arXiv:2301.00473v1 [math.CV] 1 Jan 2023

嵌入的强伪凸域的 Stein 邻域基与映射的逼近

TADEJ STARˇCIˇC

Abstract. 本文为复空间 X中的任意紧子簇 A构造一个 Stein 邻域基，该子簇具有强伪凸边界 bA 和 Stein 内部 $A\backslash bA$ 。这是对 Siu 著名定理的推广。当 A 为复曲线时，我们的结果与 Drinovec-Drnovˇsek 和 Forstneriˇc 证明的结果一致。我们将把他们的证明改用于高维情形，同时借鉴 Demailly 对 Siu 定理的证明中的一些思路。对于复流形中嵌入的强伪凸域，我们还找到了一个管状 Stein 邻域基。这些结果被应用于全纯映射的逼近问题。

1. Introduction

复流形中最重要的一类是 Stein 流形。K. Stein 于1951年在研究第二Cousin 问题时引入了这一概念（见 [43]）。Stein 流形可通过以下性质来刻画：它们是复欧几里得空间 $\mathbb{C}^N$ 的闭复子流形（见 Remmert [38]）；存在严格多重次调和穷竭函数（见 Grauert [18]）；并且以相干解析层为系数的上同调群均消失（ Cartan定理A和B）。关于 Stein 流形和 Stein 空间（含奇点）的一般理论，参见专著 [19, 20, 25]。

由于许多经典问题在 Stein 空间上都可解，因此，对于复空间的一个子集而言，具有开 Stein 邻域，甚至具有由此类邻域构成的基，是一项极其有用的性质。这方面的一项开创性成果是 Y.-T. Siu 的定理：复空间中的每个 Stein子簇都存在一个开 Stein 邻域（见 [41]；关于不同的证明及其推广，另见 [5, 6, 13]）。本文将 Siu 定理推广到复空间中具有强伪凸边界且内部为 Stein 的紧子簇（见定理 1.1）。对于复流形中嵌入的强伪凸域，我们还找到了管状 Stein 邻域基（见定理 1.2）。这些结果被应用于全纯映射的逼近问题（见推论1.3和4.1）。

Date：2008年4月25日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 32C25、32E30、32H02、32L05、32Q28、32T15。*Key words and phrases.* Stein 空间、强伪凸域、纤维丛、全纯映射、逼近。研究得到斯洛文尼亚共和国 ARRS 基金（3311-03-831049）资助。

本文中的所有复空间均假设为约化且仿紧。令$l \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$。复空间 X 中的紧复子簇 A 具有嵌入的 $\mathcal{C}^l$ 边界 bA，是指每个点 $p \in bA$ 都有一个开邻域 $U \subset X$ 及一个全纯嵌入 $\Phi\colon U \hookrightarrow U' \subset \mathbb{C}^N$，将其映到区域 $U' \subset \mathbb{C}^N$ 中的闭复子簇$\Phi(U)$，使得 $\Phi(A\cap U)$ 是具有$\mathcal{C}^l$边界 $\Phi(bA\cap U)$ 的复子流形。内部 $A\backslash bA$ 是 $X\backslash bA$ 的闭子簇，且在 bA附近没有奇点。若可选取如上的邻域 $U \ni p$，使得 $\Phi(A \cap U)$ 双全纯地投影到 $\mathbb{C}^N$ 的一个适当低维复子空间中的某个强伪凸域的一部分上，则称边界 bA 在点 $p \in bA$ 处是强伪凸的。

若复空间 X 中的紧集 K 对每个点 $p \in X\backslash K$ 都存在一个定义在 X 上的全纯函数 f，满足 $|f(p)| > \sup_{x\in K} |f(x)|$，则称其为 $\mathcal{O}(X)$-凸。

下面的定理是我们的第一个主要结果；我们将在第 2 节证明它。

定理 1.1. 设 A 是复空间 X 中的一个紧子簇，其边界$\mathcal{C}^2$嵌入为强伪凸边界 bA，且内部 $A\backslash bA$是 Stein 空间。假设 $K \subset \Omega$ 是开 Stein 集 $\Omega \subset X$中的紧 $\mathcal{O}(\Omega)$-凸集，并且 $A \cap K$ 是 $\mathcal{O}(A)$-凸的，且 $K \cap bA = \emptyset$。那么 $A \cup K$ 在 X中有一个开 Stein 邻域的基本系。

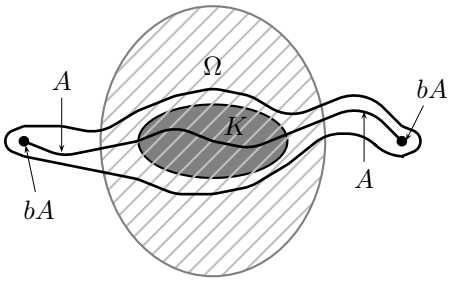


FIGURE 1. 定理 1.1

注意，定理 1.1 中的子簇 A （见图 1）至多有有限个奇点，并且至多有有限个不可约分支，这些分支的维数可能各不相同。当 A 是一条复曲线（$\dim A = 1$）时，定理 1.1 与 Drinovec-Drnovˇsek 和 Forstneriˇc 的论文 [11] 中的定理 2.1 相同。我们将把其中给出的证明改编到高维情形，同时也会借鉴 Demailly 证明 Siu 定理时的一些思路（见 [6]）。关于 $\mathbb{C}^n$ 中复曲线的 Stein 邻域，也可参见 Wermer [46] 和 Stolzenberg [45]。

若将定理 1.1 推广到 A 具有光滑弱拟凸边界 bA的情形，将会很有意思。在这种情况下，即使 A 是 Stein 流形中一个边界光滑的弱拟凸域的闭包，Stein 邻域基是否存在的问题也相当微妙。Diederich 和 Fornæss 的著名蠕虫域（见 [8]）表明，一般而言，答案可能是否定的，因此需要附加假设。关于这方面的结果，参见 Diederich 和 Fornæss [9], 、Bedford 和 Fornæss [3], 、Sibony

[39, 40], Stensønes [44], Forstneriˇc 和 Laurent-Thi´ebaut [16] 等人的论文。对于这类嵌入域在高维复流形中是否存在 Stein 邻域，几乎似乎一无所知。

在复流形的子流形上或其附近求解复解析问题时，管状 Stein 邻域往往很有用；这类邻域是开 Stein 邻域，并且与全纯向量丛中零截面的邻域双全纯等价（精确定义见第 3 节）。我们证明，在任意复流形中以 $\mathcal{C}^2$-边界全纯嵌入的相对紧强伪凸域存在由这类邻域构成的基。具体来说，设 D 是 Stein 流形 S 中一个具有 $\mathcal{C}^2$-边界的相对紧强伪凸域；这意味着存在一个严格多重次调和函数 $\mathcal{C}^2$ $\rho\colon\ U \to \mathbb{R}$，定义在包含 $\overline{D}$ 的开集 $U \subset S$ 上，使得对每个 $z \in bD = \{\rho = 0\}$，$D = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}$ 且 $d\rho(z) \neq 0$。

以下结果将在第 3 节中证明（见定理 3.4）。

定理 1.2. 设 D 是一个带有$\mathcal{C}^2$边界的相对紧强伪凸域，位于 Stein 流形 S中；设 X 是一个复流形。假设 $f\colon \overline{D} \hookrightarrow X$ 是一个 $\mathcal{C}^2$嵌入，且在 D上全纯。那么存在一个全纯向量丛 $\pi\colon\ \theta \to U_{\overline{D}}$，定义在 S 中包含 $\overline{D}$ 的某个开邻域 $U_{\overline{D}}$ 上，使得 $A = f(\overline{D})$ 在 X 中有一组开 Stein 邻域基，这些邻域双全纯于限制丛 $\theta|_{\overline{D}}$的零截面在 θ中的邻域。

定理 1.2 在两种特殊情形下已为人所知：当 S 是开黎曼曲面时（见 [11, 定理 1.7]）；以及当 X 是全纯浸没$h\colon\ X \to S$ 的全空间，且 $f\colon\ \overline{D} \to X$ 是 h 的连续截面，并在 D上全纯时（见 [15, 定理 1.1]）。后一结果通过全纯喷流方法证明，只需 f 在边界上连续即可。对于本文讨论的一般情形，定理 1.2 中较强的假设可由以下例子说明其必要性（见 [15, 例 5.4]）：

存在一个光滑单射 f，将 $\overline{\mathbb{B}}$ 中的闭单位球 $\mathbb{C}^5$ 映入 $\mathbb{C}^8$，且其在开单位球 $\mathbb{B}$ 上是全纯嵌入，并满足 $f(\overline{\mathbb{B}})$ 不存在 Stein 邻域基。

定理 1.2 中的丛 θ 本质上是 X 中 A 的法丛。若此丛是平凡的，则 [11] 中给出的黎曼曲面情形的证明无需实质性修改即可适用，并给出 $\overline{D}$ 的一组开 Stein 邻域基，这些邻域与 $S \times \mathbb{C}^m$ 中的区域双全纯，其中 $m = \dim X - \dim S$。另一方面，若 X 中 A 的法丛非平凡，我们则采用一种略有不同的构造（见下文命题 3.1）。

定理 1.2 使我们能够证明以下逼近结果。

推论 1.3. 设 X 和 Y 为复流形，且 $A \subset X$ 如定理 1.2 所述。则每个连续映射 $g\colon\ A \to Y$，只要其在 A 的内部 $A \backslash bA$ 上全纯，就可以在 A 上一致地由从 A 的开邻域到 Y 的全纯映射逼近。

推论 1.3 是第 4 节中定理 4.1 的一个特例。一般而言，推论 1.3 中逼近映射的定义区域会逐渐缩小至 A；只有对于某一特殊类别的目标流形 Y（即满足 Oka 性质的流形，参见

[13]），才能得到一列从固定邻域A 到 Y的逼近映射。

2. Stein neighborhood basis

本节证明定理 1.1。

我们先介绍一些预备知识。给定复流形 X 上的一个 $\mathcal{C}^2$-函数 u，我们在复化切丛$\mathbb{C}TX = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} TX$ 上定义一个厄米度量。在X 上的一组局部全纯坐标 $z = (z_1, \dots, z_n)$ 中，定义如下:

$$H(u)_z = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\, \mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}\bar{z}_k.$$

该定义与全纯坐标的选取无关。 u 的 Levi 形式定义为

$$\mathcal{L}_u(z;\xi) = \left\langle H(u)_z, \xi\otimes\bar{\xi}\right\rangle = \left\langle \partial\overline{\partial} u(z), \xi\wedge\bar{\xi}\right\rangle, \quad \xi \in T^{1,0}_z X,$$

其中 $T^{1,}{}^{0}_{z}X$ 是底层近复结构算子 J 在 $\mathbb{C}TX$上的特征值 i 所对应的特征子空间。在局部坐标中，我们有

$$\mathcal{L}_u(z;\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\, \xi_j \overline{\xi}_k, \quad \xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T^{1,0}_z X.$$

函数 u 是严格多重次调和的，当且仅当 $H(u)$ 是 X 上的正定厄米度量；而这又当且仅当 $\mathcal{L}_u$ 是正定厄米二次型。

回忆一下，在复空间 X （带有奇点）上定义的函数 u 称为严格多重次调和的，如果存在由开集 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 覆盖 X，以及全纯嵌入 $Z_\lambda\colon U_\lambda \to U'_\lambda \subset \mathbb{C}^N$，$\lambda \in I$，其中 $Z_\lambda(U_\lambda)$ 是区域 $U'_\lambda \subset \mathbb{C}^N$ 中的闭复子簇，使得 $(u\circ Z_\lambda^{-1})|_{Z_\lambda(U_\lambda)}$可以延拓到 U'_λ，且该延拓是严格多重次调和的。严格多重次调和性的概念既不依赖于覆盖的选取，也不依赖于嵌入 $Z_\lambda, \lambda \in I$。

设 A 如定理 1.1 所述。为简单起见，我们假设 A 的纯维数为 n，不过同一证明也适用于具有不同维数的不可约分支的情形。

A 的条件意味着，对于每个点 $p \in bA$，都存在 p 的一个开 Stein 邻域 $U_p \subset X$，满足 $U_p \cap K = \emptyset$，以及一个全纯嵌入$Z_p = (z, w)\colon U_p \to \mathbb{C}^{n+n_p}$，使得 $Z_p(U_p)$ 是多圆盘的一个闭复子簇

$$U'_p = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+n_p} \mid |z_1|, \dots, |z_n|, |w_1|, \dots, |w_{n_p}| < 1\} = \Delta^{n+n_p},$$

其中 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 且 $w = (w_1, \cdots w_{n_p}) \in \mathbb{C}^{n_p}$，满足

$$Z_p(A\cap U_p) = \{(z,w) \in U'_p \mid z \in \Gamma_p,\ w = g_p(z)\}. \tag{2.1}$$

这里我们用以下符号表示

$$\Gamma_p = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|, \dots, |z_n| < 1, h_p(z) \le 0\} \tag{2.2}$$

一个具有内部的连通凸集

$$\Gamma_p \backslash b\Gamma_p = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|, \dots, |z_n| < 1, h_p(z) < 0\}, \tag{2.3}$$

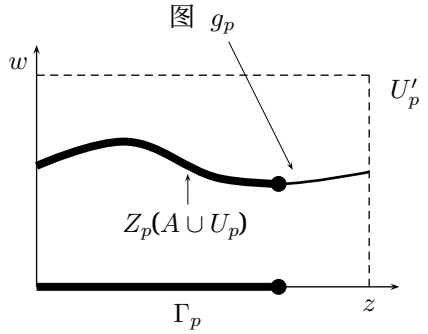


FIGURE 2. 集合 Γ_p 和 $Z_p(A \cap U_p)$

其中 h_p 是一个 $\mathcal{C}^2$ 严格凸实函数（其$h_j \neq 0$实 Hessian 矩阵为正），且 $\mathrm{d}h_j \neq 0$, 而 g_p: $\Delta^n \to \Delta^{n_p}$ 是一个 $\mathcal{C}^2$-映射，在 Γ_p的内部全纯（参见图 2）。

我们选取更小的开集 V_p 和 V'_p，使得 $V_p \Subset V'_p \Subset U_p$ 且满足 $p \in V_p$。由于 bA 是紧致的，我们可以用有限多个上述描述的集合 V_1、.....、V_m 覆盖 bA。令 Z_j、g_j 和 h_j 为相应的映射，并令 U_j、V'_j U'_j和 Γ_j 为所有 $j \in \{1, \ldots, m\}$对应的集合。对于每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$，我们定义

$$\phi_j(x) \;=\; w(x) - g_j\big(z(x)\big), \quad x \in U_j, \tag{2.4}$$

$$\Lambda_j \;=\; \{x \in U_j \colon z(x) \in \Gamma_j\}, \tag{2.5}$$

$$\Lambda'_j \;=\; (V_j \cap \Lambda_j) \setminus \bigcup_{i=1, i\neq j}^{m} (V_i \setminus \Lambda_i). \tag{2.6}$$

映射 ϕ_j 以及集合 Λ_j 和 Λ'_j 在其边界 $bA \cap U_j$ 的邻域内局部描述子簇 $A \subset X$（见图 3）。

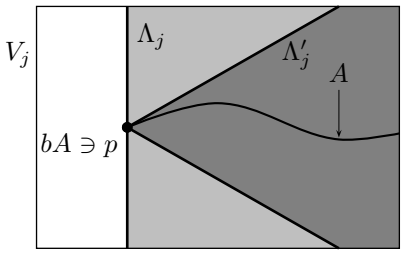


FIGURE 3. 集合 Λ_j 和 Λ'_j

当 $\dim A = 1$时，bA 的每个连通分支都是 $\mathcal{C}^2$ 类的闭 Jordan 曲线，它具有一个开 Stein 邻域（见 [11, 引理 2.2]）；在这种情况下，我们可以在边界 bA 周围全局地选取 Λ_j 和 ϕ_j。当 $\dim A > 1$时，这样的 Stein 邻域显然不存在，因此只能按照上述方式在局部进行。

我们再选取开集 $V_{m+1}, \dots, V_N$ 以及稍大的开集 $U_{m+1}, \dots, U_N$（$V_i \Subset U_i$），它们位于 X 中，且其闭包不与任意 $j \in \{1, \dots m\}$ 的集合 $U_j \backslash \Lambda'_j$ 相交，并且满足

$$A \cup K \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_j.$$

通过将集合 $V_j \subset U_j$ 选得足够小，我们得到全纯映射 $\phi_j \colon U_j \to \mathbb{C}^{n_j}$，其分量在 U_j 的每一点都生成 A 的理想层。（若对某个 $j \in \{m+1, \dots, N\}$ 有 $U_j \cap A = \emptyset$，则我们取 $n_j = 1$ 和 $\phi_j(x) = 1$，对每个 $x \in U_j$ 均如此。）为使记号一致，我们令 $\Lambda_j = U_j$ 表示 $j = m+1, \dots, N$。

下面是引理 2.5]；我们回顾其证明，因为其中的一些设定稍后会用到。

命题 2.1. 给定一个紧复子簇 $A \subset X$，其具有嵌入的 $\mathcal{C}^2$ 强伪凸边界 bA 和 Stein 内部 $A \backslash bA$，则存在一个 $\mathcal{C}^2$-函数 $\rho_2 \colon X \to \mathbb{R}$，它在 X 中 A 的某个开邻域内是严格多重次调和的。

证明。关于 A 的条件表明，存在严格多重次调和有界 $\mathcal{C}^2$ 穷竭函数 $\rho_1 \colon A \to (-\infty, 0]$，其中 $\rho_1|_{bA} = 0$。

对于 $j \in \{1, \dots, m\}$，令 $Z_j \colon U_j \to U'_j, \Gamma_j, \Lambda_j$ 和 ϕ_j 如上。记 $\psi'_j \colon \Gamma_j \times \mathbb{C}^{n_j} \to \mathbb{R}$ 为唯一的、与第二个变量 $w \in \mathbb{C}^{n_j}$ 无关且在 $A \cap U_j$ 上满足 $\rho_1 = \psi'_j \circ Z_j$ 的函数。我们可以将 ψ'_j 延拓为一个 $\mathcal{C}^2$-函数 $\psi'_j \colon U'_j \to \mathbb{R}$，使其与变量 w 无关，并令

$$\psi_j = \psi'_j \circ Z_j \colon U_j \to \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

由于 $\psi_j|_{A \cap U_j} = \rho_1$ 是严格多重次调和的，存在一个包含 Γ_j 的开集 $\Gamma_j \subset \mathbb{C}^n$，使得 ψ_j 在该开集内是多重次调和的

$$\widetilde{U}_j = \{x \in U_j \mid z(x) \in \widetilde{\Gamma}_j\}. \tag{2.8}$$

对于 $j \in \{m+1, \dots, N\}$，以类似的方式，我们得到一个严格多重次调和的 $\mathcal{C}^2$-函数 $\psi_j \colon U_j \to \mathbb{R}$，它延拓了 $\rho_1|_{A \cap U_j}$。（为证明起见，我们无需考虑与 A 不相交的集合 U_j。）

现在我们采用定理 4] 的证明中的一个论证。设 $\{\vartheta_j\}_{j=1}^N$ 是 X 中 A 的某个邻域上的光滑单位分解，对每个 j 都有 $\operatorname{supp} \vartheta_j \subset U_j$。我们固定一个数 $\epsilon > 0$，并令

$$\rho_2(x) = \sum_{j=1}^{N} \vartheta_j(x) \big(\psi_j(x) + \epsilon^3 \log\big(1 + \epsilon^{-4} |\phi_j(x)|^2\big)\big).$$

可以验证，只要将 $\epsilon > 0$ 取得足够小，ρ_2 就在 X 中 A 的某个邻域内严格多重次调和。事实上，由于函数 ϕ_j 在 $U_j \cap A$ 上为零，我们有

$$i\partial\bar{\partial}\epsilon^3 \log\big(1 + \epsilon^{-4}|\phi_j|^2\big) = \epsilon^{-1} i\partial\bar{\partial}|\phi_j|^2$$

在 $U_j \cap A_{\mathrm{reg}}$ 上。因此，ρ_2 的 Levi 形式在 A 上沿着垂直于 A 的方向正定。由于对于 $x \in A$，我们有 $\rho_2(x) = \sum_j \vartheta_j(x)\psi_j(x) = \rho_1(x)$，因此 ρ_2 在 A 上的 Levi 形式沿着切于 A 的方向也正定。□

为求完整起见，我们还回顾一下 [7, 引理 5.18。]，该引理将在下文命题 2.4 的证明中用到。

引理 2.2. 设 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ 是一个非负光滑函数，其支集包含于 $[-1,1]$，且满足 $\int_{\mathbb{R}} \theta(s)\mathrm{d}s = 1$ 和 $\int_{\mathbb{R}} s\theta(s)\mathrm{d}s = 0$。对于任意的 $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p) \in (0,\infty)^p$, $p \in \mathbb{N}$，正则化最大值函数

$$\mathrm{rmax}_\eta(t_1,\ldots,t_p) = \int_{\mathbb{R}^n} \max(t_1+s_1,\ldots,t_p+s_p) \prod_{1\le j\le n} \theta\left(\frac{s_j}{\eta_j}\right) ds_1 \ldots ds_p$$

满足以下性质：

(1) $\mathrm{rmax}_\eta(t_1,\ldots,t_p)$ 关于所有变量均单调不减，在$\mathbb{R}^n$上光滑且凸；(2) $\max(t_1,\ldots,t_p) \le \mathrm{rmax}_\eta(t_1,\ldots,t_p) \le \max(t_1+\eta_1,\ldots,t_p+\eta_p)$；(3) 若满足 $t_j + \eta_j \le \max^{k\neq j}(t_k - \eta_k)$，则 $\mathrm{rmax}_\eta(t_1,\ldots,t_p) = \mathrm{rmax}_{(\eta_1,\ldots,\hat{\eta_j},\ldots,\eta_p)}(t_1,\ldots,\hat{t_j},\ldots,t_p)$；(4) 对所有 $a \in \mathbb{R}$，$\mathrm{rmax}_\eta(t_1+a,\ldots,t_p+a) = \mathrm{rmax}_\eta(t_1,\ldots,t_p) + a$；(5) 若 $u_1,\ldots,u_p$ 在 X 上是多重次调和的，且对于连续 Hermite 型形式 γ_z（定义在 T^1上），满足 $\mathcal{L}_{u_j}(z;\xi) \ge \gamma_z(\xi)$，则 $u = \mathrm{rmax}_\eta(u_1,\ldots,u_p)$ 是多重次调和的，并满足 $\mathcal{L}_u(z;\xi) \ge \gamma_z(\xi)$。

注意，当所有 η_j $(1 \le j \le p)$ 趋近于 0 时，带有 $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_p)$ 的正则化最大值函数可以任意接近通常的最大值。

证明。变量替换 $s_j \mapsto s_j - t_j$ 表明 rmax_η 是光滑的。除(5)之外，所有性质都直接由定义推出。由于 rmax_η 是非递减且凸的，$\mathrm{rmax}_\eta(u_1,\ldots,u_p)$ 是多重次调和的。固定一点 $z_0 \in X$ 和 $\epsilon > 0$。所有函数

$$u_j'(z) = u_j(z) - \gamma_{z_0}(z - z_0) + \epsilon|z - z_0|^2$$

在 z_0 附近都是多重次调和的，从而可得

$$\mathrm{rmax}_\eta\big(u_1'(z),\ldots,u_p'(z)\big) = u(z) - \gamma_{z_0}(z-z_0) + \epsilon|z-z_0|^2$$

在 z_0 附近也同样是多重次调和的。由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，(5) 得证。 □

我们注意到，引理 2.2 中结论(5)的估计同样成立，即使 $u_1,\ldots,u_p$ 不一定是多重次调和的，而只满足所给出的估计。稍后在命题 2.4 中，对于 Levi 形式具有有界负部的函数，我们将使用这一事实。

现在回顾 [11, 引理 2.4]，并简述其证明，详细内容参见 [11, 13]。

引理 2.3. 设 $U \subset X$ 是一个包含 $A \cup K$的开集，其中 A 和 K 与定理 1.1 中的相同。那么存在 W 的一个邻域 $A \cup K$，它位于 X 中且满足 $\overline{W} \subset U$；还存在一个严格多重次调和的 $\mathcal{C}^2$-函数 $\rho\colon \overline{W} \to \mathbb{R}$，使得 $\rho > 0$ 在 bW 上成立，并且$\rho < 0$ 在 K上成立。

证明。利用 $\mathcal{O}$-凸性性质，我们可以构造光滑函数 $\rho_1, \widetilde{\rho}_0\colon X \to \mathbb{R}$，使其具有以下性质。限制函数$\widetilde{\rho}_0|_A$ 和 $\rho_1|_A$ 是严格多重次调和有界穷竭函数，而 ρ_1 是严格

多重次调和函数，定义在 $U \cap \Omega$ 中 K 的紧邻域 K' 上，其中 $K' \cap A \subset A \backslash bA$。我们还有

$$\widetilde{\rho}_0 = \rho_1 \text{ on } \overline{\Omega}_1, \quad \widetilde{\rho}_0 < 0 \text{ on } K, \quad \widetilde{\rho}_0 > 0 \text{ on } \Omega \backslash \Omega_1,$$

$$\rho_1 \geq \widetilde{\rho}_0 > 0 \text{ on } A \backslash \overline{\Omega}_1, \quad \rho_1 > \widetilde{\rho} + 1 \text{ on } A \backslash \overline{\Omega}_2, \quad \rho_1|_{bA} = c_1 > 2$$

对于某个常数 $c_1 > 2$ 以及 Ω 中的开集 Ω_1 和 Ω_2，并且满足 $K \subset \Omega_1 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset K'$。

我们利用命题 2.1，在 A 的一个邻域内得到一个 $\mathcal{C}^2$ 严格多重次调和函数 ρ_2，并且满足 $\rho_1|_A = \rho_2|_A$。接下来我们令

$$\rho = \operatorname{rmax}(\widetilde{\rho}_0, \rho_2 - 1),$$

其中 rmax 是一个正则化最大值（见引理 2.2）。我们注意到，存在集合 $A \cup \Omega_1$ 的一个紧邻域 $\overline{W} \subset U$，使得在其中一个函数在 $\overline{W}$ 内的定义域耗尽之前，另一个函数更大，因而接替前者。由此可知，ρ 在 $\overline{W}$ 上定义良好且光滑。由于在 Ω_1，上 $\rho = \widetilde{\rho}_0$，我们在 K 上有 $\rho < 0$。此外，由于在 $\Omega \backslash \Omega_1$ 上 $\widetilde{\rho}_0 > 0$，且在 $A \backslash \Omega_1$，上 $\rho_1 \geq \widetilde{\rho}_0 \succ -0$，我们看到，将 W 在 $A \cup \Omega_1$ 周围缩小后，可得到在 bW 上 $\rho > 0$。□

取一个开集 $V \subset X$，使得 $A \cup K \subset V \Subset \bigcup_{j=1}^{N} V_j$，并令

$$\Lambda = \bigcup_{j=m+1}^{N} (V_j \cap \overline{V}) \cup \bigcup_{j=1}^{m} (\Lambda'_j \cap \overline{V}). \tag{2.9}$$

回顾一下，本节开头定义的映射 ϕ_j 对每个 $j \in \{1, \ldots, N\}$ 都在 Λ_j 上全纯，因此，对所有 j，ϕ_j 在 $V_j \cap \Lambda$ 上全纯。

与 [11] 中一样，我们选取光滑函数 $\tau_j \colon V_j \to \mathbb{R}$，它们在 bV_j 处趋于 $-\infty$。对每个 $\delta \in (0, 1]$，我们令

$$\begin{aligned} v_{\delta,j}(x) &= \log\bigl(\delta + |\phi_j(x)|^2\bigr) + \tau_j(x), \quad x \in V_j, \\ v_\delta(x) &= \operatorname{rmax}_\eta(\ldots, v_{\delta,j}(x), \ldots), \end{aligned}$$

其中，正则化最大值（见引理 2.2）取遍所有满足 $x \in V_j$ 的指标 $j \in \{1, \ldots, N\}$。

下面的命题对于定理 1.1 的证明至关重要。

命题 2.4. 如上所定义的函数 $v_\delta \colon V_\delta \to \mathbb{R}$ $(\delta \in (0, 1])$ 属于类 $\mathcal{C}^2$，并且在集合 Λ 的一个开邻域 V_δ 上定义。此外，$v_0(x) = \lim_{\delta \to 0} v_\delta(x)$ 是 $\Lambda \backslash A$ 上的连续函数，在 $V \backslash \Lambda$ 的内部属于类 $\mathcal{C}^2$，且满足 $\{v_0 = -\infty\} = A$。存在一个常数 $M > -\infty$，使得

$$i\partial\bar{\partial} v_\delta(x) > M, \qquad x \in \Lambda,\ 0 < \delta \leq 1.$$

证明。我们将引理 2.3] 的证明 [11, （其中借鉴了 [6] 的思路）改用于我们的情形。令 ϕ_j 为本节开头定义的函数（特别参见 (2.4)）。我们先证明，对于 j、$k \in \{1, \ldots, N\}$，商 $\frac{|\phi_k|}{|\phi_j|}$ 在子簇 A 附近其定义域的交集上有界。

我们首先考虑在 A 的内部、远离 bA 的这些商。A 的理想层的生成元 ϕ_j 和 ϕ_k 在集合 $\Lambda_j \cap \Lambda_k$ 的内部可以用彼此表示，因此 $\frac{|\phi_k|}{|\phi_j|}$ 在 $\Lambda_j \cap \Lambda_k$ 内部的任意相对紧子集上都有界。于是，商 $\frac{|\phi_k|}{|\phi_j|}$ 远离

集合 $(\Lambda_j \cap \overline{V}_j) \cap (\Lambda_k \cap \overline{V}_k)$ 上的 bA 是一致有界的。还请记住，对于 $k \in \{m+1, \dots, N\}$，$\Lambda_k \cap \overline{V}_k = \overline{V}_k$。

接下来，我们考虑子簇 A 的边界bA附近，j 关于 $k \in \{1, \dots, m\}$ 的表达式 $\frac{|\phi_k|^2}{|\phi_j|^2}$。回想一下，对于任意 $j \in \{1, \dots, m\}$，映射 $\phi_j \colon U_j \to \Delta^{n_j}$由 $\phi_j(x) = w(x) - g_j(z(x))$ 定义，其中 $g_j = (g_j^1, \dots, g_j^{n_j}) \colon \Delta^n \to \Delta^{n_j}$是一个 $\mathcal{C}^2$-映射，在 Γ_j 的内部全纯；而 $Z_j = (z, w) \colon U_j \to U_j' \subset \mathbb{C}^{n+n_j}\tilde{}$是一个全纯嵌入。令 $\phi_j(z, w) = w - g_j(z)$；那么

$$\big|\widetilde{\phi}_j(z, w)\big|^2 = \sum_{p=1}^{n_j} \big(w_p - g_j^p(z)\big)\big(\overline{w}_p - \overline{g}_j^p(z)\big).$$

此外，我们将 $l \in \{1, \dots, n\}$ 记作 $z_l = y_l + iy_{l+n}$，将$p \in \{1, \dots, n_j\}$记作 $w_p = t_p + it_{p+n_j}$，其中 $y = (y_1, \dots, y_{2n})$ 和 $t = (t_1, \dots, t_{2n_j})$ 分别是 $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ 和 $\mathbb{C}^{n_j} \approx \mathbb{R}^{2n_j}$ 上的实坐标，而 $g_j^p = u_j^p + iu_j^{p+n_j}$ 是 g_j^p 的实$\tilde{}$与虚部之和。我们写出 $|\phi_j|^2$ 在点 $(y_0, t_0) \in U_j'$ 处的泰勒展开，使得 $t_0 = g_j(y_0)$：

$$\begin{aligned}
\big|\widetilde{\phi}_j(y_0 + y, t_0 + t)\big|^2 \;=\; & \sum_{l=1}^{2n}\sum_{p=1}^{n_j}\Big(\Big(\frac{\partial u_j^p}{\partial y_l}(y_0, t_0)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_j^{p+n_j}}{\partial y_l}(y_0, t_0)\Big)^2\Big) y_l^2 \\
& + \sum_{p=1}^{2n_j} t_p^2 + \sum_{p=1}^{2n_j}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_j^p}{\partial y_l}(y_0, t_0)\frac{\partial u_j^p}{\partial y_{l+n}}(y_0, t_0) y_l y_{l+n} \\
& - \sum_{p=1}^{2n_j}\sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial u_j^p}{\partial y_l}(y_0, t_0) y_l t_p + o(2).
\end{aligned}$$

记

$$\big\langle (y, t), (y', t') \big\rangle = \sum_{l=1}^{2n} y_l y_l' + \sum_{p=1}^{2n_j} t_p t_p', \quad (y, t), (y', t') \in \mathbb{R}^{2(n+n_j)}$$

为标准实欧几里得内积，我们可以将上述泰勒展开写成如下形式

$$\begin{aligned}
\big|\widetilde{\phi}_j(y, t)\big|^2 \;=\; & \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2n_j}\Big|\Big\langle \operatorname{grad}_{(y_0, t_0)}\big(t_p - u_j^p(y, t)\big), (y - y_0, t - t_0)\Big\rangle\Big|^2 \\
& + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2n}\sum_{p=1}^{n_j}\Big(\Big(\frac{\partial u_j^p}{\partial y_l}(y_0, t_0)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_j^{p+n_j}}{\partial y_l}(y_0, t_0)\Big)^2\Big)(y_l - y_{0l})^2 \\
& + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2n_j}(t_p - t_{0p})^2 + o(2).
\end{aligned}$$

若 $o\big(|(y - y_0, t - t_0)|^2\big)$ 表示 $|\phi_j|^2$ 在点 (y_0, t_0) 处截至$\tilde{}$二阶项的泰勒展开余项，则对任意常数 $\epsilon > 0$，我们都可以选取一个常数 $r > 0$，使得估计式

$$\left|\frac{o\big(|(y - y_0, t - t_0)|^2\big)}{\big|(y - y_0, t - t_0)\big|^2}\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.10}$$

对所有点对 $(y_0,t_0)\in Z_j(A\cap V_j')$ 和 $(y,t)\in B\big((y_0,t_0)\ r\big)\Subset U_j'$均成立，其中$B\big((y_0,t_0)\ r\big)$ 是 $\mathbb{C}^{n+n_j}$ 中以 (y_0,t_0) 为中心、半径为 r 的球。

显然，$\operatorname{grad}(t_p-u_j^p(y,t))$以及 u_j^p 关于$p\in\{1,\dots,2n_j\}$ 的二阶及以下偏导数在 $Z_j(A\cap V_j')$上有界。因此，表达式

$$\sum_{p=1}^{2n_j}\left|\left\langle \operatorname{grad}_{(y_0,t_0)}\big(t_p-u_j^p(y,t)\big),\frac{(y-y_0,t-t_0)}{\big|(y_0,t_0)\big|}\right\rangle\right|^2 \tag{2.11}$$

and

$$\frac{\sum_{l=1}^{2n}\sum_{p=1}^{n_j}\Big(\big(\frac{\partial u_j^p}{\partial y_l}(y_0,t_0)\big)^2+\big(\frac{\partial u_j^{p+n_j}}{\partial y_l}(y_0,t_0)\big)^2\Big)(y_l-y_{0l})^2+\sum_{p=1}^{2n_j}(t_p-t_{0p})^2}{|(y-y_0,t-t_0)|^2}$$

对于每个$(y_0,t_0)\in Z_j(A\cap V_j')$以及每个$(y,t)\in B\big((y_0,t_0)\ r\big)$，都一致地有上界。因此，若 $r>0$ 取值足够小，

$$\frac{\big|\phi_j(y,t)\big|^2}{\big|(y-y_0,t-t_0)\big|^2} \tag{2.12}$$

对于所有$(y_0,t_0)\in Z_j(A\cap V_j')$以及每个$(y,t)\in B((y_0,t_0)\ r)\subset U_j'$，都一致地有上界。

令 ν_j为$T\mathbb{C}^{n+n_j}|_{Z_j(A\cap V_j')}\approx Z_j(A\cap V_j')\times\mathbb{C}^{n+n_j}$ 中 $Z_j(A\cap V_j')$的法丛，并赋予标准度量。由于ϕ_j 各连通分支的梯度生成了 $Z_j(A\cap V_j')$的法丛 ν_j，对于满足 $y=y_0$的任意点对$(y_0,t_0)\in Z_j(A\cap V_j')$和$(y,t)\in U_j'$，表达式(2.11)均为正。令

$$T_j=\{(y,t)\in U_j'\mid y\in z(A\cap\overline{V}_j),\quad \big|t-g_j(y)\big|<r\}.$$

显然，对于每个 $(y_0,t_0)\in Z_j(A\cap\overline{V}_j)$ 及所有相应的 $(y,t)\in T_j$ with $y=y_0$，表达式 (2.11) 都大于某个较小的正常数 ϵ_0。此外，估计式 (2.10) 蕴含，对于所有 $(y_0,t_0)\in Z_j(A\cap\overline{V}_j)$ 及相应的 $(y,t)\in T_j(y=y_0)$，表达式 (2.12) 都大于$\frac{\epsilon_0}{2}$，前提是r 取得足够小。我们还可以假设常数 r 与 $j\in\{1,\dots,m\}$ 无关，因此上述结论对每个 j 都成立。

设 (y',t') 是 U_k' 上的实局部坐标，设 φ 是 $Z_k(U_k)$ 与 $Z_j(U_j)$ 之间的双全纯过渡映射。通过令 $r>0$ 取得足够小的值，我们可以使表达式

$$\frac{\big|\varphi\big(y(x),t(x)\big)-\varphi\big(y(x_0),t(x_0)\big)\big|}{\big|\big(y(x)-y(x_0),t(x)-t(x_0)\big)\big|}=\frac{\big|\big(y'(x),t'(x)\big)-\big(y'(x_0),t'(x_0)\big)\big|}{\big|\big(y(x)-y(x_0),t(x)-t(x_0)\big)\big|} \tag{2.13}$$

对于每一对满足$\big(y(x)\ t(x)\big)\in B\big(\big(y(x_0)\ t(x_0)\big),\ r\big)$的点 $x_0\in A\cap V_j'\cap V_k'$和 $x\in X$，均一致有界。

根据（2.12），这些商

$$\frac{\big|\widetilde{\phi}_k\big|^2\big(y'(x),t'(x)\big)}{\big|\big(y'(x)-y'(x_0),t'(x)-t'(x_0)\big)\big|^2}\quad\text{and}\quad\frac{\big|\widetilde{\phi}_j\big|^2\big(y(x),t(x)\big)}{\big|\big(y(x)-y(x_0),t(x)-t(x_0)\big)\big|^2}$$

都由某些正数常数一致地从下方和上方界定，前提是 $x_0\in A\cap V_j'\cap V_k'$和 $x\in Z_j^{-1}(T_j)\cap Z_k^{-1}(T_k)$ 满足 $y(x)=y(x_0)$、$y'(x)=y'(x_0)$。由于表达式 (2.13) 相对于此类

x_0 和 x，我们得出商 $\frac{|\phi_k|^2}{|\phi_j|^2}$ 在 $bA\cap\overline{V}_j\cap\overline{V}_k$ 于 $\Lambda_j\cap\Lambda_k\cap\overline{V}_j\cap\overline{V}_k$ 中的邻域 $Z_j^{-1}(T_j)\cap Z_k^{-1}(T_k)$ 内有界，因此它在 $\Lambda_j\cap\Lambda_k\cap\overline{V}_j\cap\overline{V}_k$ 上也有界。由此可知，商

$$\frac{\delta+|\phi_k|^2}{\delta+|\phi_j|^2}$$

相对于 $\delta\in(0,1]$，在 $\Lambda_j\cap\Lambda_k\cap\overline{V}_j\cap\overline{V}_k$ 上一致有界，界为某个常数 $M'>0$。

由于 τ_j 在 bV_j 上趋于 $-\infty$，我们断言，对于充分接近 bV_j 的 x，值 $\tau_j(x)$ 和 $\rho_j(x)$ 分别不会对值 $v_\delta(x)$ 产生贡献，并且这一性质相对于 $\delta\in(0,1]$ 是一致的。首先，对每个 $j\in\{1,\dots,N\}$，我们选取稍小的开集 $W_j\Subset V_j$，使得 $\Lambda\subset\overline{V}\subset\cup_{j=1}^N W_j$。显然，存在一个常数 $M_1>-\infty$，使得对所有 j，$\tau_j>M_1$ 在 W_j 上成立。接下来，我们选取较大的开集 W_j'，使得 $W_j\Subset W_j'\Subset V_j$，并且对所有 $j\in\{1,\dots,N\}$，$\tau_j<M_1-M'-2\eta$ 在 $V_j\backslash W_j'$ 上成立。对于任意 $x\in\Lambda\cap W_k\cap(V_j\backslash W_j')$ 和 $\delta\in(0,1]$，我们于是得到

$$v_{\delta,j}(x)-v_{\delta,k}(x)=\log\left(\frac{\delta+|\phi_j|^2}{\delta+|\phi_k|^2}\right)+\tau_j(x)-\tau_k(x)<-2\eta. \tag{2.14}$$

由连续性可知，对于每个 $\delta\in(0,1]$，都存在 Λ 的一个邻域 $V_\delta\Subset\cup_{j=1}^N W_j$，使得对于所有 $k,j\in\{1,\dots,N\}$，在 $V_\delta\cap(\overline{V}_j\cap\overline{V}_k)$ 上都有 $\frac{\delta+|\phi_j|^2}{\delta+|\phi_k|^2}<M'$。因此，上述不等式 (2.14) 对每个 $x\in V_\delta\cap W_k\cap(V_j\backslash W_j')$ 仍然成立。对于任意点 $x\in\cup_{j=1}^N W_j$，用 $J_x\subset\{1,\dots,N\}$ 表示满足 $x\in W_j'$ 的所有指标 j 构成的非空集合。由引理 2.2 (3) 可立即得出，对于每个 $x\in V_\delta$，只有满足 $j\in J_x$ 的值 $v_{\delta,j}(x)$ 才可能对值 $v_\delta(x)$ 有贡献，这就证明了该断言。

此外，根据连续性，对于每个 $x\in V_\delta\cap W_k\cap(V_j\backslash W_j')$，都存在一个足够小的邻域 $V_{x,\,\delta}$，它以 x 为中心且包含于 V_δ 中，并且使不等式 (2.14) 对每个 $y\in V_{x,\,\delta}$ 都成立。因此，只有满足 $j\in J_x$ 的值 $v_{\delta,\,j}(y)$ 才可能对 $y\in V_{x,\,\delta}$ 时的 $v_\delta(y)$ 有贡献。于是 v_δ 在 V_δ 上属于 $\mathcal{C}^2$ 类。

请记住，对于 $x\in V_j\cap\Lambda$，我们有 $v_{\delta,\,j}(x)\le v_{\delta',\,j}(x)$，其中 $0<\delta\le\delta'\le 1$。由于集合 J_x 与 $\delta\in$ 无关（$0,1],$，引理 2.2 (1) 意味着，当 δ 趋近于 0 时，v_δ 在 Λ 上递减。注意，$v_0(x)=\lim_{\delta\to0}v_\delta(x)$ 的收敛关于 $\delta\in(0,1]$ 在 $\Lambda\backslash A$ 上的收敛是局部一致的，并且 $\{v_0=-\infty\}=A$。

由于映射 ϕ_j 在 Λ_j 上是全纯的，我们在 Λ_j 上有估计 $i\partial\bar\partial\log\big(\delta+|\phi_j|^2\big)\ge0$，从而

$$i\partial\bar\partial v_{\delta,j}(x)=i\partial\bar\partial\log\big(\delta+|\phi_j(x)|^2\big)+i\partial\bar\partial\tau_j(x)\ge i\partial\bar\partial\tau_j(x),\qquad x\in\Lambda_j.$$

显然，$i\partial\partial\tau_j$ 在集合 W_j' 上对每个 $j\in\{1,\dots,N\}$ 都由某个常数 $M>-\infty$ 从下方有界。前面各段中证明的结论以及引理 2.2¯(4)现在表明，M 是 $i\partial\partial v_\delta$ 在集合 Λ 上的一个一致下界。然而，¯由于对于 $\delta\in(0,1]$ 处的 $i\partial\bar\partial\big(\log\big(\delta+|\phi_j(x)|^2\big)\big)$）我们没有一致的下界，因此无法控制集合 Λ 之外的 $i\partial\partial v_\delta$ 的下界。□

注意，在复曲线的情形下，[11] 集合 V_δ 可以选取得与 δ 无关。当 X 是复流形时，这一点也成立，因为我们可以将子簇 A 从边界处全局延拓为一个闭的 $\mathcal{C}^2$

子簇（无边界），因此我们可以应用关于子簇延拓的证明 A。

以下技术引理将在构造 A 在 X 中的邻域上的全局多重次调和函数时用到（见下文引理 2.6）。

引理 2.5. 设 $U \Subset \mathbb{C}^n$ 是一个开凸集，且 $h\colon U \to \mathbb{R}$ 是一个严格凸函数。令 $D = \{z \in U \mid h(z) < 0\} \Subset \mathbb{C}^n$，并假设 $bD \cap U = \{z \in U \mid h(z) = 0\}$，且在 U 上 $\mathrm{d}h(x) \neq 0$。那么，对于每个紧集 $L \subset \partial D \cap U$ 以及 U 中包含 L 的每个开邻域 U_L，都存在一个严格凸函数 $\widetilde{h} \leq h$ 和一个凸集 $\widetilde{D} = \{z \in U \mid \widetilde{h}(z) < 0\}$，使得 $D \cup L \subset \widetilde{D} \subset D \cup U_L$，且在 $b\widetilde{D} \cap U$ 上 $\mathrm{d}\widetilde{h} \neq 0$。

证明。令 $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(U_L)$ 为一个具有紧支集 $\widetilde{U}$ 于 U_L 的光滑非负函数，并令 $\chi > 0$ 于 L 上。对于充分小的 $\epsilon > 0$，函数 $h = h - \epsilon\chi$ 是一个 $\mathcal{C}^2$ 严格凸函数，且在任意点 $x \in b\widetilde{D} \cap U$ 处有 $\mathrm{d}\widetilde{h}(x) \neq 0$，并具有所有其他所需性质。□

当 h 是一个 $\mathcal{C}^2$ 严格多重次调和函数时，同样的论证也成立。例如，参见 [22, 推论 1.5.20]。

引理 2.6。设 A 和 K 如定理 2.1 中所述，并设 Λ 为形如 (2.9) 的集合。那么存在 X 中包含 $A \cup K$ 的一个开邻域 V，以及一个非负拟次调和函数 $\psi\colon V \to \mathbb{R}_+$，使其在 $A \cup K$ 上为零，并在 $V \setminus \Lambda$ 上为正。

证明。回忆一下，对于 $j \in \{1, \dots, m\}$，映射 $Z_j = (z, w)\colon U_j \to U_j'$ 是一个全纯嵌入，$\Gamma_j = \{h_j \leq 0\}$ 是一个凸集，其中 h_j 是一个 $\mathcal{C}^2$ 严格凸函数；而 $g_j\colon \Delta^n \to \Delta^{n_j}$ 是一个 $\mathcal{C}^2$ 映射，在 Γ_j 的内部全纯。此外，它们满足本节开头列出的性质 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)。

由引理 2.5，分别应用于 $L = z(bV_j' \cap bA)$ 和 $U_L = z(U_j \setminus \overline{V}_j)$，存在 $\widetilde{U}$ 一个 $\mathcal{C}^2$ 严格凸函数 $h_j \leq h_j$，使得 $\{h_j \leq 0\} \supset \Gamma_j$ 且 $h = h$ 于 $\widetilde{U} z(V_j)$。我们将包含 Γ_j 的 $\{h_j \leq 0\}$ 的连通分支记为 Γ_j'；于是 $\Gamma_j' \cap z(V_j) = \Gamma_j \cap z(V_j)$。

如命题 2.1 的证明中所述，我们可以构造一个 $\mathcal{C}^2$-函数 $\psi_j\colon U_j \to \mathbb{R}_+$（在该构造中用集合 Γ_j' 替换集合 Γ_j）。我们可以使用 $\widetilde{h}_j$ 得到一个 $\mathcal{C}^2$-函数 ψ_j'，其满足

$$\psi_j'(z, w) = \widetilde{h}_j(z), \quad (z, w) \in U_j',$$

它与变量 w 无关，定义在 U_j' 上，且集合 $\psi_j = \psi_j' \circ Z_j$。函数 ψ_j 因而在集合 $\Lambda_j = \{x \in U_j \mid z(x) \in \widetilde{\Gamma_j'}\}$ 在 U_j 中的邻域 U_j 内是多重次调和函数，其中集合 U_j 具有形式 (2.8)。我们还注意到 $\{\psi_j \leq 0\} = \widetilde{\Lambda_j}$。此外，我们可以假设 $\{\psi_j = 0\} = \Lambda_j$，因为我们总可以将 ψ_j 与一个光滑凸增函数 χ 复合，使得 $\chi(t) = 0$ 对于 $t \leq 0$ 成立，并且 $\widetilde{\chi}(t) > 0$ 对于 $t > 0$ 成立。通过选取足够小的集合 U_j，我们可以确保集合 $U_j \setminus (\Lambda_j \cup V_j')$ 与 V_j' 的闭包互不相交。因此，我们可以沿着 $U_j \setminus V_j'$ 并在 U_j 外将限制 $\psi_j|_{V_j' \cap \widetilde{U}_j}$ 延拓为零。由此得到一个非负的多重次调和函数 ψ_j，它在 $\Lambda_j \subset \Lambda_j$（形式如 (2.5)）上为零，并且

在集合 U_j 外。由于 $U_j \cap A \subset \Lambda_j$ 和 K 与 $U_j \backslash \Lambda_j$ 不相交，我们看到 $\widetilde{\psi}_j$ 的零点集包含 $A \cup K$。此外，由于 $\widetilde{\Lambda}_j \cap V_j = \Lambda_j \cap V_j$ 且 $\widetilde{\psi}_j$ 作为 ψ_j 在 V_j 上与 ψ_j 一致，可知 ψ_j 在 $(U_j \cap V_j)\backslash \Lambda_j$ 上为正。

选取 $A \cup K$ 的一个邻域 V，使得 $V \cap U_j \subset U_j$，并令

$$\psi = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\psi}_j \colon V \to \mathbb{R}_+.$$

该函数是多重次调和的，并且在 $A \cup K$ 上取值为零；接下来只需证明它在 $V \backslash \Lambda$ 上为正。为此，令 Λ_j' 为形如 (2.6) 的集合，并注意到

$$(V \cap V_j)\backslash \Lambda_j' = \big((V \cap V_j)\backslash \Lambda_j\big) \cup \Big((V \cap V_j) \cap \bigcup_{k \neq j} (V \cap V_k)\backslash \Lambda_k\Big).$$

由于每个 $\psi_j (j \in \{1, \ldots, m\})$ 在 $(V \cap V_j)\backslash \Lambda_j$ 上都为正，因此可知 ψ 在每个集合 $(V \cap V_j)\backslash \Lambda_j'$ 上均为正，因而在 $V \backslash \Lambda$ 上也为正。□

定理 1.1 的证明。选取引理 2.6 中的集合 V。给定集合 $A \cup K$ 的一个开邻域 U，满足 $\overline{U} \subset V$，我们必须找到一个包含于 U 中的 $A \cup K$ 的开 Stein 邻域。

利用引理 2.3，我们得到一个开集 $W \subset X$ 和一个严格多重次调和$\mathcal{C}^2$-函数 $\rho \colon \overline{W} \to \mathbb{R}$，使得 $A \cup K \subset W \Subset U$、 $\rho|_{bW} > 0$和 $\rho|_K < 0$。我们可以假设，对于某个常数 $c > 0$, $i\partial\bar{\partial}\rho \geq c > 0$ 在 $\overline{W}$ 上成立。

令 $v_\delta \colon V_\delta \to \mathbb{R}$ （ $\delta \in [0,1]$ ），表示引理 2.4 给出的函数族。因此，对于某个常数 $M > -\infty$， $i\partial\bar{\partial} v_\delta > M$ 在形如 (2.9) 的集合 $\Lambda \subset V_\delta$ 上成立。随着 δ 递减至 0, 当 $0,1]$ 时，函数 v_δ （ $\delta \in$ ）单调递减至函数 v_0 ，且 $\{v_0 = -\infty\} = A$。从所有 v_δ 中减去一个常数，可使得对每个 $\delta \in [0,1]$， $v_\delta \leq v_1 < 0$ 在 K 上成立。令

$$\rho_{\varepsilon,\delta} = \rho + \varepsilon v_\delta \colon \overline{W} \cap V_\delta \to \mathbb{R}.$$

取充分小的 $\varepsilon > 0$ ，使得 $\rho_{\varepsilon,\delta} \geq \rho_{\epsilon,0} > 0$ 在 $bW \cap \Lambda$ 上对所有$\delta \in (0,1]$, 都成立，且满足 $c + \varepsilon M > 0$。由于 $i\partial\bar{\partial} v_\delta > M$ 在 Λ上成立，因此对所有 $\delta \in (0,1]$， $\rho_{\varepsilon,\delta}$都是 $\Lambda \cap \overline{W}$上的严格多重次调和函数。令 $M' < M$为稍小一些的常数，使得 $c + \varepsilon M' > 0$ 仍然成立。由连续性可知，在 Λ的某个邻域上有$i\partial\bar{\partial} v_\delta > M'$ 。因此，将 V_δ 在 Λ周围缩小后，可设 $\rho_{\epsilon,\delta}$ 在 $\overline{W}$中集合 $\Lambda \cap \overline{W}$的某个邻域 $V_\delta \cap \overline{W}$上也严格多重次调和。

现在固定 ε ，并选取足够小的 $\delta > 0$ ，使得 $\rho_{\varepsilon,\delta}$ 在A上为负。因此， $A \cup K$ 包含于 $\rho_{\varepsilon,\delta}$ 的零次水平集内（见图4）。注意，由于 ρ 和 v_δ 在 K上均为负，因此 $\rho_{\epsilon,\delta} < 0$ 在 K上成立。在证明的其余部分，我们将 ε 和 δ保持不变。

通过添加下一段所述的快速增长的多重次调和函数 ψ ，我们将把集合 $\{\rho_{\varepsilon,\delta} \leq 0\}$ 修圆，使其充分接近 bA。事实上，我们希望零次水平集 $\{\rho_{\varepsilon,\delta} + \psi < 0\}$ 是包含于函数ρ_ε的多重次调和区域$\delta + \psi$内的相对紧子集。为了使 $A \cup K$ 处于零次水平集内， ψ 必须在 $A \cup K$上为零。

令 ψ 为引理 2.6 给出的函数；因此， ψ 在 V 上是非负多重次调和函数，在 $A \cup K$ 上取零，并且在 $V \backslash \Lambda \supset \overline{W} \backslash \Lambda$ 上为正。取

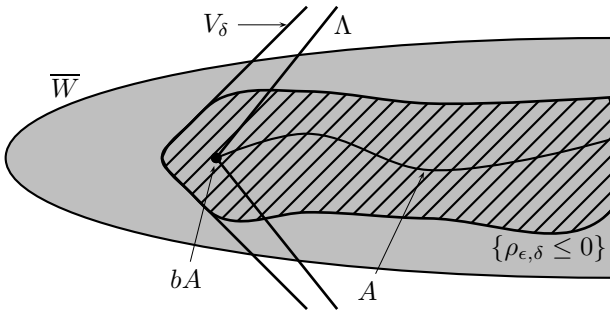


FIGURE 4. ρ_ε的零次水平集, δ

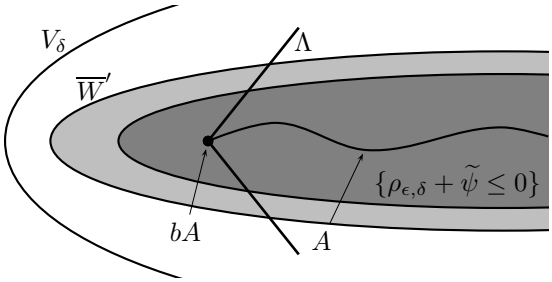
一个开集 $W' \subset W$，使得 $W' \Subset V_\delta$ 和 $bW \cap \Lambda = bW' \cap \Lambda$。由于 $\rho_{\epsilon,\ \delta} > 0$ 在 $\sim$ $bW' \cap \Lambda = bW \cap \Lambda$ 上，存在 $V \subset \overline{W'}$ 的一个邻域 $V \subset \overline{W'}$，使得 $\rho_{\epsilon,\ \delta} > 0$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ 在 V 上。由于相对紧集 $bW' \backslash V$ 的闭包与 Λ 不相交，且 ψ 在 $V \backslash \Lambda \supset \overline{W'} \backslash \Lambda$ 上为$\widetilde{}$正，因此存在一个常数 $m_1 > 0$，使得 $\psi > m_1$ 在 $bW' \backslash V$ 上。$\widetilde{}$令 M_1 为另一个常数，使得 $\rho_{\varepsilon,\ \delta} < M_1$ 在集合 $bW' \backslash V$ 上。取一个充分大的常数 $C > 0$，使得 $Cm_1 + M_1 > 0$，并令

$$\widetilde{\psi}(x) = C \cdot \psi(x), \quad x \in V.$$

$\widetilde{}$对 C 的选择意味着$\rho_{\varepsilon,\ \delta}$（$x$）$+\psi$（$x$）$> 0$ 对于 $x \in bW'$。因此，该集合

$$\omega = \{x \in W' \mid \rho_{\varepsilon,\delta}(x) + \widetilde{\psi}(x) < 0\} \Subset W'$$

$\widetilde{}$位于$\rho_{\varepsilon,\ \delta} + \psi$ 为严格多重次调和的区域内（见图5）。$\widetilde{}$由于 ψ 在 $A \cup K$ 上为零，且$\rho_{\varepsilon,\ \delta} < 0$ 在 $A \cup K$上，我们有 $A \cup K \subset \omega$。



$\sim$FIGURE 5. ρ_ε的零次水平集, $\delta + \psi$

$\widetilde{}$最后，由于$\rho_{\varepsilon,\ \delta} + \psi$ 是ω上的严格多重次调和有界穷竭函数，集合 ω 根据 Narasimhan定理 [33]（另见 [18, 34]）是Stein的。

至此，定理 1.1 的证明完成。 □

3. TUBULAR STEIN NEIGHBORHOODS

设 D 是复流形S 中具有 $\mathcal{C}^2$ 边界的相对紧域。给定整数 $r \ge 0$ 和复流形 X，我们用 $\mathcal{C}^r(\overline{D}, X)$ 表示

所有 $\mathcal{C}^r$-映射 $\overline{D}\to X$ 的集合，并用

$$\mathcal{A}^r(D,X)=\{f\in\mathcal{C}^r(\overline{D},X)\colon f|_D\in\mathcal{O}(D,X)\}$$

所有在 D 上全纯的 $\mathcal{C}^r$-映射 $\overline{D}\to X$ 的集合。

若复向量丛 $E\to\overline{D}$ 在 $\overline{D}$ 上属于 $\mathcal{C}^r$ 类，且在内部 $D=\overline{D}\backslash bD$ 上全纯，则称其为 $\mathcal{A}^r(D)$ 类。我们将底空间 $\overline{D}$ 与总空间 E 的零截面等同。

以下是本节的第一个主要结果。

命题 3.1. 设 $D\Subset S$ 是 Stein 流形 S 中边界为 $\mathcal{C}^2$ 的相对紧域，且 X 是复流形。假设 $f\colon\overline{D}\hookrightarrow X$ 是一个 $\mathcal{C}^r$-嵌入（$r\geq 2$），并且在 D 中全纯；令 ν 表示 X 中 $A=f(\overline{D})$ 的（复）法丛。那么存在

(1) S 中包含 $\overline{D}$ 的一个开邻域 $U_{\overline{D}}$，(2) 全纯向量丛 $\pi\colon\theta\to U_{\overline{D}}$，(3) 复向量丛的一个 $\mathcal{C}^{r-1}$-同构 $\tau\colon f^*\nu\to\theta|_{\overline{D}}$，其定义在 $\overline{D}$ 上且在 D 上全纯（记 θ 在 $\overline{D}$ 上的限制丛为 $\theta|_{\overline{D}}$）。(4) 零截面 $\overline{D}$ 的一个带凸纤维的开邻域 $\Omega\subset\theta$（属于限制丛 $\theta|_{\overline{D}}$），以及 (5) 一个 $\mathcal{C}^r$-微分同胚 $F\colon\Omega\to F(\Omega)\subset X$，它在 $\pi^{-1}(D)\cap\Omega$ 上全纯，并且满足 $F(\overline{D})=A$。（这里 $\overline{D}$ 再次表示 $\theta|_{\overline{D}}$的零截面。）

证明。由定理 1.1，集合 $A=f(\overline{D})$ 有一个开 Stein 邻域 $\omega\subset X$。由 Cartan 定理 A，存在全纯向量场 v_1、……、v_k，它们在 ω 上生成每一点 $x\in\omega$ 处的切空间 $T_xX\approx T_x^{(1,0)}X$。向量场 v_j 的流 φ_t^j 在 ω 中 A 的某个开相对紧邻域 ω_0 上，以及对充分小的 $t\in\mathbb{C}$，都有定义且为全纯。事实上，对于任意点 $x\in\omega$，存在一个常数 T_x，使得常微分方程 $\frac{d}{dt}\varphi_t^j(x)=v_j(\varphi_t^j(x))$ 的解 $\varphi_t^j(x)$ 在初始条件 $\varphi_0^j(x)=x$ 下，对所有满足 $|t|<T_x$ 的 $t\in\mathbb{C}$ 均存在。对于 A 的一个相对紧邻域 $\omega_0\Subset\omega$，我们可以选取一个常数 T，使得对每个 $x\in\omega_0$ 都有 $0<T<T_x$。

我们将 $f\colon\overline{D}\to X$ 扩展为一个从 $\overline{D}$ 在 S 中的某个邻域出发的 $\mathcal{C}^r$-映射，使得扩展后的映射 f 在 $\overline{D}$ 上是 $\overline{\partial}$-平坦的，阶数为 $r-1$（即，$\overline{\partial}f$ 及其导数 $D^\alpha(\overline{\partial}f)$ 在 $\overline{D}$上对 $|\alpha|\leq r-1$ 均为零）。映射

$$F(z,t_1,t_2,\dots,t_k)=\varphi_{t_1}^1\circ\cdots\varphi_{t_k}^k\circ f(z)$$

随后在 $\overline{D}\times\{0\}^k$于 $S\times\mathbb{C}^k$中的某个邻域内有良好定义。此外，F是一个 $\mathcal{C}^r$-映射，它关于变量 $(t_1,\dots,t_k)$ 全纯，并满足 $\frac{\partial F}{\partial\overline{z}}(z,t)=0$，其中 $z\in\overline{D}$。显然，我们有 $F(z,0)=f(z)$，且 $\frac{\partial F}{\partial t_j}(z,0))=v_j(F(z,0))=v_j(f(z))$。由于向量 $v_1(x)\dots,v_k(x)$ 对所有 $x\in\omega$均生成 T_xX，因此 F在 $\overline{D}\times\{0\}^k$的每一点都是淹没映射。

对于每个 $z\in\overline{D}$，我们用 Ξ_z 表示映射 $t\mapsto F(z,t)$ 在 $t=0$ 处的偏微分 $D_tF(z,t)|_{t=0}\colon T_0\mathbb{C}^k\approx\mathbb{C}^k\to T_{f(z)}X$。令 $E\subset\overline{D}\times\mathbb{C}^k$ 为纤维为

$$E_z=\{v\in\mathbb{C}^k\mid\Xi_z(v)\in T_{f(z)}A\},\quad z\in\overline{D}. \tag{3.1}$$

注意，E 属于 $\mathcal{A}^{r-1}(D)$ 类，因为 A 的切丛 TA 也属于这一类。

我们声称 E 是可补的，也就是说，存在一个 $\mathcal{A}^{r-1}(\overline{D})$ 类的复向量子丛 $\widetilde{\theta} \subset \overline{D} \times \mathbb{C}^k$，使得 $E \oplus \widetilde{\theta} = \overline{D} \times \mathbb{C}^k$。为此，考虑以下 $\mathcal{A}^{r-1}(D)$-向量丛短正合列

$$0 \to E \hookrightarrow \overline{D} \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{q} \widetilde{E} \to 0, \tag{3.2}$$

其中 $E \hookrightarrow \overline{D} \times \mathbb{C}^k$ 是一个嵌入，$\widetilde{E} = (\overline{D} \times \mathbb{C}^k)/E$ 是商丛，而 q 是商投影。接下来，考虑与之关联的局部自由层的短正合列，其中的截面属于 $\mathcal{A}^{r-1}(D)$

$$0 \to \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(\overline{D} \times \mathbb{C}^k) \to \mathcal{S}(\widetilde{E}) \to 0, \tag{3.3}$$

这里，我们分别用 $\mathcal{S}(E)$、$\mathcal{S}(\overline{D} \times \mathbb{C}^k)$ 和 $\mathcal{S}(\widetilde{E})$ 表示丛 E、$\overline{D} \times \mathbb{C}^k$ 和 $\widetilde{E}$ 的 $\mathcal{A}^{r-1}(D)$-截面层。关于向量丛范畴与局部自由层范畴（截面的范畴）之间等价关系的细节，请参阅 [7] 和 [20]。

对强伪凸区域上的 $\mathcal{A}^0(D)$ 类局部自由层应用 Cartan 定理 B（见 [24, 27]），我们可以沿用 Stein 流形上局部自由层的常规证明（例如参见 [20, VIII/7.Theorem]），从而得到上述正合列的直和分裂 $\mathcal{S}(\widetilde{E}) \oplus \mathcal{S}(E) = \mathcal{S}(\overline{D} \times \mathbb{C}^k)$。事实上，正合列 (3.3) 的正合性蕴含以下正合性：

$$0 \to \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}(\widetilde{E}), \mathcal{S}(E)\big) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}(\widetilde{E}), \mathcal{S}(\overline{D} \times \mathbb{C}^k)\big) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}(\widetilde{E}), \mathcal{S}(\widetilde{E})\big) \to 0.$$

根据本段开头所讨论的 Cartan 定理 B 的版本，$H^1(\overline{D}, \mathrm{Hom}(\mathcal{S}(\widetilde{E}), \mathcal{S}(E))) = 0$，我们看到映射

$$H^0\big(\overline{D}, \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}(\widetilde{E}), \mathcal{S}(\overline{D} \times \mathbb{C}^k)\big)\big) \xrightarrow{\overline{\beta}} H^0\big(\overline{D}, \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}(\widetilde{E}), \mathcal{S}(\widetilde{E})\big)\big)$$

是满射。因此存在 $h \in H^0\big(\overline{D}, \mathrm{Hom}\big(\mathcal{S}(\widetilde{E}), \mathcal{S}(\overline{D} \times \mathbb{C}^k)\big)\big)$，使得 $\overline{\beta}(h) = \beta \circ h$ 等于恒等映射。于是 $h\big(\mathcal{S}(\widetilde{E})\big)$ 给出相应的向量子丛 $\widetilde{\theta}$，它属于 $\overline{D} \times \mathbb{C}^k$，并且显然，$\overline{D} \times \mathbb{C}^k \approx E \oplus \widetilde{\theta}$ 是一个 $\mathcal{A}^{r-1}(D)$-同构。

根据 Heunemann 的结果（见 [23, 定理 1]），我们可以在 $\overline{D}$ 上一致地用一个复向量子丛 $\theta \subset U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^k$ 逼近子丛 $\widetilde{\theta} \subset \overline{D} \times \mathbb{C}^k$，该子丛在 S 中的某个开集 $U_{\overline{D}} \supset \overline{D}$ 上全纯。更确切地说，存在平凡丛 $\overline{D} \times \mathbb{C}^k$ 的一个连续复向量丛自同构 τ'，它在 $\overline{D}$ 上接近恒等映射，在 D 上全纯，并且满足 $\theta|_{\overline{D}} = \tau'(\theta)$。此外，态射 τ' 可以选取得任意接近恒等态射，因此我们可以假设 $\overline{D} \times \mathbb{C}^k = E \oplus \theta|_{\overline{D}}$。关于这一结果的一个更简单的证明，见 [11] 中的附录；请注意，该证明还给出了一个 $\mathcal{A}^{r-1}(D)$类的自同构。

由于对于任意 $z \in \overline{D}$，E_z 必须包含映射 Ξ_z 的核（见 (3.1)），因此 $\widetilde{\theta}$ 限制映射 $\Xi|_{\widetilde{\theta}}\colon \theta \to \Xi(\theta) \subset TX|_A$ 是一个单射向量丛映射，并且

$$\Xi(\widetilde{\theta}) \oplus TA = TX|_A.$$

如果 θ 是对丛 θ的充分良好逼近，那么对每个 $z \in \overline{D}$ 和 $\Xi(\theta) \oplus TA = TX|_A$.，限制映射 $\Xi_z|_{\theta_z}\colon \theta_z \to \Xi(\theta_z)$ 也是一个同构。因此，A 在 X 中的法丛 ν 与受限

~丛 $\theta|_{\overline{D}}$ 和 $\theta_{\overline{D}}$同构。此外，存在一个 $\mathcal{A}^{r-1}(D)$类的复向量丛同构映射τ: $f^*\nu \to \theta|_{\overline{D}}$。

请记住，$F(z,0) = f(z)$ 是一个 $\mathcal{C}^r$-嵌入。由反函数定理，存在零截面 $\overline{D}$ 在 $\theta|_{\overline{D}}$ 中的一个开邻域 $\Omega \subset \theta$，使得 F 将 Ω 双可微同胚地映射到 A 在 X 中的一个开邻域 $F(\Omega)$，并且 F 在 Ω 上是双全纯的 $\cap \pi^{-1}(D)$。缩小 Ω 后，我们还可以确保 Ω 的纤维是凸的，且 $F(\Omega) \subset \omega$。

在丛 $\overline{D} \times \mathbb{C}^k$ 的纤维 $\{z\} \times \mathbb{C}^k$ 上，我们有唯一分解 $t = t' \oplus t'' \in E \oplus \theta$。注意，偏微分 $D_{t''}F_{(z,0)}$ 对于 $z \in \overline{D}$ 也是一个同构，因此 F 在 Ω 上是逐纤维双全纯的 $\cap \pi^{-1}(D)$。

命题 3.1 的证明至此完成。 □

注 3.2. 关于命题 3.1（另参见定理 1.2），我们提及定理 1.1，其陈述如下：若 h: $X \to S$ 是全纯浸没，且 $f: \overline{D} \to X$ 是连续截面，并且在 D 中全纯，那么存在一个定义在 S 中 ~ $\overline{\quad}$ ~$\overline{D}$ 的开邻域 $U_{\overline{D}}$ 上的全纯向量丛 $\xi \to U_{\overline{D}}$；并且对于 X 中的每个开集 $\Omega \supset f(D)$，都存在一个包含 $f(\overline{D})$ 的开 Stein 集 $\Omega \subset \Omega$，以及一个从 Ω 到 ξ 中某个具有凸纤维的开子集上的保纤维双全纯映射。该结果是通过 [10] 和 [11] 中发展的全纯喷流方法证明的。□

现在我们回顾定义，并建立关于流形上 L^∞-空间范数的记号。设 X 是复流形中的一个开且相对紧子集。对于 $N \in \mathbb{N}$ 和映射 $f \in \mathcal{C}^0(\overline{W}, \mathbb{C}^N)$，我们定义

$$\|f\|_{L^\infty(W)} = \sup_{z \in W} |f(z)|,$$

其中 $|f(z)|$ 表示空间 $\mathbb{C}^N$ 上的欧几里得范数。现在设 α 是 $\overline{W}$ 上的一个 (0, 1)-形式，其系数属于类 $\mathcal{C}^1(\overline{W}, \mathbb{C}^N)$。在 $X = \mathbb{C}^n$ 的情形下，我们定义

$$\|\alpha\|_{L^\infty_{0,1}(W)} = \sup_{z \in W} \sum_j |\alpha_j(z)|,$$

其中 $\alpha(z) = \sum_j \alpha_j(z) d\overline{z}_j$，且 $\alpha_i \in \mathcal{C}^1(\overline{W}, \mathbb{C}^N)$。一般地，我们选取 $V_1, \dots V_m$ 的一个开覆盖，并使得每个 V_j 都是 X中某个全纯坐标片内的相对紧子集。由于可以计算出，对于 $\mathbb{C}^n$中的坐标片内的 $j \in \{1, \dots, m\}$，有 $\|\alpha\|_{L^\infty(W \cap V_j)}$，故我们定义范数

$$\|\alpha\|_{L^\infty_{0,1}(W)} = \sum_{j=1}^m \|\alpha\|_{L^\infty_{0,1}(W \cap V_j)}.$$

注意，任何其他覆盖都会给出一个等价的范数。

定义该范数的另一种方式是选取 X 的一个局部有限开覆盖 $\{U_j\}_j$，以及从属于该覆盖的一个单位分解 $\{\vartheta_j\}_j$。我们令 $\|\alpha\|_{L^\infty_{0,1}(W)}$ =$\sup_{z \in W} \sum_j \vartheta_j(z)|\alpha_j(z)|$, 其中 $\alpha(z) = \sum_j \alpha_j(z) d\overline{z}_j$ 是关于 U_j中的坐标 z 的一个 (0, 1)-形式。由于 $\overline{W}$ 是紧致的，对覆盖和单位分解的不同选择会给出等价的范数。类似地，我们为任意微分形式定义范数。

以下局部结果是 [17] 中引理 3.2 的一个改进。为完整起见，我们将重述其证明。

引理 3.3. 设 $\epsilon\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中以 0 为圆心、半径为 ϵ 的球，并设 $v \in \mathcal{C}^{r+1}(\epsilon\mathbb{B})$（$r \in \mathbb{N}$）。那么存在一个常数 $c < \infty$，使得

$$|D^\alpha v(0)| \leq c\left(\epsilon||D^\alpha \bar\partial v||_{L^\infty(\epsilon\mathbb{B})} + \epsilon^{-|\alpha|}||v||_{L^\infty(\epsilon\mathbb{B})}\right), \qquad |\alpha| \leq r.$$

对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$，我们用 $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_{2n}^{\alpha_{2n}}}$表示在 $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$ 上相对于坐标 $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ 的偏导数。

证明。我们应用 Bochner-Martinelli公式

$$g(z) = \int_{\partial T} g(\zeta)B(\zeta, z) - \int_T \bar\partial g(\zeta) \wedge B(\zeta, z),$$

该公式对任意具有分片光滑 $\mathcal{C}^1$-边界的开子集 $T \Subset \mathbb{C}^n$ 以及任意$g \in \mathcal{C}^1(\overline{T})$均成立，其中 $B(\zeta, z)$是 Bochner-Martinelli核

$$B(\zeta, z) = c_n \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar\zeta[j] \wedge d\zeta.$$

令 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ 为一个截断函数，当 $|t| \leq \frac{1}{2}$时满足 $\chi(t) = 1$，当 $|t| \geq 1$时满足 $\chi(t) = 0$。对于 $w \in \mathbb{C}^n$，我们定义 $\chi_\epsilon(w) = \chi(\frac{2|w|}{\epsilon})$。其偏导数对所有多重指标 α均满足$|D^\alpha \chi_\epsilon| \leq C_\alpha \epsilon^{-|\alpha|}$，其中 $C_\alpha > 0$ 是一个依赖于α的常数。

将 Bochner-Martinelli公式应用于 $g(\zeta) = \chi_\epsilon(\zeta - z)v(\zeta)$，在 $\epsilon\mathbb{B}$ 上可得

$$v(z) = -\int_{\epsilon\mathbb{B}} \bar\partial_\zeta\big(\chi_\epsilon(\zeta - z)v(\zeta)\big) \wedge B(\zeta, z) =$$

$$= -\int_{\epsilon\mathbb{B}} \bar\partial v(\zeta) \wedge \chi_\epsilon(\zeta - z)B(\zeta, z) - \int_{\epsilon\mathbb{B}} v(\zeta)\bar\partial_\zeta \chi_\epsilon(\zeta - z) \wedge B(\zeta, z).$$

这些是卷积算子，我们可以对任一被积函数求导。由此可得 $|\alpha| \leq r$:

$$D^\alpha v(z) = -\int_{\epsilon\mathbb{B}} D^\alpha \bar\partial v(\zeta) \wedge \chi_\epsilon(\zeta - z)B(\zeta, z) - \int_{\epsilon\mathbb{B}} v(\zeta)\partial_z^\alpha\big(\bar\partial\chi_\epsilon(\zeta - z) \wedge B(\zeta, z)\big) =$$

$$= I_1(z) + I_2(z).$$

利用 $|B(\zeta, z)| \leq c|\zeta - z|^{1-2n}$，对于某个正的常数 c，我们可以作如下积分估计:

$$|I_1(z)| \leq \int_{|\zeta - z| \leq \frac{\epsilon}{2}} |D^\alpha \bar\partial v(\zeta)||\zeta - z|^{1-2n} dV \leq c\epsilon \|D^\alpha \bar\partial v\|_{L^\infty(\epsilon\mathbb{B})}$$

and

$$|I_2(z)| \leq \int_{\frac{\epsilon}{4} \leq |\zeta - z| \leq \frac{\epsilon}{2}} |v(\zeta)|\epsilon^{-2n-|\alpha|} dV \leq c\epsilon^{-|\alpha|} \|v\|_{L^\infty(\epsilon\mathbb{B})}.$$

□

为证明定理 1.2，我们将通过求解带估计的 $\overline{\partial}$-方程，对命题 3.1 给出的微分同胚 F进行修正，从而得到一个双全纯映射。我们实际上证明以下更精确的结果，其中包含定理 1.2。

定理 3.4. 设 $D \Subset S$ 是 Stein 流形 S中的一个相对紧域，其边界为 $\mathcal{C}^r$（$r \geq 2$），并设 $f\colon \overline{D} \hookrightarrow X$ 是一个从 D到复流形 X的 $\mathcal{A}^r$类嵌入。设 θ 是命题 3.1 给出的全纯向量丛，并将 $\overline{D}$ 与 $\theta|_{\overline{D}}$的零截面等同。则对于 X 中 $A = f(\overline{D})$ 的任意开邻域U，存在一个包含 $\overline{D}$ 的开 Stein 域 $\omega \subset \theta$ 以及一个双全纯映射 Φ: $\omega \to \omega' \subset X$，使得 $A \subset \omega' \subset U$，并且 $\Phi^{-1}(A)$ 是一个开强伪凸域 $D' \subset S$的闭包 $\overline{D'}$ 上的限制丛 $\theta|_{\overline{D'}}$ 的一个 $\mathcal{A}^r$截面的图像。

证明。取一个包含像 $A = f(\overline{D})$ 的开集 $U \subset X$。由定理 1.1，存在一个开Stein域 ω，它包含于 X，且满足 $A \subset \omega \subset U$。

命题 3.1 给出一个全纯向量丛 $\pi\colon \theta \to U_{\overline{D}}$，它定义在 S 中 $\overline{D}$ 的某个邻域 $U_{\overline{D}}$ 上；还给出一个开邻域 $\Omega \subset \theta$，它是限制丛 $\theta_{\overline{D}}$的零截面 $\overline{D}$ 的邻域；以及一个 $\mathcal{C}^r$-微分同胚 $F\colon \Omega \to F(\Omega) \subset \omega$，使得 F 在集合上全纯

$$\Omega_0 := \pi^{-1}(D) \cap \Omega \subset \theta.$$

回忆一下，θ 是平凡向量丛 $U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^k$ 的全纯子丛，其中 $k \in \mathbb{N}$ 是某个参数，因此我们可以将 θ 的每个元素唯一地识别为一点 $(z,t) \in U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^k$。

我们的目标是用双全纯映射在 $\overline{D}$ 的某个邻域内充分精确地逼近微分同胚 F。由于 $F(\overline{D}) = A$ 在 X 中有一个Stein 邻域ω，我们可以通过标准嵌入-收缩方法，将这个非线性逼近问题归结为线性问题（针对函数）。取一个真全纯嵌入 $\psi\colon \omega \to \mathbb{C}^N$，将其映到闭复（Stein）子流形 $\Sigma = \psi(\omega) \subset \mathbb{C}^N$ 上，并令 $\eta\colon W \to \Sigma$ 为一个全纯收缩，将 $W \subset \mathbb{C}^N$（Σ 的一个开邻域）映到 Σ 上（参见 [20]）。映射

$$G = \psi \circ F\colon \Omega \to G(\Omega) \subset \Sigma$$

是从 Ω 到 Σ 中其像的一个 $\mathcal{C}^r$-微分同胚，并且在 Ω_0 中全纯。因此，$\overline{\partial} G$ 及其 $|\alpha| \leq r-1$ 阶导数 $D^\alpha(\overline{\partial} G)$ 在 Ω_0 上为零。特别地，我们有

$$\left|\overline{\partial} G(y)\right| = o\big(d(y,\Omega_0)^{r-1}\big), \qquad \left|D^1(\overline{\partial} G)(y)\right| = o\big(d(y,\Omega_0)^{r-2}\big) \tag{3.4}$$

作为 $y \to \Omega_0,$，其中 $d(y,\Omega_0)$ 表示在 θ 中从 y 到 Ω_0 的距离（将其视为 $U_{\overline{D}} \times \mathbb{C}^k$ 的子集）。

通过缩小邻域 $U_{\overline{D}} \supset \overline{D}$，我们可以假设存在一个严格多重次调和的 $\mathcal{C}^r$-函数 ρ: $U_{\overline{D}} \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $z \in bD = \{\rho = 0\}$，$D = \{z \in U_{\overline{D}} \mid \rho(z) < 0\}$，且 $d\rho(z) \neq 0$。对于常数 $\epsilon \geq 0$ 和 $M > 0$，我们令 $\widetilde{\rho}(z,t) = \rho(z) + M|t|^2$，并定义

$$U_\epsilon = \{(z,t) \in \theta \mid z \in U_{\overline{D}},\ \widetilde{\rho}(z,t) < \epsilon\} \tag{3.5}$$

（见图 6）。显然，对于每个 $\epsilon > 0$，$\overline{D} \subset U_\epsilon$。通过将 $M > 0$ 取得充分大，我们可以确保对于每个充分小的 $\epsilon \geq 0$，$U_\epsilon \Subset \Omega$。对于这样的 M，并且当 $\epsilon \geq 0$ 足够小时，U_ϵ 是一个具有 $\mathcal{C}^r$-边界的强伪凸域。

根据 U_ϵ 的定义可知，U_ϵ 中任意一点到集合 $\Omega_0 = \pi^{-1}(\overline{D}) \cap \Omega$ 的距离为 $O(\epsilon)$ 量级。由此再根据 (3.4) 可得

$$\|\overline{\partial} G\|_{L^\infty(U_\epsilon)} = o(\epsilon^{r-1}) \text{ as } \epsilon \to 0. \tag{3.6}$$

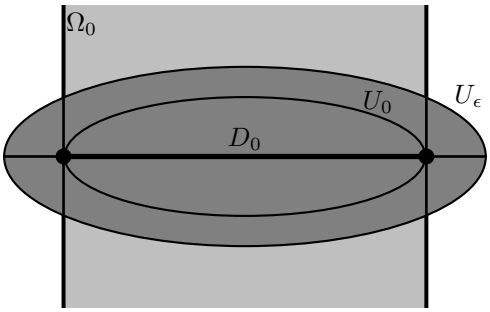


FIGURE 6. 这些集合 U_ϵ

存在一个常数 $C>0$，使得对于每个充分小的 $\epsilon>0$，方程$\overline{\partial}u=\overline{\partial}G$ 都有一个在 U_ϵ 上的解 u_ϵ，并满足一致估计

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(U_\epsilon)}\le C\,\|\overline{\partial}G\|_{L^\infty(U_\epsilon)}=o(\epsilon^{r-1}). \tag{3.7}$$

常数 C 可以选取得与 ϵ无关，因为 U_ϵ 与 U_0 相差不到 $\mathcal{C}^2$（例如参见 [29, VIII/定理 8.5]，另见 [26, 32, 37]）。映射

$$G_\epsilon=\eta\circ(G-u_\epsilon)\colon U_\epsilon\to\Sigma$$

因此在 U_ϵ上全纯。

为完成证明，我们证明对每个足够小的 $\epsilon>0$，映射 $G_\epsilon\colon U_{\frac{\epsilon}{2}}\to\Sigma$ 实际上是双全纯的，且其像包含 $\psi(A)$。于是，映射 $F_\epsilon=\psi^{-1}\circ G_\epsilon$是从 $U_{\frac{\epsilon}{2}}$ 到 X中 A 的一个邻域的双全纯映射。

我们在集合 $U_{\frac{\epsilon}{2}}$ 上局部应用引理 3.3，以获得关于 u_ϵ的导数的全局估计。特别地，我们断言

$$\|D^1u_\epsilon\|_{L^\infty(U_{\frac{\epsilon}{2}})}=o(1)\text{ as }\epsilon\to0. \tag{3.8}$$

为此，我们固定一个较小的 $\epsilon_0>0$，并选取 $\overline{U}_{\epsilon_0}$ 的有限开覆盖 $\{W_j\}_{j=1}^m$ 和 $\{V_j\}_{j=1}^m$，使得对每个 j 都满足 $W_j\Subset V_j$。我们可以假设，对每个 $j\in\{1,\dots,m\}$ 都有 $V_j\Subset U_j$，其中 U_j 是 θ 中的一个局部坐标图，并令 $\varphi_j\colon U_j\to\varphi_j(U_j)\subset\mathbb{C}^{\dim\theta}$ 为其对应的双全纯映射。接下来，选取一个常数 $b>0$，使得

$$\left|\left(\widetilde{\rho}\circ\varphi_j^{-1}\right)(x)-\left(\widetilde{\rho}\circ\varphi_j^{-1}\right)(x')\right|<b|x-x'| \tag{3.9}$$

对所有 x、$x'\in V_j'=\varphi_j(V_j)$ 都成立。由 φ_j^{-1} 在 $\varphi_j^{-1}(\overline{V}_j)$ 上的一致连续性，还存在一个常数 $a>0$，使得对每个 $w\in W_j'=\varphi_j(W_j)$ 都有 $\varphi_j^{-1}\big(B(w,a)\big)\subset V_j$。（这里，$B(w,a)$ 表示以 w 为球心、半径为 a 的球。）对于任意满足 $0<\epsilon<\min\{\epsilon_0,2ba\}$ 且 $w\in W_j'$ 的 ϵ，我们定义

$$K_{w,j,\epsilon}=\varphi_j^{-1}\left(\overline{B}\big(w,\frac{\epsilon}{2b}\big)\right)\subset V_j.$$

由 (3.9) 以及$K_{w,j,\epsilon}$ 的定义可得

$$\left|\widetilde{\rho}(x)-\widetilde{\rho}\big(\varphi_j^{-1}(w)\big)\right|=\left|\left(\widetilde{\rho}\circ\varphi_j^{-1}\right)\big(\varphi_j(w)\big)-\left(\widetilde{\rho}\circ\varphi_j^{-1}\right)(w)\right|<b|\varphi_j(x)-w|<\frac{\epsilon}{2}$$

对于任意一对点 $w\in\varphi_j(\overline{U}_{\frac{\epsilon}{2}}\cap V_j)$ 和 $x\in K_{w,\,j,\,\epsilon}$ 由于 $\varphi_j^{-1}(w)\in U_{\frac{\epsilon}{2}}$，由上述不等式可得 $\widetilde{\rho}(x)<\epsilon$，因此对所有 $K_{w,\,j,\,\epsilon}\subset U_\epsilon$

$w \in \varphi_j(\overline{U}_{\frac{\epsilon}{2}} \cap V_j)$。对 $B(w, \frac{\epsilon}{2b})$ 上的函数 $u_\epsilon \circ \varphi_j^{-1}$应用引理 3.3，并取 $w \in \varphi_j(\overline{U}_{\frac{\epsilon}{2}} \cap V_j)$，可得 $|\alpha| \leq r-1$ 的以下估计：

$$\begin{aligned} c\left|D^\alpha\left(u_\epsilon \circ \varphi_j^{-1}\right)\left(\varphi_j(w)\right)\right| &\leq \frac{\epsilon}{2b}\left\|D^\alpha \bar{\partial}(u_\epsilon \circ \varphi_j^{-1})\right\|_{L^\infty(B(w,\frac{\epsilon}{2b}))} \\ &\quad + \left(\frac{\epsilon}{2b}\right)^{-|\alpha|}\left\|u_\epsilon \circ \varphi_j^{-1}\right\|_{L^\infty(B(w,\frac{\epsilon}{2b}))} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2b}\left\|D^\alpha \bar{\partial}(u_\epsilon \circ \varphi_j^{-1})\right\|_{L^\infty(\varphi_j(V_j))} + \left(\frac{\epsilon}{2b}\right)^{-|\alpha|}||u_\epsilon||_{L^\infty(U_\epsilon)},$$

其中可假设常数 $c > 0$ 与$w \in \varphi_j(\overline{U}_{\frac{\epsilon}{2}} \cap V_j)$的选择无关。由于 $||D^\alpha \bar{\partial}(u_\epsilon \circ \varphi_j^{-1})||_{L^\infty(\varphi_j(V_j))}$ 有一个正的上界常数，我们进一步得到

$$\left\|D^\alpha(u_\epsilon \circ \varphi_j^{-1})\right\|_{L^\infty\left(\varphi_j(U_{\frac{\epsilon}{2}} \cap V_j)\right)} \leq c'\epsilon + c''\epsilon^{-|\alpha|}||u_\epsilon||_{L^\infty(U_\epsilon)},$$

其中 c' 和 c'' 是某些正的常数。由于集合 $\{V_j\}_{j=1}^m$ 覆盖了 $U_{\frac{\epsilon}{2}}$，因此可得

$$||D^\alpha u_\epsilon||_{L^\infty(U_{\frac{\epsilon}{2}})} \leq \widetilde{c}\left(\epsilon + \epsilon^{-|\alpha|}o(\epsilon^{r-1})\right), \quad |\alpha| \leq r-1, \tag{3.10}$$

对于某个正的常数 $\widetilde{c}$。显然，这意味着 (3.8)。

估计式 (3.7) 表明，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，映射$G - su_\epsilon\colon U_\epsilon \to \mathbb{C}^N (s \in [0,1])$ 的像包含在某个紧子集 $W' \Subset W$中，该紧子集可选为与 s 和 ϵ无关。因此，该族

$$G_{\epsilon,s} := \eta \circ (G - su_\epsilon)\colon U_\epsilon \to \Sigma, \qquad s \in [0,1]$$

是连接 $G|_{U_\epsilon}$ 与全纯映射 $G_\epsilon = G_{\epsilon,\ 1} = \eta \circ (G - u_\epsilon)$ 的同伦。

由于 G 是微分同胚，由 (3.7) 和 (3.8) 可知，只要 $\epsilon > 0$ 足够小，$G_{\epsilon,\ s}$ 就是 $U_{\frac{\epsilon}{2}}$ 上的微分同胚。此外，(3.7) 意味着

$$\frac{\|G_{\epsilon,s} - G\|_{L^\infty(U_\epsilon)}}{\epsilon} \to 0 \ \text{ as } \epsilon \to 0 \ \text{ uniformly in } s \in [0,1].$$

由此可得

$$G_{\epsilon,s}(bU_{\frac{\epsilon}{2}}) \in \Sigma \backslash G(\overline{U}_0) \tag{3.11}$$

对每个足够小的 $\epsilon > 0$ 和 $s \in [0,1]$ 都成立。

现在我们将用到拓扑度理论中的一个事实（参见 [31] 的前两章）。该事实指出，两个同伦的 $\mathcal{C}^1$-映射的度相等，前提是计算度所取的点不在相对于该同伦而言的区域边界的像中。由于 G 是微分同胚，G 在点 $x \in G(\overline{U}_0)$ 处相对于 $U_{\frac{\epsilon}{2}}$ 的度等于一。由 (3.11) 可知，同伦映射 G_ϵ 在点 $x \in G(\overline{U}_0)$ 处的度也等于一，因此 $G_\epsilon(U_{\frac{\epsilon}{2}})$ 包含集合 $G(\overline{U}_0) \supset A$。因此集合

$$\omega' = \psi^{-1}(G_\epsilon(U_{\frac{\epsilon}{2}})) \subset U \subset X$$

是 A 的一个开 Stein 邻域，通过双全纯映射 $\Phi = F_\epsilon = \psi^{-1} \circ G_\epsilon$ 与区域 $U_{\frac{\epsilon}{2}} \subset \theta$ 双全纯等价。

最后，如果 $\epsilon > 0$ 足够小，那么原像 $A_\epsilon = F_\epsilon^{-1}(A) \subset \theta$ 与 $\overline{D}$ （$\theta|_{\overline{D}}$的零截面）足够 $\mathcal{C}^1$ 接近，因此 π 会将其双全纯地投影到一个紧区域 $\overline{D}_\epsilon \subset U_{\overline{D}}$，其内部为 $D' = D_\epsilon$。由于 A_ϵ

与 A 双全纯，它具有强伪凸的 $\mathcal{C}^r$ 边界，因此区域 D_ϵ 也具有同样的性质。由隐函数定理可知

$$A_\epsilon = \phi_\epsilon(\overline{D}_\epsilon), \tag{3.12}$$

其中 ϕ_ϵ 是限制向量丛 $\theta|_{\overline{D}}$ 的 $\mathcal{A}^r(D_\epsilon)$ 类截面。

由此完成了定理 3.4 的证明。 □

4. Approximation of mappings

本节证明以下逼近定理，该定理显然包含推论 1.3。

定理 4.1. 设 D 是 Stein 流形 S 中具有 $\mathcal{C}^l$ 边界（$l \geq 2$）的相对紧强伪凸域，并设 $f\colon \overline{D} \hookrightarrow X$ 是映到 $A = f(\overline{D})$ 上的 $\mathcal{A}^l(D, X)$ 类嵌入。那么，每个从 $A \to Y$（$r \in \{0, 1, \ldots, l\}$）到复流形 Y 的 $\mathcal{C}^r$ 映射 g，若在内部 $A \backslash bA$ 全纯，则都是一列映射 $g_j\colon U_j \to Y$ 的 $\mathcal{C}^r(A, Y)$ 极限；这些映射在 X 中 A 的开邻域 U_j 内全纯。

一般而言，逼近映射的定义域 U_j 会逐渐缩小至 A。如果 Y具有凸逼近性质（见 [14]），那么 Runge 逼近定理适用于从 Stein 流形到 Y的映射；在这种情况下，我们可以选择在 X中 A 的某个固定邻域上定义的逼近映射 g_j。例如，当 Y 是复齐性流形时，这一结论成立。

我们先简要回顾 $\mathcal{A}^r(D, Y)$ 中映射的逼近结果，其中 D 是 Stein 流形中的相对紧强伪凸域。当 $D \Subset \mathbb{C}^n$ 和 $Y = \mathbb{C}$时，通过积分核表示，可以得到在 $\overline{D}$ 的某个邻域内用全纯函数一致逼近 $\mathcal{A}^0(D, \mathbb{C})$ 中函数的结果（见 [21], [22, 定理 2.9. 2], [36]）；其他证明也可参见[26, 28]）。对于满足 $0 \leq r \leq l$ 且 $2 \leq l$ 的 $\mathcal{A}^r(D)$ 中函数的逼近结果，可通过使用带有 $\mathcal{C}^r$ 估计的 ∂ 方程的解得到（(0, 1)- 形式的情形见[2, 42]，$(0, q)$-形式的情形见 [30]；另见[29, VIII/定理 3.43], [32], [37]）。关于弱拟凸域上的逼近，见 [12, 35]。

对于允许存在足够正则的 Stein 邻域基的紧集（例如所谓的一致 H-凸集），通过使用 H¨ormander 的 L^2-方法求解 $\overline{\partial}$-方程，并结合与上文引理 3.3 中类似的内部椭圆估计，可以得到全纯逼近定理。关于这一方法，请参见 Chirka [4]。

这些关于函数的逼近定理很容易推出相应的映射逼近定理：映射 $f\colon \overline{D} \to Y$ 到更一般的复流形 Y，只要像 $f(\overline{D})$ 在 Y 中有一个 Stein 邻域。（只需将这个 Stein 邻域嵌入欧氏空间，并使用到该嵌入子流形上的全纯收缩。）若没有 Stein 邻域，问题就复杂得多。在 [10] 中，作者通过全纯喷流的方法证明，对于 $r \in \mathbb{Z}_+$，每个 $\mathcal{A}^r(D, Y)$ 中的映射，都可以在 $\mathcal{C}^r(\overline{D}, Y)$-拓扑下由在环境 Stein 流形 S 中 $\overline{D}$ 的开邻域上全纯的映射逼近。（当 $r \geq 2$ 时，更简洁的证明见 [11, 定理 2.6]。）

定理 4.1 的证明。根据定理 3.4，只需考虑以下情形：$D \Subset S$ 是 Stein 流形 S 中边界为 $\mathcal{C}^l$ 的强伪凸域；$\pi\colon X \to S$ 是一个全纯向量丛；$\phi\colon \overline{D} \to X$ 是一个 $\mathcal{A}^r(D, X)$ 类的截面，并且 $A = \phi(\overline{D})$。

设 $U_0 \subset X$ 是形如 (3.5) 的强拟凸域（对于 $\epsilon = 0$）。注意，U_0 包含 $X|_D$ 的零截面，且包含于 $\pi^{-1}(D)$ 中，其边界 bU_0 属于 $\mathcal{C}^l$ 类。将截面 ϕ 写成形式 $\phi(z) = \big(z,\ \varphi(z)\big)$，其中 $\varphi(z) \in X_z = \pi^{-1}(z)$ 表示纤维分量。令

$$U = \{\big(z, t + \varphi(z)\big) \in X \mid (z,t) \in U_0\}.$$

集合 U 是将 U_0 沿纤维方向平移截面 ϕ 得到的。显然，U 是强伪凸的，具有 $\mathcal{C}^r$ 边界，且 $\overline{U} \subset \pi^{-1}(\overline{D})$，因为我们可以选取 ϕ，使其与零截面充分 $\mathcal{C}^1$ 接近。

设 $g\colon A \to Y$ 是一个到复流形 Y 的 $\mathcal{A}^r(A,\ Y)$ 映射。我们将 g 延拓为映射 $G\colon \pi^{-1}(\overline{D}) \to Y$，令 G 在每个纤维 X_z、$z \in \overline{D}$ 上为常数。于是，限制映射 $G\colon \overline{U} \to Y$ 是一个 $\mathcal{A}^r(U,\ Y)$ 类映射。根据 [10, 定理 1.2]，该映射可以在 $\mathcal{C}^r$ 拓扑下由从 $\overline{U} \supset A$（在 X 中）的开邻域到 Y 的全纯映射逼近。证明至此完成。□

致谢。感谢 F. Forstnerič 教授就本文开展的富有启发性的讨论和有益的意见，尤其感谢他引导我研究嵌入的强伪凸域是否存在 Stein 邻域这一问题。

References

1. Alexander, H., Wermer, J.，《多复变函数与巴拿赫代数》。施普林格出版社，纽约，1998年。2. Alt, W.，严格伪凸边界上方程 $\overline{\partial}u = f$ 的解的导数的 H¨older 估计。《数学手稿》13（1974 年），381–414。3. Bedford, E., Fornæss, J-E.，具有伪凸邻域系的区域。《数学发明》47（1978年），1–27。4. Chirka, E. M.，在 $\mathbb{C}^n$ 上用全纯函数逼近光滑流形。（俄文）《数学文集》（新辑）78（120）（1969年），101–123。英文译本：《苏联数学文集》7（1969年），95–113。5. Colt¸oiu, M.，完备局部多极集。《纯粹与应用数学杂志》412（1990年），108–112。6. Demailly, J.-P.，q-凸空间的高阶上同调。《数学杂志》204（1990年），283–295。7. Demailly, J.-P.，《复解析几何与代数几何》。http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/manuscripts/agbook.ps.gz 8. Diederich, K., Fornæss, J.-E.，伪凸域：一个具有非平凡 Nebenh¨ulle 的例子。《数学年刊》225（1977年），275–292。9. Diederich, K., Fornæss, J.-E.，伪凸域：Stein 邻域的存在性。《杜克数学杂志》44（1977年），641–662。10. Drinovec-Drnov˘sek, B., Forstneri˘c, F.，强伪凸域上全纯映射的逼近。《数学论坛》（即将出版）。arxiv: math.CV/0607185 11. Drinovec-Drnov˘sek, B., Forstneri˘c, F.，复空间中的全纯曲线。《杜克数学杂志》139（2007年），203–254。12. Fornaess, J., E., Nagel, A.，弱伪凸域的 Mergelyan 性质。《数学手稿》22（1977 年），199–208。13. Forstneri˘c, F.，从 Stein 流形中的子簇延拓全纯映射。《傅里叶研究所年刊》55（2005年），733–751。14. Forstneri˘c, F.，凸集上的 Runge 逼近蕴含 Oka 性质。《数学年刊》（第2辑）163（2006年），689–707。15. Forstneri˘c, F.，强伪凸域上的全纯映射流形。《亚洲数学杂志》11（2007年），113–126。

16. Forstneriˇc, F., Laurent–Thi´ebaut, C.：Levi平坦超曲面中的 Stein紧集。美国数学会汇刊（2007年）。电子版：S0002-9947-07-04263-8。 17. Forstneriˇc, F., Low, E., Øvrelid, N.，在细管中求解 d 和 $\overline{\partial}$ 方程及其在映射中的应用。《密歇根数学杂志》49（2001年），369–416。 18. Grauert, H.，关于 Levi问题以及实解析流形的嵌入。《数学年刊》（第2辑）68（1958年），460–472。 19. Grauert, H., Remmert, R.，《Stein空间理论》。数学科学基础丛书第227卷，施普林格出版社，纽约，1977年。 20. Gunning, R., C., Rossi, H.，多个变量的解析函数。普伦蒂斯-霍尔出版社，恩格尔伍德克利夫斯，1965年。 21. Henkin, G. M.，严格伪凸区域内全纯函数的积分表示及其若干应用。（俄文）《数学文集》78（120）（1969年），611–632。 22. Henkin, G. M., Leiterer, J.，《复流形上的函数理论》。学术出版社，柏林，1984年。 23. Heunemann, D.，严格伪凸域上在边界连续的全纯向量丛的一个逼近定理和冈原理。《数学消息》127（1986年），275–280。 24. Heunemann, D.，具有严格伪凸边界的 Stein 流形的 B定理。《数学消息》128（1986年），87–101。 25. H¨ormander, L.，《多复变函数复分析导论》。第3版。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1990年。 26. Kerzman, N.，强伪凸域中 $\overline{\partial}u = f$ 解的 H¨older 估计和 L^p 估计。《纯粹与应用数学通讯》24（1971年），301–379。 27. Leiterer, J.，具有连续边界值的解析函数的 B定理。《分析论文集》8（1976年），95–102。 28. Lieb, I.，严格伪凸域上的一个逼近定理。《数学年刊》184（1969年），56–60。 29. Lieb, I., Michel, J.，《柯西-黎曼复形：积分公式与诺伊曼问题》。数学方面，E34。Friedr. Vieweg & Sohn，不伦瑞克，2002年。 30. Lieb, I., Range, R., M.，带有 $\mathcal{C}^k$ 估计的柯西-黎曼复形的 ¨ 解算子。《数学年刊》253（1980年），145–165。 31. Lloyd, N. G.，《度理论》。剑桥数学专题丛书，剑桥大学出版社，1978年。 32. Michel, J., Perotti, A.，具有分段光滑边界的严格伪凸域上 $\overline{\partial}$ 方程的 $\mathcal{C}^k$ 正则性。《数学杂志》203（1990年），415–427。 33. Narasimhan, R.，复空间的 Levi问题。《数学年刊》142（1961年），355–365。 34. Narasimhan, R.，复空间的 Levi问题 II。《数学年刊》146（1962年），195–216。 35. Nirenberg, R., Wells, R., O.，复流形的可微子流形上的逼近定理。《美国数学会汇刊》142（1969年），15–35。 36. Ramirez de Arelano, E.，复分析中的一个除法问题和边界积分表示。《数学年刊》184（1970年），172–187。 37. Range, R., M., Siu, Y.-T.，具有分段光滑严格伪凸边界的区域上 $\overline{\partial}$ 方程的一致估计。《数学年刊》206（1973年），325–354。 38. Remmert, R.，关于全纯可分且全纯凸的解析空间。巴黎科学院报告243（1956年），118–121。 39. Sibony, N.，一类伪凸域。《杜克数学杂志》55（1987年），299–319。 40. Sibony, N.，弱伪凸域的若干方面。载于：《多复变与复几何》第1部分（加州圣克鲁兹，1989年），199–231，纯粹数学专题讨论会论文集第52卷，美国数学会，普罗维登斯，1991年。 41. Siu, Y.-T.，每个 Stein 子簇都具有一个 Stein 邻域。《数学发明》38（1976年），89–100。 42. Siu, Y.-T.，具有导数一致界的 $\overline{\partial}$ 问题。《数学年刊》207（1974年），163–176。 43. Stein, K.，具有给定周期模的多个复变量解析函数以及第二 Cousin 问题。《数学年刊》123（1951年），201–222。 44. Stensønes, B.，Stein 邻域。《数学杂志》195（1987年），433–436。 45. Stolzenberg, G.，多项式凸集与有理凸集。《数学学报》109（1963年），259–289。 46. Wermer, J.，$\mathbb{C}^n$ 中一条曲线的包。数学年刊（第2辑）68（1958年），550–561。

Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, University of Ljubljana, Jadran-ska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia*Email address*: tadej.starcic@fmf.uni-lj.si