, $f_3 = 1_{S_t}$.3)
$f_1 = f_2 = \delta_0, f_3 = 1_{S_t}, f_4 = 1_{\mathbb{F}_q^d}$.
4) $f_1 = f_2 = \delta_0, f_2 = 1_{\mathbb{F}_q^d}, f_3 = 1_{S_t}$.5)
$f_1 = 1_{\mathbb{F}_q^d}, f_2 = f_4 = \delta_0, f_3 = 1_{S_t}$.
6) $f_1 = \delta_0, f_2 = f_4 = 1_{\mathbb{F}_q^d}, f_3 = 1_{S_t}$.7)
$f_1 = f_4 = 1_{\mathbb{F}_q^d}, f_2 = \delta_0, f_3 = 1_{S_t}$.
8) $f_1 = f_2 = 1_{\mathbb{F}_q^d}, f_3 = 1_{S_t}, f_4 = \delta_0$.

□

10.1 Y 在 $\mathbb{F}_q^d$上的有界性的充分条件

不难看出，Y形算子的有界性问题可以归结为球面平均估计。事实上，(10.1) 中的值 $Y(f_1, f_2, f_3, f_4)$ 可写为

$$Y(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{1}{q^d} \sum_{x^3 \in \mathbb{F}_q^d} f_3(x^3) \prod_{i=1,2,4} \left(\frac{1}{|S_t|} \sum_{x^i \in \mathbb{F}_q^d} S_t(x^3 - x^i) f_i(x^i) \right).$$

根据平均算子 $A = A_{S_t}$ 在 (2.2) 中的定义，我们得到

$$Y(f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{1}{q^d} \sum_{x^3 \in \mathbb{F}_q^d} f_3(x^3) A f_1(x^3) A f_2(x^3) A f_4(x^4) = ||Af_1 \cdot Af_2 \cdot f_3 \cdot Af_4||_1.$$

由 H″older 不等式和范数的嵌套性质 $||\cdot||_p$，可得

$$Y(f_1, f_2, f_3, f_4) \leq ||Af_1||_{r_1} ||Af_2||_{r_2} ||f||_{p_3} ||Af_4||_{r_4} \quad \text{if} \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{r_4} \leq 1. \tag{10.3}$$

命题 10.3. 设 $1 \leq p_1, p_2, p_3, p_4, r_1, r_2, r_4 \leq \infty$ 为满足以下假设的扩展实数： $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{r_4} \leq 1$ 且 $A(p_i \to r_i)$. 1 对所有 $i = 1, 2, 4$ 成立。则有

$$Y(p_1, p_2, p_3, p_4) \lesssim 1.$$

证明。将不等式 (10.3) 与关于平均估计的假设结合起来，可知对于定义在 $\mathbb{F}_q^d$ 上的所有函数 f_i, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$Y(f_1, f_2, f_3, f_4) \lesssim ||f_1||_{p_1} ||f_2||_{p_2} ||f_3||_{p_3} ||f_4||_{p_4}.$$

证明至此完成。 □

下面的定理给出了许多保证 Y-形算子有界性的充分条件。

定理 10.4. 设 $1 \leq p_1, p_2, p_3, p_4 \leq \infty$ 和 Y 为 $\mathbb{F}_q^d$. 上的 Y-形算子。则 $Y(p_1, p_2, p_3, p_4)$. 1，前提是满足以下条件之一：

(i) $0 \leq \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_4} \leq \frac{d}{d+1}$ *and* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{d}{p_3} + \frac{1}{p_4} \leq d.$

(ii) $0 \leq \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_4}$ *and* $\frac{1}{dp_1} + \frac{1}{dp_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} \leq d.$

(iii) $0 \leq \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_4} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_2} \leq 1$ *and* $\frac{1}{dp_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{dp_4} \leq d.$

(iv) $0 \leq \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_4} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_1} \leq 1$ *and* $\frac{d}{p_1} + \frac{1}{dp_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{dp_4} \leq d.$

(v) $0 \leq \frac{1}{p_1} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_4} \leq 1$ *and* $\frac{1}{dp_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} \leq 2d - 1.$

(vi) $0 \leq \frac{1}{p_2} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_4} \leq 1$ *and* $\frac{d}{p_1} + \frac{1}{dp_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} \leq 2d - 1.$

(vii) $0 \leq \frac{1}{p_4} \leq \frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2} \leq 1$ *and* $\frac{d}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{dp_4} \leq 2d - 1.$

(viii) $\frac{d}{d+1} \leq \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_4} \leq 1$ *and* $\frac{d}{p_1} + \frac{d}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{d}{p_4} \leq 3d - 2.$

证明。证明用到了命题 10.3 和引理 2.5 中的尖锐平均估计。该定理的证明与定理 5.4 的证明类似。因此，证明的细节留给读者。

□

以下定理也支持猜想 1.5。

定理 10.5。设 $\diamondsuit_t$ 和 Y 是作用于 $\mathbb{F}_q^2$. 上的函数的算子。若 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，且 $1 \le p_1,p_2,p_3,p_4 \le \infty$，则 $Y(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。

证明。假设 $\diamondsuit_t(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。那么，根据引理 6.2，$(1/p_1,1/p_2,1/p_3,1/p_4)$ 包含于点 (0, 0, 1, 0)、(0, 1, 0, 0)、(0, 0, 0, 1)、$(1/2, 0, 1/2, 1/2)$、$(2/3, 2/3, 0, 0)$、(1, 0, 0, 0)、$(2/3, 0, 2/3, 0)$、$(1/2, 1/2, 1/2, 0)$、$(2/3, 0, 0, 2/3)$、$(0, 2/3, 2/3, 0)$、(0, 0, 0, 0)、$(0, 0, 2/3, 2/3)$ 的凸包中。对这些临界点进行插值后，只需验证上述每个临界点都满足定理 10.4 的 8 个假设之一，且 $d = 2$。然而，通过直接计算即可轻松证明这一点。例如，对于临界点 $(1/p_1,1/p_2,1/p_3,1/p_4) = (1/2,1/2,1/2,0)$，我们可以应用定理 10.4 的假设 (i)，令 $d = 2$，从而得到 $Y(2, 2, 2, \infty)$. 1。同理，也很容易证明其他临界点满足条件。

□

注 10.6. 定理 10.5 的逆命题并不成立。为构造一个反例，我们可以取 $p_1 = p_3 = \infty$, $p_2 = p_4 = 3/2.$ 。事实上，根据定理 10.4 的假设 (5) 及 $d = 2$，可知 $Y(\infty, 3/2, \infty, 3/2)$. 1。然而，由引理 6.2 及 $d = 2.$ 可知，$\diamondsuit_t(\infty, 3/2, \infty, 3/2)$ 无界。

以下推论提出了一种可能性：猜想 1.5 中关于子图的假设可以省略。

推论 10.7. 设 $\diamond$ 和 Y 是作用于 $\mathbb{F}_q^2$. 上函数的算子。若 $\diamond(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1，且 $1 \le p_1,p_2,p_3, p_4 \le \infty$，则 $Y(p_1,p_2,p_3,p_4)$. 1。

证明。该推论的陈述可由定理 7.7 和定理 10.5 直接结合得到。

□

结合迄今得到的所有结果，我们得到以下定理：

定理 10.8。当 $d = 2$ 和 $n = 3$，4 时，猜想 1.5 成立；其中，当 G 是 C_4 + 对角线且其子图 G' 是 $K_3+tail.$时，我们接受端点处的有界性结果

证明。根据 $n = 3$ 的推论 5.8，以及根据 $n = 4$ 的推论 8.11、8.14、9.13、10.7，我们已证明，对于 $d = 2$ 和 $n = 3$，4，任意连通有序图 G 及其子图 G' 所对应的任意两个算子之间，都存在所需的包含式有界性关系，但以下三种情况除外：

（I） $G = C_4$ + 对角线和 $G' = C_4.$（II） K_3 + 尾巴和 $G' = Y$-形状。（III） $G = K_3$ + 尾巴和 $G' = P_3.$

然而，由于对于 (I)、(II)、(III) 的每种情况，$\delta(G) = \delta(G')$，它们不满足猜想 1.5 的主要假设 (1.6)。因此，它们不能成为推翻猜想 1.5 的反例，所以不存在违背猜想 1.5 的反例，正如所需。

□

11 致谢

A. Iosevich 和 P. Bhowmik 部分获得了美国国家科学基金会 HDR TRIPODS–1934962 项目以及美国国家科学基金会 DMS–2154232 项目的资助。D. Koh 获得了韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划（NRF-2018R1D1A1B07044469）的资助。T. Pham 感谢越南高等数学研究所的热情接待和优良的工作条件。

12 附录

在本附录中，我们介绍两个球面在 $\mathbb{F}_q^d$. 中的交点数。令 η 表示 $\mathbb{F}_q^*$ 的二次特征，即对于 $\mathbb{F}_q^*$ 中的平方数 s ， $\eta(s) = 1$ ；否则， $\eta(s) = -1$。

定义 12.1. 给定一个非零向量 m 属于 $\mathbb{F}_q^d$，以及 t、$b \in \mathbb{F}_q$，我们将 $N(m,t,b)$ 定义为以下方程组的公共解 $x \in \mathbb{F}_q^d$ 的数量： $||x|| = t,\ m \cdot x = b.$

注意， $N(m,t,b)$ 的值就是球面 S_t 与平面 $\{x \in \mathbb{F}_q^d$ 的所有交点数： $m \cdot x = b\}$. 其明确值如下所示，这是一个众所周知的结果。

引理 12.2. 设 b、$t \in \mathbb{F}_q$，并设 m 是 $\mathbb{F}_q^d$ 中的一个非零元素， $d \geq 2.$。则以下结论成立：

(i) 若 $||m|| \neq 0$ 和 $b^2 - t||m|| = 0$，则

$$N(m,t,b) = \begin{cases} q^{d-2} & if\ \ d\ is\ even, \\ q^{d-2} + q^{\frac{d-3}{2}}(q-1)\eta\left((-1)^{\frac{d-1}{2}}||m||\right) & if\ \ d\ is\ odd. \end{cases}$$

(ii) 若 $||m|| \neq 0$ 和 $b^2 - t||m|| \neq 0$，则

$$N(m,t,b) = \begin{cases} q^{d-2} + q^{\frac{d-2}{2}}\eta\left((-1)^{\frac{d}{2}}(b^2 - t||m||)\right) & if\ \ d\ is\ even, \\ q^{d-2} - q^{\frac{d-3}{2}}\eta\left((-1)^{\frac{d-1}{2}}||m||\right) & if\ \ d\ is\ odd. \end{cases}$$

(iii) 若 $||m|| = 0 = b^2 - t||m||$，则

$$N(m,t,b) = \begin{cases} q^{d-2} + \nu(t)q^{\frac{d-2}{2}}\eta\left((-1)^{\frac{d}{2}})\right) & if\ \ d\ is\ even, \\ q^{d-2} - q^{\frac{d-1}{2}}\eta\left((-1)^{\frac{d-1}{2}}t\right) & if\ \ d\ is\ odd, \end{cases}$$

其中，若 $t \in \mathbb{F}_q^*$，则 $\nu(t) = -1$，且 $\nu(0) = q-1.$

(iv) 若 $||m|| = 0$ 和 $b^2 - t||m|| \neq 0$，则 $N(m,t,b) = q^{d-2}.$

证明。见 [16], 中的习题 6.31–6.34，或者也可以利用离散傅里叶分析和高斯和的显式值来证明。

□

直接应用引理 12.2，即可求出有限域上两个球面的交集的确切数量。具体而言，有如下结果。

定理 12.3。给定一个非零向量 $m \in \mathbb{F}_q^d$ 以及 $t, j \in \mathbb{F}_q$，令

$$\Theta(m,t,j) := \{x \in S_t : ||x-m|| = j\}|.$$

若 $m \in S_\ell$，则 $|\Theta(m,t,j)| = N\left(m, t, \frac{t+\ell-j}{2}\right)$.

证明。由于对于 $x \in S_t, m \in S_\ell$，有 $||x-m|| = t+\ell-2m\cdot x$，显然 $\Theta(m,t,j)$ 是下列方程的公共解数目 x：

$$||x|| = t, \quad m\cdot x = \frac{t+\ell-j}{2}.$$

因此，根据 N 的定义，我们得出所需结论。 □

Coro推论 12.4。设 $t \in \mathbb{F}_q^*$ 和 $\ell \in \mathbb{F}_q$. 。那么，对于每个非零向量 $m \in S_\ell$，我们有 e

$$\sum_{x\in S_t : ||x-m||=t} 1 \sim q^{d-2}$$

除以下三种情形外:

1) $d=2, \ell \neq 0, \eta(t\ell - \ell^2/4) = -1$. *2)* $d=2, \ell = 0, \eta(-1) = 1$.
3) $d=3, \ell = 0, \eta(-t) = 1$.

对于上述三种情况，求和中的值均为零。另一方面，如果$d=2$、$\ell \neq 0$和 $\eta(t\ell - \ell^2/4) = 1$，则上述求和中的值恰好为二。

证明. 由定理 12.3 可知，对于任意 $||m|| = \ell$,

$$\sum_{x\in S_t : ||x-m||=t} 1 = N\left(m, t, \frac{\ell}{2}\right),$$

因此，该推论直接由引理 12.2 (i)、(ii)、(iii) 得出。 □

参考文献

[1] B. Assarf, E. Gawrilow, K. Herr, M. Joswig, B. Lorenz, A.Paffenholz 和 T. Rehn，《使用 polymake 计算凸包并统计整数点》，Math. Program. Comput. 9 (2017), no.1, 1-38.

[2] M. Bennett, D. Hart, A. Iosevich, J. Pakianathan 和 M. Rudnev，《$\mathbb{F}_q^d$中的群作用与几何组合学》，Forum Math. 29 (2017), no.1, 91-110.

[3] A. Carbery、B.Stones 和 J. Wright，《有限域上向量空间中的平均值》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 144 (2008)，第 1 期，13-27。

[4] J. Chapman、M. Erdo˜gan、D. Hart、A. Iosevich 和 D. Koh，《固定距离集、有限域上的 Wolff 指数与和积估计》，Math.Z. 271 (2012)，第 1-2 期，63-93。[5] X. Du、A. Iosevich、Y. Ou、H. Wang 和 R. Zhang，《偶数维中 Falconer 距离集问题的改进结果》，Math. Ann. 380 (2021)，第 3-4 期，1215-1231。[6] E. Gawrilow 和 M. Joswig，《poly make：用于分析凸多胞体的框架》，《多胞体——组合学与计算》（Oberwolfach，1997），43-73。[7] A. Greenleaf、A. Iosevich 和 K. Taylor，《具有非空内部的 k 点构型集》，Mathematika，68 (2022)，第 1 期，163-190。[8] A. Greenleaf、A. Iosevich 和 K. Taylor，《通过微局部划分优化获得构型集的非空内部》，arXiv:2209.02084 (2022)。[9] L. Guth、A. Iosevich、Y. Ou 和 H. Wang，《平面上的 Falconer 距离集问题》，Invent. Math. 219 (2020)，第 3 期，779-830。[10] B. Hanson、B. Lund 和 O. Roche-Newton，《有限域中的不同垂直平分线与固定距离》，Finite Fields Appl. 37 (2016)，240-264。[11] A. Iosevich、M. Rudnev，《有限域上向量空间中的 Erdo ˝os 距离问题》，Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007)，第 12 期，6127-6142。[12] D. Koh 和 S. Lee，《有限域中乘积 j 簇上的平均值与极大平均值》，Finite Fields Appl. 79 (2022)，论文编号 101984，13 页。[13] D. Koh、T. Pham 和 L. A. Vinh，《有限域上的延拓定理及其与 Erdos-Falconer 距离问题的联系》，J. Funct. Anal. 281 (2021)，第 8 期，论文编号 109137，54 页。[14] D. Koh 和 C.Y. Shen，《有限域上的延拓算子与平均算子》，Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 56 (2013)，第 2 期，599-614。[15] D. Koh、C.Y. Shen 和 I. Shparlinski，《有限域上的齐次簇上的平均算子》，J. Geom. Anal. 26 (2016)，第 2 期，1415-1441。[16] R. Lidl 和 H. Niederreiter，《有限域》，剑桥大学出版社，(1997)。[17] N. Lyall、A. Magyar 和 H. Parshals，《有限域上的球面构型》，Amer. J. Math. 142 (2020)，第 2 期，373-404。[18] B. Murphy、G. Petridis、T. Pham、M. Rudnev 和 S. Stevenson，《正特征下的固定距离问题》，J. Lond. Math. Soc. (2) 105 (2022)，第 1 期，469-499。[19] Y. Ou 和 K. Taylor，《分形环境中的有限点构型与正则值定理》，arXiv:2003.06218，已被 Indiana Journal of Mathematics 接收 (2021)。[20] M. Rudnev，《关于点集在 $\mathbb{R}^2$ 中确定的铰链数量的注记》，Combinatorica，40 (2020)，第 5 期，749–757。

[21] E. M. Stein, 《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》, Timothy S. Murphy 协助编写。普林斯顿数学丛书第 43 卷。调和分析专著第 III 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993 年。xiv+695 页。