arXiv:2301.00471v1 [math.OC] 1 Jan 2023

常系数欠驱动线性抛物-输运系统的零可控性

Armand Koenig、Pierre Lissy†

2023年1月3日

摘要

本文旨在研究一维环面上混合线性抛物-输运方程组的可控性性质，其中扩散矩阵可以不可对角化。方程通过零阶或一阶耦合项相互耦合，耦合矩阵为常矩阵，且不对其作任何结构假设。分布式控制通过一个常矩阵算子作用于系统，因此控制数可能显著少于方程数，涵盖了间接可控和同时可控的情形。更准确地说，我们证明，短时间内，此类系统在适当的 Sobole夫空间中均不可控；而在长时间内，对于正则性充分的初始数据，当且仅当满足谱卡尔曼秩条件时，系统才具有零可控性。我们还证明，正则性不足的初始数据不可控。正向结果通过结合所谓的虚拟控制方法与代数可解性论证获得；负向结果则通过为控制问题所对应的伴随系统构造适当的近似解（采用 WKB 构造）获得。作为一般结果的应用，我们还详细研究了 2×2 系统的情形（即一个纯输运方程和一个抛物型方程）。

MSC 分类 93B05, 93B07, 93C20, 35M30.

关键词 抛物-输运系统，零可控性，可观测性。

1 引言

1.1 背景与研究现状

耦合偏微分方程系统的可控性近年来二十年来受到广泛关注，这既是因为它们与现实模型相关，也因为这一背景下存在特有的数学难题。大量文献致力于研究方程各分量具有相同定性行为的系统（例如，它们全都是抛物型、双曲型等）。然而，尽管混合不同动力学的情形在数学上颇具意义，对它的研究却较少。事实上，在这种情况下，单独考察每个方程时，其可控性可能截然不同（例如，带分布式控制的热方程可在任意短时间内从任意开子集[29, 22], 可控，而带

法国图卢兹，IMT、图卢兹大学、法国国家科学研究中心、图卢兹第三大学—保罗·萨巴蒂埃大学（UPS）（armand.koenig@math.univ-toulouse.fr）

†CEREMADE、巴黎多芬大学与法国国家科学研究中心 UMR 7534、巴黎文理研究大学，法国巴黎 75016（lissy@ceremade.dauphine.fr）。

分布式控制的波动方程则需要较长时间，并且满足某些几何条件 [6]），因此最终耦合系统的可控性可能难以预判。此外，本文所考虑的欠驱动系统（即控制数量少于方程数量的系统）还会带来额外的数学难题，特别是由于耦合项的代数效应和解析效应在理解所研究系统的可控性或可观测性时起着主导作用。本文旨在研究文献[7]中提出的一类耦合抛物-输运方程模型的间接可控性。

值得一提的是，文献中已有许多经过研究的现实模型可以改写为耦合抛物-输运方程，尤其是带结构阻尼的波动方程[37, 34, 10, 24], 带记忆的热方程 [26, 23], 一维线性化可压缩 Navier-Stokes 方程 [20, 13, 12, 8], 或 Benjamin-Bona-Mahony 方程 [38]。关于更多细节，请参阅 [7, §1.4]。这说明了研究本文所述耦合抛物-输运系统一般形式的意义；这可以视为一种尝试，旨在建立统一框架，涵盖文献中的诸多已有结果并将其推广。与本文相关的其他研究成果包括：[2], , 作者研究了一个由一个输运方程和一个抛物型方程组成的一维系统，并通过WKB方法证明该系统在短时间内不具可控性；以及 [11], , 作者证明了一个由一个输运方程和一个椭圆方程组成的一维系统在长时间内具有可控性。

1.2 所研究的抛物-输运系统介绍

设 $T>0$ 为某个终止时间，$\mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 为一维环面，ω 为 $\mathbb{T}$的一个非空开子集，$d\in\mathbb{N}^*$（表示我们系统中的方程数量），$m\in\{1,\dots,d\}$（表示我们系统中的控制数量），A、B、$K\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$（为一些常数耦合矩阵），以及 $M\in\mathcal{M}_{d,\,m}(\mathbb{R})$（为一个常数控制算子）。我们的目标是研究以下耦合抛物-输运方程系统的可控性：

$$\begin{cases} \partial_t f - B\partial_x^2 f + A\partial_x f + Kf = Mu\mathbb{1}_\omega & \text{in } (0,T)\times\mathbb{T}, \\ f(0,\cdot)=f_0 & \text{in } \mathbb{T}. \end{cases} \tag{Sys}$$

这里，状态为 $f:[0,T]\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}^d$，控制为 $u:[0,T]\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}^m$。对于 f 和 u 所选取的确切正则性将在后文进一步明确。

我们假设

$$d=d_{\mathrm{h}}+d_{\mathrm{p}} \text{ with } 1\le d_{\mathrm{h}}<d,\ 1\le d_{\mathrm{p}}<d, \tag{H.1}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix},\ \text{with } D\in\mathcal{M}_{d_{\mathrm{p}}}(\mathbb{R}), \tag{H.2}$$

$$\Re(\mathrm{Sp}(D))\subset(0,+\infty). \tag{H.3}$$

d_{h} 表示纯双曲方程的数量，而 d_{p} 表示抛物型方程的数量。

注意，H.3) 是确保矩阵算子 $\partial_t-D\Delta$ 在 Petrovskii 意义下是抛物型的必要条件（[28, 第 7 章，定义 2]）。对 $d\times d$矩阵 $A=\left(\begin{smallmatrix}A' & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{smallmatrix}\right)$引入类似的分块分解后，我们对矩阵作出如下假设：
$A'\in\mathcal{M}_{d_h}(\mathbb{R})$

$$A' \text{ is diagonalizable with } \mathrm{Sp}(A')\subset\mathbb{R}. \tag{H.4}$$

需要注意的是，众所周知，条件（H.4）是保证（[7, §2.2]）适定所必需的（且充分的，参见 Sys）。

1.3 主要结果

为了陈述我们的结果，我们需要引入以下记号：

$$\ell(\omega) := \sup\{|I|;\ I \text{ connected component of } \mathbb{T} \setminus \omega\}, \tag{1}$$

$$\mu_* := \min\{|\mu|;\ \mu \in \mathrm{Sp}(A')\},$$

and

$$T^* = T^*(\omega) := \begin{cases} \frac{\ell(\omega)}{\mu_*} & \text{if } \mu_* > 0, \\ +\infty & \text{if } \mu_* = 0. \end{cases} \tag{2}$$

对于 $n \in \mathbb{Z}$，我们还设

$$B_n := -n^2 B - \mathrm{i}nA - K \tag{3}$$

and

$$[B_n|M] := \begin{pmatrix} M & B_n M & \dots & B_n^{d-1} M \end{pmatrix}. \tag{4}$$

我们的主要结果如下。

定理 1。 假设 (H.1)–(H.4) 成立，且 $T > T_*$。

那么，谱卡尔曼秩条件 $\mathrm{rank}([B_n|M]) = d$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立，当且仅当对每个 $f_0 \in H^{4d(d-1)}(\mathbb{T})^d$，都存在一个控制 $u \in L^2([0,T]\times\omega)^m$ 使得抛物-输运系统 (Sys) 在初始条件 f_0 下的解 f 满足 $f(T,\cdot) = 0$。

注2。 • 回顾一下，对于常微分方程组的控制而言，Kalman 秩条件是必要的 [14, 定理 1。16]因此，将抛物-输运系统作傅里叶变换后，我们立即发现，对每个 $T > 0$，谱卡尔曼秩条件 $\forall n \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{rank}([B_n|M]) = d$ 是以下所有问题实现零可控性的必要条件：H^k 在时间 T。

• 实际上，我们证明了该定理的两个略强版本，即定理 9 和 12，它们有助于在对初始条件的双曲部分的傅里叶系数施加某些约束的情况下，获得一些可控性结果（见命题20、命题 21、命题 22）。

• 可以对定理1中所述的正则性稍作改进，如下所示。假设 $T > T_*$并且对所有 $n \in \mathbb{Z}$，谱卡尔曼秩条件 $\mathrm{rank}([B_n|M]) = d$ 成立。则：

1. 对于每个 $f_0 \in H^{4d(d-1)}(\mathbb{T})^{d_h} \times H^{4d(d-1)-1}(\mathbb{T})^{d_p}$，存在一个控制 $u \in L^2([0,T]\times\omega)^m$，使得抛物-输运系统（Sys）在初始条件 f_0下的解 f 满足 $f(T,\cdot) = 0$。2. 若 $A_{12} = 0$，则对于每个 $f_0 \in H^{4d(d-1)}(\mathbb{T})^{d_h} \times H^{4d(d-1)-2}(\mathbb{T})^{d_p}$，存在一个控制 $u \in L^2([0,T]\times\omega)^m$，使得抛物-输运系统（Sys）在初始条件 f_0 下的解 f 满足 $f(T,\cdot) = 0$。

事实上，通过让系统在一个短时间区间内自由演化，我们可以利用引理 23 的方法证明，抛物分量变为 $H^{4d(d-1)}(\mathbb{T})^{d_p}$，因此可以应用定理1，同时考虑到条件 $T > T^*$ 是开条件，且系统是时不变的。

• 谱 Kalman 秩条件 $\mathrm{rank}([B_n|M]) = d$ 最初由 [5] 针对具有可对角化扩散的耦合热方程系统提出（另见 [33] 关于不可对角化扩散的研究）。

定理3。 设 $\mu \in \mathrm{Sp}(A')$, $N \in \mathbb{N}$ 和 $T > 0$。假设每个初始条件 $f_0 \in L^2(\mathbb{T})^d \cap \{\sum_{|n|>N} X_n e^{inx}\}$ 都能通过 $L^2((0,T)\times\omega)$中的控制在时间 T 内被驱动至0。那么，存在$V_0 \in \ker(A'^* + \mu)$ 使得 $M^*\begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$。

备注 4。 定理 1、9和 12只能保证足够光滑的初始条件具有零可控性。定理3 证明，一般而言，这种正则性条件是必要的：即使时间足够长，并且对每个 n都满足 Kalman 秩条件，也可能存在某个 L^2 初始条件无法通过0 控制 L^2 控制到达。

1.4 文章的精确范围与组织结构

本文可视为 [7], 的延续，因为我们推广了上述文章的结果，能够处理任意矩阵 A、B、K、M，而不对其结构施加任何限制。事实上，在 [7], 中，作者研究了 $M = I_d$ 的情形（此时不需要 Kalman 秩条件），以及一些特殊情形：仅控制抛物部分或双曲部分，同时对耦合矩阵 A、B 和 K 以及扩散矩阵的结构施加严格限制 B。

值得指出的是，就我们得到的可控性条件而言，本文结果是尖锐的。然而，初始状态空间（其选取受我们所用具体策略的技术原因所决定，该策略对正则性的要求较高，见第 3.2节）几乎肯定并非尖锐，而且强烈依赖于耦合项的结构。找出确切的“良好”状态空间仍是一个开放问题，似乎难以在一般情形下解决。

本文组织如下。第2节介绍一些记号，并汇集证明中将用到的一些已有结果。第3节旨在证明，条件$\mathrm{rank}([B_n|M]) = d$ 足以在大时间情形下得到我们所需的可控性结果。论证基于第3.1节中详细阐述的虚拟控制论证：我们首先在 $M = I_d$的情形下，针对正则性足够好的初始数据，使用正则性足够好的控制证明一个辅助可控性结果。随后在第3.2节中，我们通过代数操作说明如何在 M 的值域内得到控制。值得注意的是，虚拟控制与代数可解性相结合的方法最初是在 [16] 中针对偏微分方程的可控性提出的，之后已成功用于各种问题 [4, 17, 18, 32, 15, 39, 40, 19]。本文的一项主要新意在于，代数可解性并非直接针对系统（或如 [19]中那样针对其伴随算子）进行，而是针对系统在其傅里叶分量上的投影版本进行。第4节旨在证明一些可控性的必要条件。第4.1节用于构造 WKB 解。这些解在第4.2节中用于否定短时间可控性，并在第4.3节中用于证明定理3。第5节旨在将我们的结果应用于 2×2 系统这一特例，并在这一具体设定下讨论正则性假设的尖锐性。最后，附录A证明一个关于“控制至某个有限维空间，再加上唯一延拓”策略的一般结果；该策略在第3.1节中使用，其思路源自 [30, 7]。

致谢 Armand Koenig 获得了 ANR LabEx CIMI 的资助（资助编号 ANR- 11-LABX-0040），该项目隶属于法国国家计划“未来投资”。

Pierre Lissy 获得了法国国家研究署 TRECOS项目的资助，资助编号为 ANR-20-CE40-0009。

2 一些记号和预备结果

我们将借助一些关于抛物-输运系统（Sys）的已知基本结果，参见[7]。为方便读者，我们在此汇总最常用的记号和结果，并将在后文用到时回顾其他一些内容。

令 $\mathcal{L}$ 为定义在 $L^2(\mathbb{T})^d$ 上的无界算子，其定义域为 $H^1(\mathbb{T})^{d_\mathrm{h}} \times H^2(\mathbb{T})^{d_\mathrm{p}}$，定义如下：

$$\mathcal{L}f = -B\partial_x^2 f + A\partial_x f + Kf.$$

算子 $-\mathcal{L}$ 生成一个作用于 $L^2(\mathbb{T})^d$ [7,命题 11]。每个 $H^k(\mathbb{T})^d$ 均由 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}}$稳定，且 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}}$ 在 $H^k(\mathbb{T})^d$ 上的限制是一个有界算子强连续半群[7, 注 13]。记 $S(T, f_0, u)$ 为抛物-输运系统在时间 T 的解（Sys），其控制矩阵为 $M = I_d$（大小为 d的单位矩阵，即，每个分量均由不同的控制量控制），初始条件为 f_0，控制量为 u。

令 $n_0 \in \mathbb{N}$ 取足够大的值，具体取值将在后文确定。记 $e_n : x \in \mathbb{T} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$。此外，记以下函数为 $E : \mathbb{C} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$：

$$E(z) = B + zA - z^2K.$$

令 $r > 0$ 足够小。对于 $|z| < r$，令 $P^\mathrm{h}(z)$ 为 $E(z)$ 对应于特征值集合 $\lambda(z) \in \mathrm{Sp}(E(z))$ 的特征子空间之和上的特征投影，其中 $|\lambda(z)| < r$。根据 [7,命题 5]，$P^\mathrm{h}(z)$ 满足：

- $P^\mathrm{h}(0) = \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;
- $z \mapsto P^\mathrm{h}(z)$是全纯的;
- $P^\mathrm{h}(z)$ 是与 $E(z)$可交换的投影;
- 当 $z \to 0$时的• $P^\mathrm{h}(z)E(z) = O(z)$。

我们还设定 $P^\mathrm{p}(z) = I - P^\mathrm{h}(z)$。该投影 $P^\mathrm{p}(z)$ 满足与 $P^\mathrm{h}(z)$ 类似的性质（[7, 命题 6]）。

根据 [7, 命题 18],，我们用 F^0 表示小于 n_0 的频率空间，用 F^h（分别用 F^p）表示大于 n_0 的双曲频率空间（分别为大于 n_0的抛物频率空间），即

$$\begin{aligned} F^0 &= \bigoplus\nolimits_{|n|\le n_0} \mathrm{Span}(e_n); \\ F^\mathrm{p} &= \bigoplus\nolimits_{|n|>n_0} \mathrm{Range}(P^\mathrm{p}(\mathrm{i}/n))e_n; \\ F^\mathrm{h} &= \bigoplus\nolimits_{|n|>n_0} \mathrm{Range}(P^\mathrm{h}(\mathrm{i}/n))e_n. \end{aligned}$$

根据[7, 命题 18],，我们特别有

$$L^2(\mathbb{T})^d = F^0 \oplus F^\mathrm{p} \oplus F^\mathrm{h}.$$

空间 F^p 在半群 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}}$ 作用下保持稳定（参见 P^p [7, 命题 5] 的定义以及 F^p [7, 命题 18]的定义）。我们用 $\mathcal{L}^\mathrm{p}$ 表示 $\mathcal{L}$ 在 F^p上的限制。

同样，空间 F^h 在半群 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}}$作用下保持稳定。我们用 $\mathcal{L}^\mathrm{h}$ 表示 $\mathcal{L}$ 在F^h上的限制，并且 $-\mathcal{L}^\mathrm{h}$ 在 F^h [7, 上生成一个强连续的有界算子群 19]。设 Π^0、 Π^p、 Π^h 和 Π 为如下定义的投影

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T})^d &= F^0 \oplus F^\mathrm{p} \oplus F^\mathrm{h}; \\ \Pi^0 &= I_{F^0} + 0 + 0; \\ \Pi^\mathrm{p} &= 0 + I_{F^\mathrm{p}} + 0; \\ \Pi^\mathrm{h} &= 0 + 0 + I_{F^\mathrm{h}}; \\ \Pi &= 0 + I_{F^\mathrm{p}} + I_{F^\mathrm{h}} = \Pi^\mathrm{p} + \Pi^\mathrm{h}. \end{aligned}$$

这些投影是 $L^2(\mathbb{T})^d$ [7, 命题 18] 上的有界算子（按照 [7, 命题 18] 的证明进行推导后，也很容易得出它们在每个 $H^k(\mathbb{T})^d$ 上都是有界算子）。

3 正则初始条件下的零可控性

3.1 正则初始条件下的正则控制

As 为证明定理 1，我们需要一些关于正则性的结果
of c当控制矩阵为 $M = I_d$ 时的控制。

命题 5。假设 $T > T_*$（如式（2）中所定义），且 $M = I_{d_0}$。设 k，$\ell \in \mathbb{N}$。对于每个 $f_0 \in H^k(\mathbb{T})^d$，都存在 $u \in H_0^k((0,T)\times\omega)^{d_h} \times H_0^\ell((0,T)\times\omega)^{d_p}$，使得抛物-输运系统（Sys）在初始条件 f_0 和控制 u 下的解满足 $f(T,\cdot) = 0$。

我们改编了 $k = 0$ [7, 定理 2] 中相应结果的证明。首先，我们证明以下对 [7, 命题 21] 的改编。

命题6。设 $T' \in (T^*, T)$ 和 $k \in \mathbb{N}$。若 n_0（在 F^0 的定义中，见 [7, 式（40–42）]）足够大，则存在一个连续算子

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^h : H^k(\mathbb{T})^d \times H_0^k((T',T)\times\omega)^{d_p} &\to H_0^k((0,T')\times\omega)^{d_h} \\ (f_0, u_p) &\mapsto u_h, \end{aligned}$$

使得对于每个 $(f_0, u_p) \in H^k(\mathbb{T})^d \times H_0^k((T',T)\times\omega)^{d_p}$（其中 u_p 在 $(0,T')$ 上延拓为0，且 u_h 在 (T',T)上延拓为0），

$$\Pi^h S(T; f_0, (\mathcal{U}^h(f_0,u_p), u_p)) = 0.$$

证明。与 [7, §4.31], 命题6 的结论等价于系统 $\partial_t f + \mathcal{L}^h f = \Pi^h(u,0)$ 在时间 T'的精确可控性。由于 $-\mathcal{L}^h$ 生成一个强连续群，时间 T' 的精确可控性等价于时间 T'的零可控性，这正是我们要证明的结论。

当 $k = 0$时，[7, 命题 23] 即为所述结果。为了将该结果推广至 $k > 0$，我们使用 Ervedoza 和 Zuazua 关于算子群背景下正则初始数据对应的控制正则性的一般结果。[21, 定理 1。4]设 $\tilde{\omega}$ 是 $\mathbb{T}$ 的一个开子集，满足 $\tilde{\omega} \subset \omega$且 $T^*(\tilde{\omega}) < T'$。设 $\chi \in C_c^\infty(\omega)$ 满足 $\chi = 1$ 在 $\tilde{\omega}$上。设$\eta \in C_0^\infty(0,T')$。设 $z_0 \in H^k(\mathbb{T})^d$ 为一个初始条件。令 $Y_{T'}$ 由 [21, 命题 13] 定义，并将控制定义为

$$V(t) = \eta(t)\chi(x)M^*Y(t),$$

其中 Y 是下列方程的解

$$\partial_t Y - B^*\partial_x^2 Y - A^*\partial_x Y + K^*Y = 0$$

对应于初始条件 $Y(T') = Y_{T'}$。根据 [21, 命题 1.3]，$V(t)$ 是一个能在时间 T'将 z_0 导向 0 的控制。根据 [21, 定理 1.4]，$Y_{T'} \in H^k(\mathbb{T})^d$（因此 $V \in L^2(0,T';H^k(\omega)^d)$）以及 $V \in H^k(0,T';L^2(\omega)^d)$，其估计形式为

$$\|V\|^2_{L^2(0,T';H^k(\omega)^d)} + \|V\|^2_{H^k(0,T';L^2(\omega)^d)} \le C_k\|z_0\|^2_{H^k(\mathbb{T})^d}.$$

我们断言 $L^2(0,T';\, H_0^k(\omega)) \cap H_0^k(0,T';\, L^2(\omega)) \subset H^k((0,T')\times\omega)$。事实上，对每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(1+\tau^2+\xi^2)^k \le C_k\big((1+\tau^2)^k + (1+\xi^2)^k\big).$$

因此，在傅里叶空间中进行积分，

$$\|f\|^2_{H^k(\mathbb{R}^2)} \le C_k\big(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R};H^k(\mathbb{R}))} + \|f\|^2_{H^k(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}))}\big).$$

回忆一下，对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 凸集[1]， $H_0^k(\Omega)$ 是指其在 Ω之外的零延拓 $H^k(\mathbb{R}^n)$属于 $L^2(0,T';H_0^k(\omega))\cap H_0^k(0,T';L^2(\omega))\subset H^k((0,T')\times\omega)$，如所声称的那样，因此 $V\in H^k((0,T')\times\omega)^d$。

由于 $\eta\in C^\infty(0,T')$ 和 $\chi\in C_0^\infty(\omega)$，我们得出 $V\in H_0^k((0,T')\times\omega)^d$。 □

为证明命题5，我们还将使用：

命题 7 ([7], 命题 22)。设 $T'\in(T^*,T)$ 和 $k\in\mathbb{N}$。若 n_0 足够大，则存在一个连续算子

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\mathrm{p}}:\ L^2(\mathbb{T})^d\times L^2((0,T')\times\omega)^{d_{\mathrm{h}}}&\to C_c^\infty((T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}\\ (f_0,u_{\mathrm{h}})&\mapsto u_{\mathrm{p}},\end{aligned}$$

*(*也就是说，对于任意 $s\in\mathbb{N}$， $\mathcal{U}^{\mathrm{p}}:L^2(\mathbb{T})^d\times L^2((0,T')\times\omega)^{d_{\mathrm{h}}}\to H_0^s(T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}$ 关于这些空间所关联的自然拓扑是连续的*)*，使得对于每个 $(f_0,u_{\mathrm{h}})\in L^2(\mathbb{T})^d\times L^2((0,T')\times\omega)^{d_{\mathrm{h}}}$，

$$\Pi^{\mathrm{p}}S(T;f_0,(u_{\mathrm{h}},\mathcal{U}^{\mathrm{p}}(f_0,u_{\mathrm{h}}))=0.$$

现在，我们可以通过仿照情形 5 的证明来证明命题 $k=0$ [7, 命题 20 & §4.5].

命题 *5* 的证明。步骤 *1*：控制到最终维数空间。— 我们声称存在一个闭有限余维子空间 $\mathcal{G}$，属于 $H^k(\mathbb{T})^d$，以及一个连续算子 $\mathcal{U}:\mathcal{G}\to H_0^k((0,T')\times\omega)^{d_{\mathrm{h}}}\times C_c^\infty((T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}$（其含义是，对于任意 $s\in\mathbb{N}$， $\mathcal{U}:\mathcal{G}\to H_0^k((0,T')\times\omega)^{d_{\mathrm{h}}}\times H_0^s(T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}$ 关于这些空间的自然拓扑是连续的），使得对于每个 $f_0\in\mathcal{G}$，$\Pi S(T,f_0,\mathcal{U}f_0)=0$。

性质 $\Pi S(T,f_0,(u_{\mathrm{h}},u_{\mathrm{p}}))=0$ 成立，当且仅当

$$\begin{cases}u_{\mathrm{h}}=\mathcal{U}^{\mathrm{h}}(f_0,u_{\mathrm{p}})=\mathcal{U}_1^{\mathrm{h}}(f_0)+\mathcal{U}_2^{\mathrm{h}}(u_{\mathrm{p}}),\\ u_{\mathrm{p}}=\mathcal{U}^{\mathrm{p}}(f_0,u_{\mathrm{h}})=\mathcal{U}_1^{\mathrm{p}}(f_0)+\mathcal{U}_2^{\mathrm{p}}(u_{\mathrm{h}}).\end{cases}\tag{5}$$

设 $\mathcal{C}=\mathcal{U}_1^{\mathrm{p}}+\mathcal{U}_{\mathrm{p}}^2\mathcal{U}_1^{\mathrm{h}}$。那么，先前的关系成立，当且仅当

$$\mathcal{C}f_0=(I-\mathcal{U}_2^{\mathrm{p}}\mathcal{U}_2^{\mathrm{h}})u_{\mathrm{p}}.\tag{6}$$

由于 $\mathcal{U}_2^{\mathrm{p}}$ 是从 $H_0^k((T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}$ 到 $C_c((T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}$的连续算子，我们推得算子 $\mathcal{C}:H_0^k((T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}\to H_0^k((T',T)\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}$ 是紧算子。因此，根据 Fredholm择一定理，关系（6）在一个闭有限余维子空间 $\mathcal{G}$上成立。

步骤 2：结论。——处理有限（余）维空间 F^0 和 $\mathcal{G}$，只需直接对 [7, §4.5] 作相应调整；具体而言，我们使用附录A中证明的命题 25，并取 $H=V=H^k(\mathbb{T})^d$、$U_T=H_0^k((0,T)\times\omega)^{d_{\mathrm{h}}}\times H_0^\ell((0,T)\times\omega)$、$A=-\mathcal{L}$、$B=\mathbb{1}_\omega$、$\mathcal{G}=\mathcal{G}$和 $\mathcal{F}=F^0$。根据上一步，有限维空间控制假设成立。唯一延拓假设也成立，因为每个广义特征向量都是形如 $X_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ ($X_n\in\mathbb{C}^d$) 的元素的有限和，而 $X_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 的有限线性组合具有唯一延拓性质，例如这可由 Jerison-Lebeau谱不等式推出（针对我们的具体情形，见 [30, 定理 3], 或 [7, 式 (90)]）。 □

由于技术原因，我们需要控制项具有 $P(\partial_x)u$ 的形式，其中 $P(\partial_x)$ 是一个待定的常系数微分算子。

[1]更一般地，满足线段条件，参见[1, 定义3.21和定理5.29]。

命题 8. 假设 $T > T_*$（定义见 (2)），并且 $M = I_d$。设 k, $\ell \in \mathbb{N}$。设 P 是一个非零复系数多项式。假设 $\ell \geqslant \deg(P)$。设 $f_0 \in H^k(\mathbb{T})^d$ 满足：对每个 $n \in \mathbb{Z}$, $P(\mathrm{i}n) = 0 \implies c_n(f_0) = 0$。那么，存在 $u \in H_0^{k+\deg(P)}((0,T)\times\omega)^{d_\mathrm{h}} \times H_0^{\ell}((0,T)\times\omega)^{d_\mathrm{p}}$ 使得抛物-输运系统 (Sys) 在初始条件 f_0和控制项 $P(\partial_x)u$ 下的解满足 $f(T,\cdot) = 0$。

证明。 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 且满足 $\ell \geqslant \deg(P)$。设 $f_0 \in H^k(\mathbb{T})^d$ 使得对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $P(\mathrm{i}n) = 0 \implies c_n(f_0) = 0$。我们定义 $\widetilde{f}_0 := P(\partial_x)^{-1} f_0$：当 $P(\mathrm{i}n) \neq 0$ 时取 $c_n(\widetilde{f}_0) := P(\mathrm{i}n)^{-1} c_n(f_0)$，当 $P(\mathrm{i}n) = 0$ 时取 $c_n(\widetilde{f}_0) := 0$。注意到 $P(\partial_x)\widetilde{f}_0 = f_0$，且 $\widetilde{f}_0 \in H_0^{k+\deg(P)}(\omega)^d$。然后，将命题 5 应用于 $\widetilde{f}_0$，可知存在 $\widetilde{u} \in H_0^{k+\deg(P)}((0,T)\times\omega)^{d_\mathrm{h}} \times H_0^{\ell}((0,T)\times\omega)^{d_\mathrm{p}}$，使得抛物-输运系统 (Sys) 在初始条件 f_0 和控制 $\widetilde{u}$ 下的解 $\widetilde{f}$ 满足 $\widetilde{f}(T,\cdot) = 0$。此外，由于 $\widetilde{f}_0 \in H_0^{k+\deg(P)}(\omega)^d$ 且 $\widetilde{u} \in H_0^{k+\deg(P)}((0,T)\times\omega)^{d_\mathrm{h}} \times H_0^{\ell}((0,T)\times\omega)^{d_\mathrm{p}}$满足 $\ell \geqslant \deg(P)$，我们特别有 $\widetilde{f} \in L^2((0,T); H^{k+\deg(P)}(\mathbb{T}))$。因此，令 $f = P(\partial_x)\widetilde{f}$ 且 $u = P(\partial_x)f$，并利用 $P(\partial_x)$ 是常系数的（因此与算子$\partial_t - B\partial_x^2 + A\partial_x + KId$可交换），可知 f 满足初始条件为 f_0、控制为 $P(\partial_x)u$的 (Sys)。此外，由于 $f(T,\cdot) = 0$，我们还有 $f(T,\cdot) = P(\partial_x)f(T,\cdot) = 0$，从而得到所需结果。 □

3.2 代数可解性

对于 $k \in \mathbb{N}$，我们定义

$$[B_n|M]_k := \begin{pmatrix} M & B_n M & \dots & B_n^{k-1} M \end{pmatrix}. \tag{7}$$

我们证明以下定理1的变体。

定理 9。 假设 (H.1)–(H.4) 成立，且 $T > T_*$。令 $k \in \mathbb{N}$。假设对所有足够大的 $|n| \in \mathbb{N}$，*Kalman* 秩条件 $\operatorname{rank}([B_n|M]_k) = d$ 均成立。定义以下函数空间

$$E := \{f \in L^2(\mathbb{T})^d : \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) \in \operatorname{Range}([B_n|M])\}.$$

在其有定义时，令

$$[B_n|M]_k^+ := [B_n|M]_k^* \left([B_n|M]_k [B_n|M]_k^*\right)^{-1}.$$

将 $[B_n|M]_k^+$ 按分块写作

$$[B_n|M]_k^+ = \begin{pmatrix} L_{n,1}^{\mathrm{h}} & L_{n,1}^{\mathrm{p}} \\ \vdots & \vdots \\ L_{n,k}^{\mathrm{h}} & L_{n,k}^{\mathrm{p}} \end{pmatrix},$$

其中$L_{n,j}^{\mathrm{h}}$的大小为 $m\times d_\mathrm{h}$，而 $L_{n,j}^{\mathrm{p}}$的大小为 $m\times d_\mathrm{p}$。将 $L_{n,j}^{\mathrm{h}}$ 视为 n的有理函数，并记其次数为 $\deg(L_{n,j}^{\mathrm{h}})$，令

$$p := \max_{1\leq j\leq k} \deg(n^{j-1} L_{n,j}^{\mathrm{h}}) = \max_{1\leq j\leq k} \left(j - 1 + \deg(L_{n,j}^{\mathrm{h}})\right).$$

那么，对于每个 $f_0 \in H^p(\mathbb{T})^d \cap E$，都存在一个控制 $u \in L^2([0,T]\times\omega)$，使得抛物-输运系统（Sys）在初始条件 f_0 下的解 f 满足 $f(T,\cdot) = 0$。

证明的思路是先选择一个作用于每个分量的“虚拟”控制。然后，我们考察 f的傅里叶系数。这样，控制系统（Sys）就转化为一族

有限维控制系统。对于其中每个有限维系统，我们进行一些代数操作，称为代数可解性，将虚拟控制（作用于每个分量）转化为“实际”控制（仅作用于 Range(M)）。

我们先介绍将要用到的代数可解性结论，该结论基本上取自 [32,§2。1]。

引理 10。 设 $k \in \mathbb{N}^*$。设 $\widetilde{B} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ 和 $\widetilde{M} \in \mathcal{M}_{m,\ d}(\mathbb{R})$。设 $X_0 \in \mathbb{C}^d$ 和 $w \in H_0^{k-1}(0,T;\mathbb{C}^{mk})$。将 w 按分块写为

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix},$$

其中 $w_j \in H_0^{k-1}(\mathbb{T};\mathbb{C}^m)$，并令 $u = w_1 + w_2' + \cdots + w_k^{(k-1)}$。设 X，$\widetilde{X} \in C^0(0,T;\mathbb{C}^d)$ 为下列方程的解

$$X' = \widetilde{B}X + [\widetilde{B}|\widetilde{M}]_k w, \qquad \widetilde{X}' = \widetilde{B}X + \widetilde{M}u, \qquad X(0) = \widetilde{X}(0) = X_0,$$

其中

$$[\widetilde{B}|\widetilde{M}]_k := \begin{pmatrix} \widetilde{M} & \widetilde{B}M & \dots & \widetilde{B}^{k-1}\widetilde{M} \end{pmatrix}.$$

则 $X(T) = \widetilde{X}(T)$。

证明。 考虑由分块定义的、具有 $d+m$ 行和 km 列的 $\mathcal{M}_k$ 算子矩阵

$$\widetilde{\mathcal{M}_k} := \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{M} & \cdots & -\sum_{j=0}^{k-2} \partial_t^j \widetilde{B}^{k-2-j}\widetilde{M} \\ -I & -\partial_t & \cdots & -\partial_t^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{M}}_{k,1} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{k,2} \end{pmatrix}.$$

另设

$$\mathcal{P}:\ (X,W) \in H_0^1(0,T;\mathbb{C}^d) \times L^2(0,T;\mathbb{C}^m) \to \partial_t X - \widetilde{B}X - \widetilde{M}W \in L^2(0,T;\mathbb{C}^d).$$

我们断言

$$\mathcal{P} \circ \widetilde{\mathcal{M}_k} = [\widetilde{B}|\widetilde{M}]_k. \tag{8}$$

事实上，按分块可得 $\mathcal{P} \circ \widetilde{\mathcal{M}_k} = \begin{pmatrix} C_0 & \cdots & C_{k-1} \end{pmatrix}$ 其中

$$C_\ell = -(\partial_t - \widetilde{B}) \sum_{j=0}^{\ell-1} \partial_t^j \widetilde{B}^{\ell-1-j}\widetilde{M} + \widetilde{M}\partial_t^\ell.$$

接着，注意到这是一个望远镜求和，

$$\begin{aligned} C_\ell &= -\sum_{j=1}^{\ell} \partial_t^j \widetilde{B}^{\ell-j}\widetilde{M} + \sum_{j=0}^{\ell-1} \partial_t^j \widetilde{B}^{\ell-j}\widetilde{M} + \widetilde{M}\partial_t^\ell \\ &= -\partial_t^\ell \widetilde{M} + \widetilde{B}^\ell \widetilde{M} - \widetilde{M}\partial_t^\ell, \end{aligned}$$

这就证明了所声称的公式（8）。

现在，将方程（8）代入微分方程 $X' = \widetilde{B}X + [\widetilde{B}|\widetilde{M}]_k w$，得到

$$X' = \widetilde{B}X + (\partial_t - \widetilde{B})\widetilde{\mathcal{M}}_{k,1} w - \widetilde{M}\widetilde{\mathcal{M}}_{k,2} w.$$

利用 $Y := X - \widetilde{\mathcal{M}}_{k,1} w$，并注意到 $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,2} w = -u$，可将其写为 $Y' = \widetilde{B}Y + \widetilde{M}u$。由于 $w \in H_0^{k-1}(0,T;\mathbb{C}^{mk})$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,1} w(0) = \widetilde{\mathcal{M}}_{k,1} w(T) = 0$。因此 $Y(0) = X(0) = \widetilde{X}(0)$ 且 $Y(T) = X(T)$。于是 Y 与 $\widetilde{X}$ 满足相同的柯西问题。这证明了 $Y = \widetilde{X}$，从而 $\widetilde{X}(T) = Y(T) = X(T)$。

□

现在我们可以证明定理9。

定理 9 的证明。设 $f_0 \in H^p(\mathbb{T})^d$。令 $X_n(t) = c_n(f(t,\cdot))$ 并令 $u_n(t) = c_n(u(t,\cdot))$。所需结论 $f(T,\cdot) = 0$ 用傅里叶形式表示为： $\forall n \in \mathbb{Z}$， $X_n(T) = 0$。此外， X_n 满足

$$\begin{cases} X_n'(t) = B_n X_n(t) + M u_n(t), & t \in (0,T), \\ X_n(0) = c_n(f_0). \end{cases} \tag{9}$$

首先，我们来说明证明思路：如果 v 将 f_0 导向 0 当 $M = I$时，我们希望通过 w_n 定义 $c_n(v(t,\cdot)) = [B_n|M]_k w_n$（当 n 足够大时这是可能的），并选择 $u_n := w_{n1} + w_{n2}' + \cdots + w_{nk}^{(k-1)}$。然后，根据引理 10，函数 u_n 将 X_n 从 $c_n(f_0)$ 导向 0。这种对 u_n的粗略选择存在两个问题：该构造仅在 n 足够大时有效，更重要的是，我们无法保证 $\sum u_n e^{inx}$ 的支集包含于 $[0,T]\times\omega$中。

控制策略是：首先在时间 ε 内将小于 n_0 的频率降至 0，其中 $n_0 > 0$ 需足够大（稍后选定），而 $\varepsilon > 0$ 需足够小，以使 $T > T_* + 2\varepsilon$ 成立；其次，采用上述构造的改进版本。

步骤 *1*：控制有限个频率。——回顾一下， Π 是对大于 n_0 的频率所作的投影，并且 E 在定理 9的陈述中定义。我们断言，对于任意 $n_0 \in \mathbb{N}^*$， $\varepsilon > 0$ 以及 $f_0 \in E$，存在 $u \in L^2(0,\varepsilon; H_0^p(\omega))^m$ 使得 $(1-\Pi)S(\varepsilon, f_0, Mu) = 0$。

此性质等价于将系统（Sys）投影到小于或等于 n_0的频率上的零可控性。与此问题相关的可观测性不等式 [14, 定理 2。44]如下：

$$\exists C > 0,\ \forall g_0 \in (1-\Pi)E,\ \|e^{-\varepsilon \mathcal{L}^*} g_0\|^2_{H^{-p}(\mathbb{T})^d} \le C \int_0^\varepsilon \|M^* e^{-t\mathcal{L}^*} g_0\|^2_{L^2(\omega)^m}\, dt.$$

由于 $(1-\Pi)E$ 是有限维的，这等价于唯一延拓性质

$$\forall g_0 \in (1-\Pi)E,\ \left(M^* e^{-t\mathcal{L}^*} g_0(x) = 0 \text{ for } (t,x) \in (0,\varepsilon)\times\omega\right) \implies g_0 = 0.$$

我们来证明这一性质。设 $g_0 \in (1-\Pi)E$ 满足 $M^* e^{-t\mathcal{L}^*} g_0(x) = 0$， 其中 $(t,x) \in (0,\varepsilon)\times\omega$。由于 e^{inx} 的有限和具有唯一延拓性质，因此对每个 $0 < t < \varepsilon$ 和$|n| \le n_0$,

$$c_n(M^* e^{-t\mathcal{L}^*} g_0) = 0.$$

我们可以将其改写为

$$M^* e^{-tB_n^*} c_n(g_0) = 0.$$

对 t 中的 ℓ 求导，并在 $t = 0$处取值，可得对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $|n| \le n_0$,

$$M^* (B_n^*)^\ell c_n(g_0) = 0.$$

由于我们假设对 $|n| > n_0$有 $c_n(g_0) = 0$，这意味着 $c_n(g_0) \in \ker([B_n|M]^*)$。但是，根据 E的定义，$c_n(g_0) \in \mathrm{Range}([B_n|M]) = \ker([B_n|M]^*)^\perp$。因此， $c_n(g_0) = 0$ 且 $g_0 = 0$。这证明了唯一延拓性质，也证明了该命题。

步骤 *2*：构造 u_n。— 我们设定 $T' = T_* + \varepsilon = T - \varepsilon$。

记作 $[B_n|M]_k^+ = Q(in)/P(in)$，其中 Q 是一个矩阵系数多项式， P 是一个多项式（标量系数）。若将矩阵 C 的伴随矩阵记为 $\mathrm{Adj}(C)$，注意到我们可以取

$$Q(in) = [B_n|M]_k^* \,\mathrm{Adj}([B_n|M]_k [B_n|M]_k^*);$$
$$P(in) = \det([B_n|M]_k [B_n|M]_k^*).$$

递增 n_0 如有必要，我们可以假设对每个 $|n| > n_0$， $P(\mathrm{i}n) \neq 0$。首先，我们按照步骤 1所述施加控制：对任意 $f_0 \in E$，存在 $u \in L^2(0,\varepsilon; H_0^p(\omega))^m$ 使得 $(1-\Pi)S(\varepsilon, f_0, Mu) = 0$。于是，得到的解 $f(\varepsilon,\cdot)$ 满足 $P(\mathrm{i}n) = 0 \implies c_n(f(\varepsilon,\cdot)) = 0$，因为 $P(\mathrm{i}n) \neq 0$ 当 $|n| > n_0$ 且 $c_n(f(\varepsilon,\cdot)) = 0$ 当 $|n| \leqslant n_0$。

我们将此 $f(\varepsilon,\cdot)$ 视为新的初始条件，记为 f_ε，并且必须在时间 T'内将其控制到 0。注意，由于 $f_0 \in H^p(\mathbb{T})$ 和 $u \in L^2(0,\varepsilon; H_0^p(\omega))^d$，根据杜阿梅尔公式以及半群 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}}$ 在 $H^p(\mathbb{T})^d$上强连续这一事实，状态 f_ε 也属于 $H^p(\mathbb{T})^d$。

令 $\ell \in \mathbb{N}$ 足够大。根据命题8，存在

$$v \in H_0^{p+\deg P}((0,T')\times\omega)^{d_\mathrm{h}} \times H_0^{\ell}((0,T')\times\omega)^{d_\mathrm{p}}$$

使得 $S(T', f_\varepsilon, P(\partial_x)v) = 0$。将 $Q(\mathrm{i}n)$ 按分块写为：

$$Q(\mathrm{i}n) = \begin{pmatrix} Q_1(\mathrm{i}n) \\ \vdots \\ Q_k(\mathrm{i}n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^\mathrm{h}(\mathrm{i}n) & Q_1^\mathrm{p}(\mathrm{i}n) \\ \vdots & \vdots \\ Q_k^\mathrm{h}(\mathrm{i}n) & Q_k^\mathrm{p}(\mathrm{i}n) \end{pmatrix}.$$

其中 $Q_j(\mathrm{i}n)$的大小为 $m\times d$， $Q_j^\mathrm{h}(\mathrm{i}n)$的大小为 $m\times d_\mathrm{h}$，而 $Q_j^\mathrm{p}(\mathrm{i}n)$的大小为 $m\times d_\mathrm{p}$。注意，定理 9 的陈述中定义的 $L^\mathrm{h}_{n,j}$ 是 $L^\mathrm{h}_{n,j} = Q_j^\mathrm{h}(\mathrm{i}n)/P(\mathrm{i}n)$。另外设

$$w_n(t) := Q(\mathrm{i}n)c_n(v(t,\cdot)).$$

按分块写成

$$w_n(t) = \begin{pmatrix} w_{n,1}(t) \\ \vdots \\ w_{n,k}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(\mathrm{i}n)c_n(v(t,\cdot)) \\ \vdots \\ Q_k(\mathrm{i}n)c_n(v(t,\cdot)) \end{pmatrix}.$$

最后，设

$$u_n(t) := w_{n,1}(t) + w'_{n,2}(t) + \cdots + w^{(k-1)}_{n,k}(t).$$

步骤*3*：结论。— 注意，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，

$$\begin{aligned} [B_n|M]_k w_n(t) &= [B_n|M]_k Q(\mathrm{i}n)c_n(v(t,\cdot)) \\ &= [B_n|M]_k [B_n|M]_k^* \operatorname{Adj}([B_n|M]_k[B_n|M]_k^*)c_n(v(t,\cdot)) \\ &= \det([B_n|M]_k[B_n|M]_k^*)c_n(v(t,\cdot)) \\ &= P(\mathrm{i}n)c_n(v(t,\cdot)). \end{aligned}$$

此外，由于 $S(T', f_\varepsilon, P(\partial_x)v) = 0$，控制 $\widetilde{v_n}(t) := P(\mathrm{i}n)c_n(v(t,\cdot))$ 在时间 $c_n(f_\varepsilon)$ 内将 0 驱动至系统 $X_n' = B_nX_n + \widetilde{v_n}$ 中的 T'。也就是说， w_n 将 $c_n(f_\varepsilon)$ 在时间 内驱动至 0，对于系统 $X_n' = B_nX_n + [B_n|M]_k w_n$，时间为 T'。因此，根据引理 10， u_n 将在时间 $c_n(f_\varepsilon)$ 内将 0 驱动至系统（9）中，时间为 T'。

因此，由 $u := \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e_n$ 形式化定义的控制 u 满足 $S(f_\varepsilon, T', Mu) = 0$。注意，前面的和在 $L^2(0,T'; L^2(\mathbb{T}))$ 中是良定义的。注意，如果我们在分布的意义下定义 u，

$$u = (Q_1(\partial_x) + \partial_t Q_2(\partial_x) + \cdots + \partial_t^{k-1}Q_k(\partial_x))v.$$

由于 v的支集位于 $[0,T']\times\omega$，因此 u的支集也位于此处。考虑微分算子 $\mathcal{Q} := Q_1(\partial_x)+\partial_t Q_2(\partial_x)+\cdots+\partial_t^{k-1}Q_k(\partial_x)$。我们有 $u = \mathcal{Q}w$。将该算子按分块形式写为 $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix}\mathcal{Q}^\mathrm{h} & \mathcal{Q}^\mathrm{p}\end{pmatrix}$。换言之，

$$\mathcal{Q}^\mathrm{h} := Q_1^\mathrm{h}(\partial_x) + \partial_t Q_2^\mathrm{h}(\partial_x) + \cdots + \partial_t^{k-1}Q_k^\mathrm{h}(\partial_x).$$

微分算子 $\mathcal{Q}^{\mathrm{h}}$ 的阶至多为

$$\mathrm{Order}(\mathcal{Q}^{\mathrm{h}}) \le \max_{1\le j\le k}(j-1+\deg(Q_j^{\mathrm{h}})).$$

由于$L^{\mathrm{h}}_{n,\,j} = Q_j^{\mathrm{h}}(\mathrm{i}n)/P(\mathrm{i}n)$根据 p 的定义（见定理9）， $\mathrm{Order}(\mathcal{Q}^{\mathrm{h}}) \le p+\deg(P)$。此外，回顾 $v \in H_0^{p+\deg(P)}((0,T')\times\omega)^{d_{\mathrm{h}}} \times H_0^{\ell}((0,T')\times\omega)^{d_{\mathrm{p}}}$。因此，若我们选择 $\ell \ge \mathrm{Order}(\mathcal{Q}^{\mathrm{p}})$, $u \in L^2((0,T')\times\omega)$。 □

3.3 正则性损失的上界

定理 9 要求初始条件满足 H^p 对某个 p。本节给出 p的一个初等上界。

命题 11. 假设当 $|n|$ 足够大时，*Kalman* 秩条件 $\mathrm{rank}([B_n|M]) = d$成立。令

$$k(n) := \inf\{k:\ \mathrm{rank}([B_n|M]_k) = d\} \in \{-\infty\}\cap\mathbb{N}.$$

那么，t 序列 $(k(n))_{n\in\mathbb{Z}}$在 $|n|\to+\infty$时最终为常数。我们记 $k_0 := \lim_{|n|\to+\infty} k(n$).

证明。 秩条件 $\mathrm{rank}([B_n|M]_k) = d$ 等价于 $\det([B_n|M]_k[B_n|M]_k^*) \ne 0$。令$P_k(n) = \det([B_n|M]_k[B_n|M]_k^*)$。 P_k 是关于 n的多项式，因此若对某个 n_0有 $P_k(n_0)\ne 0$，则对所有足够大的 $|n|$都有$P_k(n)\ne 0$。因此，对于每个 n_0，都存在 n_1，使得只要 $|n|\ge n_1$，就有 $k(n)\le k(n_0)$。由于 $k(n)$ 取整数值，它最终会成为常数。 □

于是，我们得到定理 9的如下版本。

定理 12。 假设 (H.1)–(H.4) 成立，且 $T > T_*$ 并且对所有足够大的 $|n|\in\mathbb{N}$，*Kalman* 秩条件 $\mathrm{rank}([B_n|M]) = d$ 成立。令 k_0 如命题 *11*中所述。令 E 如定理 9中所述。

那么，对于任意 $f_0 \in H^{4d(k_0-1)}(\mathbb{T})^d \cap E$，都存在一个控制 $u\in L^2([0,T]\times\omega)$，使得抛物-输运系统 f 的解 (Sys) 在初始条件 f_0 下满足 $f(T,\cdot)=0$。

定理 1 的充分性部分（如引言中所述）是该定理的一个特殊情形，因为我们始终有 $k_0 \leqslant d$。下面给出主要引理，它使我们能够估计定理 p 的9（另见 [5, 定理 2。1] 其中有类似的论证）。

引理 13。 设 $A\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})_p[X]$ 为一个次数至多为 p 且具有 $d\times d$ 矩阵系数的多项式。假设对于某个 $z_0\in\mathbb{C}$， $A(z_0)$ 是可逆的。那么， $A^{-1}\in\mathbb{C}^{d\times d}_{p(d-1)}(X)$，即，$(A(z))^{-1}$ 的系数是 z 的次数至多为 $p(d-1)$的有理函数。

证明。设

$$A(z)^{-1} = \frac{1}{\det(A(z))}\,\mathrm{Adj}(A(z)),$$

其中， $\mathrm{Adj}(A(z))$ 是 $A(z)$的伴随矩阵。 $\det(A(z))$ 和 $\mathrm{Adj}(A(z))$ 是z中的非零多项式。此外， $\mathrm{Adj}(A(z))$ 的系数是由 $A(z)$的 $d-1$ 个系数组成的乘积之和。因此，它们是次数至多为 $(d-1)p$的多项式。 □

我们感兴趣的情形是:

推论 14. 令 k_0 如命题 *11*所述，在其有定义时，令

$$[B_n|M]^+_{k_0} := [B_n|M]^*_{k_0}\left([B_n|M]_{k_0}[B_n|M]^*_{k_0}\right)^{-1}.$$

因此，作为 n、$[B_n|M]^+_{k_0} \in \mathbb{C}^{d\times d}_{2(k_0-1)(2d-1)}(X)$ 的函数。

证明。 我们有 $[B_n|M]_{k_0} \in \mathbb{C}^{d\times mk_0}_{2(k_0-1)}[X]$，因此

$$[B_n|M]_{k_0}[B_n|M]^*_{k_0} \in \mathbb{C}^{d\times d}_{4(k_0-1)}.$$

根据前面的引理，

$$\left([B_n|M]_{k_0}[B_n|M]^*_{k_0}\right)^{-1} \in \mathbb{C}^{d\times d}_{4(k_0-1)(d-1)}(X).$$

因此 $[B_n|M]^+_{k_0} \in \mathbb{C}^{d\times d}_k(X)$，其中 $k = 4(k_0-1)(d-1)+2(k_0-1) = 2(k_0-1)(2d-1)$。 □

定理 *12* 的证明。 根据定理 9，中的每个初始条件 $E\cap H^p(\mathbb{T})^d$ 都可以被控制到达 0，其中 $p = \deg([B_n|M]^+_{k_0})+k_0-1$（作为 n 的有理函数的次数）。但根据推论 14，$\deg([B_n|M]^+_{k_0}) \le 2(k_0-1)(2d-1)$。因此 $p \le 4d(k_0-1)$。所以，中的每个初始条件 $E\cap H^{4d(k_0-1)}(\mathbb{T})^d$ 都可以被控制到达 0。 □

4 零可控性的必要条件

4.1 WKB 解的构造

我们将利用所谓的 *WKB* 解给出零可控性的其他必要条件，这些解将在此构造。对于波动方程（参见，例如 [25,第 426–428] 页，或 [31, 附录 B]，其中给出了更基础的介绍）或薛定谔方程（参见，例如 [35, 第 16–17]页），使用这类近似解是标准做法。WKB 解也曾被用于证明某些变系数抛物-输运系统不具有可观测性 2×2（另见 [2, §3]；关于满足麦克斯韦定律的纳维-斯托克斯系统，另见 [3, §3]）。我们的构造将其推广到任意规模的系统，因此带来了一些困难。为清楚起见，我们仅为常系数系统构造 WKB 解，这已足以满足我们的目的。不过，这种构造很可能可以推广到大类任意规模的变系数抛物-输运系统。

为了否定可观测性不等式，需要为伴随系统构造这些 WKB 解。但抛物-输运系统（Sys）及其伴随系统具有相同的结构，因此，为了简化记号，我们为系统（Sys）构造 WKB 解。

令 $\phi \in C^\infty([0,T]\times\mathbb{T};\mathbb{C})$ 满足 $\Im(\phi)\ge 0$ 且 $\partial_x\phi$ 处处非零。我们寻找抛物-输运系统（Sys）的近似解 $g^{\mathrm{WKB}}_h(t,x)$，采用如下试探形式，其中 $h>0$假设为小量：

$$\begin{cases} g^{\mathrm{WKB}}_h(t,x) = X_h(t,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t,x)/h}, \\ X_h(t,x) \sim \sum_{j\ge 0} h^j Y_j(t,x). \end{cases} \tag{10}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\partial_x g_h^{\mathrm{WKB}} &= \left(\partial_x X_h + \frac{\mathrm{i}}{h}\partial_x\phi X_h\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/h},\\
\partial_t g_h^{\mathrm{WKB}} &= \left(\partial_t X_h + \frac{\mathrm{i}}{h}\partial_t\phi X_h\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/h},\\
\partial_x^2 g_h^{\mathrm{WKB}} &= \left(\partial_x^2 X_h + \frac{2\mathrm{i}}{h}\partial_x\phi\partial_x X_h - \frac{1}{h^2}(\partial_x\phi)^2 X_h + \frac{\mathrm{i}}{h}\partial_x^2\phi X_h\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/h}.
\end{aligned}$$

假设这个 g_h^{WKB} 是抛物-输运系统（Sys）的解，则有

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\partial_t - B\partial_x^2 + A\partial_x + K\right)\left(X_h\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/h}\right)\\
&= \left[\left(\partial_t - B\partial_x^2 + A\partial_x + K\right)X_h + \frac{1}{h}\left(\mathrm{i}\partial_t\phi + \mathrm{i}A\partial_x\phi - \mathrm{i}B\partial_x^2\phi - 2\mathrm{i}B\partial_x\phi\partial_x\right)X_h + \frac{1}{h^2}B(\partial_x\phi)^2 X_h\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/h}.
\end{aligned}$$

代入 X_h 的渐近展开，可得

$$0 \sim \sum_{j\geq -2}\left[(\partial_x\phi)^2 B Y_{j+2} + \left(\mathrm{i}\partial_t\phi + \mathrm{i}A\partial_x\phi - \mathrm{i}B\partial_x^2\phi - 2\mathrm{i}B\partial_x\phi\partial_x\right)Y_{j+1} + \left(\partial_t - B\partial_x^2 + A\partial_x + K\right)Y_j\right]h^j,$$

其中，按照惯例，$Y_j = 0$ 对于 $j < 0$。我们希望消去该和式中的每一项。因此，我们要寻找满足以下条件的 $(Y_j)_{j\geq 0}$：对所有 $j \geq -2$,

$$(\partial_x\phi)^2 B Y_{j+2} + \left(\mathrm{i}\partial_t\phi + \mathrm{i}A\partial_x\phi - \mathrm{i}B\partial_x^2\phi - 2\mathrm{i}B\partial_x\phi\partial_x\right)Y_{j+1} + \left(\partial_t - B\partial_x^2 + A\partial_x + K\right)Y_j = 0. \quad (11)$$

S求解这个归纳关系需要考察该方程的不同投影。从此
起，我们将记

$$Y_j = \begin{pmatrix} Y_j^{\mathrm{h}} \\ Y_j^{\mathrm{p}} \end{pmatrix} \quad \text{with } Y_j^{\mathrm{h}} \in \mathbb{C}^{d_{\mathrm{h}}} \text{ and } Y_j^{\mathrm{p}} \in \mathbb{C}^{d_{\mathrm{p}}}.$$

接下来，回想 $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ 并取方程（11）的抛物分量（即，d_{p} 的最后几个分量），得到

$$(\partial_x\phi)^2 D Y_j^{\mathrm{p}} = -\begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}\left[\left(\mathrm{i}\partial_t\phi + \mathrm{i}A\partial_x\phi - \mathrm{i}B\partial_x^2\phi - 2\mathrm{i}B\partial_x\phi\partial_x\right)Y_{j-1} + \left(\partial_t - B\partial_x^2 + A\partial_x + K\right)Y_{j-2}\right]. \quad (12)$$

由于 D 可逆，该公式确定了 Y_j^{p} 是 Y_{j-1} 和 Y_{j-2}的函数。

在考察方程（11）的其他投影之前，先回想 $A = \left(\begin{smallmatrix} A' & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix}\right)$。类似地，我们将 K 按分块写为 $\left(\begin{smallmatrix} K' & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{smallmatrix}\right)$。然后，取方程（即，第一个 d_{h}）运输分量（11），得到

$$0 = (\mathrm{i}\partial_t\phi + \mathrm{i}\partial_x\phi A')Y_j^{\mathrm{h}} + \mathrm{i}\partial_x\phi A_{12}Y_j^{\mathrm{p}} + \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}(\partial_t + A\partial_x + K)Y_{j-1}. \quad (13)$$

从现在起，我们选取形式为[2]的 ϕ

$$\phi(t,x) = \psi(x - \mu t), \quad (14)$$

[2]方程（12）和（13）与 $j = 0$ 意味着 $(\partial_t\phi + \partial_x\phi A')Y_0^{\mathrm{h}} = 0$。若要得到非平凡的 Y_0^{h}，则要求 ϕ 仅依赖于 $x - \mu t$，其中 $\mu \in \mathrm{Sp}(A')$。

其中 μ 是 A' 的一个特征值，且 ψ' 恒不为零。由此 ϕ，方程（13）可写为

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{i}\psi'(x-\mu t)(A'-\mu)Y_j^{\mathrm{h}} + \mathrm{i}\psi'(x-\mu t)A_{12}Y_j^{\mathrm{p}} + \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}(\partial_t + A\partial_x + K)Y_{j-1} \\ &= \mathrm{i}\psi'(x-\mu t)(A'-\mu)Y_j^{\mathrm{h}} + \mathrm{i}\psi'(x-\mu t)A_{12}Y_j^{\mathrm{p}} + (\partial_t + A'\partial_x + K')Y_{j-1}^{\mathrm{h}} + (A_{12}\partial_x + K_{12})Y_{j-1}^{\mathrm{p}}. \end{aligned} \tag{15}$$

记 P'_μ 为沿其他特征子空间在与 μ 相关的 A' 的特征子空间上的投影。我们考虑 $Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}} \in \mathrm{Range}(P'_\mu)$ 由 $Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}} = P'_\mu Y_j^{\mathrm{h}}$ 定义。类似地，我们将 $Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}} \in \ker(P'_\mu)$ 设为 $Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}} = (I - P'_\mu)Y_j^{\mathrm{h}}$。最后，沿直和 $\mathbb{R}^d = \mathrm{Range}(P'_\mu) \oplus \ker(P'_\mu)$ 将 A' 和 K' 写成分块形式，得到

$$A' = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & A'_{22} \end{pmatrix}, \quad K' = \begin{pmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $A'_{22} \in \mathcal{L}(\ker(P'_\mu))$，$K'_{11} = P'_\mu K' P'_\mu \in \mathcal{L}(\mathrm{Range}(P'_\mu))$，$K'_{12} \in \mathcal{L}(\ker(P'_\mu), \mathrm{Range}(P'_\mu))$，等等。然后，将式（15）沿 $\mathrm{Range}(P'_\mu)$（即，乘以 $(I - P'_\mu)$）投影到 $\ker(P'_\mu)$ 上，我们得到

$$\mathrm{i}\psi'(x-\mu t)(A'_{22}-\mu)Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}} = -(I-P'_\mu)\Big[\mathrm{i}\psi'(x-\mu t)A_{12}Y_j^{\mathrm{p}} + \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}(\partial_t + A\partial_x + K)Y_{j-1}\Big]. \tag{16}$$

由于 P'_μ 是 A' 对应于特征值 μ 的特征子空间上的投影，$A' - \mu$ 在 $\ker(P'_\mu)$ 上可逆，即，$A'_{22} - \mu$ 可逆。因此，方程（16）确定了 $Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}}$ 关于 Y_j^{p} 和 Y_{j-1} 的函数。最后，将方程（15）投影到 $\mathrm{Range}(P'_\mu)$ 上，得到

$$0 = (\partial_t + \mu\partial_x + K'_{11})Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}} + K'_{12}Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}} + P'_\mu(A_{12}\partial_x + K_{12})Y_j^{\mathrm{p}} + \mathrm{i}\psi'(x-\mu t)P'_\mu A_{12}Y_{j+1}^{\mathrm{p}}. \tag{17}$$

接着，我们利用方程（12）将 Y_{j+1}^{p} 表示为

$$Y_{j+1}^{\mathrm{p}} = D_1 Y_j^{\mathrm{h}} + D_2 Y_j^{\mathrm{p}} + D_3 Y_{j-1}, \text{ with } D_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\psi'(x-\mu t)} D^{-1} A_{21},$$

其中 D_2 和 D_3 是矩阵值的一阶或二阶微分算子。它们的具体表达式与我们的目的无关。将其代入方程（17），得到

$$\begin{aligned} &(\partial_t + \mu\partial_x + K'_{11} + P'_\mu A_{12}D^{-1}A_{21}P'_\mu)Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}} \\ &= -K'_{12}Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}} - P'_\mu(A_{12}\partial_x + K_{12})Y_j^{\mathrm{p}} - \mathrm{i}\psi'(x-\mu t)P'_\mu A_{12}(D_1(I-P'_\mu)Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}} + D_2 Y_j^{\mathrm{p}} + D_3 Y_{j-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

若我们选取初始条件 $Y_{j,\mu,0}^{\mathrm{h}}$ 作为 $Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}}$，方程（18）确定 $Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}}$ 关于 $Y_{j,\mu,0}^{\mathrm{h}}$，$Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}}$、$Y_j^{\mathrm{p}}$ 和 Y_{j-1} 的函数。

我们已经看到，如果 ϕ 由方程（14）给出，那么满足 WKB递推方程（$(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$（11）are 由方程（12）、（16）和（18）给出的。

严格来说，我们只证明了 如果 $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 满足方程 (11)，那么 Y_j^{p}, $Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}}$ 和 $Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}}$ 分别满足方程 (12)、(16) 和 (18)，但反向结论（这才是我们真正感兴趣的）尚未证明。不过，我们可以轻松地将本节的计算改写为一系列等价关系：

- $\forall j \geq -2$，Y_j 满足方程（11）当且仅当；
- $\forall j \geq 0$，Y_j^{p} 满足方程（12）、$Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}}$ 满足方程（16）并且 $Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}}$ 满足方程（17）当且仅当；
- $\forall j \geq 0$，Y_j^{p} 满足方程（12），$Y_{j,\neq\mu}^{\mathrm{h}}$ 满足方程（16）且 $Y_{j,\mu}^{\mathrm{h}}$ 满足方程（18）。

我们将本节中的计算总结为以下命题：

命题 15。设 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T})$使得 ψ' 不为零且 $\Im(\psi) \geq 0$。设 $\mu \in \mathrm{Sp}(A')$ 并令 ϕ如方程（14）中所示。

对于每个 $j \geq 0$，令 $Y^{\mathrm{h}}_{j,\mu,0} \in C^\infty(\mathbb{T}; \ker(A' - \mu))$。按以下递归步骤定义 $(Y^{\mathrm{p}}_j)_{j\geq -2}$、$(Y^{\mathrm{h}}_{j,\neq\mu})_{j\geq -2}$ 和 $(Y^{\mathrm{h}}_{j,\mu})_{j\geq -2}$：

- *set* $Y^{\mathrm{p}}_{-2} = Y^{\mathrm{p}}_{-1} = 0$, $Y^{\mathrm{h}}_{-2,\neq\mu} = Y^{\mathrm{h}}_{-1,\neq\mu} = 0$, $Y^{\mathrm{h}}_{-2,\mu} = Y^{\mathrm{h}}_{-1,\mu} = 0$;
- *if* Y^{p}_k, $Y^{\mathrm{h}}_{k,\neq\mu}$, $Y^{\mathrm{h}}_{k,\mu}$ *are defined for* $-2 \leq k \leq j-1$, *define* Y^{p}_j *with eq.* (12), $Y^{\mathrm{h}}_{j,\neq\mu}$ *with eq.* (16) *and* $Y^{\mathrm{h}}_{j,\mu}$ *with eq.* (18) *with initial condition* $Y^{\mathrm{h}}_{j,\mu,0}$.

对于 $j \geq 0$，令 $Y_j(t,x) = \begin{pmatrix} Y^{\mathrm{h}}_{j,\mu} + Y^{\mathrm{h}}_{j,\neq\mu} \\ Y^{\mathrm{p}}_j \end{pmatrix}$。令 $q \in \mathbb{N}$。函数 g^{WKB}_h 定义为

$$g^{\mathrm{WKB}}_h(t,x) = \sum_{j=0}^{q} h^j Y_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t,x)/h}. \tag{19}$$

接着，将 r_h 定义为

$$(\partial_t - B\partial_x^2 + A\partial_x + K) g^{\mathrm{WKB}}_h(t,x) = r_h(t,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t,x)/h},$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$、$\ell \in \mathbb{N}$、$t \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{T}$，

$$|\partial_t^k \partial_x^\ell r_h(t,x)| \leq C_{k,\ell} h^{q-1}.$$

注 16。假设 $h^{-1} \in \mathbb{N}$。那么，将 ϕ 替换为 $\phi + 2k\pi$ 代入方程（10）不会改变 WKB 解 g^{WKB}_h。因此，ϕ 可以确定到一个因子 $2k\pi$。这样一来，ϕ 可以是非周期的，只要 $\phi \mod 2\pi$ 是周期的。因此，我们可以选择

$$\phi(t,x) = \mathrm{i}\varphi(x - \mu t) + n_0(x - \mu t) \text{ with } \mu \in \mathrm{Sp}(A'),\ \varphi \geq 0, \text{ and } n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

这些 WKB 解将用于反驳那些通常包含高频投影的可观测性不等式。为处理这些高频投影，我们将使用以下引理。

引理 17. 设 $n \in \mathbb{Z}$。在命题 *15* 的假设下，对于 $\ell \in \mathbb{N}$，当 $0 \leq t \leq T$ 趋于无穷时，以下结论一致成立 $h \to 0^+$：

$$(g^{\mathrm{WKB}}_h(t,\cdot), e_n)_{L^2} = O(h^\ell).$$

证明。标量积 $(g^{\mathrm{WKB}}_h(t,\cdot), \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx})_{L^2}$ 可写为

$$(g^{\mathrm{WKB}}_h(t,\cdot), e_n)_{L^2} = \int_{\mathbb{T}} w_{t,h,n}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-\mu t)/h}\, \mathrm{d}x,$$

其中

$$w_{t,h,n}(x) := \sum_{j=0}^{q} h^j Y_j(t,x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}.$$

注意，对于 $0 \le t \le T$ 和 $h \le 1$，$w_{t,h,n}$ 及其导数均一致有界。考虑微分算子 $L := (\mathrm{i}\psi'(x-\mu t))^{-1}\partial_x$。这里，我们利用了 ψ' 恒不为零这一事实。该算子满足

$$hL\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-\mu t)/h} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-\mu t)/h}.$$

因此，将 L^* L的伴随算子记为……，经分部积分，

$$(g_h^{\mathrm{WKB}}(t,\cdot), e_n)_{L^2} = h^l \int_{\mathbb{T}} (\overline{L^*})^\ell (w_{t,h,n})(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-\mu t)/h}\,\mathrm{d}x.$$

算子 L^* 是一个与 h无关的微分算子。因此，根据w_t的定义，h,n

$$(g_h^{\mathrm{WKB}}(t,\cdot), e_n)_{L^2} = O(h^\ell).$$ □

4.2 抛物-输运系统在短时间内不具备零可控性

现在我们证明时间条件 $T \geqslant T_*$ 是必要的（注意，等号情形 $T = T^*$仍是一个未决问题）。此前已经证明，对于任意L^2 初始条件 [7]，零可控性都要求满足该条件。但这一证明并未排除当 $T < T_*$时，任意 H^k 初始条件的零可控性。

命题 18。设 $T > 0$，并假设存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 和 $k \in \mathbb{N}$，使得抛物-输运系统 $H^k(\mathbb{T})^d \cap \{\sum_{|n|>N} X_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\}$ (Sys) 中的每个初始条件都可以被引导至0，所用时间为 T。则 $T \ge T_*$。

证明。设 $\mu \in \mathrm{Sp}(A')$ 具有最大模。根据定义，$T_* = \ell(\omega)/|\mu|$。令 $T < T_*$。

我们旨在利用上文构造的 WKB 解，证明命题 18 中控制问题所对应的可观测性不等式不成立。我们声称，该可观测性不等式为：存在 $C > 0$ 使得对每个 $g_0 \in L^2(\mathbb{T})^d$，解 g 满足

$$(\partial_t - B^*\partial_x - A^*\partial_x + K^*\partial_x)g(t,x) = 0, \quad g(0,x) = g_0(x) \tag{20}$$

满足

$$\|\pi_N g(T,\cdot)\|_{H^{-k}(\mathbb{T})} \le C\|M^* g\|_{L^2((0,T)\times\omega)}, \tag{21}$$

其中 $\pi_N : \sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto \sum_{|n|>N} X_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$。

这可利用标准的对偶引理证明，参见 例如 [14, 引理 2。48] 其中 $C_2 = \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}} \circ \pi_N^* \circ \iota_k$且 $C_1 : u \in L^2((0,T)\times\omega) \mapsto \int_0^T \mathrm{e}^{-(T-t)\mathcal{L}} M u(t)\,\mathrm{d}t$，这里 ι_k 是嵌入 $H^k(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$。注意，$\pi_N^*$ 是嵌入 $\{\sum_{|n|>N} X_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\} \to L^2(\mathbb{T})$，且 ι_k^* 是一个双射等距映射 $H^{-k}(\mathbb{T}) \to H^k(\mathbb{T})$([7, 引理 33])。

将此可观测性不等式应用于形如 $\partial_x^k g_0$ 而非 g_0 的初始条件，得到

$$\|\pi_N g(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \le C\|\partial_x^k M^* g\|_{L^2((0,T)\times\omega)}, \tag{22}$$

步骤 *1*：构造反例。— 取 $T < T_*$。存在 $x_0 \notin \overline{\omega}$使得 $x_0 - \mu t \notin \overline{\omega}$对每个 $0 \le t \le T$。选取 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$ 实值，使得 $\varphi(x_0) = 0$，$\varphi''(x_0) = 1$ 且 $\varphi(x) > 0$对每个 $x \ne x_0$。然后，选取 $\phi(t,x) = \mathrm{i}\varphi(x+\mu t) + (x+\mu t)n_0$，如备注 16 中所做的那样（从 μ 改为 $-\mu$ 是因为我们考虑的是 $-A^*$ 而非 A）。

这种选择 ϕ 确保无论如何选择 Y_j，由方程（ g_h^{WKB} 10）定义的 WKB 解都会集中在 $x_0 + \mu t$附近。

令$Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu,0} \in C^\infty(\mathbb{T};\ker(A'^* + \mu))$ 其中$Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu,0}(x_0) \neq 0$。对于 $j \geq 1$，设$Y^{\mathrm{h}}_{j,\mu,0} = 0$。令 $q > k+1$。考虑由命题15 定义的函数（其中 B，以及 K 分别替换为B^* 和 K^*，而 A 替换为 $-A^*$）。

另设 $g_h(t,x)$ 为满足初始条件 $g_h^{\mathrm{WKB}}(t=0,\cdot)$的伴随系统（20）的解。

步骤 *2*：估计 g_h^{WKB} 与 g_h之间的差异。—根据命题15，

$$(\partial_t - B^*\partial_x^2 - A^*\partial_x + K^*)g_h^{\mathrm{WKB}} = O(h^{k+1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t,x)/h},$$

因此，由于 $r_h := g_h^{\mathrm{WKB}} - g_h$，我们有 $r_h(0,x) = 0$ 以及

$$(\partial_t - B^*\partial_x^2 - A^*\partial_x + K^*)r_h = O(h^{k+1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t,x)/h}.$$

其中 O 应在 C^∞拓扑下理解。由于抛物-输运系统在 $H^k(\mathbb{T})^d$中适定，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，关于 $0 < t < T$ 一致地有，

$$\|\partial_x^j(g_h^{\mathrm{WKB}}(t,\cdot) - g_h(t,\cdot))\|_{L^2} \leq C_j h^{k-j+1}. \tag{23}$$

*Ste*第 *3* 步：可观测性不等式右端的上界。—根据三角 ine不等式，

$$\|\partial_x^k M^* g_h\|_{L^2((0,T)\times\omega)} \leq \|\partial_x^k M^* g_h^{\mathrm{WKB}}\|_{L^2((0,T)\times\omega)} + \|\partial_x^k M^* r_h\|_{L^2((0,T)\times\omega)}.$$

根据步骤2，右端的第二项为 $O(h)$。对于右端的第一项，我们回顾一下 $g_h^{\mathrm{WKB}} = \sum_{j=0}^q h^j Y_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x-\mu t)}$，并且由于我们对 ψ的选择，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(x+\mu t)}$ 在 $x+\mu t \neq x_0$时呈指数级小。因此，由于对每个 $x_0 - \mu t \notin \overline{\omega}$ 都成立，$0 \leq t \leq T$对于某个$c > 0$，

$$\|\partial_x^k M^* g_h^{\mathrm{WKB}}\|_{L^2((0,T)\times\omega)} = O(\mathrm{e}^{-c/h}).$$

这证明了

$$\|\partial_x^k M^* g_h\|_{L^2((0,T)\times\omega)} = O(h). \tag{24}$$

步骤*4*：可观测性不等式左端的下界。—根据引理17，对于任意 $\ell \geq 0$，

$$\|\pi_N g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} + O(h^\ell). \tag{25}$$

因此，利用反三角不等式，

$$\|\pi_N g_h(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \|\pi_N g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} - \|\pi_N r_h(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

利用步骤2中的误差估计以及公式（25），我们得到

$$\|\pi_N g_h(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq \|g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} - Ch. \tag{26}$$

因此，我们只需为 $\|g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})}$ 找到一个下界。我们有

$$\|g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{j=0}^q h^j Y_j(t,x)\right|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi(x+\mu T)/h}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}} |Y_0(t,x)|^2 \mathrm{e}^{-2\varphi(x+\mu T)/h}\,\mathrm{d}x + O(h).$$

回顾一下，$\varphi(x_0) = 0$，对于 $x \neq x_0$，$\varphi(x)$ 严格为正，且 $\varphi''(x_0) \neq 0$。然后，利用拉普拉斯方法（参见例如[36, 第 2 节。2] 尤其是 [36, 式 (2.34)]），可得

$$\|g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = c\sqrt{h} + O(h^{3/2})$$

对于某个 $c>0$。将其代入式（26），可得当 h 足够小时，

$$\|\pi_N g_h(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \geq c\sqrt{h}. \tag{27}$$

步骤 *5*：结论。— 比较下界（27）和上界（24），并取 h 足够小，可知若 $T<T_*$，则可观测性不等式（Sys）不成立，因此，初始条件属于 $H^k\cap\pi_N(L^2(\mathbb{T}))$ 的抛物型输运系统在时间 $T<T_*$ 内不具备零可控性。

□

4.3 粗糙初始条件不具备零可控性

现在，我们给出每个 L^2 初始条件可被引导至 0 的必要条件。为此，我们只需要使用命题15中的 WKB 展开的首项。通过分析 WKB 展开的高阶项，很可能可以得到每个 H^k 初始条件零可控性的必要条件。但一般来说，这种分析似乎很困难，因此我们将其留待未来工作，或逐案分析。事实上，我们将证明以下陈述，它是定理 3 的一个精细版本。

命题 19。设 $\mu\in\mathrm{Sp}(A')$、$N\in\mathbb{N}$ 和 $T>0$。设 P'_μ 为 A'对应于 μ的特征子空间上的投影。将 K 分块写为 $\left(\begin{smallmatrix}K' & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{smallmatrix}\right)$，其中 $K'\in\mathcal{M}_{d_h}(\mathbb{R})$。令

$$K^*_\mu := (P'_\mu)^*\left((K')^* + A^*_{21}(D^*)^{-1}A^*_{12}\right)(P'_\mu)^*$$

假设每个初始条件 $f_0\in L^2(\mathbb{T})^d\cap\{\sum_{|n|>N}X_n e^{inx}\}$都能通过 $L^2((0,T)\times\omega)$中的控制在时间 T 内到达 0。那么，对于每个 $\mu\in\mathrm{Sp}(A')$ 以及每个在 K^*_μ作用下稳定的非零子空间 $S\subset\mathrm{Range}((P'_\mu)^*)$，都存在 $V_0\in S$ 使得 $M^*\left(\begin{smallmatrix}V_0\\0\end{smallmatrix}\right)\neq 0$。

证明。步骤 *1*：可观测性不等式。— 利用标准对偶引理 [14, 引理 2。48], 并按照命题18的证明，我们得到一个可观测性不等式，该不等式等价于系统（Sys）在 $L^2(\mathbb{T})^d\cap\{\sum_{|n|>N}X_n e^{inx}\}$中初始条件下的零可控性。该可观测性不等式为：存在 $C>0$ 使得对于每个 $g_0\in L^2(\mathbb{T})^d$，解 g 满足

$$(\partial_t - B^*\partial_x^2 - A^*\partial_x + K^*)g(t,x)=0,\quad g(0,x)=g_0(x) \tag{28}$$

满足

$$\|\pi_N g(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})}\leq C\|M^*g\|_{L^2((0,T)\times\omega)}, \tag{29}$$

其中，与命题 18的证明中一样，$\pi_N:\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}X_n e^{inx}\in L^2(\mathbb{T})\mapsto\sum_{|n|>N}X_n e^{inx}$。

步骤 2：构造反例。— 令 $V_0\in S\setminus\{0\}$。设 $\varphi:==0$，并令 $\phi(t,x)=n_0(x-\mu t)$ 如注 16 中所述。设 $Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu,0}(x):=V_0$。对于 $j>0$，设$Y^{\mathrm{h}}_{j,\mu,0}:=0$。令 g_h^{WKB} 由命题 15 定义，其中 B 和 K 分别替换为 B^* 和 K^*，A 替换为 $-A^*$，且 $q\geq 2$。令g_h 为以 $g_h^{\mathrm{WKB}}(0,\cdot)$为初始条件的抛物-输运系统 (Sys) 的解。

请注意，根据命题15，特别是公式（18），

$$(\partial_t-\mu\partial_x+K^*_\mu)Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu}=0.$$

因此，$Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu}(t,x)=e^{-tK^*_\mu}V_0$。特别是，由于 S 根据 K^*_μ 稳定，$Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu}(t,x)\in S$ 对所有 t、x 都成立。

步骤 *3*：误差估计介于 g_h^{WKB}和 g_h之间。— 设 $r_h:=g_h-g_h^{\mathrm{WKB}}$。则 $r_h(0,x)=0$，根据命题15，

$$(\partial_t - B^*\partial_x^2 - A^*\partial_x + K^*)r_h = O(h)e^{i\phi(t,x)/h}.$$

由于抛物-输运系统在 $L^2(\mathbb{T})^d$ 中适定，且关于 $0 \le t \le T$ 一致，

$$\|r_h(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \le Ch.$$

步骤 *4*：可观测性不等式右侧的上界。——利用上一步的误差估计，可观测性不等式（29）满足

$$\begin{aligned}
\|M^* g_h\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} &\le \|M^* g_h^{\mathrm{WKB}}\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} + Ch \\
&\le \|M^* Y_0^{\mathrm{h}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/h}\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} + Ch \\
&= \left\| M^* \begin{pmatrix} Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2_{L^2((0,T)\times\omega)} + Ch \\
&= 2\pi \int_0^T \left| M^* \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-tK_\mu^*} V_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \mathrm{d}t + Ch,
\end{aligned} \tag{30}$$

最后三个不等式用到了 g_h^{WKB} 的定义。

步骤 *5*：可观测性不等式左侧的下界。——再次利用步骤3中的误差估计，可观测性不等式（29）满足

$$\|\pi_N g_h(T,\cdot)\|^2_{L^2} \ge \|\pi_N g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|^2_{L^2} - Ch.$$

接着，利用 g_h^{WKB} 的低频估计（引理 17）

$$\|\pi_N g_h(T,\cdot)\|^2_{L^2} \ge \|g_h^{\mathrm{WKB}}(T,\cdot)\|^2_{L^2} - Ch.$$

现在，利用 g_h^{WKB} 的定义以及 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}| = 1$ 这一事实，

$$\begin{aligned}
\|\pi_N g_h(T,\cdot)\|^2_{L^2} &\ge \|Y^{\mathrm{h}}_{0,\mu}(T,\cdot)\|^2_{L^2} - Ch. \\
&= 2\pi |\mathrm{e}^{-TK_\mu^*} V_0|^2 - Ch.
\end{aligned} \tag{31}$$

步骤 *6*：结论。——比较可观测性不等式右侧的上界（式（30））与左侧的下界（式（31）），可知 $M^* \mathrm{e}^{-tK_\mu^*} V_0$ 不可能对每个 $0 \le t \le T$ 都为零。由于 $\mathrm{e}^{-tK_\mu^*} V_0 \in S$ 对每个 t 都成立，因此命题得证。

□

5 二方程组

我们将前几节中的一般定理应用于 2×2 系统。其中一些结果并非新结果（参见，例如，[13]）。我们在此的目标仅仅是检验我们的结果是否最优，至少在这一情形下是否如此。

5.1 2×2 系统的可控性：陈述

这里，我们考虑具有以下形式的抛物型输运系统（Sys）

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a' & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

其中所有小写字母均为实数，且 $d > 0$ 和 $a' \neq 0$。这里，我们假设 M 的秩为一。我们不必讨论 $\operatorname{rank}(M) = 2$的情况，因为每个分量都受控的一般定理已经涵盖了这种情况（参见 [7, 定理 2] 或定理 12，其中 $k = 1$）：中的每个初始条件在 $L^2(\mathbb{T})^d$ 时间内都是零可控的 $T > T_*$。接下来的三个命题将详细说明一般定理在十一种情形中的应用，展示每个系数取值不同时可能出现的各种现象。证明见后续小节。

命题 20。 假设 B， A， K， M 由式 (32)给出。假设 $(m_1, m_2) = (1, 0)$。若$(a_{21}, k_{21}) = (0, 0)$，则抛物-输运系统 (Sys) 无论时间 T 为何，都不具备零可控性。令 $T > \ell(\omega)/|a'|$ （其中 $\ell(\omega)$由式 (1)定义）。

- 若 $k_{21} \neq 0$，则系统 $L^2(\mathbb{T})^2$ 的每个初始条件 (Sys) 都可以在时间 T 内通过L^2 个控制达到 $L^2(\mathbb{T})^2$ 中的 0。
- 若 $a_{21} \neq 0$且 $k_{21} = 0$，则每个初始条件 $f_0 = (f_0^{\mathrm{h}}, f_0^{\mathrm{p}})$属于 $L^2(\mathbb{T})^2$且满足 $\int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{p}} = 0$的系统 (Sys) 都可以在时间 T 内通过 L^2 个控制达到 0 。

命题 21。 假设 B， A， K， M 由方程 ((32)给出。假设 $(m_1, m_2) = (0, 1)$。若$(a_{12}, k_{12}) = (0, 0)$，则抛物-输运系统 (Sys) 无论时间 T 为何，都不是零可控的。令 $T > \ell(\omega)/|a'|$。

- 若 $a_{12} \neq 0$且 $k_{12} \neq 0$，系统 $H^1(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$ 中每个初始条件(Sys) 都可以在时间 T 内通过 L^2 控制转移到 0。
- 若 $a_{12} \neq 0$且 $k_{12} = 0$，每个初始条件 $f_0 = (f_0^{\mathrm{h}}, f_0^{\mathrm{p}})$在 $H^1(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$满足 $\int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{h}} = 0$时，对于系统 (Sys) 均可转移到0，且所需时间为 T，使用 L^2 控制。
- 若 $a_{12} = 0$且 $k_{12} \neq 0$，系统 $H^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$ 中的每个初始条件 (Sys) 都可以在时间 0 内被驱动至 T，使用 L^2 控制。

*In e*在某些情况下，存在一个初始条件 f_0 属于 $L^2(\mathbb{T})$，使得 $\int_{\mathbb{T}} f_0 = 0$ 无法被驱动至 0 *in* 时间 T，使用 L^2 控制。

在 $a_{21} = 0$ 且 $k_{21} \neq 0$的情况下，满足零可控性的正则性条件存在缺口（即， $H^2 \times L^2$），并且 $L^2 \times L^2$ 初始条件不具备零可控性。是否每个 $H^1 \times L^2$ 初始条件都能被驱动至 0? 我们猜想情况并非如此，但定理 3 不足以证明这一点。我们需要考察 WKB 展开中的第二项才能得出结论，或者使用另一种方法；也许可以采用引理 23的正则化性质的改进版本。

我们不对 $m_1 \neq 0$ 和 $m_2 \neq 0$ 的一般情形作详细讨论。这里只需指出，零可控性成立不需要正则性条件。但根据 $\det([B_n, M]) = 0$ 的解（这是关于 n 的二次方程）是否为整数，初始条件要可控至零，至多可能需要满足关于两个傅里叶分量的条件。我们只详细讨论以下情形：同时控制一个输运方程和一个抛物型方程。

命题 22。 假设 B， M 由方程 (32)给出。假设 $A = \left(\begin{smallmatrix} a' & 0 \\ 0 & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ 且 $K = \left(\begin{smallmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{smallmatrix}\right)$。假设 $(m_1, m_2) = (1, 1)$。令 $T > \ell(\omega)/|a'|$。

- 如果 $a' \neq a_{22}$和 $k_{11} = k_{22}$，则每个满足 $\int_T f_0^{\mathrm{h}} = \int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{p}}$ 的初始条件 $f_0 = (f_0^{\mathrm{h}}, f_0^{\mathrm{p}}) \in L^2(\mathbb{T})^2$ 都可通过 L^2 中的控制可控至零。
- 若满足 $a' \neq a_{22}$ 和 $k_{11} \neq k_{22}$，则 $L^2(\mathbb{T})^2$ 中的每个初始条件都可以通过 L^2中的控制被驱动至零。

- 若满足 $a' = a_{22}$ 和 $\sqrt{(k_{22}-k_{11})/d} \notin \mathbb{N}$，则 $L^2(\mathbb{T})^2$ 中的每个初始条件都可以通过 L^2中的控制被驱动至零。
- 若 $a' = a_{22}$ 且 $n_0 := \sqrt{(k_{22}-k_{11})/d} \in \mathbb{N}$，则每个满足 $c_{\pm n_0}(f_0^{\mathrm{h}}) = c_{\pm n_0}(f_0^{\mathrm{p}})$ 的初始条件 $f_0 = (f_0^{\mathrm{h}}, f_0^{\mathrm{p}}) \in L^2(\mathbb{T})^2$ 都可以通过 L^2中的控制被驱动至零。

这种情形 $a' \neq a_{22}$ 且 $k_{11} = k_{22}$ 并不新鲜，至少从理念上而言如此：热方程与波动方程的同时可控性（等价地说，可加观测性）已由 Zuazua 研究过 [41, §2.1–2。2]。

5.2 自由方程的正则性

我们将使用一些基本的正则性结果。

引理 23. 设 $f_0 \in H^1(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{h}}} \times L^2(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{p}}}$。对于每个 $t > 0$，$\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}} f_0 \in H^1(\mathbb{T})^d$。
此外，假设 $A_{12} = 0$，且 $f_0 \in H^2(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{h}}} \times L^2(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{p}}}$。对于每个 $t > 0$，$\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}} f_0 \in H^2(\mathbb{T})^d$。

为证明这一点，我们将使用以下（子）引理：

引理 24. 考虑 $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}$ 和 F^{p}，它们的定义见第2 节（或 *[7, §4.1]*）。对于每个 $t > 0$，$k \in \mathbb{N}$和 $f_0 \in F^{\mathrm{p}}$，$\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{p}}} f_0 \in H^k(\mathbb{T})^d$。

证明。令 $f(t) = \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{p}}} f_0$。将 $f(t)$ 的前 d_{h} 个分量记为 $f^{\mathrm{h}}(t)$，将 $f(t)$ 的最后 d_{p} 个分量记为 $f^{\mathrm{p}}(t)$（f_0也类似）。

我们将使用[7, §4.4.1]中的一些简单工具。为便于阅读，我们在此完整地重写证明。

步骤 *1*：计算 $f^{\mathrm{h}}(t)$ 作为 $f^{\mathrm{p}}(t)$的函数。—由于 $f(t) \in F^{\mathrm{p}}$，根据 F^{p} 的定义（第2节），对于每个 $|n| > n_0$,

$$P^{\mathrm{p}}(\mathrm{i}/n)c_n(f(t)) = c_n(f(t)).$$

将 $P^{\mathrm{p}}(z)$ 按分块写成 $\left(\begin{smallmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) \end{smallmatrix}\right)$，并取前 d_{h} 个分量，

$$p_{11}(\mathrm{i}/n)c_n(f^{\mathrm{h}}(t)) + p_{12}(\mathrm{i}/n)c_n(f^{\mathrm{p}}(t)) = c_n(f^{\mathrm{h}}(t)).$$

由于 $P^{\mathrm{p}}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$、$p_{11}(0) = 0$，且 z 足够小，$|p_{11}(z)| < 1$。然后，如有必要，增大 n_0，对于 $|n| > n_0$,

$$c_n(f^{\mathrm{h}}(t)) = (I - p_{11}(\mathrm{i}/n))^{-1} p_{12}(\mathrm{i}/n)c_n(f^{\mathrm{p}}(t)).$$

当 $z \in \mathbb{C}$ 足够小时，令 $G(z) = (I - p_{11}(z))^{-1}p_{12}(z)$。那么，$G$ 关于足够小的 z 全纯依赖，且对于 $|n| > n_0$ $c_n(f^{\mathrm{h}}(t)) = G(\mathrm{i}/n)c_n(f^{\mathrm{p}}(t))$。

步骤 *2*：结论。—定义 $\mathcal{D}$ 为作用在 $L^2(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{p}}}$ 上、定义域为 $H^2(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{p}}}$ 的无界算子，

$$\mathcal{D}\Big(\sum_n X_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\Big) := \sum_n \big(n^2 D - \mathrm{i}nA_{22} - K_{22} - G(\mathrm{i}/n)(\mathrm{i}nA_{21} + K_{21})\big)X_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

回顾一下，

$$(\partial_t - D\partial_x^2 + A_{22}\partial_x + K_{22})f^{\mathrm{p}}(t) + (A_{21}\partial_x + K_{21})f^{\mathrm{h}}(t) = 0.$$

由于 $c_n(f^{\mathrm{h}}(t)) = G(\mathrm{i}/n)c_n(f^{\mathrm{p}}(t))$，因此可以将其写为 $(\partial_t + \mathcal{D})f^{\mathrm{p}}(t) = 0$。因此，

$$f^{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathcal{D}} f_0^{\mathrm{p}} = \sum_{|n|>n_0} \mathrm{e}^{-t\left(n^2 D + \mathrm{i}nA_{22} + K_{22} + G(\mathrm{i}/n)(\mathrm{i}nA_{21} + K_{21})\right)} c_n(f_0^{\mathrm{p}}).$$

由于 $\Re(\mathrm{Sp}(D)) \subset (0,+\infty)$, $f^{\mathrm{p}}(t)$ 属于每个 $H^k(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{p}}}$。由于 $f(t)$ 的前 d_{h} 个分量是 a re

$$f^{\mathrm{h}}(t) = \sum_{|n|>n_0} G(\mathrm{i}/n) c_n(f^{\mathrm{p}}(t)) e_n,$$

并且由于 $G(\mathrm{i}/n)$ 在 $|n| \to +\infty$时有界, $f^{\mathrm{h}}(t)$ 也属于每个 $H^k(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{h}}}$。 □

引理的证明 *23*。 证明的思路是考察 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}} f_0$在双曲（分别为抛物）分量上的投影，并利用双曲投影的渐近行为。与前一个证明一样，我们将 d_{h} 的前 f_0 个分量记为 f_0^{h}，将 d_{p} 的最后 f_0^{p} 个分量记为。

我们还要回顾一下，根据 [7, §4。1],

$$\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}} f_0 = \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^0} \Pi^0 f_0 + \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{h}}} \Pi^{\mathrm{h}} f_0 + \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{p}}} \Pi^0 f_{\mathrm{p}}. \tag{33}$$

步骤 *1*：双曲投影的渐近行为。— 我们使用在 [7,命题 5–6]中定义的记号 $P^{\mathrm{p}}(z), P^{\mathrm{h}}(z)$。利用总特征投影 [27,的扰动级数],（第 II 章，等式 (2.14)），可得

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{h}}(z) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - z\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + O(z^2) \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 0 & A_{12}D^{-1} \\ D^{-1}A_{21} & 0 \end{pmatrix} + O(z^2). \end{aligned}$$

因此,

$$\Pi^{\mathrm{h}} f_0 = \sum_{|n|>n_0} \left[\begin{pmatrix} c_n(f_0^{\mathrm{h}}) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{i}}{n} \begin{pmatrix} A_{12}D^{-1}c_n(f_0^{\mathrm{p}}) \\ D^{-1}A_{21}c_n(f_0^{\mathrm{h}}) \end{pmatrix} + O(n^{-2}c_n(f_0)) \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}. \tag{34}$$

步骤 *2*：当 $f_0 \in H^1 \times L^2$时的情形。— 由于 $\Pi^0 f_0$ 是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$的有限和，因此它属于每个 H^k，也如此。根据抛物频率的正则性（引理 24）， $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{p}}} \Pi^{\mathrm{p}} f_0$ 属于每个 H^k。

由于 $f_0^{\mathrm{h}} \in H^1(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{h}}}, (c_n(f_0^{\mathrm{h}}))_n \in \ell^2(\mathbb{Z}; 1+n^2)$（带权 $1+n^2$ 的 ℓ^2 空间）。由于 $f_0^{\mathrm{p}} \in L^2(\mathbb{T})^{d_{\mathrm{p}}}, (c_n(f_0^{\mathrm{p}}))_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$。因此,

$$\left(c_n(f_0^{\mathrm{h}}) - \frac{\mathrm{i}}{n} A_{12}D^{-1}c_n(f_0^{\mathrm{p}}) \right)_{|n|>n_0} \in \ell^2(|n|>n_0; 1+n^2),$$

and

$$\left(D^{-1}A_{21}c_n(f_0^{\mathrm{h}}) \right)_{|n|>n_0} \in \ell^2(|n|>n_0; 1+n^2).$$

因此，根据方程（ Π^{h} 34）的渐近行为， $\Pi^{\mathrm{h}} f_0 \in H^1(\mathbb{T})^d$。由于 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{h}}}$ 在每个 H^k上连续, $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{h}}} \Pi^{\mathrm{h}} f_0 \in H^1$。

步骤 *3*：情形 $f_0 \in H^2 \times L^2$ 且 $A_{12} = 0$。— 渐近行为（34）为

$$\Pi^{\mathrm{h}} f_0 = \sum_{|n|>n_0} \left[\begin{pmatrix} c_n(f_0^{\mathrm{h}}) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{i}}{n} \begin{pmatrix} 0 \\ D^{-1}A_{21}c_n(f_0^{\mathrm{h}}) \end{pmatrix} + O(n^{-2}c_n(f_0)) \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}. \tag{35}$$

证明的其余部分与前一种情形非常相似： $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^0} \Pi^0 f_0$ 和 $\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}^{\mathrm{p}}} \Pi^{\mathrm{p}} f_0$ 都属于每个 H^k，而渐近行为（35）证明了 $\Pi^h f_0$ 相较于 f_0^{p}，多获得了两个导数。 □

5.3 2×2 系统的可控性：证明

命题*20*的证明。在这种情况下，

$$[B_n|M]=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}na'+k_{22}\\ 0 & \mathrm{i}na_{21}+k_{21}\end{pmatrix}.$$

特别是， $\det([B_n|M])=\mathrm{i}na_{21}+k_{21}$。我们看到，如果 $(a_{21},k_{21})=(0,0)$，无论 n 为何，Kalman 秩条件都不成立。因此，根据备注 2第 1 项，无论 T 为何，零可控性都不成立。

注意，在我们的情形下， $[B_n|M]^+=[B_n|M]^{-1}$ （当右端存在时）。因此，

$$[B_n|M]^{-1}=\frac{1}{\mathrm{i}na_{21}+k_{21}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}na_{21}+k_{21} & -\mathrm{i}na'-k_{22}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

特别是，采用定理 9 中 $k=2$, $L^{\mathrm{h}}_{n,1}=1$ 和 $L^{\mathrm{h}}_{n,2}=0$的记号。因此， $p=0$。

如果 $k_{21}\neq 0$， $\det([B_n|M])=\mathrm{i}na_{21}+k_{21}$ 恒不为零。在这种情况下， E （如定理 9中所定义）为 $E=L^2(\mathbb{T})^2$。因此，根据定理 9，每个 $L^2(\mathbb{T})^2$ 都可以通过0 控制在 L^2 时间内驱动$T>\ell(\omega)/|a'|$

若 $a_{21}\neq 0$ 且 $k_{21}=0$，则对每个 $n\neq 0$，Kalman 秩条件都成立。对于 $n=0$，根据 $[B_n|M]$的公式，$\operatorname{rank}([B_0|M])=\mathbb{C}\times\{0\}$。因此， $E=\{(f_0^{\mathrm{h}},f_0^{\mathrm{p}})\in L^2(\mathbb{T})^2,\ \int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{p}}=0\}$。所以，根据定理 9，每个满足 $(f_0^{\mathrm{h}},f_0^{\mathrm{p}})\in L^2(\mathbb{T})^2$的初始条件 $\int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{p}}=0$都可以通过 0 中的控制 L^2 在时间 $T>\ell(\omega)/|a'|$内被驱动至该状态。 □

命题 *21*的证明。 在这种情况下，

$$[B_n|M]=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}na_{12}+k_{12}\\ 1 & -n^2d+\mathrm{i}na_{22}+k_{22}\end{pmatrix}.$$

特别地， $\det([B_n|M])=-\mathrm{i}na_{12}-k_{12}$。我们看到，若 $(a_{12},k_{12})=(0,0)$，则无论 n 为何，Kalman 秩条件都不成立。因此，根据备注 2 第 1 项，无论 T 为何，都不具有零可控性。

与前一个证明一样， $[B_n|M]^+=[B_n|M]^{-1}$。因此，

$$[B_n|M]^{-1}=\frac{1}{-\mathrm{i}na_{12}-k_{12}}\begin{pmatrix}-n^2d+\mathrm{i}na_{22}+k_{22} & -\mathrm{i}na_{12}-k_{12}\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

特别地，采用定理9 中的记号，当 $k=2$、 $L^{\mathrm{h}}_{n,1}=-(-n^2d+\mathrm{i}na_{22}+k_{22})/(\mathrm{i}na_{12}+k_{12})$和 $L^{\mathrm{h}}_{n,2}=1/(\mathrm{i}na_{12}+k_{12})$时。特别地，如果 $a_{12}\neq 0$，则 $p=\max(1,1-1)=1$。并且，如果 $a_{12}=0$ 且$k_{12}\neq 0$， 则 $p=\max(2,1+0)=2$。

步骤 *1*：情形 $a_{12}\neq 0$ 且 $k_{12}\neq 0$。— 对每个 n，Kalman 秩条件均成立。因此，采用定理 9中的记号， $p=1$ 且 $E=L^2(\mathbb{T})^2$，并且任意 $H^1(\mathbb{T})^2$ 中的初始条件均可通过 L^2 中的控制在 $T>\ell(\omega)/|a'|$时间内引导至 。

在 $H^1\times L^2$ 中控制初始条件的策略，首先是在任意短的时间内让解自由演化，从而得到一个 $H^1(\mathbb{T})^2$ 状态（引理23），然后根据前面的讨论，我们可以将其控制到0 。

步骤 *2*：情形 $a_{12}\neq 0$ 和 $k_{12}=0$。——这种情形与前一种几乎相同，区别在于 $n=0$ （且仅对 $n=0$）不满足 Kalman 秩条件。我们有 $\operatorname{rank}([B_0|M])=$

$\{0\}\times\mathbb{C}$和 $E=\{(f_0^{\mathrm{h}},f_0^{\mathrm{p}})\in L^2(\mathbb{T})^2,\ \int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{h}}=0\}$。我们仍有 $p=1$。因此，我们可以通过在时间 $T>\ell(\omega)/|a'|$内使用控制，将每个满足 $\int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{h}}=0$的初始条件 $(f_0^{\mathrm{h}},f_0^{\mathrm{p}})\in H^1(\mathbb{T})^2$ 驱动至 0。

与前一种情况一样，为了控制 $H^1\times L^2$ 中的初始条件，我们让解自由演化，从而得到一个 $H^1(\mathbb{T})^2$ 状态，并保持性质 $\int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{h}}=0$。然后，我们可以在时间 $T>\ell(\omega)/|a'|$ 内控制这个状态。

步骤 *3*：情况 $a_{12}=0$ 和 $k_{12}\neq 0$。——在这种情况下，对每个 n， $p=2$都满足 Kalman 秩条件。因此，根据定理9，我们可以在时间 $H^2(\mathbb{T})^2$ 内，使用中的控制$T>\ell(\omega)/|a'|$，将每个初始条件控制到 L^2。

同样，为了控制 $H^2\times L^2$中的一个初始条件，我们让解自由演化一小段时间，从而得到一个 $H^2(\mathbb{T})^2$ 状态（引理23），然后可以在时间0 内将其控制到 $T>\ell(\omega)/|a'|$。

步骤*4*：缺乏零可控性 L^2 初始条件。——我们有$M^*\binom{1}{0}=0$。因此，根据定理3（回忆一下， A' 的大小为 1×1），存在一个 $L^2(\mathbb{T})^2$ 平均值为零的初始条件，无法将其控制到0。

□

命题*22*的证明。我们有

$$[B_n|M]=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}na'+k_{11}\\ 1 & -dn^2+\mathrm{i}na_{22}+k_{22}\end{pmatrix}.$$

特别地， $\det([B_n|M])=-dn^2+\mathrm{i}n(a_{22}-a')+k_{22}-k_{11}$。我们看到，当 n 足够大时，这个行列式非零。事实上，取实部和虚部，

$$\det([B_n|M])=0\Leftrightarrow\begin{cases}-dn^2+k_{22}-k_{11}=0\\ n(a_{22}-a')=0\end{cases}\tag{36}$$

此外，

$$[B_n|M]^+=[B_n|M]^{-1}=\frac{1}{\det([B_n|M])}\begin{pmatrix}-dn^2+\mathrm{i}na_{22}+k_{22} & -\mathrm{i}na'-k_{11}\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

因此，

$$L^{\mathrm{h}}_{n,1}=\frac{-dn^2+O(n)}{-dn^2+O(n)},\quad\text{and}\quad L^{\mathrm{h}}_{n,2}=\frac{-1}{-dn^2+O(n)}.$$

因此， $p=\max(0,1-2)=0$。

步骤 *1*：情形 $a'\neq a_{22}$ 且 $k_{11}=k_{22}$。——根据等式（36），对以下情况满足Kalman条件：$n\neq 0$。此外，对于 $n=0$， $\mathrm{Range}([B_0|M])=\mathbb{C}M$，因此 $E=\{(f_0^{\mathrm{h}},f_0^{\mathrm{p}})\in L^2(\mathbb{T})^2,\ \int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{h}}=\int_{\mathbb{T}} f_0^{\mathrm{p}}\}$。定理9 给出了所声称的可控性结果。

步骤 *2*：情形 $a'\neq a_{22}$ 且 $k_{11}\neq k_{22}$。——根据等式（36），对每个以下情况都满足Kalman条件： $n\in\mathbb{Z}$。定理9 给出了所声称的可控性结果。

步骤 *3*：情形 $a'=a_{22}$ 且 $\sqrt{(k_{22}-k_{11})/d}\notin\mathbb{N}$。——与前一种情形一样，根据等式（36），对每个 $n\in\mathbb{Z}$都满足Kalman条件。定理9 给出了所声称的可控性结果。

步骤*4*：情形 $a'=a_{22}$和 $n_0:=\sqrt{(k_{22}-k_{11})/d}\in\mathbb{N}$。— 根据方程（36），对于 $n\neq\pm n_0$，Kalman条件成立。对于 $n=\pm n_0$， $\mathrm{Range}([B_{\pm n_0}|M])=\mathbb{C}M$。定理 9 给出了所述可控性结果。

□

A 有限 零可控性的有限维唯一性原理

对于抛物-输运系统的零可控性，我们有时会证明其“在一个有限维空间之外”具有零可控性，然后利用泛函分析方法处理剩余的有限维空间 [30, 7]。在之前的文章中，这一点并未作为一般性结果加以陈述。本附录旨在说明这一点。

命题 25。设 $T_0 > 0$。设 H 是一个复希尔伯特空间。设 A 是 H 上的一个无界算子，它生成 H 上的有界算子强连续半群。设 U 是另一个希尔伯特空间，$B : U \to H$ 是一个有界控制算子。对于每个 $T > 0$，设 U_T 是 $L^2(0,T;U)$ 的一个子空间，且嵌入连续且稠密，并满足以下“零延拓性质”：[3] 若 $u \in U_T$、a、$b > 0$，则由 $\widetilde{u}(t) = 0$ 定义的函数 $\widetilde{u}$ 在 $0 < t < a$ 时为 $\widetilde{u}(t) = u(t-a)$，在 $a < t < T + a$ 时为 $\widetilde{u}(t) = 0$，并在 $T + a < t < T + a + b$ 时为 U_{T+a+b}。

假设存在一个 H 的有限维空间 $\mathcal{F}$，该空间在半群 e^{tA} 下保持稳定；并存在一个 H 的闭有限余维子空间 [4] $\mathcal{G}$，使得：

- （有限维意义下的可控性）对于每个 $f_0 \in \mathcal{G}$，都存在 $u \in U_{T_0}$，使得 $f' = Af + Bu$ 的解 f 满足 $f(T_0) \in \mathcal{F}$，
- （唯一延拓）对于每个 $\varepsilon > 0$，以及 A^* 的广义特征函数 $g_0 \in H$ 的任意有限线性组合，我们在 $t \in (0,\varepsilon) \implies g = 0$ 上有 $B^*(e^{tA^*}g_0) = 0$。

那么，对于每个 $T > T_0$ 和每个 $f_0 \in H$，都存在 $u \in U_T$，使得 f' = 的解 f $Af + Bu$，$f(0) = f_0$ 满足 $f(T) = 0$。

注26。• 在这个命题中，我们可以将假设“B 有界”弱化为“B 可容许”（参见 [14, §2。3]），但在本文中，B 总是有界的。

• 如果断言“（$g_0 \in H$ 是 A^*和 $B^*g_0 = 0$的广义特征函数的有限线性组合） $\implies$ $g_0 = 0$”成立，那么根据适定性，唯一延拓假设成立。

证明。步骤 *1*：我们可以假设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$。——我们证明，将 $\mathcal{G}$ 替换为 $\mathcal{F} + \mathcal{G}$后，假设仍然成立。设 $f_0 \in \mathcal{F} + \mathcal{G}$。记 $f_0 = f_{\mathcal{F}} + f_{\mathcal{G}}$。根据这些假设，存在$u \in U_{T_0}$，使得 $f' = Af + Bu$, $f(0) = f_{\mathcal{G}}$ 的解 f 满足 $f(T_0) \in \mathcal{F}$。于是，$\widetilde{f}' = A\widetilde{f} + Bu$, $\widetilde{f}(0) = f_0$ 的解 $\widetilde{f}$ 满足

$$\widetilde{f}(T_0) = \underbrace{e^{T_0 A} f_{\mathcal{F}}}_{\in \mathcal{F}} + \underbrace{f(T_0)}_{\in \mathcal{F}}.$$

注意，将 T_0 替换为任意 $T_1 > T_0$后，假设仍然成立。

步骤 *2*：对于 $T > T_0$，满足 $f(T) \in \mathcal{F}$ 的控制 $u \in U_T$ 可在$f_0 \in \mathcal{G}$中线性且连续地选取。— 这是控制理论中的标准证明。对于 $f_0 \in \mathcal{G}$，令

$$V(f_0) := \{u \in U_T : f(T) \in \mathcal{F}, f \text{ solves } f' = Af + Bu, f(0) = f_0\}.$$

由于 A 生成强连续半群，因此 $V(f_0)$ 是 U_T的闭仿射子空间。于是，我们可以定义 $\mathcal{U}(f_0)$ 为 0 在 $V(f_0)$ 上的正交投影（关于 U_T-范数）。根据闭凸集上正交投影的刻画，我们可知 $\mathcal{U}$ 是线性的。利用 A

[3] 在我们这里采用的应用中，$U = L^2(\omega)$和 $U_T = H_0^k((0,T) \times \omega)$。命题 25 的假设专为适应这种情况而设。[4] 我们不要求 $\mathcal{G}$ 根据是稳定的 e^{tA}。

生成强连续半群这一事实，以及闭凸子集上投影的刻画和闭图定理，我们可知 $\mathcal{U}$ 是有界的。

在证明的其余部分，我们令 $\mathcal{U}_T : \mathcal{G} \to U_T$ 为这样一个映射。我们还令

$$\mathcal{N}_T := \{f_0 \in H : \exists u \in U_T,\ f(T) = 0,\ f \text{ solves } f' = Af + Bu,\ f(0) = f_0\}. \tag{37}$$

步骤 3：对于 $T \geq T_0$，$\mathcal{N}_T$ 是 H的闭有限余维子空间。—— 令 $S_0(t)$ 为限制在 $\mathcal{F}$上的半群 e^{tA}。由于 $\mathcal{F}$ 是有限维的，$S_0(t)$ 可写为 e^{tA_0}，其中 A_0 是 $\mathcal{F}$上的有界算子。此外，$A_0 = A_{|\mathcal{F}}$。特别地，S_0 实际上是一个有界算子群。

对于 $f_0 \in \mathcal{G}$，以及 $f' = Af + B\mathcal{U}_T f_0$、$f(0) = f_0$，我们有 $f(T) \in \mathcal{F}$，据此可以定义

$$\mathcal{K} : f_0 \in \mathcal{G} \mapsto -S_0(-T)f(T) \in \mathcal{F}$$

该算子的值域 $\mathcal{K}$ 满足 $\mathrm{Range}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$。因此，$\mathcal{K}$ 是有限秩且紧的。于是，根据 Fredholm择一定理，$(I + \mathcal{K})\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}$的闭子空间，且具有有限余维。

此外，对于每个 $f_0 \in \mathcal{G}$，解 $\widetilde{f}$ of $\widetilde{f}' = A\widetilde{f} + B\mathcal{U}_T f_0, \widetilde{f}(0) = f_0 + \mathcal{K}f_0$ 满足

$$\widetilde{f}(T) = f(T) + \mathrm{e}^{TA}\mathcal{K}f_0 = f(T) - S_0(T)S_0(-T)f(T) = 0.$$

因此，$(I + \mathcal{K})\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_T$。根据[9, 命题 11。5], 这证明了 $\mathcal{N}_T$ 在 H中是闭集且具有有限余维。

步骤4：存在 $\delta > 0$，使得对于每个 T、$T' \in (T_0, T_0 + \delta)$，$\mathcal{N}_T = \mathcal{N}_{T'}$。— 假设 $T_0 < T < T'$。如果 $u \in \mathcal{N}_T$，并且我们将 u在 (T, T')上延拓为 0，则有 $u \in \mathcal{N}_{T'}$。因此 $\mathrm{codim}(\mathcal{N}_{T'}) \leq \mathrm{codim}(\mathcal{N}_T)$。由于 $\mathrm{codim}(\mathcal{N}_T)$ 是一个整数，$T \mapsto \mathrm{codim}(\mathcal{N}_T)$ 的间断点是孤立的，这证明了该断言。

从现在起，我们任意选取足够小的 $\varepsilon \in (0, \delta/2)$，并令 $T_1 = T_0 + \varepsilon$。

步骤 5：对于 $t \in (0, \varepsilon)$，$(\mathrm{e}^{tA^*}\mathcal{N}_{T_1}^{\perp})^{\perp} \subset \mathcal{N}_{T_1}$。—— 设 $0 < t < \varepsilon$和 $f_0 \in (\mathrm{e}^{tA^*}\mathcal{N}_{T_1}^{\perp})^{\perp}$。对于每个 $g_0 \in \mathcal{N}_{T_1}^{\perp}$，我们有

$$0 = \langle \mathrm{e}^{tA^*}g_0, f_0\rangle = \langle g_0, \mathrm{e}^{tA}f_0\rangle.$$

因此，$\mathrm{e}^{tA}f_0 \in (\mathcal{N}_{T_1}^{\perp})^{\perp}$。由于 $\mathcal{N}_{T_1}$ 是闭集（步骤 3），$\mathrm{e}^{tA}f_0 \in \mathcal{N}_{T_1}$。根据 $\mathcal{N}_{T_1}$ 的定义以及0延拓性质 U_{T_1}，可证明 $f_0 \in \mathcal{N}_{T_1+t}$。根据上一步，$\mathcal{N}_{T_1+t} = \mathcal{N}_{T_1}$，这就证明了该命题。

步骤 6：$\mathcal{N}_{T_1}^{\perp}$ 在 e^{tA^*}作用下左不变。——首先，考虑 $0 < t < \varepsilon$。根据上一步，$\mathcal{N}_{T_1}^{\perp} \subset \left((\mathrm{e}^{tA^*}\mathcal{N}_{T_1}^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp}$。由于 $\mathcal{N}_{T_1}^{\perp}$是有限维的，因此是闭集，$\mathcal{N}_{T_1}^{\perp} \subset \mathrm{e}^{tA^*}\mathcal{N}_{T_1}^{\perp}$。此外，$\dim(\mathrm{e}^{tA^*}\mathcal{N}_{T_1}^{\perp}) \leq \dim(\mathcal{N}_{T_1}^{\perp})$。因此，对于 $0 < t < \varepsilon$，$\mathrm{e}^{tA^*}\mathcal{N}_{T_1}^{\perp} = \mathcal{N}_{T_1}^{\perp}$。得益于半群性质，这对所有 $t > 0$都成立。

步骤 7：与控制问题“在 ε 时间内，使用 U_ε 中的控制将每个 $f_0 \in H$ 引导至 $\mathcal{N}_{T_1}$”相关的唯一延拓性质。— 该控制问题的数学形式如下：

$$\forall f_0 \in H,\ \exists u \in U_\varepsilon,\ f(T) \in \mathcal{N}_{T_1},\ \text{where } f' = Af + Bu,\ f(0) = f_0. \tag{38}$$

令 $\Pi : H \to H$ 为到 $\mathcal{N}_{T_1}^{\perp}$ 的正交投影。另令 $R_T : L^2(0, T; U) \to H$ 为输入到输出映射，定义如下：

$$R_T u := f(T),\ \text{where } f' = Af + Bu,\ f(0) = 0.$$

于是，控制问题（38）等价于

$$\forall f_0 \in H,\ \exists u \in U_\varepsilon,\ \Pi\mathrm{e}^{\varepsilon A}f_0 + \Pi R_\varepsilon u = 0.$$

我们用 ι_ε 表示嵌入映射 $U_\varepsilon \to L^2(0,T;U)$。于是，前面的断言等价于 o

$$\mathrm{Range}\left(\Pi \circ e^{\varepsilon A}\right) \subset \mathrm{Range}\left(\Pi \circ R_\varepsilon \circ \iota_\varepsilon\right).$$

与该控制问题相关的可观测性不等式为（见 [14, 引理 248]）：

$$\forall g_0 \in H,\ \|e^{\varepsilon A^*} \circ \Pi^* g_0\| \leq C \|\iota_\varepsilon^* \circ R_\varepsilon^* \circ \Pi^* g_0\|.$$

由于 $\mathrm{Range}(\Pi^*) = \mathcal{N}_{T_1}^\perp$ 是有限维的，且由于 $\ker(\iota^*) = \mathrm{Range}(\iota)^\perp = \{0\}$，这等价于

$$\forall g_0 \in \mathcal{N}_{T_1}^\perp,\ R_\varepsilon^* g_0 = 0 \implies e^{\varepsilon A^*} g_0 = 0. \tag{39}$$

总之，由于 $\mathcal{N}_{T_1}^\perp$ 根据 e^{tA^*}是有限维且稳定的，半群 e^{tA^*} 实际上是一个 群，特别是 $e^{\varepsilon A^*}$ 在 $\mathcal{N}_{T_1}^\perp$ 上可逆。此外，$R_\varepsilon^* g_0(t) = B^* e^{(\varepsilon - t)A^*} g_0$ （见 [14, 引理 247]）。因此，断言（39）等价于

$$\forall g_0 \in \mathcal{N}_{T_1}^\perp,\ \left(B^* e^{tA^*} g_0 = 0 \text{ for } 0 < t < \varepsilon\right) \implies g_0 = 0. \tag{40}$$

第 8 步：结论。— 上一步的唯一延拓性质（40）恰好就是我们所假设的唯一延拓性质。因此，根据上一步，我们可以通过 $f_0 \in H$ 中的控制，$\mathcal{N}_{T_1}$ 在时间 ε 内将任意 U_ε状态引导至 $\mathcal{N}_{T_1}$。根据 $f_0 \in \mathcal{N}_{T_1}$ 的定义，我们可以通过 0 中的控制，在时间 $T_1 = T + \varepsilon$ 内将任意 U_{T_1}状态引导至 $f_0 \in H$ 中的控制，在时间 0内将任意 $T_1 + \varepsilon = T + 2\varepsilon$ 状态引导至 $U_{T+2\varepsilon}$。由于 ε 可以任意小，这就证明了该命题。 □

参考文献

[1] Robert A. Adams 和 John J. F. Fournier。《Sobole夫空间》。Academic Press，纽约州纽约市，2003年。[2] Sakil Ahamed、Debayan Maity 和 Debanjana Mitra。变系数一维线性耦合输运–抛物系统的零可控性缺失。《微分方程杂志》，320：64–113，2022年。[3] Sakil Ahamed 和 Debanjana Mitra。关于麦克斯韦定律下线性化可压缩纳维-斯托克斯系统的若干可控性结果，2022年10月。预印本。[4] Fatiha Alabau-Boussouira、Jean-Michel Coron 和 Guillaume Olive。减少控制数量的一阶拟线性双曲系统的内部可控性。《SIAM《控制与优化》》，55(1)：300–323，2017年。[5] Farid Ammar Khodja、Assia Benabdallah、Cédric Dupaix 和 Manuel González-Burgos。一类线性抛物型系统局部化分布可控性的 Kalman 秩条件。《演化方程杂志》，9(2)：267–291，2009年6月。[6] Claude Bardos、Gilles Lebeau 和 Jeffrey Rauch。关于从边界观测、控制和稳定化波的尖锐充分条件。《SIAM《控制与优化》》，30(5)：1024–1065，1992年9月。[7] Karine Beauchard、Armand Koenig 和 Kévin Le Balc'h。线性抛物-输运系统的零可控性。《巴黎综合理工学院数学杂志》，7：743–802，2020年。

[8] Kuntal Bhandari、Shirshendu Chowdhury、Rajib Dutta 和 Jiten Kumbhakar。利用单个控制力实现一维线性化可压缩纳维-斯托克斯系统的边界零可控性。arXiv:2204.*02375 [math]*, 2022年4月。[9] Haim Brezis。《泛函分析、Sobole夫空间与偏微分方程》。Universitext。Springer，纽约，2011年。[10] Felipe W. Chaves-Silva、Lionel Rosier 和 Enrique Zuazua。带移动控制的黏弹性系统的零可控性。《纯粹与应用数学杂志》，101(2)：198–222，2014年2月。[11] Shirshendu Chowdhury、Rajib Dutta 和 Subrata Majumdar。耦合一阶双曲–椭圆系统的边界可控性与可稳定性。EECT，2022年11月。[12] Shirshendu Chowdhury 和 Debanjana Mitra。利用矩量法实现线性化可压缩纳维-斯托克斯方程的零可控性。《演化方程杂志》，15(2)：331–360，2015年。[13] Shirshendu Chowdhury、Debanjana Mitra、Mythily Ramaswamy 和 Michael Renardy。一维线性化可压缩纳维-斯托克斯系统的零可控性。《微分方程杂志》，257(10)：3813–3849，2014年。[14] Jean-Michel Coron。《控制与非线性》。数学调查与专著第143卷。美国数学会，马萨诸塞州波士顿，2007年。[15] Jean-Michel Coron 和 Jean-Philippe Guilleron。两个三次非线性项耦合的三个热方程的控制。《SIAM《控制与优化》》，55(2)：989–1019，2017年。[16] Jean-Michel Coron 和 Pierre Lissy。具有两个消失分量的分布式控制下三维纳维–斯托克斯系统的局部零可控性。《数学发明》，198(3)：833–880，2014年12月。[17] Michel Duprez 和 Pierre Lissy。涉及零阶或一阶耦合项的、具有 m 个方程和 m−1 个控制的若干线性抛物型系统的间接可控性。《纯粹与应用数学杂志》，106(5)：905–934，2016年11月。[18] Michel Duprez 和 Pierre Lissy。由零阶和一阶项耦合的抛物型方程内部可控性的正面与负面结果。《演化方程杂志》，18(2)：659–680，2018年6月。[19] Michel Duprez 和 Pierre Lissy。具有局部化控制的福克–普朗克方程轨线的双线性局部可控性。《傅里叶研究所年刊》，72(4)：1621–1659，2022年。[20] Sylvain Ervedoza、Olivier Glass、Sergio Guerrero 和 Jean-Pierre Puel。一维可压缩纳维–斯托克斯方程的局部精确可控性。《力学分析档案》，206(1)：189–238，2012年10月。[21] Sylvain Ervedoza 和 Enrique Zuazua。为光滑数据构造光滑控制的系统方法。《离散与连续动力系统》，B辑，14(4)：1375–1401，2010年。[22] Andrei Vladimirovich Fursikov 和 Oleg Yu Imanuvilov。《演化方程的可控性》。讲义系列第34卷。首尔国立大学，1996年。[23] Sergio Guerrero 和 Oleg Yurievich Imanuvilov。关于带记忆的热方程不可控性的评论。《ESAIM控制、优化与变分》，19(1)：288–300，2013年。

[24] Patricio Guzman 和 Lionel Rosier。二维环面上结构阻尼波动方程的零可控性。SIAM《控制与优化》，59(1):131–155，2021年。[25] Lars Hörmander。《线性偏微分算子分析》第三卷。数学经典丛书。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2007年。[26] S. Ivanov 和 L. Pandolfi。带记忆的热方程：无法实现静止可控性。《数学分析及其应用》，355(1):1–11，2009年。[27] Tosio Kato。《线性算子扰动理论》。数学经典丛书第132卷。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，1995年。[28] Ol'ga A. Ladyženskaja、Vsevolod Alekseevič Solonnikov 和 Nina N. Ural'ceva。《抛物型线性与拟线性方程》。数学专著译丛第23卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1968年。[29] Gilles Lebeau 和 Luc Robbiano。热方程的精确控制。《偏微分方程通讯》，20(1-2):335–356，1995年1月。[30] Gilles Lebeau 和 Enrique Zuazua。线性热弹性系统的零可控性。《力学分析档案》，141(4):297–329，1998年4月。[31] Cyril Letrouit。次椭圆波动方程永远不可观测。arXiv:2002。*01259* [math], 2020年2月。[32] Thibault Liard 和 Pierre Lissy。线性算子群耦合系统间接可控性的 Kalman 秩条件。《数学控制、信号与系统》，29(2):35，2017年。[33] Pierre Lissy 和 Enrique Zuazua。线性偏微分方程耦合系统的内部可观测性。SIAM《控制与优化》，57(2):832–853，2019年。[34] Philippe Martin、Lionel Rosier 和 Pierre Rouchon。移动控制下结构阻尼波动方程的零可控性。SIAM《控制与优化》，51(1):660–684，2013年。[35] André Martinez。《半经典分析与微局部分析导论》。Universitext。Springer New York，2002年。[36] J. D. Murray。《渐近分析》，应用数学科学丛书第48卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1984年。[37] Lionel Rosier 和 Pierre Rouchon。关于带结构阻尼的波动方程的可控性。《国际断层统计学杂志》，5(W07):79–84，2007年。[38] Lionel Rosier 和 Bing-Yu Zhang。周期区域上 Benjamin-Bona-Mahony 方程的唯一延拓性质与控制。《微分方程杂志》，254(1):141–178，2013年。[39] Drew Steeves、Bahman Gharesifard 和 Abdol-Reza Mansouri。多重欠驱动耦合抛物系统的可控性。I：代数可解性。SIAM《控制与优化》，57(5):3272–3296，2019年。[40] Drew Steeves、Bahman Gharesifard 和 Abdol-Reza Mansouri。多重欠驱动耦合抛物系统的可控性。II：零可控性。SIAM《控制与优化》，57(5):3297–3321，2019年。[41] Enrique Zuazua。偏微分方程加性叠加的稳定观测。《系统与控制快报》，93:21–29，2016年。