arXiv:2301.00466v1 [math.OC] 1 Jan 2023

Barbalat 引理及其（未获赞誉的）近亲汇总

Zhiyong Sun

埃因霍温理工大学荷兰电气工程系控制系统组

摘要

本文基于 Barbalat型引理及其变体，对信号收敛的各种条件进行了总结与综述。

关键词:
信号收敛、函数 L^p 空间、Barbalat 引理。

1. 定义与记号

考虑一个局部可积函数 $f(t): \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 。给定一个固定的$p \in (0,\infty)$, 若 $f(t)$ 满足 $\int_0^\infty |f(s)|^p ds < \infty$，则称其属于 L^p空间。我们将函数 p-范数定义为 $\|f(t)\|_{L^p} = (\int_0^\infty |f(s)|^p ds)^{\frac{1}{p}}$，其中 $p \in [1,\infty$ 固定)。函数 $f(t)$ 的L^∞ 范数定义为 $\|f(t)\|_\infty = \sup_t |f(t)|$。若函数$f(t)$ 满足 $\sup_t |f(t)| < \infty$，则称其 $\in L^\infty$ 。

对于向量值函数 $f(t): \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$，若 $f(t)$ 满足 $\int_0^\infty \|f(s)\|^p ds < \infty$，则称其属于 L_n^p空间（其中 $p \in (0,\infty)$ 固定），这里 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数[1]。我们将函数在 $\mathbb{R}^n$ 中的 p-范数定义为 $\|f(t)\|_{L_n^p} = (\int_0^\infty \|f(s)\|^p ds)^{\frac{1}{p}}$，其中 $p \in [1,\infty$ 固定)。

2. 用于信号收敛的 Barbalat 引理

Barbalat 引理的原始版本表述如下。

引理 1. *(Khalil, 2002)* 设标量函数 $f(t)$ 一致连续，且 $\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(\tau)d\tau$存在且有限。则有 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

确保函数 $f(t)$ 一致连续的一个充分条件是 $\dot{f}(t)$ 有界。因此，Barbalat 引理的第一个变体表述如下。

引理 2. 设标量函数 $f(t)$ 满足 $f(t) \in L^1$ 且 $\dot{f}(t) \in L^\infty$。则有 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

[1]注意，由于向量范数等价，定义中也可以使用任何其他向量范数。

3. Barbalat 引理的姊妹引理

Tao（Tao，1997）证明了 Barbalat 引理的以下简单替代形式。

引理3. *(Tao，1997)* 若 $f(t) \in L^2$ 且 $\dot{f}(t) \in L^\infty$，则 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

备注1. 有几点值得说明。

- 上述引理中的条件“$f(t) \in L^\infty$”可以替换为更一般的条件“$f(t)$ 是一致连续的”；事实上，条件“$\dot{f}(t) \in L^\infty$”足以确保“$f(t)$ 是一致连续的”。

- 上述引理的证明还表明，对于任意 $p \in [2,\infty)$，$f(t) \in L^\infty$，因此$f(t) \in L^p \cap L^\infty$。

- 与其陈述条件“$f(t) \in L^2$”，许多自适应控制教材中常用的条件是“$f(t) \in L^2 \cap L^\infty$”，但并未明确陈述有界性条件$f(t) \in L^\infty$，因为可以从陈述中的两个条件$f(t)$ 和 $\dot{f}(t)$ 推知这一点。以下引理见于（Desoer和Vidyasagar，2009）。

引理 4. *(*Desoer和Vidyasagar，*2009)* 设标量函数 $f(t)$ 满足 $f(t) \in L^2$ 且 $\dot{f}(t) \in L^2$。则有 $f(t) \in L^\infty$ 且 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

Barbalat 引理的以下变体见于（Krstic等人，1995）。

引理 5. *(*Krstic等人，*1995*，第491页，推论A.7）设函数 $f(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$。若 $\dot{f}$，$f \in L^\infty$，且 $f \in L^p$ 对某个 $p \in [1.\infty)$成立，则 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

Tao的书中证明了一个替代引理（更一般）（Tao，2003）。

引理 6. *(Tao，2003*，第80页，引理2.15）若 $f(t) \in L^p$，$0 < p < \infty$ 且 $\dot{f}(t) \in L^\infty$，则 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

注释2。请注意，在引理 *6* 的陈述中，关于函数 L^p空间的条件放宽为允许 $p \in (0,\infty)$。这与其他 Barbalat 类引理中的条件形成对比；在其他引理中，通常会要求条件 $p \in [1,\infty)$。

4. Barbalat型引理的一个更一般版本

以下更一般的 Barbalat型引理版本由（Farkas 和 Wegner，2016）证明。

引理 7。若 $f(t) \in L^p, p \in [1,\infty)$ 且 $f(t) \in L^q, q \in (1,\infty]$，则 $f(t)$ 有界（即 $f(t) \in L^\infty$），并且一致连续。此外，$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

注释3。一些说明如下。

- 在上述引理中，条件“$f(t) \in L^\infty$”或“$\dot{f}(t) \in L^q$”可以替换为“$f(t)$ 一致连续”；

- 上述关于标量函数 $f(t)$ 的引理可以推广到向量值函数 $f(t): \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$..

- 在引理 7 中，条件 $f(t) \in L^q, q \in (1, \infty]$ 可以推广为 $q \in [1, \infty]$（即，对 q 的条件也包含 $q = 1$ 的情形）。注：可以证明，如果 $\dot{f}(t) \in L^1$，那么 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 存在且有限。此事实与条件 $f(t) \in L^p, p \in [1, \infty)$ 结合，将推出 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

- 论文（Farkas 和 Wegner，*2016*）还讨论了L^p 函数的收敛速率。文献（Farkas 和 Wegner，*2016*）给出了示例，以展示不同版本的 Barbalat 类引理之间的关系。

- 在引理 *6*的陈述中，对函数 L^p 空间的条件放宽为包含 $p \in (0, \infty)$。还可以进一步放宽引理 *7*的条件，使其涵盖引理 *6*的条件。

5. Barbalat型引理的其他版本及其函数复合

引理 8.（例如，参见（*Teel*，*1999*））设 $\alpha(t): \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 连续，仅在零点取零值，且单调不减。若 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续，且 $\alpha(f(t)) \in L^1$，则 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

（Hou 等人，2010）中讨论了一个类似的引理。

引理 9. 设 $M(z)$ 是定义在 $\{z: z \in \mathbb{R}^n, \|z\| \leq r\}$ 上的连续正定函数，其中某个 r。若 $f(t): \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ 是一致连续函数，满足 $f(t) \in L_n^\infty$ 且 $M(f(t)) \in L^1$，则 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$。

备注 4. 下面给出一些备注。

- 引理 *8* 中标量函数 $f(t)$ 的收敛结果可以推广到向量值函数 $f(t)$: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$。

- 利用引理 L^p 6 中函数 和引理 *7*的条件，可以进一步放宽 L^1 (即 $p = 1$) 函数的条件，使其适用于其他 L^p函数。

- 这两个引理常与 Lyapunov 论证和比较函数结合使用，以推导动态控制系统的渐近收敛性和 L^p 稳定性。

参考文献

Desoer, C.A., Vidyasagar, M., 2009. 反馈系统：输入—输出性质。SIAM。Farkas, B., Wegner, S.A., 2016. Barbalat 引理的变体。《美国数学月刊》123, 825–830。Hou, M., Duan, G., Guo, M., 2010. Barbalat 引理的新版本及其应用。《控制理论与应用》8, 545–547。Khalil, H.K., 2002.《非线性系统》，第三版。Prentice Hall，新泽西州。Krstic, M., Kokotovic, P.V., Kanellakopoulos, I., 1995.《非线性与自适应控制设计》。John Wiley & Sons, Inc. Tao, G., 1997. Barbalat 引理的一种简单替代方法。《IEEE 自动控制汇刊》42, 698。Tao, G., 2003.《自适应控制设计与分析》。第 37 卷。John Wiley & Sons。Teel, A.R., 1999. 从 L^p 稳定性得到渐近收敛。《IEEE 自动控制汇刊》44, 2169–2170。