无名稿件编号（将由编辑插入）

在 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间中的特征值型问题

Mohammed SRATI

arXiv:2301.00467v2 [math.AP] 8 Feb 2024

收稿日期：日期 / 接受日期：日期

摘要：本文引入了 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间 $W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$。随后，我们通过 Ekeland 变分原理证明，存在 $\lambda_* > 0$，使得任意 $\lambda \in (0, \lambda_*)$ 都是以下问题的特征值

$$(\mathcal{P}_a)\begin{cases}(-\Delta)^{s(x,.)}_{a_{(x,.)}}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u & \text{in} \quad \Omega,\\ u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega,\end{cases}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界开子集，具有 $C^{0,1}$-正则性和有界边界。

数学主题分类（2010）主分类 35R11；次分类 46E35、35J20、47G20。

关键词 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间 · 特征值问题 ·Ekeland 变分原理。

1 引言

近年来，分数阶模空间理论发展得十分成熟，尤其是在分数阶 Orlicz-Sobolev 空间 $W^s L_\Phi(\Omega)$ 中（参见 [5,6,14,12,15]），以及在具有变指数的分数阶Sobolev空间 $W^{s,p(x,y)}(\Omega)$ 中（参见 [7,8,9,10,11,21,25,34,35]）。研究模函数满足非多项式增长条件、而非通常的 p-结构的变分问题，引起了广泛关注；这有助于推动其在电流变流体这一重要的非牛顿流体类别中的应用。

Mohammed SRATI 教育与培训高等师范学校（ESEF），穆罕默德一世大学，摩洛哥乌季达。
电子邮件：srati93@gmail.com

（有时也称为智能流体）。电流变流体的特点是，在外部电磁场作用下，其力学性质会发生显著变化。Rajagopal 和 Ruzicka 提出了电流变流体的数学模型（更多详情请参见 [19,20,30] ）。

相反，将变指数 Lebesgue 空间与 Orlicz 空间的泛函特征结合起来，便得到 Musielak-Orlicz空间。自20世纪50年代以来，这种特殊的泛函结构得到了广泛研究，Nakano [29] 奠定了基础，随后 Musielak 和 Orlicz [27,28] 进一步发展了这一理论。由此自然引出一个问题：我们能否将这种推广扩展到分数阶领域？Azroul 等人在 [2,3,4]中对此给出了肯定的回答。具体而言，作者引入了分数阶 Musielak-Sobolev 空间 $W^{s}L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$，它是上述泛函空间的一种自然推广。

另一方面，在分数阶空间或分数阶Sobolev空间中，如果阶数 s 随变量变化，即 $s = s(.,.)$，则称之为变分数阶导数阶数。这种情况可能出现在导数阶数取决于位置或自变量其他特征的情形中。采用变分数阶导数阶数为数学建模增添了一个维度。以下是一些需要考虑的要点：

1. 局部自适应：通过允许 s 依赖于 x，可以根据函数或所研究空间区域的具体特征，在局部调整导数阶数。这对于动态建模空间中变化的物理现象尤其有用。2. 变边界问题：可变导数阶数可用于对非齐次边界问题建模，其中边界条件随空间位置而变化。3. 信号处理中的应用：在信号处理领域，可变导数阶数可用于对信号的正则性随时间或空间变化的情况建模。4. 动态现象建模：如果 $s(.,.)$随时间变化，则可用于对导数阶数随时间变化的动态现象建模。

然而，值得注意的是，引入可变导数阶数会使数学分析更加复杂。由此得到的方程可能更难求解，因此可能需要积分方程或自适应数值方法等高级数学工具。总的来说，采用可变导数阶数是为了准确地对复杂且多变的物理现象建模。

因此，在本研究中，我们引入了 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间 $W^{s(x,\ y)}L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$，其阶数 s 依赖于一个变数，即 $s = s(.,.)$。此外，我们研究了涉及非局部

$s(.,.)$ 阶算子 $(-\Delta)^{s(x,.)}_{a_{(x,.)}}$ 及其变指数 $a(.,.)$ 所对应的问题的特征值存在性。

这里我们想强调的是，我们的工作也考虑了 s 阶数上的变增长。因此，我们的重点是研究以下特征值问题：

$$(\mathcal{P}_a)\begin{cases}(-\Delta)^{s(x,.)}_{a_{(x,.)}}u=\lambda|u|^{q(x)-2}u & \text{in} \quad \Omega,\\ u=0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^N\setminus\Omega,\end{cases}$$

其中，Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界开子集，$N\geqslant 1$ 具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$，$q:\overline{\Omega}\to(1,\infty)$ 是有界连续函数，并且 $(-\Delta)^{s(x,.)}_{a_{(x,.)}}$ 是椭圆型的非局部 $s(.,.)$ 阶算子，定义如下

$$(-\Delta)^{s(x,.)}_{a_{(x,.)}}u(x)=2\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(x)}a_{(x,y)}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{s(x,y)}}\frac{dy}{|x-y|^{N+s(x,y)}}$$

对于所有 $x\in\mathbb{R}^N$，其中：

- $s(.,.):\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\to(0,1)$ 是满足以下条件的连续函数：

$$s(x,y)=s(y,x)\quad\forall x,y\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$0<s^-=\inf_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}s(x,y)\leqslant s^+=\sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}s(x,y)<1. \tag{2}$$

- $a_{(x,y)}(t):=a(x,y,t):\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是对称函数：

$$a(x,y,t)=a(y,x,t)\quad\forall(x,y,t)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}, \tag{3}$$

以及函数：$\varphi(.,.,.):\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi_{x,y}(t):=\varphi(x,y,t)=\begin{cases}a(x,y,|t|)t & \text{for} \quad t\neq 0,\\ 0 & \text{for} \quad t=0,\end{cases}$$

是从 $\mathbb{R}$ 到其自身的递增同胚。设

$$\Phi_{x,y}(t):=\Phi(x,y,t)=\int_0^t\varphi_{x,y}(\tau)d\tau\quad\text{for all }(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega},\quad\text{and all } t\geqslant 0.$$

那么，$\Phi_{x,\ y}$ 是一个 Musielak 函数（参见[28]），即

$\star$ $\Phi(x,y,.)$ 对每个 $(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$都是一个 Φ 函数，即它是连续的非减函数，且 $\Phi(x,y,0)=0$, $\Phi(x,y,t)>0$ 对于 $t>0$ 和$\Phi(x,y,t)\to\infty$ 当 $t\to\infty$ 时。$\star$对于每个 $t\geqslant 0$, $\Phi(.,.,t):\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$ 都是可测函数。

此外，我们取 $\widehat{a}_x(t) := \widehat{a}(x,t) = a_{(x,x)}(t) \quad \forall\,(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$。那么由下式定义的函数$\widehat{\varphi}(.,.) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$：

$$\widehat{\varphi}_x(t) := \widehat{\varphi}(x,t) = \begin{cases} \widehat{a}(x,|t|)t & \text{for} \quad t \neq 0, \\ \\ 0 \qquad & \text{for} \quad t = 0, \end{cases}$$

是从 $\mathbb{R}$ 到其自身的递增同胚。如果我们设

$$\widehat{\Phi}_x(t) := \widehat{\Phi}(x,t) = \int_0^t \widehat{\varphi}_x(\tau)d\tau \quad \text{for all} \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

$\widehat{\ }$那么， Φ_x 是一个 Musielak 函数。

本文的结果对若干情形进行了推广。请注意，当我们取 $a_{x,\ y}(t) = |t|^{p(x,y)-2}$ 其中 $p : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \longrightarrow (1, +\infty)$ 是一个连续有界函数时，我们的非局部算子 $(-\Delta)^{s(x,.)}_{a_{(x,.)}}$可视为具有变指数的非局部 $s(.,.)$-阶算子 $(-\Delta)^{s(x,.)}_{p\ x\ .}(.,.)$（参见 [13]），其定义如下：

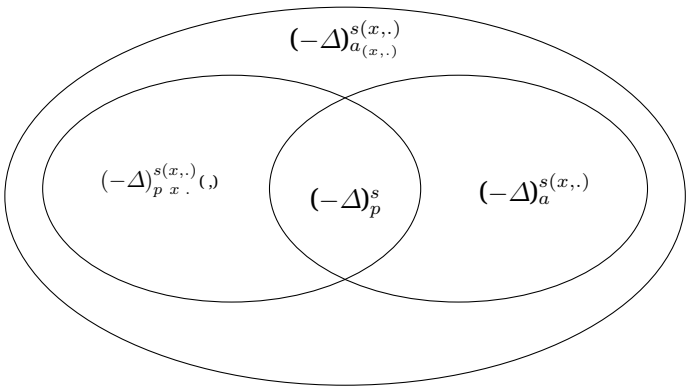
$$(-\Delta)^{s(x,.)}_{p(x,.)} u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+s(x,y)p(x,y)}}\, dy$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 均成立（另见 [24,32,33]。

此外，本文还引入了 $s(.,.)$-分数阶 a-拉普拉斯算子（$-\Delta)^{s(x,.)}_{a}$，条件是 $a_{x,\ y}(t) = a(t)$，即函数 a 与变量 x、y 无关。于是，我们得到如下非局部非局部 $s(.,.)$-阶算子（$-\Delta)^{s(x,.)}_{a}$，定义如下：

$$(-\Delta)^{s(x,.)}_{a} u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} a\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right) \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{s(x,y)}} \frac{dy}{|x-y|^{N+s(x,y)}}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}^N$。



Musielak 空间和变指数 Lebesgue 空间在基于权重或可局部变化的指数调节范数方面有相似之处。然而，Musielak 空间的独特创新在于，它们能够通过权函数进行局部加权，以适应函数的奇异性或特定性质。变指数 Lebesgue 空间则不具备如此直接的能力。

本文结构如下：第 1 节提出问题（$\mathcal{P}_a$）。此外，我们引入新的非局部 $s(.,.)$ 阶算子（$-\Delta$）$_a^{s(x,.)}{}_x(.,.)$。第 2 节回顾分数阶 Musielak-Sobolev 空间的一些性质。第 3 节引入 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间，并确立这些新空间的一些定性性质。第 4 节借助 Ekeland 变分原理，得到 $\lambda_* > 0$ 的存在性，使得对于任意 $\lambda \in (0, \lambda_*)$，它都是以下问题（$\mathcal{P}_a$）的一个特征值。第 5 节给出一些例子来说明我们的结果。

2 预备结果

为处理这种情况，我们定义分数阶 Musielak-Sobolev 空间，以研究问题$(\mathcal{P}_a)$。下面回顾该空间的定义和一些基本性质。关于更多参考资料以及本节部分结果的证明，请参阅[2,3]。

$\widehat{\ }$对于函数 Φ_x，给定于（4），我们引入如下 Musielak 空间

$$L_{\widehat{\Phi}_x}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable } : \int_\Omega \widehat{\Phi}_x(\lambda|u(x)|)dx < \infty \text{ for some } \lambda > 0 \right\}.$$

空间 $L_{\widehat{\Phi}_x}(\Omega)$ 是赋予 Luxemburg 范数的 Banach 空间

$$||u||_{\widehat{\Phi}_x} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \widehat{\Phi}_x \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right) dx \leqslant 1 \right\}.$$

$\Phi_{x,\ y}$的共轭函数定义为 $\overline{\Phi}_{x,\ y}(t) = \int_0^t \overline{\varphi}_{x,\ y}(\tau)d\tau$对所有 $(x,y)\ \in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ 以及所有 $t \geqslant 0$均成立，其中$\overline{\varphi}_{x,\ y}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 由 $\overline{\varphi}_{x,\ y}(t) := \overline{\varphi}(x,y,t)\ =\sup\ \{s\colon\ \varphi(x,y,s) \leqslant t\}$.给出。本文中，我们假设存在两个正常数 φ^+ 和 φ^-，使得

$$1 < \varphi^- \leqslant \frac{t\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} \leqslant \varphi^+ < +\infty \text{ for all } (x,y) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega} \quad \text{and all } t \geqslant 0. \quad (\Phi_1)$$

这一关系意味着

$$1 < \varphi^- \leqslant \frac{t\widehat{\varphi}_x(t)}{\widehat{\Phi}_x(t)} \leqslant \varphi^+ < +\infty \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \quad \text{and all } t \geqslant 0. \qquad (5)$$

$\widehat{}$由此可得$\Phi_{x,\ y}$ 且 Φ_x 满足全局 Δ_2-条件（见 [26]），表示为$\widehat{\Phi}_{x,\ y} \in \Delta_2$ 且 $\widehat{\Phi}_x \in \Delta_2$，即，

$$\Phi_{x,y}(2t) \leqslant K_1 \Phi_{x,y}(t) \quad \text{for all } (x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \quad \text{and all } t \geqslant 0, \tag{6}$$

and

$$\widehat{\Phi}_x(2t) \leqslant K_2 \widehat{\Phi}_x(t) \quad \text{for any } x \in \overline{\Omega} \quad \text{and all } t \geqslant 0, \tag{7}$$

其中，K_1 和 K_2 是两个正常数。

此外，我们假设 $\Phi_{x,y}$ 满足以下条件

$$\text{the function } [0,\infty) \ni t \mapsto \Phi_{x,y}(\sqrt{t}) \text{ is convex.} \tag{Φ_2}$$

定义 21 设 $A_x(t)$、$B_x(t)$：$\mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 是两个 Musielak 函数。若对几乎所有 $x \in \overline{\Omega}$，A_x 比 B_x 更强（分别为本质更强），记作 $A_x \succ B_x$（分别记作 $A_x \succ\succ B_x$）

$$B(x,t) \leqslant A(x,at), \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

对于某个（分别为每个）$a > 0$ 和 t_0（取决于 a）。

注 21（[1, 第 8 节.5]）$A_x \succ\succ B_x$ 等价于以下条件

$$\lim_{t\to\infty} \left(\sup_{x\in\overline{\Omega}} \frac{B(x,\lambda t)}{A(x,t)} \right) = 0$$

对所有 $\lambda > 0$。

现在，我们按照 [2] 中的介绍定义分数阶 Musielak-Sobolev 空间如下

$$W^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) = \left\{ u \in L_{\widehat{\Phi}_x}(\Omega) : \int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{\lambda |u(x)-u(y)|}{|x-y|^s} \right) \frac{dxdy}{|x-y|^N} < \infty \text{ for some } \lambda > 0 \right\}.$$

该空间可赋予如下范数

$$||u||_{s,\Phi_{x,y}} = ||u||_{\widehat{\Phi}_x} + [u]_{s,\Phi_{x,y}}, \tag{8}$$

其中 $[.]_{s,\ \Phi_{x,\ y}}$ 是由下式定义的 Gagliardo 半范数

$$[u]_{s,\Phi_{x,y}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda |x-y|^s} \right) \frac{dxdy}{|x-y|^N} \leqslant 1 \right\}.$$

定理 21 ([2])。设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个开子集，且 $s \in$ 属于 (0, 1)。空间 $W^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 关于范数 (8) 是一个 Banach 空间；当且仅当 $\Phi_{x,y} \in \Delta_2$（分别为 $\Phi_{x,y} \in \Delta_2$ 和 $\overline{\Phi}_{x,y} \in \Delta_2$）时，它是可分（分别为自反）空间。此外，若 $\Phi_{x,\ y} \in \Delta_2$ 且 $\Phi_{x,y}(\sqrt{t})$ 是凸的，则空间 $W^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 是一个一致凸空间。

定义 22 ([2])。我们称 $\Phi_{x,y}$ 满足分数阶有界性条件，记作 $\Phi_{x,y} \in \mathcal{B}_f$，如果

$$\sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \Phi_{x,y}(1) < \infty. \tag{Φ_3}$$

定理 22（[2]）。设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个开子集，且 $0 < s < 1$。假设 $\Phi_{x,\ y} \in \mathcal{B}_f$。那么，

$$C_0^2(\Omega) \subset W^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega).$$

引理 21 ([2]) 假设 (Φ_1) 成立。则以下不等式成立：

$$\Phi_{x,y}(\sigma t) \geqslant \sigma^{\varphi^-}\Phi_{x,y}(t) \quad for\ all\ t>0\ and\ any\ \sigma>1, \tag{9}$$

$$\Phi_{x,y}(\sigma t) \geqslant \sigma^{\varphi^+}\Phi_{x,y}(t) \quad for\ all\ t>0\ and\ any\ \sigma\in(0,1), \tag{10}$$

$$\Phi_{x,y}(\sigma t) \leqslant \sigma^{\varphi^+}\Phi_{x,y}(t) \quad for\ all\ t>0\ and\ any\ \sigma>1, \tag{11}$$

$$\Phi_{x,y}(t) \leqslant \sigma^{\varphi^-}\Phi_{x,y}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \quad for\ all\ t>0\ and\ any\ \sigma\in(0,1). \tag{12}$$

对于任意 $u \in W^s L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$，我们在 $W^s L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$ 上定义模函数如下

$$\Psi(u) = \int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(|u(x)|\right)dx. \tag{13}$$

命题 21（[2]）。假设 (Φ_1) 成立。那么对于任意 $u \in W^s L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$，以下关系成立：

$$||u||_{s,\Phi_{x,y}} > 1 \Longrightarrow ||u||^{\varphi^-}_{s,\Phi_{x,y}} \leqslant \Psi(u) \leqslant ||u||^{\varphi^+}_{s,\Phi_{x,y}}, \tag{14}$$

$$||u||_{s,\Phi_{x,y}} < 1 \Longrightarrow ||u||^{\varphi^+}_{s,\Phi_{x,y}} \leqslant \Psi(u) \leqslant ||u||^{\varphi^-}_{s,\Phi_{x,y}}. \tag{15}$$

我们定义 $W^s L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$ 的一个闭线性子空间如下

$$W_0^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) = \left\{u \in W^s L_{\Phi_{x,y}}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ a.e in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right\}.$$

定理 23 （[3]）设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的有界开子集，具有 $C^{0,\ 1}$-正则性且边界有界，设 $s \in (0,1)$。那么存在一个正数常数 γ，使得

$$||u||_{\widehat{\Phi}_x} \leqslant \gamma[u]_{s,\Phi_{x,y}}\ for\ all\ u \in W_0^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega).$$

我们用 $\widehat{\Phi}_x^{-1}$ 表示满足以下条件的 $\widehat{\Phi}_x$ 的反函数:

$$\int_0^1 \frac{\widehat{\Phi}_x^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+s}{N}}} d\tau < \infty \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega}, \tag{16}$$

$$\int_1^\infty \frac{\widehat{\Phi}_x^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+s}{N}}} d\tau = \infty \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega}. \tag{17}$$

注意，若$\varphi_{x,\ y}(t) = |t|^{p(x,y)-1}$，则（16）成立当且仅当 $sp(x,\ y) < N$对所有$(x,\ y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$。

若（17）成立，则我们将 Φ_x 的 Musielak 共轭逆函数定义如下

$$(\widehat{\Phi}^*_{x,s})^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\widehat{\Phi}_x^{-1}(\tau)}{\tau^{\frac{N+s}{N}}} d\tau. \tag{18}$$

定理 **24** *[3]* 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的有界开子集，且满足 $C^{0,\ 1}$-正则性且具有有界边界。若(16) 和(17) 成立，则

$$W^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\widehat{\Phi}^*_{x,s}}(\Omega). \tag{19}$$

此外，嵌入

$$W^s L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) \hookrightarrow L_{B_x}(\Omega), \tag{20}$$

对所有 $B_x \prec\prec \Phi^*_{x,\ s}$ 均为紧的。

接下来，我们回顾变指数空间的一些有用性质。更多细节请参阅[18,22], 及其中的参考文献。

考虑集合

$$C_+(\overline{\Omega}) = \left\{ q \in C(\overline{\Omega}) : q(x) > 1 \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \right\}.$$

对于所有 $q \in C_+(\overline{\Omega})$，定义

$$q^+ = \sup_{x \in \overline{\Omega}} q(x) \quad \text{and} \quad q^- = \inf_{x \in \overline{\Omega}} q(x).$$

对于任意 $q \in C_+(\overline{\Omega})$，定义变指数 Lebesgue 空间为

$$L^{q(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ measurable} : \int_\Omega |u(x)|^{q(x)} dx < +\infty \right\}.$$

赋予 Luxemburg 范数后，该向量空间的范数定义为

$$\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{q(x)} dx \leqslant 1 \right\}$$

是一个可分自反 Banach 空间。

在处理变指数广义勒贝格空间时， $L^{q(x)}(\Omega)$ 空间的模起着非常重要的作用，其定义为

$$\rho_{q(.)} : L^{q(x)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \rho_{q(.)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{q(x)} dx.$$

命题 22 设 $u \in L^{q(x)}(\Omega)$，则有

(i) $\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)} < 1 \,(resp. = 1, > 1) \Leftrightarrow \rho_{q(.)}(u) < 1 \,(resp. = 1, > 1)$,
(ii) $\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)} < 1 \Rightarrow \|u\|^{q^+}_{L^{q(x)}(\Omega)} \leqslant \rho_{q(.)}(u) \leqslant \|u\|^{q^-}_{L^{q(x)}(\Omega)}$, (iii)
$\|u\|_{L^{q(x)}(\Omega)} > 1 \Rightarrow \|u\|^{q^-}_{L^{q(x)}(\Omega)} \leqslant \rho_{q(.)}(u) \leqslant \|u\|^{q^+}_{L^{q(x)}(\Omega)}$.

最后，我们的存在性结果的证明基于以下 Ekeland 变分原理定理。

定理 25 *([17])* 设 V 为完备度量空间，且 $F: V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是定义在 V 上的下半连续泛函，该泛函有下界且不恒等于 $+\infty$。取 $\varepsilon > 0$ 和一点 $u \in V$，使得

$$F(u) \leqslant \varepsilon + \inf_{x \in V} F(x).$$

那么，对于每个 $\gamma > 0$，都存在某个点 $v \in V$，使得:

$$F(v) \leqslant F(u),$$

$$d(u, v) \leqslant \gamma,$$

并且对于所有 $w \neq v$

$$F(w) > F(v) - \frac{\varepsilon}{\gamma} d(v, w).$$

3 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间

由于算子 $(-\Delta)^{s(x,.)}_{a(x,.)}$ 的非局部性，我们引入如下 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间

$$W^{s(x,y)} L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) = \left\{ u \in L_{\widehat{\Phi}_x}(\Omega) : \int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y} \left(\frac{\lambda |u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s(x,y)}} \right) \frac{dxdy}{|x - y|^N} < \infty \text{ for some } \lambda > 0 \right\}.$$

该空间可赋予如下范数

$$||u||_{s(x,y),\Phi_{x,y}} = ||u||_{\widehat{\Phi}_x} + [u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}, \tag{21}$$

其中 $[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}$ 是 Gagliardo 半范数，其定义如下

$$[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{\lambda |x - y|^{s(x,y)}} \right) \frac{dxdy}{|x - y|^N} \leqslant 1 \right\}.$$

为简化记号，在本文余下部分中，我们设

$$D^{s(x,y)} u = \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{s(x,y)}}, \quad \text{and } d\mu = \frac{dxdy}{|x - y|^N}.$$

注记 31
a)– 对于以下情形：$\Phi_{x,y}(t) = \Phi(t)$，即 Φ 与变量 x、y无关，我们可以如下引入 $s(.,.)$-分数阶 Orlicz-Sobolev 空间 $W^{s(x,y)}L_{\Phi}(\Omega)$

$$W^{s(x,y)}L_{\Phi}(\Omega) = \left\{ u \in L_{\Phi}(\Omega) : \int_{\Omega}\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{\lambda|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^{N}} < \infty \text{ for some } \lambda > 0 \right\}.$$

b)– 对于以下情形：$\Phi_{x,\ y}(t) = |t|^{p(x,y)}$ 对所有 $(x,y) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$，其中 p：$\overline{\Omega}\times\overline{\Omega} \longrightarrow (1,+\infty)$ 是一个连续有界函数，满足

$$1 < p^{-} = \min_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} p(x,y) \leqslant p(x,y) \leqslant p^{+} = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} p(x,y) < +\infty,$$

and

$$p \text{ is symmetric, that is, } \quad p(x,y) = p(y,x), \quad \text{for all } (x,y) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}.$$

若记 $\bar{p}(x) = p(x,x)$ 对所有 $x \in \overline{\Omega}$. 成立，则我们将 L_{Φ_x} 替换为 $L^{\bar{p}(x)}$，并将 $W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}$替换为 $W^{s(x,y)\,p(x,y)}$，分别称它们为变指数 Lebesgue 空间和 $s(.,.)$-变指数分数阶 Sobolev 空间（见 [13, 32, 33]），其定义如下：

$$L^{\bar{p}(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \ measurable : \int_{\Omega} |u(x)|^{\bar{p}(x)}dx < +\infty \right\},$$

and

$$W = W^{s(x,y),p(x,y)}(\Omega)$$

$$= \left\{ u \in L^{\bar{p}(x)}(\Omega) : \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{s(x,y)p(x,y)+N}}\, dxdy < +\infty \ \ for\ some\ \ \lambda > 0 \right\}$$

其范数为

$$\|u\|_{W} = \|u\|_{L^{\bar{p}(x)}(\Omega)} + [u]_{W},$$

其中 $[.]_{W}$ 是变指数 Gagliardo 半范数，定义为

$$[u]_{W} = [u]_{s(x,y),p(x,y)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)}|x-y|^{N+s(x,y)p(x,y)}}\, dxdy \leqslant 1 \right\}.$$

定理 31 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{N}$ 的一个开子集。空间 $W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 关于范数 (21) 是一个 Banach 空间；当且仅当 $\Phi_{x,y} \in \Delta_2$（分别为 $\Phi_{x,y} \in \Delta_2$ 和 $\overline{\Phi}_{x,y} \in \Delta_2$）时，它是可分空间（分别为自反空间）。此外，如果 $\Phi_{x,y} \in \Delta_2$ 且 $\Phi_{x,y}(\sqrt{t})$ 是凸的，那么空间 $W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 是一致凸空间。

本定理的证明类似于 [2, 定理 2。1]。

定理 32 设 Ω 是 $\mathbb{R}^{N}$ 的有界开子集。那么

$$W^{s^{+}}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) \hookrightarrow W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) \hookrightarrow W^{s^{-}}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega).$$

证明（证明）设 $u \in W^{s^+}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 和 $\lambda > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u|}{\lambda}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} &= \int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s^+}u|}{\lambda}\frac{1}{|x-y|^{s(x,y)-s^+}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\\ &\leqslant \int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s^+}u|}{\lambda}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^{N+p(s(x,y)-s^+)}}\\ &\leqslant \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|x-y|^{p(s^+-s(x,y))}\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s^+}u|}{\lambda}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\end{aligned}$$

其中 $p = \{\varphi^- \text{ 或 } \varphi^+\}$ 由引理 21给出。这意味着

$$[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}} \leqslant \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|x-y|^{p(s^+-s(x,y))}[u]_{s^+,\Phi_{x,y}}.$$

So

$$\|u\|_{s(x,y),\Phi_{x,y}} \leqslant c\|u\|_{s^+,\Phi_{x,y}},$$

其中 $c = \max\left\{1, \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}\frac{1}{|x-y|^{p(s^+-s(x,y))}}\right\}$。

现在，令 $u \in W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 和 $\lambda > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s^-}u|}{\lambda}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} &= \int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u|}{\lambda}\frac{1}{|x-y|^{s^--s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\\ &\leqslant \int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u|}{\lambda}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^{N+p(s^--s(x,y))}}\\ &\leqslant \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|x-y|^{p(s(x,y)-s^-)}\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u|}{\lambda}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}.\end{aligned}$$

这意味着

$$[u]_{s^-,\Phi_{x,y}} \leqslant \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|x-y|^{p(s(x,y)-s^-)}[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}.$$

So

$$\|u\|_{s^-,\Phi_{x,y}} \leqslant c\|u\|_{s(x,y),\Phi_{x,y}},$$

where $c = \max\left\{1, \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}|x-y|^{p(s(x,y)-s^-)}\right\}$.

现在，结合定理32 和定理 24，我们得到以下结果。

推论 31 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的 $C^{0,1}$-正则且具有有界边界的有界开子集。若(16)和(17) 成立，则

$$W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\widehat{\Phi}^*_{x,s^-}}(\Omega).$$

此外，嵌入

$$W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega) \hookrightarrow L_{B_x}(\Omega),$$

对所有 $B_x \prec\prec \Phi^*_{x,}$ 均为紧的。

对于任意 $u \in W^{s(x,\ y)}L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$，我们在 $W^{s(x,\ y)}L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$上定义模函数如下

$$J(u) = \int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(|u(x)|\right)dx. \tag{22}$$

在处理 $s(.,.)$-分数阶 Musielak-Sobolev 空间时，模函数（22）发挥着重要作用。值得注意的是，范数与模之间的关系表明，由范数定义的拓扑与由模定义的拓扑等价。

命题 31 假设 (Φ_1) 成立。那么对于任意 $u \in W^{s(x,\ y)}L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$，以下关系成立：

$$||u||_{s(x,y),\Phi_{x,y}} > 1 \Longrightarrow ||u||^{\varphi^-}_{s(x,y),\Phi_{x,y}} \leqslant J(u) \leqslant ||u||^{\varphi^+}_{s(x,y),\Phi_{x,y}}, \tag{23}$$

$$||u||_{s(x,y),\Phi_{x,y}} < 1 \Longrightarrow ||u||^{\varphi^+}_{s(x,y),\Phi_{x,y}} \leqslant J(u) \leqslant ||u||^{\varphi^-}_{s(x,y),\Phi_{x,y}}. \tag{24}$$

证明（证明）为简化记号，取$\|u\|_{x,\ y} := ||u||_{s(x,y),\ \Phi_{x,\ y}}$。首先，我们证明若
$||u||_{x\ y} > 1$ $J\ u \leqslant ||u||^{\varphi^+}$ $u \in$, , 则 ()。事实上，
$W^{s\ x\ y}$ Ω
设 (,)$L_{\Phi_{x,\ y}}$() 使得$||u||_{x,\ y} > 1$。利用 Luxemburg 范数的定义及关系（11），可得

$$\begin{aligned}
J(u) &= \int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(||u||_{x,y}\frac{|u(x)-u(y)|}{||u||_{x,y}|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(||u||_{x,y}\frac{|u(x)|}{||u||_{x,y}}\right)dx \\
&\leqslant ||u||^{\varphi^+}_{x,y}\int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{||u||_{x,y}|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + ||u||^{\widehat{\varphi}^+}_{x,y}\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(\frac{|u(x)|}{||u||_{x,y}}\right)dx \\
&\leqslant ||u||^{\varphi^+}_{x,y}\left[\int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{||u||_{x,y}|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(\frac{|u(x)|}{||u||_{x,y}}\right)dx\right] \\
&\leqslant ||u||^{\varphi^+}_{x,y}.
\end{aligned}$$

接下来，假设$||u||_{x,\ y} > 1$。令 $\beta \in (1,\ ||u||_{x,\ y})$，由（9），可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(|u(x)|\right)dx \\
&\quad\geqslant \beta^{\varphi^-}\int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\beta|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \beta^{\widehat{\varphi}^-}\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(\frac{|u(x)|}{\beta}\right)dx \\
&\quad\geqslant \beta^{\varphi^-}\left(\int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\beta|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(\frac{|u(x)|}{\beta}\right)dx\right).
\end{aligned}$$

由于 $\beta < ||u||_{x,\ y}$，我们得到

$$\int_\Omega \int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\beta|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N} + \int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(\frac{|u(x)|}{\beta}\right)dx > 1.$$

因此，我们有

$$\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(|u(x)|\right)dx \geqslant \beta^{\varphi^-}.$$

令 $\beta \nearrow ||u||_{x,\ y}$，我们推得（23）成立。

接下来，我们证明 $J(u)\leqslant ||u||^{\varphi^-}_{x,\ y}$对所有 $u\in W^{s\ (x,\ y)}L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$ 满足 $||u||_{x,\ y}<1$。利用 Luxemburg 范数的定义和（12），得到

$$\begin{aligned}
J(u) &\leqslant ||u||^{\varphi^-}_{x,y}\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{||u||_{x,y}|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+||u||^{\widehat{\varphi}^-}_{x,y}\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(\frac{|u(x)|}{||u||_{x,y}}\right)dx\\
&\leqslant ||u||^{\varphi^-}_{x,y}\left[\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{||u||_{x,y}|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(\frac{|u(x)|}{||u||_{x,y}}\right)dx\right]\\
&\leqslant ||u||^{\varphi^-}_{x,y}.
\end{aligned}$$

令 $\xi\in(0,\ ||u||_{x,\ y})$。由（10）可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(|u(x)|\right)dx\\
&\quad\geqslant \xi^{\varphi^+}\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\xi|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+\xi^{\widehat{\varphi}^+}\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\xi}\right)dx \qquad (25)\\
&\quad\geqslant \xi^{\varphi^+}\left[\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\xi|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\xi}\right)dx\right].
\end{aligned}$$

定义 $v(x)=\frac{u}{\xi}(x)$ 对所有 $x\in\Omega$成立。于是，$||v||_{x,\ y}=\frac{||u||_{x}}{\xi^{\ y}}>1$。利用关系（14），可得

$$\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(|v(x)|\right)dx \geqslant ||v||^{\varphi^-}_{x,y}>1. \quad (26)$$

结合（25）和（26），我们推得

$$\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}+\int_\Omega \widehat{\Phi}_x\left(|u(x)|\right)dx \geqslant \xi^{\varphi^-}.$$

令$\xi\nearrow ||u||_{x,\ y}$ 在上述不等式中，我们得到关系（24）成立。

类似于命题21，我们得到以下结果。

命题 32 假设(Φ_1)成立，那么对于任意 $u\in W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$，以下断言成立：

$$[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}>1\Longrightarrow [u]^{\varphi^-}_{s(x,y),\Phi_{x,y}}\leqslant\phi(u)\leqslant[u]^{\varphi^+}_{s(x,y),\Phi_{x,y}},$$

$$[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}<1\Longrightarrow [u]^{\varphi^+}_{s(x,y),\Phi_{x,y}}\leqslant\phi(u)\leqslant[u]^{\varphi^-}_{s(x,y),\Phi_{x,y}},$$

$where\ \phi(u)=\int_\Omega\int_\Omega \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}.$

现在，我们引入 $W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 的一个闭线性子空间，如下所示

$$W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)=\left\{u\in W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\mathbb{R}^N)\ \ u=0\ \ \text{in}\ \ \mathbb{R}^N\backslash\Omega\right\}.$$

于是，我们得到如下广义 Poincaré 型不等式。

定理 33 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界开子集，具有 $C^{0,\ 1}$-正则性且边界有界。则存在一个正数常数 γ，使得

$$||u||_{\widehat{\Phi}_x}\leqslant\gamma[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}\ \textit{for all}\ u\in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega).$$

证明（证明）设 $u\in W^{s\ (x,\ y)\ 0}\quad L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$，由定理32，我们有

$$[u]_{s^-,\Phi_{x,y}}\leqslant c[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}},\tag{27}$$

另一方面，由定理23，存在一个正数常数 γ' 使得

$$||u||_{\widehat{\Phi}_x}\leqslant\gamma'[u]_{s^-,\Phi_{x,y}}\ \text{for all}\ u\in W_0^{s^-}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega).\tag{28}$$

因此，将（27）与（28）结合起来，我们得到

$$||u||_{\widehat{\Phi}_x}\leqslant\gamma[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}\ \text{for all}\ u\in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega).$$

与 $\gamma=c\gamma'$。

现在，为了研究问题 $(\mathcal{P}_a)$，将边界条件 $u=0$ 编码到 $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ 中的弱形式中至关重要。在标量情形下，Servadei 和 Valdinoci [31] 通过考察 Ω 与 $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$之间的相互作用，引入了一种新的函数空间，以研究与分数阶拉普拉斯算子相关的变分泛函。随后，受 Servadei 和 Valdinoci [31], 的工作启发，Azroul 等人在 [8], 中引入了变指数分数阶 Sobolev 空间，通过考察 Ω与 $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$之间的相互作用，研究与分数阶 $p(x,.)$-拉普拉斯算子相关的变分泛函。受上述论文启发，并由于 $s(.,.)$-阶算子 $(-\Delta)^{s(x,.)}_{a(x,.}$)的非局部性，我们引入如下的 $s(.,.)$-分数阶 Orlicz-Sobolev 空间

$$W^{(x,y)}L_{\Phi_{w,y}}(Q)=\left\{u\in L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)\ :\ \int_Q\Phi_{x,y}\left(\frac{\lambda|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}<\infty\ \text{ for some }\lambda>0\right\},$$

其中 $Q=\mathbb{R}^{2N}\setminus(C\Omega\times C\Omega)$ 满足 $C\Omega=\mathbb{R}^N\setminus\Omega$。这些空间赋予范数，

$$||u||=||u||_{\widehat{\Phi}_x}+[u],\tag{29}$$

其中 $[.]$ 是 Gagliardo 半范数，定义为

$$[u]=\inf\left\{\lambda>0:\int_Q\Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\leqslant1\right\}.$$

与空间 $(W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)\|.\|_{s(x,y),\Phi_{x,y}})$ 类似，我们有 $(W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(Q)\ \|.\|)$ 是一个可分自反巴拿赫空间。

现在，$W^{s}{}_{(x,y)0}\quad L_{\Phi_{x,y}}(Q)$ 表示 $W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(Q)$ 的以下线性子空间，

$$W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q)=\left\{u\in W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q)\ :\ u=0 \text{ a.e in } \mathbb{R}^N\setminus\Omega\right\}$$

其范数为

$$[u]=\inf\left\{\lambda>0:\int_Q\Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\leqslant 1\right\}.$$

在以下定理中，我们比较空间 $W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$ 和 $W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(Q)$。

定理 34 以下断言成立:

1）连续嵌入

$$W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q)\subset W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\Omega)$$

成立。

2) 若 $u\in W^{s}{}_{(x,y)0}\quad L_{\Phi_{x,y}}(Q)$，则 $u\in W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(\mathbb{R}^N)$ 且

$$||u||_{s(x,y),\Phi_{x,y}}\leqslant||u||_{W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\mathbb{R}^N)}=||u||.$$

证明（证明）1) 设 $u\in W^{s_{(x,y)}}L_{\Phi_{x,y}}(Q)$，由于 $\Omega\times\Omega\subsetneq Q,$，那么对所有$\lambda>0$，我们有

$$\int_\Omega\int_\Omega\Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\leqslant\int_Q\Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}. \tag{30}$$

我们设

$$\mathcal{A}^{s(x,y)}_{\lambda,\Omega\times\Omega}=\left\{\lambda>0:\int_\Omega\int_\Omega\Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\leqslant 1\right\}$$

and

$$\mathcal{A}^{s(x,y)}_{\lambda,Q}=\left\{\lambda>0:\int_Q\Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}\leqslant 1\right\}.$$

由 (30)，容易看出 $\mathcal{A}^{s(x,y)}_{\lambda}{}_{,Q}\quad\subset\mathcal{A}^{s(x,y)}_{\lambda\ \Omega\times\Omega,}$。因此

$$[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}=\inf_{\lambda>0}\mathcal{A}^{s(x,y)}_{\lambda,\Omega\times\Omega}\leqslant[u]=\inf_{\lambda>0}\mathcal{A}^{s(x,y)}_{\lambda,Q}. \tag{31}$$

因此，根据范数 $\|u\|_{s(x,y),\Phi_{x,y}}$ 和 $\|u\|$ 的定义，我们得到

$$\|u\|_{s(x,y),\Phi_{x,y}}\leqslant\|u\|<\infty.$$

2) 令 $u \in W^{s}{}_{(x,y)0}\quad L_{\Phi_{x,y}}(Q)$，则 $u=0$属于 $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$。因此，$\|u\|_{L_{\widehat{\Phi}_x}(\Omega)}$ $=\|u\|_{L_{\widehat{\Phi}_x}(\mathbb{R}^N)}$.由于

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}=\int_{Q} \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{\lambda|x-y|^{s(x,y)}}\right)\frac{dxdy}{|x-y|^N}$$

对所有 $\lambda>0$。于是$[u]_{W^{s(x,\ y)}L_{\Phi_{x,\ y}}(\mathbb{R}^N)}=[u]$。因此，我们得到

$$||u||_{s(x,y),\Phi_{x,y}} \leqslant ||u||_{W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(\mathbb{R}^N)}=||u||.$$

推论32（庞加莱不等式）设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界开子集，具有 $C^{0,\ 1}$-正则性且边界有界。则存在一个正数常数 c，使得

$$\|u\|_{\widehat{\Phi}_x} \leqslant c[u] \quad \forall u \in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q).$$

证明（证明）设 $u \in W^{s}{}_{(x,\ y)0}\quad L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$，由定理 34，我们有 $u \in W^{s}{}_{(x,\ y)0}\quad L_{\Phi_{x,\ y}}(\Omega)$。再由定理 33，存在一个正数常数 γ，使得

$$\|u\|_{\widehat{\Phi}_x} \leqslant \gamma[u]_{s(x,y),\Phi_{x,y}}.$$

将上述不等式与（31）结合，可得

$$\|u\|_{\widehat{\Phi}_x} \leqslant c[u] \quad \forall u \in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q).$$

注32 由推论32，我们推得 $[.]$ 是 $W^{s}{}_{(x,\ y)0}\quad L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$ 上的一个范数，且该范数与范数 $\|.\|$ 等价。

4 存在性结果与证明

本节中，我们在以下基本假设下分析问题$(\mathcal{P}_a)$。

$$q^- < \varphi^- \tag{32}$$

and

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sup_{x\in\overline{\Omega}}\frac{|t|^{q^+}}{(\widehat{\Phi}_{x,s^-})_*(kt)}\right)=0 \quad \forall k>0. \tag{33}$$

$\left(W^{s}{}_{(x,y)0}\quad L_{\Phi_{x,y}}(Q)\ ||.||\right)$的对偶空间记为 $\left(\left(W^{s}{}_{(x,y)0}\quad L_{\Phi_{x,y}}(Q)\right)^*,||.||_*\right)$。

定义41 若存在 $u \in W^{s}{}_{(x,y)0}\quad L_{\Phi_{x,y}}(Q)\setminus\{0\}$，使得 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是问题 $(\mathcal{P}_a)$ 的一个特征值，则称 $\lambda\in\mathbb{R}$ 为问题的特征值

$$\int_Q a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|)D^{s(x,y)}uD^{s(x,y)}vd\mu-\lambda\int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx=0$$

对所有 $v \in W^{s}{}_{(x,\ y)\ 0}\quad L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$。

我们指出，如果 λ 是问题$(\mathcal{P}_a)$ 的一个特征值，则相应的$u \in W^{s}{}_{(x、y)}{}_{0}\ L_{\Phi_{x、y}}(Q)\ \setminus \{0\}$ 是$(\mathcal{P}_a)$的一个弱解。

我们的主要结果由以下定理给出。

定理 41 存在 $\lambda_* > 0$ 使得对于任意 $\lambda \in (0, \lambda_*)$ 都是问题 $(\mathcal{P}_a)$的特征值。

注 41 根据（33），应用定理 34 和推论 31 ，我们得到 $W^{s}{}_{(x,y)}{}_{0}\ L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$ 紧嵌入于 $L^{q+}(\Omega)$ 中。该事实结合 $L^{q^+}(\Omega)$ 连续嵌入于 $L^{q(x)}(\Omega)$ 中，确保了 $W^{s}{}_{(x,y)}{}_{0}\ L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$ 紧嵌入于 $L^{q(x)}(\Omega)$ 中。

接下来，对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们定义与问题$(\mathcal{P}_a)$ J_λ 相关的能量函数：$W^{s}{}_{(x,y)}{}_{0}\ L_{\Phi_{x,y}}(Q) \to \mathbb{R}$，如下

$$J_\lambda(u) = \int_Q \Phi_{x,y}\left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s(x,y)}}\right) d\mu - \lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx.$$

通过对[5] 和 [6],进行标准论证，我们有 $J_\lambda \in C^1(W^{s}{}_{(x,y)}{}_{0}\ L_{\Phi_{x,y}}(Q)\ \mathbb{R})$,

$$\langle J'_\lambda(u), v\rangle = \int_Q a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|)D^{s(x,y)}uD^{s(x,y)}vd\mu - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx.$$

引理 41 假设定理 41 的假设成立。那么，存在 $\lambda_* > 0$ 使得对于任意 $\lambda \in (0, \lambda_*)$，均存在 ρ、$\alpha > 0$，使得$J_\lambda(u) \geqslant \alpha > 0$ 对于任意 $u \in W^{s}{}_{(x,y)}{}_{0}\ L_{\Phi_{x,y}}(Q)$，其中 $||u|| = \rho$。

证明（证明）由于 $W^{s}{}_{(x,y)}{}_{0}\ L_{\Phi_{x,y}}(Q)$连续嵌入于 $L^{q(x)}(\Omega)$，因此存在一个正数常数 c_1 使得

$$||u|| \geqslant c_1||u||_{q(x)} \quad \forall u \in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q) \tag{34}$$

我们固定 $\rho \in (0,1)$，使得 $\rho < \dfrac{1}{c_1}$。则关系（34）意味着

$$\|u\|_{q(x)} < 1 \quad \text{for all } u \in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q) \quad \text{with } ||u|| = \rho.$$

然后，我们可以应用命题22，并得到

$$\int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx \leqslant \|u\|_{q(x)}^{q^-} \quad \text{for all } u \in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q) \quad \text{with } ||u|| = \rho. \tag{35}$$

关系（34）和（35）意味着

$$\int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx \leqslant c_1^{q^-}\|u\|^{q^-} \quad \text{for all } u \in W_0^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q) \quad \text{with } ||u|| = \rho. \tag{36}$$

考虑到关系（36），我们推得，对于任意 $u \in W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q)$，其中 $||u|| = \rho$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geqslant \|u\|^{\varphi^+} - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx \\ &\geqslant \|u\|^{\varphi^+} - \frac{\lambda c_1^{q^-}}{q^-}\|u\|^{q^-} \\ &= \rho^{q^-}\left(\rho^{\varphi^+ - q^-} - \frac{\lambda c_1^{q^-}}{q^-}\right). \end{aligned}$$

因此，如果我们定义

$$\lambda_* = \frac{\rho^{\varphi^+ - q^-}}{2c_1^{q^-}}q^-. \tag{37}$$

那么，对于任意 $\lambda \in (0, \lambda_*)$ 和 $u \in W^{s(x,y)}L_{\Phi_{x,y}}(Q)$，满足 $||u|| = \rho$，我们有

$$J_\lambda(u) \geqslant \alpha > 0,$$

使得

$$\alpha = \frac{\rho^{\varphi^+}}{2}.$$

证明至此完成。

引理 42 假设定理 41 的假设成立。那么，存在 $\phi > 0$ 使得 $\phi \geqslant 0$，$\phi \neq 0$，且 $J_\lambda(t\phi) < 0$ 当 $t > 0$ 充分小时成立。

证明（证明）根据假设 (32)，我们可以选取 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $q^- + \varepsilon_0 < \varphi^-$。另一方面，由于 $q \in C(\overline{\Omega})$，可知存在一个开集 $\Omega_0 \subset \Omega$，使得对于所有 $x \in \Omega_0$，$|q(x) - q^-| < \varepsilon_0$。因此，对于所有 $x \in \Omega_0$，$q(x) \leqslant q^- + \varepsilon_0 < \varphi^-$。令 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $supp(\phi) \supset \overline{\Omega_0}$，$\phi(x) = 1$ 对所有 $x \in \overline{\Omega_0}$ 成立，且 $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ 属于 $\overline{\Omega_0}$。那么对于任意 $t \in (0, 1)$，我们有

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) &= \int_Q \Phi_{x,y}\left(t|D^{s(x,y)}\phi|\right)d\mu - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}t^{q(x)}|\phi|^{q(x)}dx \\ &\leqslant \int_Q t^{\varphi^-}\Phi_{x,y}\left(|D^{s(x,y)}\phi|\right)d\mu - \lambda\int_{\Omega_0}\frac{t^{q(x)}}{q(x)}|\phi|^{q(x)}dx \\ &\leqslant t^{\varphi^-}\int_Q \Phi_{x,y}\left(|D^{s(x,y)}\phi|\right)d\mu - \frac{\lambda t^{q^-+\varepsilon_0}}{q^+}\int_{\Omega_0}|\phi|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

因此 $J_\lambda(t\phi) < 0$ 对于 $t < \delta^{1/(\varphi^- - q^- - \varepsilon_0)}$，有

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\frac{\lambda}{q^+}\int_{\Omega_0}|\phi|^{q(x)}dx}{\int_Q \Phi_{x,y}\left(|D^{s(x,y)}\phi|\right)d\mu}\right\}.$$

这是可行的，因为我们声称

$$\int_Q \Phi_{x,y}\left(|D^{s(x,y)}\phi|\right) d\mu > 0.$$

事实上，显然

$$\int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)} dx \leqslant \int_{\Omega} |\phi|^{q(x)} dx \leqslant \int_{\Omega} |\phi|^{q^-} dx.$$

另一方面，由于 $W^{s(x,y)}$ $L_{\Phi_{x,y}}(Q)$ 连续嵌入于 $L^{q^-}(\Omega)$，因此存在一个正数常数 c 使得

$$\|\phi\|_{q^-} \leqslant c\|\phi\|.$$

最后两个不等式意味着

$$\|\phi\| > 0$$

结合这一事实与命题31，结论立即成立。引理的证明至此完成。

证明（定理 41 的证明）设 $\lambda_* > 0$ 按（37）中的定义给出，且 $\lambda \in (0, \lambda_*)$。由引理 41 可知，在以原点为中心、半径为 ρ 的球 $W^{s(x,y)}$ $L_{\Phi_{x,y}}(Q)$ 的边界上，记为 $B_\rho(0)$，有

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

另一方面，根据引理 42，存在 $\phi \in W^{s(x,y)}$ $L_{\Phi_{x,y}}(Q)$ 使得 $J_\lambda(t\phi) < 0$ 对所有足够小的 $t > 0$ 均成立。此外，对于任意 $u \in B_\rho(0)$，我们有

$$J_\lambda(u) \geqslant \|u\|^{\varphi^-} - \frac{\lambda c_1^{q^-}}{q^-}\|u\|^{q^-}.$$

由此可得

$$-\infty < c := \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

现在令 $0 < \varepsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda$. 将定理 25 应用于泛函 J_λ： $B_\rho(0)$ ~~$\longrightarrow \mathbb{R}$~~, ~~可~~得 $u_\varepsilon \in B_\rho(0)$ 使得

$$\begin{cases} J_\lambda(u_\varepsilon) < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \varepsilon, \\ J_\lambda(u_\varepsilon) < J_\lambda(u) + \varepsilon\|u - u_\varepsilon\|, \quad u \neq u_\varepsilon. \end{cases}$$

由于 $J_\lambda(u_\varepsilon) \leqslant \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \varepsilon \leqslant \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \varepsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda$，我们推出 $u_\varepsilon \in B_\rho(0)$。

现在，我们定义 $\Lambda_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\Lambda_\lambda(u) = J_\lambda(u) + \varepsilon\|u - u_\varepsilon\|.$$

显然， u_ε 是 Λ_λ 的一个极小点，因此

$$\frac{\Lambda_\lambda(u_\varepsilon + tv) - \Lambda_\lambda(u_\varepsilon)}{t} \geqslant 0$$

对于足够小的 $t > 0$ 以及任意 $v \in B_\rho(0)$，上述关系给出

$$\frac{J_\lambda(u_\varepsilon + tv) - J_\lambda(u_\varepsilon)}{t} + \varepsilon||v|| \geqslant 0.$$

令 $t \to$，则有 $\langle J'_\lambda(u_\varepsilon)\ v\rangle + \varepsilon||v|| > 0$，从而我们推得

$$||J'_\lambda(u_\varepsilon)||_* \leqslant \varepsilon.$$

我们推得存在一个序列 $\{u_n\} \subset B_\rho(0)$，使得

$$J_\lambda(u_n) \longrightarrow c \text{ and } J'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0. \tag{38}$$

显然， $\{u_n\}$ 在 $W^s{}_{(x,\ y)\,0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$ 中有界。因此，存在 $u_0 \in W^s{}_{(x,\ y)\,0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$，使得取一个子序列后， $\{u_n\}$ 在 $W^s{}_{(x,\ y)\,0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$ 中弱收敛于 u_0。

另一方面，由于 $W^s{}_{(x,\ y)\,0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$ 紧嵌入 $L^{q(x)}(\Omega)$，因此 $\{u_n\}$ 强收敛于 u_0 于 $L^{q(x)}(\Omega)$ 中。于是根据 H¨older 不等式，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u_0) dx = 0.$$

这一事实和关系（38），意味着

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_\lambda(u_n), u_n - u_0\rangle = 0.$$

因此我们推得

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u_n|) D^{s(x,y)}u_n \left(D^{s(x,y)}u_n - D^{s(x,y)}u_0\right) d\mu = 0. \tag{39}$$

由于 $\{u_n\}$ 在 $W^s{}_{(x,\ y)\ 0}$ $L_{\Phi_x\text{中弱收敛于 }u_0}(Q)$，根据关系（39），我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q \left(a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u_n|) D^{s(x,y)}u_n - a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u_0|) D^{s(x,y)}u_0\right) \left(D^{s(x,y)}u_n - D^{s(x,y)}u_0\right) d\mu = 0. \tag{40}$$

由于，$\Phi_{x,\ y}$ 是凸的，我们有

$$\Phi_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|) \leqslant \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u + D^{s(x,y)}v|}{2}\right) + a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|) D^{s(x,y)}u \frac{D^{s(x,y)}u - D^{s(x,y)}v}{2}$$

$$\Phi_{x,y}(|D^{s(x,y)}v|) \leqslant \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u + D^{s(x,y)}v|}{2}\right) + a_{x,y}(|D^{s(x,y)}v|) D^{s(x,y)}v \frac{D^{s(x,y)}v - D^{s(x,y)}u}{2}$$

对每个 $u, v \in W^{s(x,\ y)0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$ 均成立。将上述两个关系相加，并对 Q 积分，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_Q \left(a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|)D^{s(x,y)}u - a_{x,y}(|D^{s(x,y)}v|)D^{s(x,y)}v\right)\left(D^{s(x,y)}u - D^{s(x,y)}v\right)d\mu\\ &\geqslant \int_Q \Phi_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|)d\mu + \int_Q \Phi_{x,y}(|D^{s(x,y)}v|)d\mu - 2\int_Q \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u - D^{s(x,y)}v|}{2}\right)d\mu,\end{aligned} \tag{41}$$

对每个 $u, v \in W^{s(x,y)0}$ $L_{\Phi_{x,y}}(Q)$。另一方面，由于对每个，我们知道 $\Phi_{x,y}: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个递增的连续函数，且 $\Phi_{x,y}(0) = 0$。于是，根据条件（Φ_1）和（Φ_2），我们可以应用 [23, 引理 2.1]，从而得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\int_Q \Phi_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|)d\mu + \int_Q \Phi_{x,y}(|D^{s(x,y)}v|)d\mu\right]\\ &\geqslant \int_Q \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u + D^{s(x,y)}v|}{2}\right)d\mu + \int_Q \Phi_{x,y}\left(\frac{|D^{s(x,y)}u - D^{s(x,y)}v|}{2}\right)d\mu\end{aligned} \tag{42}$$

对每个 $u,\ v \in W^{s(x,\ y)0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$。由（41）和（42），可得

$$\begin{aligned}&\int_Q \left(a_{x,y}(|D^{s(x,y)}u|)D^{s(x,y)}u - a_{x,y}(|D^{s(x,y)}v|)D^{s(x,y)}v\right)\left(D^{s(x,y)}u - D^{s(x,y)}v\right)d\mu\\ &\geqslant 4\int_Q \Phi_i\left(\frac{|D^{s(x,y)}u - D^{s(x,y)}v|}{2}\right)d\mu\end{aligned} \tag{43}$$

对每个 $u, v \in W^{s(x,\ y)0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$。

关系（40）和（43）表明 $\{u_n\}$ 强收敛到 u_0 于 $W^{s(x,\ y)0}$ $L_{\Phi_{x,\ y}}(Q)$。于是由关系（38），可得

$$J_\lambda(u_0) = c_1 > 0 \quad \text{and} \quad J'_\lambda(u_0) = 0.$$

因此，u_0 是问题 $(\mathcal{P}_a)$的一个非平凡弱解。证明完毕。

5 例子

本节给出一些函数 $\varphi_{x,\ y}$ 和 $\Phi_{x,\ y}$ 的例子，用以说明本文的结果。

例 1 作为第一个例子，我们可以取

$$\varphi_{x,y}(t) = \varphi_1(x,y,t) = p(x,y)\frac{|t|^{p(x,y)-2}t}{\log(1+|t|)} \quad \textit{for all} \quad t \geqslant 0,$$

因此，

$$\Phi_{x,y}(t) = p(x,y)\frac{|t|^{p(x,y)}}{\log(1+|t|)} + \int_0^{|t|}\frac{\tau^{p(x,y)}}{(1+\tau)(\log(1+\tau))^2}d\tau,$$

其中 $p \in C(Q)$ 满足 $2 \leqslant p(x,y) < N$ 对所有 $(x,y) \in Q$。

那么，在这种情况下，问题 $(\mathcal{P}_a)$ 变为

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} (-\Delta)^{s(x,.)}_{\varphi_1} u = \lambda |u|^{q(x)-2}u & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

with

$$(-\Delta)^{s(x,.)}_{\varphi_1} u(x) = p.v. \int_\Omega \frac{p(x,y)|D^{s(x,y)}u|^{p(x,y)-2}D^{s(x,y)}u}{\log(1+|D^{s(x,y)}u|)|x-y|^{N+s(x,y)}}\, dy \quad \text{for all } x \in \Omega.$$

容易看出$\Phi_{x,\ y}$ 是一个 Musielak 函数，并满足条件(Φ_3)。此外，对于每个固定的 $(x,\ y) \in Q$，由 [16]，第 243 页上的例 3 可得

$$p(x,y) - 1 \leqslant \frac{t\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} \leqslant p(x,y) \quad \forall (x,y) \in Q \quad \forall t \geqslant 0.$$

因此，(Φ_1) 在 $\varphi^- = p^- - 1$ 和 $\varphi^+ = p^+$下成立。
最后，我们指出，简单计算可得

$$\frac{d^2(\Phi_{x,y}(\sqrt{t}))}{dt^2} \geqslant 0$$

对于所有 $(x,\ y) \in Q$ 和 $t \geqslant 0$，关系(Φ_2) 成立。

因此，我们得出问题$(\mathcal{P}_1)$ 的一个存在性结果，如下文的注所述。

注 51 如果 $p^- - 1 > q^-$。那么存在 $\lambda_* > 0$ 使得对于任意$\lambda \in (0, \lambda_*)$ 都是问题 $(\mathcal{P}_1)$的一个特征值。

例 2 作为第二个例子，我们可以取 ke

$$\varphi_{x,y}(t) = \varphi_2(x,y,t) = p(x,y)\log(1+\alpha+|t|)|t|^{p(x,y)-2}t \quad for\ all \quad t \geqslant 0$$

因此，

$$\Phi_{x,y}(t) = \log(1+|t|)|t|^{p(x,y)} - \int_0^{|t|} \frac{\tau^{p(x,y)}}{1+\tau} d\tau,$$

其中 $\alpha > 0$ 是一个常数，且 $p \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ 满足对所有 $(x,y) \in Q$，$2 \leqslant p(x,y) < N$。

接下来考虑以下分数阶 $p(x,.)$-问题

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} (-\Delta)^{s(x,y)}_{\varphi_2} u = \lambda |u|^{q(x)-2}u & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

其中

$$(-\Delta)^{s(x,y)}_{\varphi_2} u(x) = p.v. \int_\Omega \frac{p(x,y)\log(1+\alpha+|D^{s(x,y)}u|).|D^{s(x,y)}u|^{p(x,y)-2}D^{s(x,y)}u}{|x-y|^{N+s(x,y)}}\, dy$$

对所有 $x \in \Omega$.

很容易看出$\Phi_{x,\ y}$ 是一个 Musielak 函数，并满足条件(Φ_3)。接下来，我们注意到，对于每个固定的 $(x,\ y) \in Q$，都有

$$p(x,y) \leqslant \frac{t\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} \quad \text{for all} \quad t \geqslant 0.$$

根据上述信息并取 $\varphi^- = p^-$，我们有

$$1 < p^- \leqslant \frac{t.\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} \quad \text{for all} \quad (x,y) \in Q \quad \text{and all } t \geqslant 0.$$

另一方面，经过一些简单计算可得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t.\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} = p(x,y) \quad \text{for all } (x,y) \in Q,$$

and

$$\lim_{t\to 0} \frac{t.\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} = p(x,y)+1 \quad \text{for all } (x,y) \in Q,$$

因此，我们注意到 $t.\varphi_{x,\ y}(t)\ \Phi_{x,\ y}(t)$ 在 $Q \times [0,\infty)$ 上连续。此外，

$$1 < p^- \leqslant \lim_{t\to 0} \frac{t.\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} \leqslant p^+ + 1 < \infty,$$

and

$$1 < p^- \leqslant \lim_{t\to \infty} \frac{t.\varphi_{x,y}(t)}{\Phi_{x,y}(t)} \leqslant p^+ + 1 < \infty.$$

由此可得

$$\varphi^+ < \infty.$$

我们得出关系(Φ_1) 成立。最后，我们指出，简单计算可知

$$\frac{d^2(\Phi_{x,y}(\sqrt{t}))}{dt^2} \geqslant 0$$

对于所有 $(x,y) \in Q$ 和 $t \geqslant 0$，关系 (Φ_2) 均成立。

注52 若 $p^- > q^-$。则存在 $\lambda_* > 0$ 使得对于任意 $\lambda \in (0,\lambda_*)$ 都是问题 $(\mathcal{P}_2)$ 的特征值。

利益披露声明

作者未报告任何潜在的利益冲突。

数据可用性声明

我的稿件没有关联数据。

参考文献

1. R. A. Adams, 《Sobolev空间》, Academic Press, 纽约, 1975。2. E. Azroul、A. Benkirane、M. Shimi 和 M. Srati (2020): *On a class of nonlo-cal problems in new fractional Musielak-Sobolev spaces*, Applicable Analysis, DOI: 10.1080/00036811.2020.1789601。3. E. Azroul、A. Benkirane、M. Shimi 和 M. Srati (2020): *Embedding and extensionresults in fractional Musielak-Sobolev spaces, Applicable Analysis*, Applicable Analysis, DOI: 10.1080/00036811.2021.1948019。4. E. Azroul、A. Benkirane 和 M. Srati (2020 *Nonlocal problems with Neumann and*): , arXiv: 。。5. E. *Robin boundary condition in fractional Musielak-Sobolev spaces* 2203 01756 Azroul、A. Benkirane、M. Srati、*Nonlocal eigenvalue type problem in fractional Orlicz-Sobolev space Adv. Oper. Theory* 2020 10 1007 43036 020 00067 5 , ( ) doi: 。/s - - - 。6. E. Azroul、A. Benkirane、M. Srati、 *Existence of solutions for a nonlocal type problem in fractional Orlicz Sobolev spaces Adv. Oper. Theory* 2020 10 1007 43036 020 , ( ) doi: 。/s - - 00042-0。7. E. Azroul、A. Benkirane 和 M. Shimi, *Existence and Multiplicity of solutions for fractional p x . -Kirchhoff type problems in* $\mathbb{R}^N$ 2019 (,) , Applicable Analysis, ( ), DOI: 10.1080/00036811.2019.1673373。8. E. Azroul、A. Benkirane、M. Shimi 和 M. Srati, *On a class of fractional p x -Kirchhoff*( ) 。( ) doi: 。/ . . . 9. E. *type problems Applicable Analysis* 2019 10 1080 00036811 2019 1603372 Azroul、A. Benkirane、M. Shimi、M. Srati, *Three solutions for fractional p(x, .)-Laplacian Dirichlet problems with weight, Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 第2020卷 (2020), 文章编号22, 第1-18页。10. A. Bahrouni, V. R ˘ *On a new fractional Sobolev space and applications to* adulescu, , 《离散与连续 *nonlocal variational problems with variable exponent* **11** 动力系统》(2018), 第379-389页。11. A. Bahrouni, V. R ˘ *Robin fractional problems with symmetric* adulescu 和 P. Winkert, , *variable growth* **61**, 101503 2020 10 1063 5 0014915 《数学物理学杂志》( ); doi: 。/ . . 12. S. Bahrouni、H. Ounaies、L. Tavares, *Basic results of fractional Orlicz-Sobolev space and applications to non-local problems* **55** 2020 。《非线性分析拓扑方法》( ), 第2期, 681-695。doi:10.12775/TMNA.2019.111。13. Biswas R., Tiwari S., *Multiplicity and uniform estimate for a class of variable order fractional p x -Laplacian problems with concave-convex nonlinearities* 1810 12960 ( ) 。arXiv: 。。14. A. *Leray-Schauder's solution for a nonlocal problem in a* Boumazourh 和 M. Srati, *fractional Orlicz-Sobolev space Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA)* 。 doi: 10.2478/mjpaa-2020-0004 (2020) 42-52。15. J. F. Bonder 和 A. M. Salort, *Fractional order Orlicz-Soblev spaces*, 《函数分析杂志》, 2019, https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.04.003。16. Ph. Cl ´ ´ *Existence of solutions to a semilin-* ement、B. de Pagter、G. *ear elliptic system through Orlicz-Sobolev spaces* 1 2004 241 267 Sweers、F. de Thelin, , 《地中海数学杂志》( ) - 。17. I. Ekeland *On the variational principle*《数学分析与应用杂志》, 47 (1974), 第324-353页。18. X. L. Fan、D. Zhao, *On the Spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$ *and* $W^{m,\,p(x)}(\Omega)$, 《数学分析与应用杂志》, 263 (2001), 424-446。19. S. Gala、Q. Liu、M.A. Ragusa, *A new regularity criterion for the nematic liquid crystal flows* **91** 9 1741 1747 2012 , Applicable Analysis ( ), - ( )。20. S. Gala 、 M.A. Ragusa, *Logarithmically improved regularity criterion for the Boussinesq equations in Besov spaces with negative indices*, Applicable Analysis 95(6): 1271-1279 (2016)。21. U. Kaufmann、J. D. Rossi 和 R. Vidal, *Fractional Sobolev spaces with variable expo- nents and fractional p x -Laplacians* **76** 2017 ( ), 《微分方程定性理论电子期刊》( ), 1-10。22. O. Kov ´ ´ ´ *L*$^{p(x)}$ *Ω W*$^{m\ p(x)}$ *Ω Czechoslovak Math.* a˘cik、J. Rakosnık, 关于空 *Jour.* 41 1991 4, 592 618 间 ( ) 和, ( ), ( ), 第 - 期。23. J. Lamperti, *On the isometries of certain function-spaces*, 《太平洋数学杂志》8 (1958), 459-466。24. S. Liang、G. M. Bisci、B. Zhang, *Sign changing solutions for Kirchhoff-type problems involving variable-order fractional Laplacian and critical exponents* 。Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 27(3): 556-575, 2022。

25. S. Liang、P. Pucci 和 B. Zhang（2022） *Existence and multiplicity of solutions for critical nonlocal equations with variable exponents*, Applicable Analysis, DOI: 10 1080 00036811 2022 2107916 。/。。。M. Mihailescu、V. Radulescu,
26 *Neumann problems associated to nonhomogeneous differential operators in Orlicz-Soboliv spaces* 58 6 2008 2087 2111 , Ann. Inst.

Fourier（） （）-。27. J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, *Lecture Notes in Mathematics*, 第1034卷, Springer, 柏林, 1983年。28. J. Musielak、W. Orlicz, *On modular spaces*。Studia Math. 18（1959）49-65。29. H. Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*。Maruzen Co., Ltd., 东京, 1950年。30. M. Ruzicka, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, 《数学讲义》, Springer, 柏林, 2000年。31. R. Servadei、E. Valdinoci,
Lewy-Stampacchia type estimates for variational inequalities driven by (non)local operators 2013 **29** 3 1091 1126 。Rev Mat

Iberoam.; （）：-。32. J. Zuo、D. Choudhuri、D. Repovˇs
On critical variable-order Kirchhoff type problemswith variable singular exponent Journal of Mathematical Analysis and Applications, 第514卷, 第1期, 2022年, 第126264页。https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126264。33. J. Zuo、T. An、A. Fiscella.
A critical Kirchhoff-type problem driven by a p(.) -fractional Laplace operator with variable s . -order 2020 1 15 ( )。Math Meth Appl Sci.; -。https://doi.org/10.1002/mma.6813。34. J. Zuo、L. Yang、S. Liang.
A variable-order fractional p(.)-kirchhoff type problem in $\mathbb{R}^N$。Math Meth Appl Sci. 2020; 1-18。https://doi.org/10.1002/mma.6995。35. J. Zuo、A. Fiscella 和 A. Bahrouni（2022）
Existence and multiplicity results for p(.) q(.) fractional Choquard problems with variable order, 《复变函数与椭圆方程》, 67:2, 500-516, DOI: 10.1080/17476933.2020.1835878

