arXiv:2301.00475v1 [math.OC] 1 Jan 2023

确保受控扫掠过程连续逼近强收敛的控制空间

Chadi Nour[1†] 和 Vera Zeidan[2*†]

[1]黎巴嫩美国大学比布鲁斯校区计算机科学与数学系，邮政信箱 36 号，黎巴嫩比布鲁斯。[2] 密歇根州立大学数学系，美国密歇根州东兰辛，邮编 48824-1027。

*通讯作者。电子邮件：zeidan@msu.edu；其他作者：cnour@lau.edu.lb；

†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

本文研究了具有近端正则集、 $W^{1,2}$-控制和可分离的端点约束的受控扫掠过程。本文证明了最优解的存在性，并通过 *strong* 收敛的 *continuous* 近似推导出*local* 最优性条件；这些近似完全位于近端正则集的 *interior* 中。因此，这些结果可用针对原始数据的新次微分来表述，这些次微分比标准的 Clarke 次微分和 Mordukhovich 次微分 *strictlysmaller* 。

关键词：受控扫掠过程、近端正则集、必要最优性条件、局部极小点、强收敛、连续逼近、非光滑分析

MSC 分类：49K21，49K15，49J52

1 引言

本文讨论以下涉及 $W^{1,2}$ 控制扫掠系统的固定时间 Mayer型最优控制问题

$$
\begin{aligned}
(P)\colon\ & \text{Minimize } g(x(0),x(1)) \\
& \text{over } (x,u)\in AC([0,1];\,\mathbb{R}^n)\times\mathcal{W} \text{ such that} \\
& \begin{cases} (D)\ \begin{bmatrix} \dot{x}(t)\in f(x(t),u(t))-\partial\varphi(x(t)), & \text{a.e. } t\in[0,1], \\ x(0)\in C_0\subset \operatorname{dom}\varphi, \end{bmatrix} \\ x(1)\in C_1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

其中，$g\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $f\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, ∂表示 Clarke次微分，$C:=\operatorname{dom}\varphi$ 是函数 $\psi\colon \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$的零次水平集，即 $C=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \psi(x)\le 0\}$, $C_0\subset C$, $C_1\subset\mathbb{R}^n$；对于 $U\colon [0,1]\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ 多值映射以及 $\mathbb{U}:=\bigcup_{t\in[0,1]}U(t)$，控制函数集 $\mathcal{W}$ 定义为

$$
\mathcal{W}:=W^{1,2}([0,1];\,\mathbb{U})=\left\{u\in W^{1,2}([0,1];\,\mathbb{R}^m):u(t)\in U(t),\ \ \forall t\in[0,1]\right\}. \tag{1}
$$

注意，若(x,u)是(D)的解，则必然有 $x(t)\in C$ 对所有$t\in[0,1]$均成立。

若 $x\colon [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 绝对连续，$u\in\mathcal{W}$，且(x,u)满足受扰动控制的扫掠过程(D)（称为(P)的动力系统），则称一对(x,u)是(P)的可容许对。

若存在 $\delta>0$ 使得可容许对 $(\bar{x},\bar{u})$ 对于 (P) 是一个 $W^{1,2}$阶局部极小解（也称为秩为2的中间局部极小解），则称其为

$$
g(\bar{x}(0),\bar{x}(1))\le g(x(0),x(1)), \tag{2}
$$

对于（x，u）是（P）的可容许对，且满足 $\|x-\bar{x}\|_\infty\le\delta$，$\|\dot{x}-\dot{\bar{x}}\|_2^2\le\delta$，$\|u-\bar{u}\|_\infty\le\delta$并且 $\|\dot{u}-\dot{\bar{u}}\|_2^2\le\delta$.。注意，若任意可容许对（2）均满足条件，则（$x$，$u$），那么（$\bar{x}$，$\bar{u}$）称为（$P$）的全局极小解（或最优解）。

扫掠过程最早出现在 [28–30] 的论文中，由 J.J. Moreau 在摩擦和塑性理论的背景下提出。此后，这类系统又应用于磁滞、铁磁性、电路、相变、经济学等领域（例如参见 [1] 及其参考文献）。这类系统的主要特征是其动力系统中包含集合 C 的法锥，也就是说，包含示性函数在 C处的次微分，或者更一般地，包含扩展实值函数的次微分。因此，其动力系统是右端无界且不连续的微分包含。由此，扫掠过程不属于标准微分包含的研究范围，因此，针对这一模型研究最优控制问题需要采用创新的新方法

在 [3, 17, 20, 33, 38]（另见 [18]）中，针对涉及可测控制扫掠过程的最优控制问题，利用一种光滑惩罚型连续逼近（本文称为连续逼近），推导出了极大值原理形式的必要最优性条件。其一个特殊特征

是 [17, 20, 33, 38], 促成了 [19, 32] 数值算法的新颖的指数惩罚技术，该技术通过以下序列的标准控制系统逼近（D）的动力系统

$$(D_{\gamma_k}) \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) - \nabla\Phi(x(t)) - \gamma_k e^{\gamma_k \psi(x(t))} \nabla\psi(x(t)), \text{ a.e. } t \in [0, 1],$$

其中，Φ 是 φ在 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑延拓，γ_k 是一个收敛至 ∞ 的正序列，其中 $k \longrightarrow \infty$。在这些论文中，作者通过用一列标准最优控制问题（D_{γ_k}）的最优解弱逼近（P）的最优解，推导出必要最优性条件。也就是说，逼近问题的最优状态的速度序列在 L^2 中弱收敛于（P）解的给定速度。

众所周知，速度强收敛是数值计算用途中的一项重要性质，正如多篇论文所指出的，例如参见 [7, 8, 14, 17]。换言之，重要的是，能够通过现有数值算法计算的逼近问题解，可以强逼近（在 $W^{1,2}$范数下）（P）的解。此前，研究者曾通过离散近似探讨速度强收敛问题，例如参见 [5–8, 13, 14, 16], ，其中作者考察了涉及各种形式受控扫掠过程的最优控制问题，包括 $W^{1,2}$控制。在 [6–8], 中，当控制空间为 $W^{1,2}([0, 1]; \mathbb{R}^m)$时，这种方法还用于推导以弱庞特里亚金型最大值原理表述的必要最优性条件。在这些研究中，这些最优性判据应用于现实模型，其最优控制最终为$W^{1,2}$。

本文的主要目标源于以下重要性：用（D_{γ_k}）的解逼近扫掠过程（D）的一个解，使得其速度如上所述强收敛于（D）的解的速度。我们证明了当（D_{γ_k}）中的控制取为$W^{1,2}$时，该结果成立。作为推论，我们开始研究问题（P）。首先证明，在适当条件下，问题（P）存在一个最优解（$\bar{x}$，$\bar{u}$）。随后，我们通过一列定义在（D_{γ_k}）上的标准最优控制问题的最优解来逼近给定的最优解（$\bar{x}$，$\bar{u}$），并精心构造目标函数，以保证解的速度强收敛。据我们所知，这是首个使用连续近似而非离散近似来获得速度强收敛的结果。此外，通过对相应逼近最优控制问题的最优性条件取极限，我们为（P）的 $W^{1,2}$-局部极小点建立了必要最优性条件。后一项任务需要进行细致的分析。

本文结构安排如下。下一节将介绍记号以及非光滑分析中的一些定义。在第3节，我们列出一组假设及其若干重要推论。此外，我们还给出 [33, 第 4 节与 5] 中所需的一些结果，包括在可测控制下（D_{γ_k}）与（D）之间的联系。第4 节专门讨论（i），证明当使用 $W^{1,2}$-控制时，（D_{γ_k}）强逼近（D）；建立（P）最优解的存在性定理；并为（P）构造一列标准最优控制问题的连续逼近序列（iii

（P_{γ_k}）以及（iv），并针对 W^1的2-局部极小解（P推导弱庞特里亚金型最大值原理形式的必要最优性条件。为使主要结果的阐述流畅易读，大部分证明均放在第5节中；我们还将在该节建立本文不同部分所用的一些辅助结果。

2 预备知识

2.1 基本记号

下文给出本文所用的记号。用 $\|\cdot\|$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$,$B$ 和 B分别表示欧几里得范数、通常的内积、开单位球和闭单位球。半径为 $\rho>0$ 、以 $x\in\mathbb{R}^n$ 为中心的开球（分别为闭球）¯记为 $B_\rho(x)$（分别记为 $B_\rho(x)$）。对于 $x,y\in\mathbb{R}^n$, $[x,y]$ 和 (x,y)，分别表示连接 x 与 y的闭线段和开线段。对于集合 $C\subset\mathbb{R}^n$，int C、bdry C、cl C、conv C、C^c和 C° 分别表示 C的内部、边界、闭包、凸包、补集和极集。点 x 到集合 C 的距离记为 $d(x,C)$。对于扩展实值函数 $\varphi\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，dom φ 表示 φ的有效定义域，epi φ 表示其上图。对于多值映射 $F\colon\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$，Gr $F\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 表示 F的图，即 Gr $F:=\{(x,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\colon v\in F(x)\}$。 p-可积函数 $h\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 构成的勒贝格空间记为 $L^p([a,b];\ \mathbb{R}^n)$；当定义域和值域明确时，也简记为 L^p 。 $L^p([a,b];\ \mathbb{R}^n)$和 $L^\infty([a,b];\ \mathbb{R}^n)$（或 $C([a,b];\ \mathbb{R}^n)$）中的范数分别记为 $\|\cdot\|_p$和 $\|\cdot\|_\infty$。区间 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的所有绝对连续函数组成的集合记为 $AC([a,b];\ \mathbb{R}^n)$，而 $\mathcal{M}_{m\times n}([a,b])$表示定义在 $[a,b]$上的 $m\times n$-矩阵值函数集合。若 h 是一个 BV 函数，且其为有界变差函数，即 $h\in BV([a,b];\ \mathbb{R}^n)$，则记为 h 函数，其中 $V_a^b(h)<\infty$， $V_a^b(h)$是 h的全变差。我们用$NBV[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上 BV 函数的规范化空间，该空间由满足 $\Omega(a)=0$ 且在 (a,b) 上右连续的 BV函数 Ω 组成（例如参见 [26, 第115页]）。集合 $C^*([a,b];\ \mathbb{R})$表示 $C([a,b];\ \mathbb{R})$的对偶空间，并赋予上确界范数。 $C^*([a,b];\ \mathbb{R})$上的范数记为$\|\cdot\|_{\mathrm{T.V.}}$，即诱导范数。根据黎斯表示定理，$C^*([a,b];\ \mathbb{R})$中的元素可视为属于 $\mathfrak{M}([a,b])$，即 $[a,b]$ 上赋予弱星拓扑的有限有符号 Radon 测度集合。因此， $C^*([a,b];\ \mathbb{R})$中的每个元素都对应于 $NBV[a,b]$ 中的唯一元素，二者通过斯蒂尔切斯积分相关联，且具有相同的全变差。我们用 $C^{\oplus}(a,b)$表示 $C^*([a,b];\ \mathbb{R})$的子集，其中的元素在 $C([a,b];\ \mathbb{R})$内的非负值函数上取非负值。对于紧子集$S\subset\mathbb{R}^d$， $C(S;\ \mathbb{R}^n)$表示从 S 到 $\mathbb{R}^n$的连续函数集合。我们用 $W^{k,p}([a,b];\ \mathbb{R}^n)$、 $k\in\mathbb{N}$和 $p\in[0,+\infty]$表示经典索伯列夫空间。注意，本文中的索伯列夫空间 $W^{1,2}([a,b];\ \mathbb{R}^n)$采用范数 $\|x(\cdot)\|_{W^{1,2}}:=\|x(\cdot)\|_\infty+\|\dot{x}(\cdot)\|_2$。因此，序列 x_n 在空间 $W^{1,2}([a,b];\ \mathbb{R}^n)$的范数拓扑下强收敛

等价于 x_n 在 $[a,b]$ 上的一致收敛，以及其导数 $\dot{x}_n$在 L^2 中的强收敛。最后，若函数 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 具有局部利普希茨导数且 Fr´échet 可微，则称其为 $\mathcal{C}^{1,1}$。

2.2 非光滑分析中的概念

我们首先列出一些标准概念和事实，建议读者参阅专著 [11], [27], 和 [36]。设 C 是 $\mathbb{R}^n$. 的非空闭子集。对于 $x \in C$，集合 C 在 x 处的近端法锥、Mordukhovich法锥（亦称极限法锥）和 Clarke法锥分别记为 $N_C^P(x)$、$N_C^L(x)$ 和 $N_C(x)$。利用 [11, 命题 1.1.5(b)],，我们可以推得，这三种法锥具有一项重要的局部性质：若 $\mathbb{R}^n$ 中的两个闭集在 x的某个邻域内相同，则这两个集合在 x 处具有相同的法锥（近端法锥、Mordukhovich法锥或 Clarke法锥）。Mordukhovich法锥的一项重要特征是，多值映射$N_C^L(\cdot)$具有闭值和闭图。另一方面，当 C为凸集时，集合C 的近端法锥、Mordukhovich法锥和 Clarke法锥与众所周知的凸集法锥一致。

对于 $\rho > 0$，如果集合 C 满足近端法不等式（见 [11, 命题 1.1.5(a)], ），则称其为 ρ-近端正则的；该不等式对 $\sigma = \frac{1}{2\rho}$成立，对所有 $x \in C$以及所有在 $N_C^P(x)$ 中的 ζ单位向量均成立。特别地，每个凸集对任意 $\rho > 0$ 都是 ρ-近端正则的；每个具有 $\mathcal{C}^{1,1}$ 边界的紧集都是 ρ-近端正则的，其中 ρ 取决于边界参数化梯度的 Lipschitz 常数。注意，对于 ρ-近端正则集 C，对所有 $x \in \mathbb{R}^n.$，都有 $N_C^P(x) = N_C^L(x) = N_C(x)$。关于近端正则性及其相关性质（例如正达到、近端光滑性、外球条件和 φ_0-凸性）的更多信息，参见 [12, 15, 21, 31, 34]。

下文将用到以下几何性质。若闭集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 在点 $x \in A$ 处满足：经过正交矩阵变换后，集合 A 在 x 附近可视为某个利普希茨连续函数的上图，则称 $A \subset \mathbb{R}^n$ 在该点处为上图Lipschitz（或呈楔形）。若对所有 $x \in A$ 都成立，则简称 A 为上图Lipschitz。Rockafellar 在 [35] 中首次提出了这一几何定义。 A 在 x 处的上图 Lipschitz 性质，也可以通过 A 在 x 处的 Clarke 切锥的拓扑内部非空来刻画；这又等价于 A 在 x 处的 Clarke法锥具有尖性，即 $N_A(x) \cap -N_A(x) = \{0\}$，参见 [9, 定理 7.3。1]。注意，凸集为上图Lipschitz，当且仅当其内部非空。有关这一性质的更多信息，请参见 [9, 11, 36]。另一方面，若存在 $\alpha \geq 0$ ，使得集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 中任意两点 x、 y 都可以由一条折线 γ 连接，且该折线位于 A 中并满足 $l(\gamma) \leq \alpha\|x-y\|$，则称集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为拟凸集，其中 $l(\gamma)$ 表示 γ 的长度。本文中， C 的拟凸性对于将函数 φ 从 C 扩展到 $\mathbb{R}^n$ 同时保留其特殊性质至关重要（见引理 3.2）。关于这一概念的更多说明，请参见 [4]。

接下来，我们回顾近端次微分、Mordukhovich 次微分和 Clarke 次微分，以及 Clarke 广义雅可比矩阵和广义 Hessian 的标准概念（见 [9, 11, 27, 36]）。我们还列出 [33, 38] 中引入并研究的非标准次微分概念；由于它们严格小于相应的标准概念，因此对本文的研究至关重要。

对于标准概念，给定下半连续函数 $G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$，且 $x \in \operatorname{dom} G$，函数 G 在 x 处的近端次微分、Mordukhovich（或极限）次微分和 Clarke 次微分分别记为 $\partial^P G(x)$、$\partial^L G(x)$ 和 $\partial G(x)$。根据极限法锥的性质，$\partial^L G(\cdot)$ 具有闭图和闭值。注意，若 $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} G)$ 且 G 在 x 附近是利普希茨函数，则 [9, Theorem 2.5.1] 表明，函数 G 在 x 处的 Clarke 次微分与其在 x 处的 Clarke 广义梯度相同，后者也记为 $\partial G(x)$。若 G 在 $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} G)$ 附近为 $\mathcal{C}^1$,1，则 $\partial^2 G(x)$ 表示函数 G 在 x 处的 Clarke 广义 Hessian。对于在 $x \in \mathbb{R}^n$ 附近为利普希茨函数的 $H\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$，函数 H 在 x 处的 Clarke 广义雅可比矩阵记为 $\partial H(x)$。

对于非常规概念，给定一个下半连续函数$G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$，$S \subset \operatorname{dom} G$为闭集且具有非空内部，并且 $x \in \operatorname{cl}(\operatorname{int} S)$，我们将“函数 G 在点 x处相对于 $\operatorname{int} S$ 的极限次微分”定义为

$$\partial_\ell^L G(x) := \left\{ \lim_i \zeta_i : \zeta_i \in \partial^P G(x_i),\ x_i \in \operatorname{int} S,\ \text{and } x_i \xrightarrow{G} x \right\}. \tag{3}$$

其中，$x_i \xrightarrow{G} x$ 表示 $x_i \longrightarrow x$ 且 $G(x_i) \longrightarrow G(x)$。如果 $\operatorname{dom} G$ 为闭集，且 int (dom G) $\neq \emptyset$，并且 G 在 int(dom G) 上局部利普希茨，那么对于$x \in$ cl (int (dom G))，我们将“函数 G在 x处的扩展 Clarke广义梯度”记作 $\partial_\ell G(x)$，定义为

$$\partial_\ell G(x) := \operatorname{conv}\left\{ \lim_{i\longrightarrow\infty} \nabla G(x_i) : x_i \xrightarrow{\mathcal{O}} x \text{ and } \nabla G(x_i) \text{ exists } \forall i \right\}, \tag{4}$$

其中，$\mathcal{O}$ 是 int (dom G) 的任意全测度子集。如果 G 在 int (dom G) 上为 $\mathcal{C}^{1,\,1}$，且 $x \in$ cl (int(dom G))，我们类似于 $\partial_\ell G(x)$，将“函数 G 在 x处的扩展 Clarke 广义 Hessian”定义为

$$\partial_\ell^2 G(x) := \operatorname{conv}\left\{ \lim_{i\longrightarrow\infty} \nabla^2 G(x_i) : x_i \xrightarrow{\mathcal{O}} x \text{ and } \nabla^2 G(x_i) \text{ exists } \forall i \right\}, \tag{5}$$

其中，$\mathcal{O}$ 是 int(dom G) 的任意全测度子集。对于满足 $\operatorname{int} S \neq \emptyset$ 的闭集 $S \subset \mathbb{R}^n$，若 G 在包含 S的开集上是 $\mathcal{C}^{1,\,1}$，则对于 $x \in S$，我们将“ G 相对于 $\operatorname{int} S$ 在 x处的 Clarke 广义 Hessian”定义为

$$\partial_\ell^2 G(x) := \operatorname{conv}\left\{ \lim_{i\longrightarrow\infty} \nabla^2 G(x_i) : x_i \xrightarrow{\mathcal{O}} x \right\}, \tag{6}$$

其中，$\mathcal{O}$ 是 int S的任意全测度子集。现在设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为满足 $\operatorname{int} S \neq \emptyset$的闭集，且 $H\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 在 int S上局部利普希茨连续。于是对于$x \in$ cl (int S)，我们将“ H 在 x处的扩展 Clarke 广义 Jacobian”定义为

$$\partial_\ell H(x) := \operatorname{conv}\left\{ \lim_{i\longrightarrow\infty} JH(x_i) : x_i \xrightarrow{\mathcal{O}} x \text{ and } JH(x_i) \text{ exists } \forall i \right\}, \tag{7}$$

其中 $\mathcal{O}$ 是 int 的任意全测度子集 S 且 J 是雅可比算子。最后，当由 (4)、(5)、(7) 或 (6) 定义的集合为单元素集时，我们将分别使用记号 ∇_ℓ 和 ∇_ℓ^2代替 ∂_ℓ 和 ∂_ℓ^2。

3 假设、推论与已知结果

本节将介绍关于 (P) 中数据的假设，并给出这些假设的一些重要推论。我们还将介绍 [33, 第 4 节和第 5] 节中的一些必要结果；这些结果研究了可测控制下 (D_{γ_k}) 与 (D) 之间的联系。本文的每项结果都需要采用这些假设中的一组特定的假设。此外，文中还陈述了 (A1) 的一个局部版本，并在相关位置加以使用。

¯A1：存在 $M>0$ 和 $\tilde{\rho}>0$，使得 f 在 $C\times(\mathbb{U}+\tilde{\rho}B)$¯上是 M-利普希茨的，且对所有 $(x,u)\in C\times(\mathbb{U}+\tilde{\rho}B)$，都有 $\|f(x,u)\|\le M$。
A2：集合 $C:=\operatorname{dom}\varphi$ 由 $C=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \psi(x)\le 0\}$ 给出，其中$\psi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$.A2.1：存在 $\rho>0$，使得 ψ 在 $C+\rho B$上是 $\mathcal{C}^{1,\,1}$。A2.2：存在一个常数 $\eta>0$，使得对所有 $x:\ \psi(x)=0$，都有 $\|\nabla\psi(x)\|>2\eta$。A2.3：函数 ψ 是强制的，即 $\lim_{\|x\|\longrightarrow\infty}\psi(x)=+\infty$. A2.4：集合 C 具有连通内部。[1]

A3：函数 φ 在 C 上是全局利普希茨的，且在 $\operatorname{int}C$上，$\mathcal{C}^1$ 具有全局利普希茨性。此外，函数 $\nabla\varphi$ 在 $\operatorname{int}C$上是全局利普希茨的。
A4：对于集合 C_0、C_1和 $U(\cdot)$，有：A4.1：集合 $C_0\subset C$ 非空且为闭集。A4.2：$U(\cdot)$的图是一个 $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$ 可测集，并且对于 $t\in[0,1]$，$U(t)$是闭集，且关于 t一致有界。A4.3：集合 $C_1\subset\mathbb{R}^n$ 非空且为闭集。A4.4：多值映射 $U(\cdot)$ 是下半连续的。

Remark 3.1 在 (A2.3) 中对 ψ 的强制性假设，仅用于确保闭集 C的有界性，因此，该条件可替换为 C 有界。另一方面，对于定义为函数 ψ的次水平集的 $C\subset\mathbb{R}^n$，可以证明：

(*i*) 当 C 非空且紧、ψ 仅在 $C+\rho B$ 上是 $\mathcal{C}^1$，并且满足相关条件时，存在 $\varepsilon>0$ 使得 (A2.2)

$$x\in C\text{ and }\|\nabla\psi(x)\|\le\eta\implies\psi(x)<-\varepsilon. \tag{8}$$

(*ii*) 当 ψ仅在 $\mathcal{C}^1$ 上是 $C+\rho B$并满足 (A2.2)-(A2.3) 时，由 [33, 引理 3.3],(a) $\operatorname{bdry}C\ne\emptyset$和 $\operatorname{bdry}C=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \psi(x)=0\}$，(b) $\operatorname{int}C\ne\emptyset$和 $\operatorname{int}C=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \psi(x)<0\}$.

以下关于紧集 C 的重要性质见于 [38, 命题 3.1],，其中假设 ψ 在整个 $\mathbb{R}^n$ 上是 $\mathcal{C}^{1,\,1}$ 的。然而，在 [33] 中对该命题的证明进行了略微修改，从而得出这些性质实际上在我们的假设 (A2.1) 下也成立。

¯在本文中，M_ψ 表示 $\|\nabla\psi(\cdot)\|$ 在紧集 C上的一个上界，而 $2M_\psi$ 是 $\nabla\psi(\cdot)$ 在紧集 $C+\frac{\rho}{2}\bar{B}$ 上的 Lipschitz 常数，其取值足够大，使得 $M_\psi\ge\frac{4\eta}{\rho}$.

[1]当 φ 可适当地延拓到 $\mathbb{R}^n$时，正如 φ 是 *indicator* 的 C的情形，参见注 3.3，可省略此条件。

引理 3。**2** [33, 引理 3。4] *Under* (A2.1)-(A2.3) *we have the following*:

(*i*) *The nonempty set* C *is compact amenable in the sense of* [36] *epi-*, ( ) , cl (int) *Lipschitzian* $C =$ C *and* C *is* η *-prox-regular.* M_ψ

(*ii*) *For all* $x \in$ 边界 C *we have* $N_C(x) = N_C^P(x) = N_C^L(x) = \{\lambda \nabla \psi(x) : \lambda \geq 0\}$.

(*iii*) *If also* (A2.4) *holds, then* 积分C *is quasiconvex. Furthermore, if in addition* (A3) *is satisfied, then there exists a function* $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ *such that*:

- Φ *is bounded on* $\mathbb{R}^n$ *and* $\Phi\ x\ = \varphi\ x$ *for all* $x \in C$. , 0 0
- Φ *and* $\nabla \Phi$ *are globally Lipschitz on* $\mathbb{R}^n$.
- *For all* $x \in C$ *we have*

$$\partial \varphi(x) = \{\nabla \Phi(x)\} + N_C(x). \tag{9}$$

Remark 3.3

(*i*) 在引理 3.2(*iii*) 中，假设 (A2.4) 仅用于确保 C 的拟凸性，以便得到 Φ 对 φ的延拓。因此，当此类延拓可直接获得时，条件 (A2.4) 可省略。例如，当 φ 在 C上为常数时，便是如此。因此，当 φ 是 *indicator* 的函数时， C 无需假设 (A2.4)。

(*ii*) 根据引理 3.2(*iii*) φ 存在一个 $\mathcal{C}^1$-延拓 Φ ，定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，满足方程 (9)，且对于某个 $K > 0$,

$|\Phi(x)| \leq K$， $\|\nabla \Phi(x)\| \leq K$，以及 $\|\nabla \Phi(x) - \nabla \Phi(y)\| \leq K\|x - y\|$， $\forall x$， $y \in \mathbb{R}^n$.

利用 (9)，(*D*) 可等价地表述为关于 C的法锥以及 Φ 对 φ的延拓，如下所示

$$(D) \begin{cases} \dot{x}(t) \in f_\Phi(x(t), u(t)) - N_C(x(t)), \ \text{a.e. } t \in [0,1], \\ x(0) \in C_0 \subset C, \end{cases}$$

其中 f_Φ: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 定义为

$$f_\Phi(x,u) := f(x,u) - \nabla \Phi(x), \quad \forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{10}$$

因此，本文将交替使用 (*D*的原始表述（用 $\partial\varphi$ 和 f表示）以及备注 3.3 给出的重述形式（用 $N_C(\cdot)$ 和函数 f_Φ表示）。注意，假设 (A1)-(A3) 意味着，对于 M : $= M + K$， f_Φ 满足以下性质:

(A1)$_\Phi$: 该函数在 M-Lipschitz 连续，定义于 $C \times (\mathbb{U} + \tilde{\rho}B)$，其中 $\|f_\Phi(x,\ u)\| \leq M$ f_Φ p for all $(x,u) \in C \times (\mathbb{U} + \tilde{\rho}\bar{B})$.

我们定义 $\mathcal{U}$ 为

$$\mathcal{U} := \{u : [0,1] \to \mathbb{R}^m : u \text{ is measurable and } u(t) \in U(t),\ t \in [0,1] \text{ a.e.}\}.$$

Remark 3.4 利用 [38, 引理 4。3], 容易看出，假设 (A1)–(A3) 以及 C 被某个) $M_C > 0$ 有界，可推出相应于 (x ， x_0) 的任意解 u均 $\in C_0 \times \mathcal{U}$ 满足 (D)

$$x(t) \in C, \ \forall t \in [0,1]; \quad \|x\|_\infty \leq M_C; \quad \text{and } \|\dot{x}\|_\infty \leq 2\bar{M}. \tag{11}$$

对于给定的 $x(\cdot)$: $[0,1] \to \mathbb{R}^n$，本文中我们始终使用以下记号: $I^0(x)$: $= \{t \in [0,1] : x(t) \in$ 边界 $C\}$ 和 $I^-(x) := [0,1] \setminus I^0(x)$。

下一个结果通过标准控制系统的解来刻画（D）的解，该标准控制系统包含一个额外的控制 ξ，并满足混合控制状态退化约束，$\xi(t)\psi(x(t)) = 0$。充分性部分显而易见，且已在 [38], 中用到；必要性部分则可通过应用 Filippov 选择定理（[37, 定理 2.3。13]）得出。

引理 **3 5** *Assume that* 1 3 $[0,1]$ $\mathbb{R}^n$ *with*. (A -(A) x 0 $\in C_0$ *and* x t $\in C$ *for all* $t \in [0,1]$. *Then* x *is a solution for* D *correspond-hold. Let* $u \in \mathcal{U}$ *and* $x \in AC(;)()0,()$ *ing to the control* u *if and only if there exists a nonnegative measurable function* ξ*supported on* $I^0(x)$ *such that* (x,u,ξ) *satisfies*

$$\dot{x}(t) = f_\Phi(x(t),u(t)) - \xi(t)\nabla\psi(x(t)), \quad t \in [0,1] \text{ a.e.} \tag{12}$$

In this case, the nonnegative function ξ *supported in* $I^0(x)$ *with* $(x,\ u,\ \xi)$ *satisfyingequation* (12) *is unique, belongs to* $L^\infty([0,1];\ \mathbb{R}^+)$ *and*

$$\begin{cases} \xi(t) = 0 & \text{for } t \in I^-(x), \\ \xi(t) = \frac{\|\dot{x}(t) - f_\Phi(x(t),u(t))\|}{\|\nabla\psi(x(t))\|} \in \left[0, \frac{\bar{M}}{2\eta}\right] & \text{for } t \in I^0(x) \text{ a.e.}, \\ \|\xi\|_\infty \le \frac{\bar{M}}{2\eta}. \end{cases} \tag{13}$$

全文中我们将使用以下记号，其中 η^-和 M 分别是 (A2.2) 和 $(A1)_\Phi$ 中给出的常数。

- $(\gamma_k)_k$ 是满足以下条件的一个序列

$$\gamma_k > \frac{2\bar{M}}{\eta} \text{ for all } k \in \mathbb{N}, \text{ and } \gamma_k \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{} \infty. \tag{14}$$

- 序列（α_k）$_k$ 定义为

$$\alpha_k := \frac{\ln\left(\frac{\eta\gamma_k}{2\bar{M}}\right)}{\gamma_k}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{15}$$

根据（14）和（15，可得

$$\gamma_k e^{-\alpha_k\gamma_k} = \frac{2\bar{M}}{\eta}, \ \alpha_k > 0, \ \alpha_k \searrow \text{ and } \lim_{k\longrightarrow\infty} \alpha_k = 0. \tag{16}$$

- 序列（ρ_k）$_k$ 定义为 $\rho_k := \frac{\alpha_k}{\eta}$对所有 $k \in \mathbb{N}$。根据（16），可得 $\rho_k > 0$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\rho_k \searrow$ 且 $\lim_{k\longrightarrow\infty} \rho_k = 0$.
- 对于 $k \in \mathbb{N}$，定义集合

$$C(k) := \{x \in C : \psi(x) \le -\alpha_k\}. \tag{17}$$

系统（D_{γ_k}）定义如下

$$(D_{\gamma_k}) \begin{cases} \dot{x}(t) = f_\Phi(x(t),u(t)) - \gamma_k e^{\gamma_k\psi(x(t))}\nabla\psi(x(t)) \ \text{ a.e. } t \in [0,1], \\ x(0) \in C. \end{cases}$$

在 [33] 中展示的一个重要性质是 C 对于动力系统（D_{γ_k}）的不变性，见 [33, 引理 4。1]这一事实是消除（D_{γ_k}）中状态约束的依据，该系统表示对（D）的良好近似（见定理 3.9和推论3.12）。

引理 3.6（ C 的不变性与一致收敛） *Let* (A1)-(A3) *be satisfied.*
Then for each k *the system* D_{γ_k} *with given* $x\ 0 = c_{\gamma_k} \in C$ *and* $u_{\gamma_k} \in \mathcal{U}$ *has* $a,,()$ *unique solution* $x_{\gamma_k} \in W^{1\,2}\ [0,1]\ \mathbb{R}^n$ *such that* $x_{\gamma_k}\ t\ \in C$ *for all* $t \in [0,1]$ *and* $()\ ,,(\ ;\ )\ ()\ ,$ *,for* $\alpha_0 > 0$ *a bound of* $(c_{\gamma_k})_k$ *we have*

$$\|x_{\gamma_k}\|_\infty \le \alpha_0 + \sqrt{\bar{M}^2 + 2} \quad \textit{and} \quad \int_0^1 \|\dot{x}_{\gamma_k}(t)\|^2 dt \le \bar{M}^2 + 2. \tag{18}$$

Hence being equicontinuous and uniformly bounded $x_{\gamma_k}\ k$ *admits a subsequence*$,,()$, *that converges uniformly to some* $x \in W^{1\,2}\ [0,1]\ \mathbb{R}^n$ $(\ ;\ )$ *whose values are in* C *and whose derivative* $\dot{x}_{\gamma_k}$ *converges weakly in* L^2 *to* $\dot{x}$.

集合 $C(k)$ 的性质以及序列 $(\rho_k)_k$ 的作用已在[33, 定理 3.1 和注 3 中确立。6]此处列出我们认为对本文重要的内容，这些内容用于构造逼近问题 (P_{γ_k}) 和 (P_{γ_k}) 的初始约束集。

定理 3.7 [33] *Under* (A2.1)-(A2.3) *the following assertions hold*:

(*i*) *For all* k, *the set* $C(k) \subset \operatorname{int} C$ *and is compact, and, for* k *sufficiently large,*
- 边界 $C(k) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \psi(x) = -\alpha_k\}$ *and* 内点 $C = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \psi(x) < -\alpha_k\}$;
- $(C(k))_k$ *is a nondecreasing sequence whose Painlevé-Kuratowski limit is* C.

¯(*ii*) *There exist* $r_o > 0$ *and* $k \in \mathbb{N}$ *such that*

$$\big[C \cap \bar{B}_{r_o}(c)\big] - \rho_k \frac{\nabla\psi(c)}{\|\nabla\psi(c)\|} \subset \operatorname{int} C(k), \quad \forall k \ge \bar{k} \quad \textit{and} \quad \forall c \in \operatorname{bdry} C. \tag{19}$$

ˆ(*iii*) *For* $c \in \operatorname{int} C$, *there exist* $k_c \in \mathbb{N}$ *and*$\hat{r}_c > 0$ *satisfying*

$$\bar{B}_{\hat{r}_c}(c) \subset \operatorname{int} C(\hat{k}_c) \subset \operatorname{int} C(k), \quad \forall k \ge \hat{k}_c. \tag{20}$$

Remark 3.8 根据定理 3.7，对于任意 $c \in C$，存在一个序列 $(c_k)_k$，使得当 k 足够大时，$c_k \in \operatorname{int} C(k)$ 且 $c_k \longrightarrow c$。事实上，对于 $c \in \operatorname{bdry} C$，令 $c_k := c - \rho_k \frac{\nabla\psi(c)}{\|\nabla\psi(c)\|}$ 对所有 k 成立；对于 $c \in \operatorname{int} C$，则令 $c_k = c$ 对所有 k 成立。

下述定理将在本文中反复使用。它是 [33, 定理 4.1 & 引理 4.2] 的一个特例。该定理给出了函数 x 的解 x_{γ_k}（D_{γ_k}）的一致极限成为（D）的解的充分条件，并通过引理 3.5，将与 x 对应的乘子函数 ξ 与和 x_{γ_k} 相关联且定义如下的正连续惩罚乘子 ξ_{γ_k}联系起来

$$\xi_{\gamma_k}(\cdot) := \gamma_k e^{\gamma_k \psi(x_{\gamma_k}(\cdot))}. \tag{21}$$

定理 3 9 $D_{\gamma_k}\ k\ \xi_{\gamma_k}\ D\ \xi$ *Assume that* 1 4 1 *hold.*。(() & 近似 ( ) &) (A)-(A .) ( )
Let x_{γ_k} *be the solution of* D_{γ_k} *corresponding to* $c_{\gamma_k}\ u_{\gamma_k}$ *as in* 3 6 *and* (,) 引理。$,x \in W^{1\,2}\ [0,1]\ \mathbb{R}^n$ *be its uniform limit. Then the following statements are valid* $,(\ ;\ ),:$

(*i*) *The sequence* ξ_{γ_k} $_k$ *admits a subsequence we do not relabel that converges* ( ) , , () *weakly in* L^2 *to a nonnegative function* $\xi \in L^2$ *supported on* I^0 x .

(*ii*) *If for some* $u \in \mathcal{U}$, *the sequence* $u_{\gamma_k}(t)$ a .e. $\xrightarrow{t} u$ (t *then* x *is the unique solution*) ( ) (,) (, ,) ( ) ( ) *of* D *corresponding to* x_0 u *and* x u ξ *satisfies equations* 12 - 13 . *In*, (;) ( ) *particular* $\xi \in L^\infty$ $[0,1]$ $\mathbb{R}^+$ *and is supported on* I^0 x .

Remark 3.10 注意，在 [33],中建立定理 3.9(*ii*) 时，用于证明 (x, u, ξ) 满足 (12) 的论证并不依赖于通过 (21) 定义 ξ_{γ_k}，因此，当 ξ_{γ_k} 是任意一个在 L^2 中弱收敛到 ξ 的 L^2-函数序列时，该证明仍然有效。因此，当 $(x_j, u_j, \xi_j)_j$ 是一个满足 (12) 的序列，且 x_j 一致收敛到 x、$u_j(t)$ 几乎处处逐点收敛到 $u(t)$，并且 ξ_j 在 L^2 中弱收敛到 ξ 时，我们有 (x, u, ξ) 满足 (12)。

以下结果摘自[33, 定理 5。1], 其中推导出了更多性质。这揭示了在定理 3.9 中从子集 x_{γ_k} 中选取（D_{γ_k}）的解 C（k），该子集在（17）中定义，其重要意义。

定理 3.11 ($x_{\gamma_k} \in C(k)$, $\dot{x}_{\gamma_k}$ & ξ_{γ_k} 有界) *Assume* (A1)-(A4.1) *hold. Let* (c_{γ_k}) $_k$ *be a sequence such that* $c_{\gamma_k} \in C(k)$ *for* k *sufficiently large. Then there exists* $k_o \in \mathbb{N}$ *such that for all sequences* $(u_{\gamma_k})_k$ *in* $\mathcal{U}$ *and for all* $k \geq k_o$, *the solution* x_{γ_k}*of*(D_{γ_k}) *corresponding to*$(c_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ *satisfies*:

(*i*) $x_{\gamma_k}(t) \in C(k) \subset \operatorname{int} C$ *for all* $t \in [0,1]$.

(*ii*) $0 \leq \xi_{\gamma_k}(t) \leq \frac{2\bar{M}}{\eta}$ *for all* $t \in [0,1]$.

(*iii*) $\|\dot{x}_{\gamma_k}(t)\| \leq \bar{M} + \frac{2\bar{M}\bar{M}_\psi}{\eta}$ *for* a.e. $t \in [0,1]$.

下一个结果是[33, 推论5。1]的简化版本。它是定理3.9的逆命题，因为它确认，任意给定的（D）的解都可由一个（D_{γ_k}）的解逼近，且该解始终处于内部之内 C，并具有定理 3.11中所展示的所有性质。

推论 **3 12** D C k *Assume*。（ ( ) 的解由 ( ) *that* 1 4 1 *are satisfied. Let* $\bar{x}$ *be the solution of* D *corresponding to* 中的序列逼近）（A) - (A .) ( ) ($\bar{x}$ 0 $\bar{u}$ $\bar{c}_{\gamma_k}$ $_k$ *the sequence in* 3 8 *that converges to*( )) $\in C_0 \times \mathcal{U}$. *Consider*( ) $c = \bar{x}$ 0 $\bar{u}$. *Then there exists* 备注 . : ( ) *and* $\bar{x}_{\gamma_k}$ *the solution of*(D_{γ_k}) *corresponding to*$(\bar{c}_{\gamma_k},)$, $k_o \in \mathbb{N}$ *such that* $\bar{x}_{\gamma_k}$ *and its associated* ξ_{γ_k} *via* (21) *satisfy the conclusions* (*i*)-(*iii*) *of* 定理 3.11 *for all* $k \geq \hat{}k_o$, *and the following holds true*: *The sequence* $\bar{x}_{\gamma_k}$ *admitsa subsequence, we do not relabel, that converges uniformly to* $\bar{x}$, *the correspondingsubsequence for* $\bar{\xi}_{\gamma_k}$ *converges weakly in* L^2 *to some* $\bar{\xi} \in L^\infty$, *and* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\xi})$ *satisfies* (12)-(13). *That is,* $\bar{\xi}$ *is the unique function corresponding to* $(\bar{x}, \bar{u})$ *via* 引理 3.5。

4 主要结果

本节介绍本文的主要结果，即当控制为D时，对（D_{γ_k}）进行强逼近（定理 $W^{1,2}$（定理4.1和推论4.2）、（P）的最优解存在性定理（定理

4.3）、（P）的强收敛连续逼近（定理4.6），以及以弱庞特里亚金型最大值原理形式给出的非光滑必要最优性条件（定理4.8）。

4.1 (D_{γ_k})借助 $W^{1,2}$控制强逼近(D)

以下定理构成了本文的核心。它表明，当底层控制空间为 $\mathcal{W}$ （定义于（1））时，定理 $\dot{x}_{\gamma_k}$ 中与逼近序列 x_{γ_k} 对应的速度 $\dot{x}_{\gamma_k}$ 和函数 ξ_{γ_k}，在 x_{γ_k} 定理3.11中强收敛于 L^2，分别收敛到 $\dot{x}$ 和 ξ，即定理3.9中得到的函数。本定理的证明推迟至第5节。

定理 4.1（速度序列的强收敛 $\dot{x}_{\gamma_k}$） *Let the assumptions* (A1)-(A4.2) *be satisfied. Consider a sequence* x_{γ_k} *solving* (D_{γ_k}) *for some* $(c_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ *where* $c_{\gamma_k} \in C$ $c_{\gamma_k} \longrightarrow x_0 \in C_0$ $u_{\gamma_k} \in \mathcal{W}$ *and* , , , $(\|\dot{u}_{\gamma_k}\|_2)$ $_k$ *is bounded. Denote by* (x, ξ) *the pair in* $W^{1,2} \times L^2$ *obtained via*引理 3.6 *and*定理 3.9(i) *such that a subsequence not relabeled of* x_{γ_k} ξ_{γ_k} *has* x_{γ_k} *converging uniformly in the set* $C(\,)(\,,)(\,,)(\,,)$, : *to* x *and* $\dot{x}_{\gamma_k}$ ξ_{γ_k} *converging weakly in* L^2 *to* $\dot{x}$ ξ *. Then the following hold*

(i) *There exist a subsequence* (*not relabeled*) *of* u_{γ_k}, *and* $u \in \mathcal{W}$ *such that* $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ *converges uniformly to* (x, u) *and* $(\dot{x}_{\gamma_k}, \dot{u}_{\gamma_k}, \xi_{\gamma_k})$ *converges weakly in* L^2 *to* $(\dot{x}, \dot{u}, \xi)$ *. The function* x *is the unique solution to* (D) *corresponding to* (x_0, u) *and* x u ξ *satisfies* 12 13 *. In particular* $\xi \in L^\infty$ *and is supported on* $(,,)(\,)$-$(\,),(\,)$ I^0 x *.*

(ii) *Assume that* $c_{\gamma_k} \in C$ k *in addition to the conclu-*() *sions in* 3 11 *the following holds The sequence* $\dot{x}_{\gamma_k}$ ξ_{γ_k} *for* k *large. Then,* 定理。, : (,) *is in* $W^{1,2}$ $\mathbb{R}^n$ $\times$ $W^{2,2}$ $\mathbb{R}^+$ *and*, $([0,1];\ )$, $([0,1];\ )$ *has uniform bounded variations,admits a subsequence, not relabeled, that converges pointwise, and hence,strongly in* L^2 *to* $\dot{x}$ ξ *with* $\dot{x} \in BV\,[0,1]\ \mathbb{R}^n$ *and* $\xi \in BV\,[0,1]\ \mathbb{R}^+$ *. In*(,)(;)(;)*this case* 12 - 13 *hold for all* $t \in [0,1]$ *and* $x_{\gamma_k} \longrightarrow x$ *strongly in the norm*, ()(), , (;) *topology of* $W^{1,2}\ [0,1]\ \mathbb{R}^n$ *.*

将定理 4.1(ii) 应用于 $\bar{c}_{\gamma_k}$, $u_{\gamma_k} := \bar{u}$, $\bar{x}_{\gamma_k}$ 和 ξ_{γ_k}，即通过 (21) 与 $\bar{x}_{\gamma_k}$ 相关联的函数，我们得到以下推论，说明在采用 $W^{1,2}$-控制时，推论 3.12 中的结果如何得到改进。

推论 **4 2** D_{γ_k} k D *If in addition to the assump-* . (() 强逼近 ()) , 推论 . *tions of* 3 12 *we have that* $\bar{x}$ *solves* D *for* $\bar{u} \in \mathcal{W}$ $\mathcal{U}$ *then* $\bar{\xi}_{\gamma_k}$, () （不仅在） *,therein, converges pointwise to* $\bar{\xi} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$ *with* $\bar{\xi}$ *satisfying*(52) *and* $\bar{x}_{\gamma_k}$, *therein* $\mathbb{R}^n$, *converges to* $\bar{x}$ *strongly in the norm topology of* $W^{1,2}([0,1];\ )$. *Moreover,* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\xi})$ *satisfies*(12)-(13) *for all* $t \in [0,1]$, *and* $\dot{\bar{x}} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$.

4.2 (P) 存在最优解

与 [6, 8, 定理 4.1], 类似，在采用离散化技术的情况下，基于推论P，建立问题 (P) 的最优解存在性定理4.2。

定理 4.3（(P) 的解的存在性） *Assume hypotheses* (A1)-(A4.3),g: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *is lower semicontinuous, and that a minimizing sequence* (x_j, u_j) *for* (P) *exists such that* $(\|\dot{u}_j\|_2)_j$ *is bounded. Suppose that* (P) *has at leastone admissible pair* (y_o, v_o) *with* $(y_o(0)\ y_o(1)) \in \operatorname{dom} g$, *then the problem* (P) *admitsa global optimal solution* $(\bar{x}, \bar{u})$ *such that, along a subsequence, we have*

$$x_j \xrightarrow[W^{1,2}([0,1];\,\mathbb{R}^n)]{\text{strongly}} \bar{x}, \quad u_j \xrightarrow[C([0,1];\,\mathbb{R}^m)]{\text{uniformly}} \bar{u}, \quad \text{and} \quad \dot{u}_j \xrightarrow[L^2([0,1];\,\mathbb{R}^m)]{\text{weakly}} \dot{\bar{u}}.$$

*Proof*鉴于（P）存在一个可容许对（y_o, v_o），且（$y_o(0)\ y_o(1)$） $\in \operatorname{dom} g$，则 $\inf_{(x,u)}$（P） $< \infty$. 由于 g是下半连续的，并且（P）的所有可容许解都满足（$x(0)\ x(1)$） $\in C_0 \times$（$C_1 \cap C$），而后者是紧集，因此我们可以推得 $\inf_{(x,u)}$（P）是有限的。另一方面，由于极小化序列（x_j, u_j）$_j$是（P）的可容许对象，它满足（D），且 $x_j(1) \in C_1$。因此，利用序列（$\|\dot{u}_j\|_2$）$_j$有界这一事实，引理 5.1 表明存在（$\bar{x}, \bar{u}$） $\in W^{1,\infty}([0,1];\ \mathbb{R}^n)$ $\times\, \mathcal{W}$满足（D），且 $\bar{x}(1) \in C_1$；其中（x_j, u_j）一致收敛到（$\bar{x}, \bar{u}$），（$\dot{x}_j$）$_j$在 L^2 中 *strongly*收敛到 $\dot{\bar{x}} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$，而 $\dot{u}_j$在 L^2 中弱收敛到 $\dot{\bar{u}}$。因此，（$\bar{x}, \bar{u}$）是（P）的可容许对。由于 g下半连续，且（$\bar{x}, \bar{u}$）是极小化序列（x_j, u_j）$_j$的一致极限，因此可直接推出对（$\bar{x}, \bar{u}$）是问题（P）的最优解。□

4.3 （P）的连续逼近

在寻找（P）的最优过程（$\bar{x}, \bar{u}$）的过程中，构造由适当设计的标准控制问题的最优解组成的连续近似，关键在于其收敛到（$\bar{x}, \bar{u}$）时，必须在所考虑空间的范数拓扑下强收敛，即空间 $W^{1,\ 2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times \mathcal{W}$。推论4.2 已经针对用相同控制$\bar{u}$ 通过（D_{γ_k}）的解来逼近（D）的解（$\bar{x}, \bar{u}$），回答了这一问题，其中逼近在 $W^{1,\ 2}$意义下强收敛。然而，对于（D_{γ_k}）上的最优控制问题， $\bar{u}$ 未必适用于逼近最优解。

在本小节中，我们用（P）上的一列特定最优控制问题来逼近（D_{γ_k}），这些问题具有 特殊的初始和终端状态端点约束（$C_0(k) \subset C(k)$，且 $C_1(k)$ 位于 C_1周围的带状区域内；同时，其目标函数经过特别设计，从而保证存在一个最优控制 u_{γ_k}，且（$\|\dot{u}_{\gamma_k}\|_2$）$_k$一致有界，因此可由定理 强收敛推出最优状态速度收敛4.1。随后，通过对相应逼近问题的最优性条件取极限，建立（P）的必要最优性条件。

对于给定的 $\delta > 0$ 和 $z \in C([0,1];\ \mathbb{R}^s)$，我们将 $\mathbb{R}^s$ 上的¯ ¯围绕 z 的闭 δ管的投影定义为 $\mathbb{B}_\delta(z) := \bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{B}_\delta(z(t))$。

令 $(\bar{x}, \bar{u}) \in W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times \mathcal{W}$为 (P) 的一个 $W^{1,2}$-局部极小值，其对应的 δ. 我们固定 $\delta_o > 0$ 使得

$$\delta_o \le \begin{cases} \min\{\hat{r}_{\bar{x}(0)}, \delta\} & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{int} C, \\ \min\{r_o, \delta\} & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{bdry} C, \end{cases}$$

ˆ其中 $r_o > 0$ 是定理 3.7(ii) 中的常数，且 ˆ$r_{\bar{x}(0)} > 0$ 与 $k_{\bar{x}(0)} \in \mathbb{N}$是定理 3.7$(iii)$ 中与 c相对应的常数：$= \bar{x}(0)$。

在下文余下部分，我们假设 f 满足 (A1) 的以下局部版本：

$$\exists\, \tilde{\rho} > 0 \text{ such that } f \text{ is Lipschitz on } [C \cap \bar{\mathbb{B}}_\delta(\bar{x})] \times [(\mathbb{U} + \tilde{\rho}\bar{B}) \cap \bar{\mathbb{B}}_\delta(\bar{u})]. \quad (*)$$

注意，在假设 (∗) 下，函数 f 可以通过将˜定理应用于 f的每个分量，扩展为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ 一个全局[22, 利普希茨函数 1] 。由于本节余下部分我们只考虑局部最优性概念，因此不失一般性，我们将使用函数 f代替f 。因此，在本节中，若假设 f满足 (f)，则意味着∗也满足假设 (A1)。

我们将适当地构造一列逼近问题 (P_{γ_k})，并证明其最优解在 $W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times \mathcal{W}$ 中强收敛于 ($W^{1,2}$- 局部极小值 $(\bar{x}, \bar{u})$，该极小值属于 (P)。这自然要求逼近问题 (P_{γ_k}) 的定义域包含于 $W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times \mathcal{W}$。初始状态约束取为 $x(0) \in C_0(k)$，其中 $C_0(k)$ 是由下式定义的集合序列：

$$C_0(k) := \begin{cases} C_0 \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(0))\,,\ \forall k \in \mathbb{N}, & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{int} C, \\ \big[C_0 \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(0))\big] - \rho_k \frac{\nabla\psi(\bar{x}(0))}{\|\nabla\psi(\bar{x}(0))\|},\ \forall k \in \mathbb{N}, & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{bdry} C. \end{cases} \quad (22)$$

且终端状态约束为 $x(1) \in C_1(k)$，其中

$$C_1(k) := \big[\big(C_1 \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(1))\big) - \bar{x}(1) + \bar{x}_{\gamma_k}(1)\big] \cap C, \quad k \in \mathbb{N},$$

其中 $\bar{x}_{\gamma_k}$是与 (D_{γ_k}) 对应的解 $(\bar{c}_{\gamma_k},\ \bar{u})$，其中 $\bar{c}_{\gamma_k}$属于$C_0(k)$，$\cap \operatorname{int} C(k)$，当 k 足够大时，并根据备注 3.8 针对 c 定义：$= \bar{x}(0)$，即

$$\bar{c}_k := \begin{cases} \bar{x}(0),\ \forall k \in \mathbb{N}, & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{int} C, \\ \bar{x}(0) - \rho_k \frac{\nabla\psi(\bar{x}(0))}{\|\nabla\psi(\bar{x}(0))\|},\ \forall k \in \mathbb{N}, & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{bdry} C. \end{cases}$$

注意到 $C_0(k)$ 和 $C_1(k)$ 都是闭集，对于 $k \in \mathbb{N}$。另一方面，由于$\rho_{\gamma_k} \longrightarrow 0$，我们有 $\bar{c}_{\gamma_k} \longrightarrow \bar{x}(0)$，推论 3.12 推出，序列 $\bar{x}_{\gamma_k}$ 在 C 上一致收敛到 $\bar{x}$，因此，$\bar{x}_{\gamma_k}(1) \longrightarrow \bar{x}(1)$。此外，在$C_0(k)$ 中，$\rho_k \longrightarrow 0$，那么对于固定的 $\tilde{\rho} > 0$，当 k 足够大时，

$$C_i(k) \subset \underbrace{\big[\big(C_i \cap \bar{B}_\delta(\bar{x}(i))\big) + \tilde{\rho}\bar{B}\big] \cap C}_{\tilde{C}_i(\delta)}, \text{ for } i = 0, 1, \quad (23)$$

$$\text{and } \lim_{k\to\infty} C_0(k) = C_0 \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(0)) \ \&\ \lim_{k\to\infty} C_1(k) = C \cap C_1 \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(1)). \quad (24)$$

*Remark 4.4*注意到，我们可以证明，对于 k足够大时，有 $C_0(k) \subset C(k)$，因此，根据定理 3.11，与满足 D_{γ_k}、c_{γ_k}，u_{γ_k}且满足 $c_{\gamma_k} \in C_0(k)$ 和 $u_{\gamma_k} \in \mathcal{U}$ 的条件的解 (i)-(iii) 的任意解均满足本定理的条件。事实上：

• 对于 $\bar{x}(0) \in$ 积分C，利用 $\delta_o \leq \hat{r}_{\bar{x}(0)}$ 和 (20)，可得

$$\bar{B}_{\hat{r}_{\bar{x}(0)}}(\bar{x}(0)) \subset \operatorname{int} C(k) \subset C(k), \quad \forall k \geq \hat{k}_{\bar{x}(0)}.$$

由此可得

$$C_0(k) := C_0 \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(0)) \subset \bar{B}_{\hat{r}_{\bar{x}(0)}}(\bar{x}(0)) \subset C(k), \quad \forall k \geq \hat{k}_{\bar{x}(0)}.$$

• 对于 $\bar{x}(0) \in$ 边界C，利用 $\delta_o \leq r_o$ 和 $C_0(k)$ 是由 (22) 的第二个方程定义的非空集合，可通过 (19) 得到

$$C_0(k) \subset \operatorname{int} C(k) \subset C(k), \quad \forall k \geq \bar{k}.$$

Remark 4.5 对于 $c \in C_0(k)$ 和 $d \in C_1(k)$，利用极限法锥的局部性质，可分别得到法锥 $N^L_{C_0(k)}(c)$ 和 $N^L_{C_1(k)}(d)$ 关于 $N^L_{C_0}$ 和 $N^L_{C_1}$ 的如下表示

$$N^L_{C_0(k)}(c) = \begin{cases} N^L_{C_0}(c), & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{int} C, \text{ and} \\ & c \in B_{\delta_o}(\bar{x}(0)), \\ N^L_{C_0}\left(c + \rho_k \frac{\nabla\psi(\bar{x}(0))}{\|\nabla\psi(\bar{x}(0))\|}\right), & \text{if } \bar{x}(0) \in \operatorname{bdry} C, \text{ and} \\ & \left(c + \rho_k \frac{\nabla\psi(\bar{x}(0))}{\|\nabla\psi(\bar{x}(0))\|}\right) \in B_{\delta_o}(\bar{x}(0)). \end{cases} \tag{25}$$

$$N^L_{C_1(k)}(d) = N^L_{C_1}(d + \bar{x}(1) - \bar{x}_{\gamma_k}(1)), \ \ \forall d \in (\operatorname{int} C) \cap B_{\delta_o}(\bar{x}(1)). \tag{26}$$

我们引入以下逼近问题序列：

(P_{γ_k})：最小化

$J(x,y,z,u) := g(x(0),x(1)) + \frac{1}{2}\left(\|u(0)-\bar{u}(0)\|^2 + z(1) + \|x(0)-\bar{x}(0)\|^2\right)$

over $(x,y,z,u) \in W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}) \times \mathcal{W}$

such that

$$\begin{cases} (\tilde{D}_{\gamma_k}) \begin{bmatrix} \dot{x}(t) = f_\Phi(x(t),u(t)) - \gamma_k e^{\gamma_k \psi(x(t))}\nabla\psi(x(t)), & t \in [0,1] \text{ a.e.}, \\ \dot{y}(t) = \|\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)\|^2, & t \in [0,1] \text{ a.e.}, \\ \dot{z}(t) = \|\dot{u}(t) - \dot{\bar{u}}(t)\|^2, & t \in [0,1] \text{ a.e.}, \\ (x(0),y(0),z(0)) \in C_0(k) \times \{0\} \times \{0\}, \end{bmatrix} \\ x(t) \in \bar{B}_\delta(\bar{x}(t)) \text{ and } u(t) \in U(t) \cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t)), \ \ \forall t \in [0,1], \\ (x(1),y(1),z(1)) \in C_1(k) \times [-\delta,\delta] \times [-\delta,\delta]. \end{cases}$$

注意，引理 3.6 以及对 $u(\cdot)$ 的约束表明，$(P_{\gamma_k})_k$ 实际上等价于其中包含 $(x,u) \in AC([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}^m)$。

现在我们可以陈述我们的连续逼近结果，该结果与 [6–8, 14]，中相应的结果平行，其中使用了离散近似。该逼近结果的证明见第 5 节。

定理4.6 ((P_{γ_k}) 逼近 (P)) *Let $(\bar{x},\bar{u})$ be a $W^{1,2}$-local minimizer (P) with associated $\bar{\xi} \in L^\infty$ via* 引理 3.5. *Assume that* (A2)-(A4.3) *hold, g is continuous on $C_0\ \delta \times C_1\ \delta$ and for some $\tilde{\rho} > 0$ f is Lipschitz on $[C \cap \mathbb{B}_\delta\ \bar{x}\ ] \times [\ \mathbb{U} + (\ )\ (\ ),(\ )(\ )(\ ),(\ )\ \tilde{\rho}\bar{B} \cap \bar{\mathbb{B}}_\delta\ \bar{u}\ ]$. Then for k sufficiently large the problem P_{γ_k} has an optimal solution*

$(x_{\gamma_k}, y_{\gamma_k}, z_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ *such that, for* ξ_{γ_k} *defined in* (21) *we have, along a subsequence, we do not relabel, that*

$(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k}) \xrightarrow{W^{1,2}\times\mathcal{W}} (\bar{x}, \bar{u})$, $(y_{\gamma_k}, z_{\gamma_k}) \xrightarrow{W^{1,1}\quad\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} ([0,1];)\ (0,0)$ ξ_{γ_k}强 $\xrightarrow[L^2\qquad\mathbb{R}^+]{} ([0,1];)\ \bar{\xi}$,*all the conclusions of*定理 3.11 *hold, including that* $x_{\gamma_k}(t) \in$ int C *for all* $t \in [0,1]$, *and for all* k *sufficiently large,*

$$x_{\gamma_k}(i) \in \left[\left(C_i \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(i))\right) + \tilde{\rho}B \right] \cap (\operatorname{int} C) \subset \operatorname{int} \tilde{C}_i(\delta), \quad \text{for } i = 0, 1.$$

Moreover, $\dot{x} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$ $\bar{\xi} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$ *and* (12)-(13) *are valid at* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\xi})$ *for all* $t \in [0,1]$.

我们将问题（P_{γ_k}）改写为一个带有状态约束的最优控制问题。给定（$\bar{x}$, $\bar{u}$）$\in W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times \mathcal{W}$一个关于（$P$）的 $W^{1,2}$-局部极小值，对于 $\bar{v} := \dot{\bar{u}}$，（P_{γ_k}）可按如下方式重新表述：

（P_{γ_k}）：最小化
$g(x(0), x(1)) + \frac{1}{2}\left(\|u(0) - \bar{u}(0)\|^2 + z(1) + \|x(0) - \bar{x}(0)\|^2\right)$关于（$x$, y, z, u）$\in AC([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}^m)$ 以及可测函数 $v: 0\ 1 \overset{\cdot}{\longmapsto} \mathbb{R}^m$，使得

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}(t) = f_\Phi(x(t), u(t)) - \gamma_k e^{\gamma_k \psi(x(t))} \nabla\psi(x(t)), \ t \in [0,1] \text{ a.e.}, \\ \dot{u}(t) = v(t), \ t \in [0,1] \text{ a.e.}, \\ \dot{y}(t) = \|f_\Phi(x(t), u(t)) - \gamma_k e^{\gamma_k \psi(x(t))} \nabla\psi(x(t)) - \dot{\bar{x}}(t)\|^2, \ t \in [0,1] \text{ a.e.}, \\ \dot{z}(t) = \|v(t) - \bar{v}(t)\|^2, \ t \in [0,1] \text{ a.e.}, \end{cases} \\ x(t) \in \bar{B}_\delta(\bar{x}(t)) \text{ and } u(t) \in U(t) \cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t)), \ \forall t \in [0,1], \\ (x(0), u(0), y(0), z(0)) \in C_0(k) \times \mathbb{R}^m \times \{0\} \times \{0\}, \\ (x(1), u(1), y(1), z(1)) \in C_1(k) \times \mathbb{R}^m \times [-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta]. \end{cases}$$

在下面的命题中，我们将非光滑庞特里亚金极大值原理应用于上述重述问题序列（P_{γ_k}），即带有多重状态约束的最优控制问题（例如参见 [37, 第331]页和 [37, 第332]页）。为此，(x, y, z, u) 是（P_{γ_k}）中的状态函数，而 v是控制。因此，$(x_{\gamma_k}, y_{\gamma_k}, z_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ 是最优状态，其中 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ 由定理4.6，$y_{\gamma_k}(t)$ 得到：$= \int_0^t \|\dot{x}_{\gamma_k}(s) - \dot{\bar{x}}(s)\|^2 \, ds$，$z_{\gamma_k}(t) := \int_0^t \|\dot{u}_{\gamma_k}(s) - \dot{\bar{u}}(s)\|^2 \, ds$，而 $v_{\gamma_k} = \dot{u}_{\gamma_k}$是最优控制。因此，函数 $f(\cdot,\cdot)$ 需要在（x_{γ_k}, u_{γ_k}）附近满足利普希茨条件；由（$*$）可知这一点成立，因为 $x_{\gamma_k}(t) \in$ int C，且（$x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k}$）一致收敛于（$\bar{x}, \bar{u}$）（见定理4.6）。此外，由于目标函数 g必须在（$x_{\gamma_k}(0)$ $x_{\gamma_k}(1)$）附近满足利普希茨条件，我们对 g引入如下局部假设，其中 $C_0(\delta)$ 和 $C_1(\delta)$ 在（23）中定义：

$$\exists\, \tilde{\rho} > 0 \text{ such that } g \text{ is Lipschitz on } \tilde{C}_0(\delta) \times \tilde{C}_1(\delta).$$

另一方面，需要满足以下约束资格条件性质（CQ）。对于给定的多值映射 F: $[0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$，其值非空闭，且对于 $h \in C([0,1];\ F)$，即 $h \in C([0,1];\ \mathbb{R}^m)$，并且对所有 $t \in [0,1]$ 满足 $h(t) \in F(t)$，我们称 $F(\cdot)$ 在h 处满足约束资格条件，当且仅当

(CQ) 对所有 $t \in [0,1]$，凸包$(\bar{N}^L_{F(t)}(h(t)))$ 都是尖的。

这里，$\bar{N}^L_{F(t)}(y)$ 表示多值映射 $(t,y,t)\, y \mapsto N^L_{F(t)}(y)$ 在 $(\bar{N}^L_{F(\cdot)}(\cdot)$ 处的图闭包，也就是说，$N^L_{F(\cdot)}(\cdot)$ 的图是$N^L_{F(\cdot)}(\cdot)$ 的图的闭包。关于 (CQ) 性质的更多信息，请参见注 5.2。

值得注意的是，在 [6–8], 中，其中使用了 $W^{1,\,2}$-控制，假设控制集 $U(t)$ 对所有 $t \in [0,1]$ 都是 $\mathbb{R}^m$，因此 (CQ) 性质显然成立。

命题 4.7（逼近问题的极大值原理（P_{γ_k}）） *Let* $(\bar{x},\bar{u})$ *be a* $W^{1,2}$*-local minimizer for* (P)*. Assume that* (A2)-(A4) *hold, and for some* $\tilde{\rho} > 0$, f *is Lipschitz on* $[C \cap \mathbb{B}_\delta\ \bar{x}\ ] \times [\ \mathbb{U} + \tilde{\rho}B\ \cap \mathbb{B}_\delta\ \bar{u}\ ]$ *and* g *is Lipschitz on* $C_0\ \delta\ \times(\,)(\,)(\,)(\,)(\,)(\,)$, $\tilde{C}_1\ \delta$ *. Consider the optimal sequence* $x_{\gamma_k}\ y_{\gamma_k}\ z_{\gamma_k}\ u_{\gamma_k}\ v_{\gamma_k}$ *for* P_{γ_k} *obtained via* $,,,)\,(\,)$ 定理 4.6*. If for* k *sufficiently large,* $U(\cdot)$ *satisfies the constraint qualification* (CQ) *at* u_{γ_k}*, then for* k *large enough, there exist* $\lambda_{\gamma_k} \geq 0$, $p_{\gamma_k} \in AC([0,1];\ \mathbb{R}^n)$ $q_{\gamma_k} \in AC\ [0,1]\ \ \mathbb{R}^m\ ,\ \ \gamma_k \in NBV\ [0,1]\ \ \mathbb{R}^m\ \ \mu^o_{\gamma_k} \in C^{\oplus}\ [0,1]\ \ \mathbb{R}^m$ *and a* $\mu^o_{\gamma_k}$*-*$(\,;)\,\Omega\,(\,;)\,(\,;)$ *integrable function* $\beta_{\gamma_k}\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *such that* $\Omega_{\gamma_k}(t) = \int_{[0,t]} \beta_{\gamma_k}(s)\mu^o_{\gamma_k}(ds)$ *for all* $t \in (0,1]$*, and:*

(*i*)（非平凡性条件） *For all* $k \in \mathbb{N}$*, we have*

$$\|p_{\gamma_k}(1)\| + \|q_{\gamma_k}\|_\infty + \|\mu^o_{\gamma_k}\|_{\text{T.V.}} + \lambda_{\gamma_k} = 1;$$

(*ii*)（伴随方程） *For* 几乎处处 $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{p}_{\gamma_k}(t)\\ \dot{q}_{\gamma_k}(t)\end{pmatrix} \in &-\left(\partial^{(x,u)} f_\Phi(t, x_{\gamma_k}(t), u_{\gamma_k}(t))\right)^{\mathsf{T}} p_{\gamma_k}(t)\\ &+\begin{pmatrix}\gamma_k e^{\gamma_k \psi(x_{\gamma_k}(t))}\partial^2\psi(x_{\gamma_k}(t))p_{\gamma_k}(t)\\ 0\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}\gamma_k^2 e^{\gamma_k\psi(x_{\gamma_k}(t))}\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), p_{\gamma_k}(t)\rangle\\ 0\end{pmatrix};\end{aligned} \tag{27}$$

(*iii*)（横截方程）

$$(p_{\gamma_k}(0), -p_{\gamma_k}(1)) \in$$

$$\lambda_{\gamma_k}\partial^L g(x_{\gamma_k}(0), x_{\gamma_k}(1)) + \left[\left(\lambda_{\gamma_k}(x_{\gamma_k}(0) - \bar{x}(0)) + N^L_{C_0(k)}(x_{\gamma_k}(0))\right) \times N^L_{C_1(k)}(x_{\gamma_k}(1))\right],$$

$$\text{and}\ \ q_{\gamma_k}(0) = \lambda_{\gamma_k}(u_{\gamma_k}(0) - \bar{u}(0)), \quad -q_{\gamma_k}(1) = \Omega_{\gamma_k}(1);$$

(*iv*)（极大化条件） *For* 几乎处处 $t \in [0,1]$,

$$\max_{v\in\mathbb{R}^m}\left\{\langle q_{\gamma_k}(t) + \Omega_{\gamma_k}(t), v\rangle - \frac{\lambda_{\gamma_k}}{2}\|v - \dot{\bar{u}}(t)\|^2\right\} \ \text{is attained at}\ \dot{u}_{\gamma_k}(t);$$

(*v*)（测度性质）

$$\operatorname{supp}\{\mu^o_{\gamma_k}\} \subset \left\{t \in [0,1] : (t, u_{\gamma_k}(t)) \in \operatorname{bdry}\operatorname{Gr}\left[U(t) \cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t))\right]\right\},\ \text{and}$$

$$\beta_{\gamma_k}(t) \in \partial^{>}_u d(u_{\gamma_k}(t), U(t) \cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t)))\ \ \mu^o_{\gamma_k}\text{ a.e., with}$$

$$\partial^{>}_u d(u_{\gamma_k}(t), U(t) \cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t))) \subset \left[\operatorname{conv}\bar{N}^L_{U(t)\cap\bar{B}_\delta(\bar{u}(t))}(u_{\gamma_k}(t)) \cap \left(\bar{B} \setminus \{0\}\right)\right].$$

4.4 （$\boldsymbol{P}$）的必要最优性条件

本小节的主要结果是以下定理，该定理为 (P) 的 $W^{1,2}$-局部极小值 $(\bar{x},\bar{u})$ 提供必要最优性条件。

定理陈述中使用以下记号：

• $\partial_\ell\varphi$ 和 $\partial_\ell^2\varphi$ 分别表示扩展 Clarke 广义梯度和扩展 Clarke 广义 Hessian，它们是 φ 在 C 上通过（4）和（5）定义的。

• $\partial_{(x,u)}{}_\ell$　$f(\cdot,\cdot)$是 $f(\cdot,\cdot)$的扩展 Clarke 广义雅可比矩阵，定义在$\big[C\cap\bar{B}_\delta(\bar{x}(t))\big]\times\big[(U(t)+\tilde{\rho}\bar{B})\cap\bar{B}_\delta(\bar{u}(t))$上，通过（7）定义。• $\partial_\ell^2\psi$是 ψ相对于 int C的 Clarke 广义 Hessian，通过（6）定义。• $\partial_\ell^L g$是 g相对于 int $\big(\tilde{C}_0(\delta)\times\tilde{C}_1(\delta)\big)$ 的极限次微分，通过（3）定义。

定理　**4 8**　*P　Let　$\bar{x}$　$\bar{u}$　be a $W^{1,2}$-local*。（（）的必要最优性 *minimizer for　P . Let $\bar{\xi}\in L^\infty[0,1]$　$\mathbb{R}^+$　be the function supported on $I^0\ \bar{x}$* 条件）（，），（）（；）（）　*and associated to　$\bar{x}$　$\bar{u}$　via　3 5. Assume that　2　4　hold　U ·*　（，）引理。（（A）-（A），

（）*satisfies the_constraint qualification　at $\bar{u}$　and for some $\tilde{\rho}>0$　f is Lipschitz on $[C\cap\mathbb{B}_\delta\ \bar{x}\ ]\times$*（CQ），，

$[\ \mathbb{U}+\tilde{\rho}\bar{B}\ \cap\mathbb{B}_\delta\ \bar{u}\ ]$ and g is Lipschitz on $\tilde{C}_0\ \delta\ \times\tilde{C}_1\ \delta$. Then $\dot{\bar{x}}\in BV\ [0,1]\ \mathbb{R}^n$（）（）（）（）（；）*and $\bar{\xi}\in BV$（$[0,1];\ \mathbb{R}^+$）　and there exist $\lambda\geq 0$,*　（$[0,1];\ \mathbb{R}^n$）

a finite signed Radon measure $\bar{\nu}$ on $[0,1]$ supported on $I^0\ \bar{x}$　L^∞-functions $\bar{\zeta}\cdot$（）（）

$\bar{\theta}\cdot$　and $\bar{\vartheta}\cdot$　in $\mathcal{M}_{n\times n}\ [0,1]$　an L^∞-function $\bar{\omega}\cdot$　in $\mathcal{M}_{n\times m}\ [0,1]$　such that for（）（）（）（）（）

$t\in[0,1]$　，　几乎处处。

$$\big((\bar{\zeta}(t),\bar{\omega}(t)),\bar{\theta}(t),\bar{\vartheta}(t)\big)\in\partial_\ell^{(x,u)}f(\bar{x}(t),\bar{u}(t))\times\partial_\ell^2\varphi(\bar{x}(t))\times\partial_\ell^2\psi(\bar{x}(t)),$$

and the following hold:

(*i*) 可容许方程　**q**　）

(*a*) $\dot{\bar{x}}(t)=f(\bar{x}(t),\bar{u}(t))-\nabla_\ell\varphi(\bar{x}(t))-\bar{\xi}(t)\nabla\psi(\bar{x}(t)),\ \ \forall t\in[0,1]$,

(*b*) $\psi(\bar{x}(t))\leq 0,\ \ \forall t\in[0,1]$;

(*ii*) (非平凡性条件)

$$\|\bar{p}(1)\|+\lambda=1;$$

(*iii*) (伴随方程) *For any $h\in C([0,1];\ \mathbb{R}^n)$ we have*

$$\int_{[0,1]}\langle h(t),d\bar{p}(t)\rangle=\int_0^1\Big\langle h(t),\Big(\bar{\theta}(t)-\bar{\zeta}(t)^{\mathsf{T}}\Big)\bar{p}(t)\Big\rangle\,dt$$
$$+\int_0^1\bar{\xi}(t)\,\langle h(t),\bar{\vartheta}(t)p(t)\rangle\,dt+\int_{[0,1]}\langle h(t),\nabla\psi(\bar{x}(t))\rangle d\bar{\nu};$$

(*iv*) (互补松弛条件)

(*a*)　$\bar{\xi}(t)=0,\ \ \forall t\in I^-(\bar{x})$, (*b*)　$\bar{\xi}(t)\langle\nabla\psi(\bar{x}(t)$

$\bar{p}(t)\rangle=0,\ \ \forall t\in[0,1]$ 几乎处处;

(*v*)（横截方程）

$$(\bar{p}(0),-\bar{p}(1))\in\lambda\partial_\ell^L g(\bar{x}(0),\bar{x}(1))+\big[N_{C_0}^L(\bar{x}(0))\times\ N_{C_1}^L(\bar{x}(1))\big];$$

(*vi*)（弱最大化条件）

$$\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t)\in\operatorname{conv}\bar{N}^L_{U(t)\cap\bar{B}_\delta(\bar{u}(t))}(\bar{u}(t)),\ \ t\in[0,1]\text{ a.e.}$$

If in addition there exist $\varepsilon_o>0$ and $r>0$ such that $U(t)\cap B_{\varepsilon_o}(\bar{u}(t))$ is r-prox-regular for all $t\in[0,1]$, then we have

$$\max\Big\{\Big\langle\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t),u\Big\rangle-\frac{\|\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t)\|}{\min\{\varepsilon_o,2r\}}\|u-\bar{u}(t)\|^2:u\in U(t)\Big\}$$

*is attained at $\bar{u}(t)$ for $t\in[0,1]$*几乎处处

*Remark 4.9*定理（vi）的条件4.8 当 $U(\cdot)$ 具有额外性质时，可采用简化形式:

• 若对所有 $t \in [0,1]$， $U(t)$ 是 *r-prox-regular*，则令 $\varepsilon_o \longrightarrow \infty$，极大化条件（$v$）可简化为

$$\max\left\{\left\langle \bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t), u\right\rangle - \frac{\|\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t)\|}{2r}\|u-\bar{u}(t)\|^2 : u \in U(t)\right\}$$

在 $t \in [0,1]$ 几乎处处， $\bar{u}(t)$ 处取到

• 若对所有 $t \in [0,1]$， $U(t)\cap B_{\varepsilon_o}(\bar{u}(t))$ 是 *convex*，则令 $r \longrightarrow \infty$，极大化条件（v）可简化为

$$\max\left\{\left\langle \bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t), u\right\rangle - \frac{\|\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t)\|}{\varepsilon_o}\|u-\bar{u}(t)\|^2 : u \in U(t)\right\}$$

在 $t \in [0,1]$ 几乎处处， $\bar{u}(t)$ 处取到

• 若对所有 $t \in [0,1]$， $U(t)$ 是 *convex*，则同时令 $\varepsilon_o \longrightarrow \infty$ 和 $r \longrightarrow \infty$，极大化条件（v）可简化为

$$\max\left\{\left\langle \bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t), u\right\rangle : u \in U(t)\right\} \text{ is attained at } \bar{u}(t) \text{ for } t \in [0,1] \text{ a.e.}$$

Proof of 定理 4.8。定理 4.6 给出（γ_k）的一个子序列$_k$，我们不重新标记，并给出相应的序列（x_{γ_k}， y_{γ_k}， z_{γ_k}， u_{γ_k}）$_k$，以及通过（21）定义的相应（ξ_{γ_k}）$_k$，使得

• 对于每个 k，四元组（x_{γ_k}， y_{γ_k}， z_{γ_k}， u_{γ_k}）是（P_{γ_k}）的最优解。

• $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k}) \xrightarrow[W^{1,2}\times\mathcal{W}]{\text{strongly}} (\bar{x},\bar{u})$, $(y_{\gamma_k}, z_{\gamma_k}) \xrightarrow[W^{1,1}([0,1];\,\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)]{\text{strongly}} (0,0)$, $\xi_{\gamma_k} \xrightarrow[L^2([0,1];\,\mathbb{R}^+)]{\text{strongly}} \bar{\xi}$.

• $\dot{\bar{x}} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$， $\bar{\xi} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$，以及（12）-（13）在（$\bar{x}$， $\bar{u}$，$\bar{\xi}$）处对所有 $t \in [0,1]$均有效。

•定理 3.11的所有结论均成立，包括（x_{γ_k}）$_k$是一致利普希茨的，并且 $x_{\gamma_k}(t) \in$在所有 C处均为 $t \in [0,1]$内。

• 对于所有 k，我们有

$$x_{\gamma_k}(i) \in \left[\left(C_i \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(i))\right) + \tilde{\rho}B\right] \cap (\operatorname{int} C) \subset \operatorname{int} \tilde{C}_i(\delta), \quad \text{for } i = 0, 1.$$

为了应用命题 4.7，我们将证明，在足够大的 $U(\cdot)$ 处成立的约束资格条件（CQ），在 $\bar{u}$ 处也成立，u_{γ_k}，当 k 足够大时。事实上，若不然，则由注 5.2(i)，存在一个递增序列 $(k_n)_n$，其取值于 $\mathbb{N}$，以及一个序列 $t_n \in [0,1]$，使得 $t_n \longrightarrow t_o \in [0,1]$ 且

$$0 \in \partial_u^{>} d_U(t_n, u_{\gamma_{k_n}}(t_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

$\bar{u}$ 的连续性以及 $u_{\gamma_{k_n}}$ 一致收敛到 $\bar{u}$，推出序列 ($u_{\gamma_{k_n}}$ t_n n $\bar{u}$ t_o t x $\mapsto$( )) 收敛到 ( )。因此，利用多值映射 (,) (,) 具有闭值和闭图这一事实，由 ( ) 可得 $0 \overset{28}{\in} \partial_u^{>} d_U(t_o, \bar{u}(t_o))$。这与约束资格条件在 $U(\cdot)$ 处的 $\bar{u}$ 成立相矛盾。因此，对于充分大的 k， $U(\cdot)$ 在 u_{γ_k} 处满足约束资格条件（CQ）。

因此，根据命题 4.7，存在一个 $(\gamma_k)_k$的子序列（我们不重新标记），以及相应的序列 p_{γ_k}， q_{γ_k} μ_{γ_k} 和 λ_{γ_k}，满足其中的条件 (i)-(v)。

利用（27）、（10），并且对所有 $t \in [0,1]$ 都有

$$(x_{\gamma_k}(t), u_{\gamma_k}(t)) \in \operatorname{int}\left[\left(C \cap \bar{B}_\delta(\bar{x}(t))\right)\times\left((U(t)+\tilde{\rho}\bar{B}) \cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t))\right)\right],$$

我们得到序列 ζ_{γ_k}、 θ_{γ_k} 和 ϑ_{γ_k}，它们属于 $\mathcal{M}_{n\times n}([0,1])$，且 ω_{γ_k} 属于 $\mathcal{M}_{n\times m}([0,1])$，使得对几乎处处的 $t\in[0,1]$,

$$(\zeta_{\gamma_k}(t),\omega_{\gamma_k}(t))\in\partial_\ell^{(x,u)}f(x_{\gamma_k}(t),u_{\gamma_k}(t)),$$
$$(\theta_{\gamma_k}(t),\vartheta_{\gamma_k}(t))\in\partial_\ell^2\varphi(x_{\gamma_k}(t))\times\partial_\ell^2\psi(x_{\gamma_k}(t)),$$
$$\dot p_{\gamma_k}(t) = (\theta_{\gamma_k}(t)-\zeta_{\gamma_k}(t))^{\mathsf T}p_{\gamma_k}(t)+\gamma_k e^{\gamma_k\psi(x_{\gamma_k}(t))}\vartheta_{\gamma_k}(t)\,p_{\gamma_k}(t) \tag{29}$$
$$+\ \gamma_k^2 e^{\gamma_k\psi(x_{\gamma_k}(t))}\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)),p_{\gamma_k}(t)\rangle,\ \text{and}$$
$$\dot q_{\gamma_k}(t) = -(\omega_{\gamma_k}(t))^{\mathsf T}p_{\gamma_k}(t). \tag{30}$$

注意，对每个 k，函数 $p_{\gamma_k},p_{\gamma_k},q_{\gamma_k},q_{\gamma_k},x_{\gamma_k},u_{\gamma_k}$ 和 $\bar u$ 在 $[0,1]$ 上可测，多值映射 $\partial_\ell^{(x,u)}f(\cdot,\cdot)$、$\partial_\ell^2\varphi(\cdot)$ 和 $\partial_\ell^2\psi(\cdot)$ 均可测，且具有非空、紧且凸的值和闭图。利用 (A1)、(A2.1) 和 (A3)，Filippov可测选择定理（见 [37,定理 2.3.13]）表明，我们可以假设函数 $\zeta_{\gamma_k}(\cdot)$、$\theta_{\gamma_k}(\cdot)$、$\vartheta_{\gamma_k}(\cdot)$ 和 $\omega_{\gamma_k}(\cdot)$ 可测。此外，这些序列在 L^∞ 中一致有界，因为 $\|(\zeta_{\gamma_k},\omega_{\gamma_k})\|_\infty\le M$, $\|\theta_{\gamma_k}\|_\infty\le K$ $\|\vartheta_{\gamma_k}\|_\infty\le 2M_\psi$ 且。

步骤 1。构造 $\bar\xi$，即可容许方程。

根据定理 4.6，三元组 $(\bar x,\ \bar y,\ \bar\xi)$ 对所有 $t\in[0,1]$均满足 (12)。因此，对所有 $t\in[0,1]$，我们有

$$\dot{\bar x}(t)=f_\Phi(\bar x(t),\bar u(t))-\bar\xi(t)\nabla\psi(\bar x(t))=f(\bar x(t),\bar u(t))-\nabla\Phi(\bar x(t))-\bar\xi(t)\nabla\psi(\bar x(t)).$$

由于对所有 $x\in C$, $\nabla\Phi(x)=\partial_\ell\varphi(x)=\nabla_\ell\varphi(x)$，因此我们得到

$$\dot{\bar x}(t)=f(\bar x(t),\bar u(t))-\nabla_\ell\varphi(\bar x(t))-\bar\xi(t)\nabla\psi(\bar x(t)),\ \ \forall t\in[0,1].$$

另一方面，由于 $\bar x$ 的取值属于 C，我们有 $\psi(\bar x(t))\le 0,\forall t\in[0,1$].

步骤 2。构造 $\bar p$、$\bar\zeta$、$\bar\theta$、$\bar\vartheta$、$\bar\omega$、 $\bar\nu$ 以及伴随方程。

关于 $\bar p$、$\bar\theta$、$\bar\vartheta$ 和 $\bar\nu$的构造，参见[38, 定理 51]证明中的步骤2-4。注意，p_{γ_k}在[38, 定理 51], 证明的步骤 2 中建立并使用的 (1) 的一致有界性，在此可由命题 4.7的非平凡性条件轻易推出。我们还注意到，与 [38, 定理 51]证明的步骤 2 类似， p_{γ_k} 具有一致有界变差，因此 Helly 第一定理意味着 p_{γ_k} 存在一个逐点收敛子序列，其极限 $\bar p$ 也具有有界变差，并且对某个 $M_1>0$满足以下条件

$$\|\bar p\|_\infty\le M_1\|\bar p(1)\|. \tag{31}$$

利用Helly第二定理，我们得到对于所有的 $h\in C([0,1];\ \mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}\langle h(t),\dot p_{\gamma_k}(t)\rangle\,dt=\int_{[0,1]}\langle h(t),d\bar p(t)\rangle. \tag{32}$$

与[38, 定理 5.1], 证明中的步骤2-4完全相同，我们也有

$$\int_0^1\langle h(t),\theta_{\gamma_k}(t)\,p_{\gamma_k}(t)\rangle\,dt\longrightarrow\int_0^1\big\langle h(t),\bar\theta(t)\,\bar p(t)\big\rangle\,dt, \tag{33}$$

$$\int_0^1\xi_{\gamma_k}(t)\,\langle h(t),\vartheta_{\gamma_k}(t)\,p_{\gamma_k}(t)\rangle\,dt\longrightarrow\int_0^1\bar\xi(t)\,\langle h(t),\bar\vartheta(t)\,\bar p(t)\rangle\,dt, \tag{34}$$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\int_0^1\langle h(t),\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\rangle\,\gamma_k\xi_{\gamma_k}(t)\,\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)),p_{\gamma_k}(t)\rangle\,dt$$
$$=\int_{[0,1]}\langle h(t),\nabla\psi(\bar x(t))\rangle\,d\bar\nu(t). \tag{35}$$

接下来构造两个函数 $\bar{\zeta}$ 和 $\bar{\omega}$。注意，[38, 定理 5.1] 证明中步骤 2 所构造的 ζ 在此处无法使用，因为那里需要多值映射 $(x,u) \mapsto \partial^x f(x,u)$ 满足*closed graph*假设，而这里并未作此假设。由于序列 $(\zeta_{\gamma_k}, \omega_{\gamma_k})_k$ 在 L^∞中一致有界，因此它有一个子序列（我们仍记作原序列）在 L^1中弱收敛于某个 $(\bar{\zeta}, \bar{\omega})$。利用多值映射 $(x,u) \mapsto \partial_\ell^{(x,u)} f(x,u)$ 具有非空、紧且凸的值以及闭图这一性质，[10, 定理 6.39] 推出，对 $t \in [0,1]$ 几乎处处，

$$(\bar{\zeta}(t), \bar{\omega}(t)) \in \partial_\ell^{(x,u)} f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)).$$

由于 $(p_{\gamma_k})_k$ 在 L^∞ 中一致有界，并且逐点收敛到 $\bar{p}$，我们得出

$$\zeta_{\gamma_k}^{\mathsf{T}} p_{\gamma_k} \xrightarrow[L^1]{\text{weakly}} \bar{\zeta}^{\mathsf{T}} \bar{p} \quad \text{and} \quad \omega_{\gamma_k}^{\mathsf{T}} p_{\gamma_k} \xrightarrow[L^1]{\text{weakly}} \bar{\omega}^{\mathsf{T}} \bar{p}. \tag{36}$$

因此，对于所有 $h \in C([0,1];\ \mathbb{R}^n)$，

$$\int_0^1 \langle h(t), \zeta_{\gamma_k}(t) p_{\gamma_k}(t) \rangle \, dt \longrightarrow \int_0^1 \langle h(t), \bar{\zeta}(t) \bar{p}(t) \rangle \, dt. \tag{37}$$

因此，由 (29) 和 (32)-(37)，我们得出定理 4.8 的伴随方程成立，且它与 [38, 定理 5。1]的伴随方程一致。

步骤 3. 互补松弛条件。

部分 (a) 由方程 (13) 得出。部分 (b) 由 $\|\gamma_k \xi_{\gamma_k}(\cdot) \langle \nabla \psi(x_{\gamma_k}(\cdot))\, p_{\gamma_k}(\cdot) \rangle\|_1$ 在 [38, 方程 (97)] 中证明的一致有界性得出。更多细节见 [33, 定理 6 的证明1]。

步骤 4. 构造 λ 及横截方程。

建立命题 4 7, $\upsilon_{\gamma_k} \in$的横截条件。存在$()(\,())$、$()(\,())$以及$(,)(\,)(\,)(\,))$，使得 $N_{C_0}^L{}_k\ x_{\gamma_k}\ 0 \quad \chi_{\gamma_k} \in N_{C_1}^L{}_k\ x_{\gamma_k}\ 1 \qquad a_{\gamma_k}\ b_{\gamma_k} \in \partial^L g\ x_{\gamma_k}\ 0 \quad x_{\gamma_k}\ 1$

$$p_{\gamma_k}(0) = \lambda_{\gamma_k} a_{\gamma_k} + \lambda_{\gamma_k}(x_{\gamma_k}(0) - \bar{x}(0)) + \upsilon_{\gamma_k}, \quad -p_{\gamma_k}(1) = \lambda_{\gamma_k} b_{\gamma_k} + \chi_{\gamma_k}, \tag{38}$$

并且以下性质成立：

- $\|(a_{\gamma_k}, b_{\gamma_k})\| \le L_g$，其中 L_g是 g在 $C_0(\delta) \times C_1(\delta)$上的 Lipschitz 常数，并且对所有 k，$\|\lambda_{\gamma_k}\| \le 1$。由后一个不等式可得一个子序列（不重新编号），使得 $\lambda_{\gamma_k} \longrightarrow \lambda \in [0,1]$。
- 由于定理 4.6，对于 k 足够大时，我们有

$$(x_{\gamma_k}(0), x_{\gamma_k}(1)) \in \operatorname{int}(\tilde{C}_0(\delta) \times \tilde{C}_1(\delta)), \text{ and } (x_{\gamma_k}(0), x_{\gamma_k}(1)) \longrightarrow (\bar{x}(0), \bar{x}(1)).$$

- 我们有 $p_{\gamma_k}(0) \longrightarrow \bar{p}(0)$，且 $p_{\gamma_k}(1) \longrightarrow \bar{p}(1)$。
- 由于（26），其中 $d := x_{\gamma_k}(1) \in [C_1(k) \cap (\operatorname{int} C) \cap B_{\delta_o}(\bar{x}(1))]$ 对于足够大的 k，我们有 $\chi_{\gamma_k} \in N_{C_1(k)}^L(x_{\gamma_k}(1)) = N_{C_1}^L(x_{\gamma_k}(1) + \bar{x}(1) - \bar{x}_{\gamma_k}(1))$，当 k 足够大时。这里回顾一下，$\bar{x}_{\gamma_k}(1) \longrightarrow \bar{x}(1)$。
- 由于（25），其中 $c := x_{\gamma_k}(0) \in C_0(k) \cap B_{\delta_o}(\bar{x}(0))$ 当 k足够大时，可得：

  (i) 若 $\bar{x}(0) \in \operatorname{int} C$，则当 k 足够大时

$$\upsilon_{\gamma_k} \in N_{C_0(k)}^L(x_{\gamma_k}(0)) = N_{C_0}^L(x_{\gamma_k}(0)).$$

  (ii) 若 $\bar{x}(0) \in \operatorname{bdry} C$，利用 $x_{\gamma_k}(0) \longrightarrow \bar{x}(0)$ 和 $\rho_k \longrightarrow 0$，则当 k充分大时，$\left(x_{\gamma_k}(0) + \rho_k \frac{\nabla \psi}{\|\nabla \psi(\bar{x}(0))\|}\right) \in B_{\delta_o}(\bar{x}(0))$，因此，

$$\upsilon_{\gamma_k} \in N_{C_0(k)}^L(x_{\gamma_k}(0)) = N_{C_0}^L\left(x_{\gamma_k}(0) + \rho_k \frac{\nabla \psi(\bar{x}(0))}{\|\nabla \psi(\bar{x}(0))\|}\right) \text{ for } k \text{ large.}$$

因此，沿着 $(\gamma_k)_k$ 的一个子序列（不重新编号），我们有

$$\lambda_{\gamma_k}(a_{\gamma_k}, b_{\gamma_k}) \longrightarrow \lambda(a,b) \in \lambda\partial_\ell^L g(\bar{x}(0),\bar{x}(1)) \text{ and } \lambda_{\gamma_k}(x_{\gamma_k}(0)-\bar{x}(0)) \longrightarrow 0.$$

因此，令 $k\to\infty$ 在（38）中趋于极限，并利用（$p_{\gamma_k}(0)\, p_{\gamma_k}(1)$）$\longrightarrow$（$\bar{p}(0)\ \bar{p}(1)$），我们得到（$v_{\gamma_k}$， χ_{γ_k}）必收敛到某个（v， χ），因为（38）中的所有其他项均收敛。上文所述的最后两条给出$v \in N_{C_0}^L$（$\bar{x}(0)$）以及$\chi \in N_{C_1}^L$（$\bar{x}(1)$）。因此，（38）的极限等价于

$$(\bar{p}(0), -\bar{p}(1)) \in \lambda\partial_\ell^L g(\bar{x}(0),\bar{x}(1)) + \left[N_{C_0}^L(\bar{x}(0)) \times\ N_{C_1}^L(\bar{x}(1))\right];$$

至此，横截方程的证明完成。

步骤 5. 弱最大化条件。

由（30）、（36）(b)以及命题 4.7的横截方程可得

$$\dot{q}_{\gamma_k} = -(\omega_{\gamma_k})^{\mathsf{T}} p_{\gamma_k} \xrightarrow[L^1]{\text{weakly}} -(\bar{\omega})^{\mathsf{T}}\bar{p} \text{ and } q_{\gamma_k}(0) = \lambda_{\gamma_k}(u_{\gamma_k}(0) - \bar{u}(0)). \tag{39}$$

序列（p_{γ_k}）$_k$和（ω_{γ_k}）$_k$在 L^∞中的一致有界性表明，（$\dot{q}_{\gamma_k}$）$_k$在 L^∞中一致有界，从而可知（q_{γ_k}）$_k$等度连续。此外，命题 4.7 的非平凡性条件保证序列（q_{γ_k}）$_k$一致有界。因此，根据阿泽拉-阿斯科利定理，序列（q_{γ_k}）$_k$存在一个子序列（仍记作原序列），它一致收敛于一个绝对连续函数 q，满足 $q(0) = 0$（根据（39）(b)，其中$\lambda_{\gamma_k} \longrightarrow \lambda$且$u_{\gamma_k}(0) \longrightarrow \bar{u}(0)$，当$k \longrightarrow \infty$时）。此外，经过抽取子序列，我们还可得到

$$\dot{q}_{\gamma_k} \xrightarrow[L^1]{\text{weakly}} \dot{q}. \tag{40}$$

因此，(39)(a) 以及 L^1-弱极限的唯一性表明

$$\dot{q}(t) = -(\bar{\omega}(t))^{\mathsf{T}}\bar{p}(t), \quad t \in [0,1] \text{ a.e.} \tag{41}$$

我们接下来研究在命题 4.7中得到的 NBV-函数序列 $(\Omega_{\gamma_k})_k$的收敛性。其中的极大化条件 (iv) 意味着，对于 $t \in [0,1]$ 几乎处处，

$$\Omega_{\gamma_k}(t) = -q_{\gamma_k}(t) + \underbrace{\lambda_{\gamma_k}(\dot{u}_{\gamma_k}(t) - \dot{\bar{u}}(t))}_{\ell_{\gamma_k}(t)}. \tag{42}$$

不失一般性，我们可以假设 (42) 对所有 $t \in [0,1]$ 都成立。事实上，若 $\lambda_{\gamma_k} = 0$，利用命题 4.7 的横截条件以及 $\Omega_{\gamma_k} \in NBV[0,1]$，可得 $\Omega_{\gamma_k}(0) = -q_{\gamma_k}(0) = 0$且 $\Omega_{\gamma_k}(1) = -q_{\gamma_k}(1)$；因此，由 Ω_{γ_k}的右连续性以及q_{γ_k}的连续性，(42) 等价于 $\Omega_{\gamma_k} \equiv -q_{\gamma_k}$。然而，若 $\lambda_{\gamma_k} > 0$，则通过在勒贝格测度为零的集合上修改 ($\dot{u}_{\gamma_k} - \dot{\bar{u}}$) 的取值，可使 (42) 对所有 $t \in [0,1]$ 成立，因此，$\ell_{\gamma_k} \in BV[0,1]$ 在 (0, 1) 上右连续，并满足 $\ell_{\gamma_k}(0) = q_{\gamma_k}(0)$ 和 $\ell_{\gamma_k}(1) = 0$。此外，由于 $\lambda_{\gamma_k} \longrightarrow \lambda$和 $\dot{u}_{\gamma_k}$在 L^2中强收敛到 $\dot{\bar{u}}$，序列 $(\ell_{\gamma_k})_k$在 L^2中强收敛到 $\ell = 0$。

我们声称，作为定义在 $C([0,1];\ \mathbb{R}^m)$ 上的连续线性泛函序列，$(\Omega_{\gamma_k})_k$ 存在一个子序列（仍记为原序列），弱*收敛于 $-q$。由于 Ω_{γ_k} 满足 (42)，其中绝对连续函数序列 $(q_{\gamma_k})_k$ 一致收敛于 $q \in AC([0,1];\ \mathbb{R}^m)$，且根据 (40)，$(\dot{q}_{\gamma_k})_k$ 在 L^1 中弱收敛于 $\dot{q}$，因此只需证明 BV-序列 $(\ell_{\gamma_k})_k$ 在 $C^*([0,1];\ \mathbb{R}^m)$ 中收敛到 0。只要证明 $(\Omega_{\gamma_k})_k$ 一致有界，序列 $(\ell_{\gamma_k})_k$ 的一致有界性便随之成立。对于后者，命题 4.7 的非平凡性条件意味着序列 $(\mu^o_{\gamma_k})_k$ 一致有界，因此它存在一个子序列（仍记为原序列），弱*收敛于一个

$\mu^o \in C^{\oplus}([0,1];\ \mathbb{R}^m)$。此外，根据命题 4.7 的条件（$v$）以及备注 5.2($i$)，$\|\beta_{\gamma_k}(t)\| \le 1$，除去一个 $\mu^o_{\gamma_k}$-测度为零的集合。因此，利用这一点

$$\Omega_{\gamma_k}(t) = \int_{[0,t]} \beta_{\gamma_k}(s)\mu^o_{\gamma_k}(ds),\ \ \forall t \in (0,1],\ \text{ and }\ \Omega_{\gamma_k}(0) = 0, \tag{43}$$

我们得到序列 $(\Omega_{\gamma_k})_k$一致有界，序列 $(\ell_{\gamma_k})_k$也是如此。因此，为了根据巴拿赫-施泰因豪斯定理在 BV-序列 $(\ell_{\gamma_k})_k$弱*收敛至 0，只需证明有界的[24, p.482], 满足

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^1 \langle h(t), d\ell_{\gamma_k}(t)\rangle = 0,\ \ \forall h \in C^1([0,1];\ \mathbb{R}^m).$$

Fix $h \in C^1([0,1];\ \mathbb{R}^m)$。利用分部积分以及 $\Omega_{\gamma_k} \in NBV$，我们得到 t

$$\begin{aligned}\int_0^1 \langle h(t), d\ell_{\gamma_k}(t)\rangle &= \langle h(1), \ell_{\gamma_k}(1)\rangle - \langle h(0), \ell_{\gamma_k}(0)\rangle - \int_0^1 \left\langle \dot h(t), \ell_{\gamma_k}(t)\right\rangle dt \\ &= \left[-\langle h(0), q_{\gamma_k}(0)\rangle - \int_0^1 \left\langle \dot h(t), \ell_{\gamma_k}(t)\right\rangle dt\right] \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{} 0,\end{aligned}$$

由于 $(\ell_{\gamma_k})_k$在 L^2中强收敛于 0，且 $q_{\gamma_k}(0) \longrightarrow q(0) = 0$。这就完成了该断言的证明，即

$$\Omega_{\gamma_k} \xrightarrow[C^*([0,1];\ \mathbb{R}^m)]{\text{weakly}^*} -q. \tag{44}$$

根据 [24, p. 484, #8], 我们还有 $\Omega_{\gamma k}(t) \longrightarrow -q(t)\ \ \forall t \in [0,1]$.

现在定义符号测度 $\mu_{\gamma_k}(dt) := \beta_{\gamma_k}(t)\mu^o_{\gamma_k}(dt)$. 由式（43）可得 e

$$\Omega_{\gamma_k}(t) = \mu_{\gamma_k}[0,t],\ \ \forall t \in (0,1]. \tag{45}$$

利用 $\mu^o_{\gamma_k} \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{\text{弱}^*} \mu^o$，并且命题 4.7($v$) 成立，然后，应用 [37, 命题 9.2。1] 于以下数据:

- $A_{\gamma_k}(t) := \partial^{\ge}_u d(u_{\gamma_k}(t)\ U(t)\ \cap \bar B_\delta(\bar u(t)))$ 对所有 $t \in [0,1]$,
- $A(t) := \partial^{\ge}_u d(\bar u(t)\ U(t)\ \cap \bar B_\delta(\bar u(t)))$ 对所有 $t \in [0,1]$,
- $\gamma_{\gamma_k} := \beta_{\gamma_k}$, $\mu_{\gamma_k} := \mu^o_{\gamma_k}$ 和 $\mu_0 := \mu^o$,

我们得到一个博雷尔可测函数 β: $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $\mu \in C^*([0,1];\ \mathbb{R}^m)$，使得

$$\mu_{\gamma_k} \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{\text{weakly}^*} \mu,\ \ \mu(dt) = \beta(t)\mu^o(dt) \text{ and } \beta(t) \in \partial^{\ge}_u d(\bar u(t), U(t) \cap \bar B_\delta(\bar u(t)))\ \ \mu^o \text{ a.e.}$$

由于 u_{γ_k}一致收敛到 $\bar u$，且 $\operatorname{supp}\{\mu^o_{\gamma_k}\}$满足命题 4.7($v$)，我们推得

$$\operatorname{supp}\{\mu^o\} \subset \mathcal{A} := \left\{t \in [0,1] : (t, \bar u(t)) \in \operatorname{bdry}\operatorname{Gr}\left[U(t) \cap \bar B_\delta(\bar u(t))\right]\right\}. \tag{46}$$

在 μ^o测度为零的集合上调整 $\beta(\cdot)$，使得

$$t \in \mathcal{A} \implies \beta(t) \in \partial^{\ge}_u d(\bar u(t), U(t) \cap \bar B_\delta(\bar u(t))),$$

因此，利用 [37, 公式 (9.17)], ，我们有

$$\beta(t) \in \left[\operatorname{conv} \bar N^L_{U(t)\cap\bar B_\delta(\bar u(t))}(\bar u(t)) \cap \left(\bar B \setminus \{0\}\right)\right],\ \ \forall t \in \mathcal{A}. \tag{47}$$

因此，由（44）和（45），可得 $-dq\ (t)\ = \mu\ (dt)\ = \beta\ (t)\ \mu^o\ (dt)$。利用（41），我们得到

$$-\,dq(t) = (\bar\omega(t))^{\mathsf T}\bar p(t)\,dt = \beta(t)\mu^o(dt). \tag{48}$$

接下来，我们将 $\mu^o(dt) = m(t)\,dt + \mu_s(dt)$ 分解为某个 *nonnegative* L^1-函数 $m(\cdot)$ 和某个相对于勒贝格测度完全奇异的非负博雷尔测度 μ_s。显然，对所有 $m(t) = 0$，均有 $t \in \mathcal{A}^c$，因此，（47）意味着

$$\beta(t)m(t) \in \operatorname{conv} \bar{N}^L_{U(t)\cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t))}(\bar{u}(t)),\ \ \forall t \in [0,1].$$

利用 (48) 可得 $(\bar{\omega}(t))^{\mathsf{T}}\bar{p}(t)dt = \beta(t)m(t)dt + \beta(t)\mu_s(dt)$。这表明，对于几乎处处的 $t \in [0,1]$，$(\bar{\omega}(t))^{\mathsf{T}}\bar{p}(t) = \beta(t)m(t)$。因此，

$$\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t) \in \operatorname{conv} \bar{N}^L_{U(t)\cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t))}(\bar{u}(t)),\ \ \forall t \in [0,1] \text{ a.e.} \tag{49}$$

我们接下来证明弱极大化条件中的“此外”部分。假设存在 $\varepsilon_o > 0$ 和 $r > 0$，使得 $U(t)\cap \bar{B}_{\varepsilon_o}(\bar{u}(t))$ 对所有 r 都是近端正则的 $t \in [0,1]$。由 (49) 并利用引理 5.3，可得对于所有 $t \in [0,1]$ 几乎处处成立。

$$\left\langle \bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t), u - \bar{u}(t)\right\rangle \le \tfrac{\|\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t)\|}{\min\{\varepsilon_o, 2r\}}\|u - \bar{u}(t)\|^2,\ \ \text{for all } u \in U(t).$$

因此，对于几乎处处的 $t \in [0,1]$，

$$\left\langle \omega(t)^{\mathsf{T}}p(t), u\right\rangle - \tfrac{\|\bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t)\|}{\min\{\varepsilon_o, 2r\}}\|u - \bar{u}(t)\|^2 \le \left\langle \bar{\omega}(t)^{\mathsf{T}}\bar{p}(t), \bar{u}(t)\right\rangle,\ \ \text{for all } u \in U(t).$$

至此，弱最大化条件的证明完成。

步骤 6. 非平凡性条件。

只需证明其等价条件：$\|\bar{p}(1)\| + \lambda \neq 0$。在命题 4.7 的非平凡性条件中令 $k \longrightarrow \infty$，并利用 $\bar{p}_{\gamma_k}(1)$ 到 $\bar{p}(1)$ 的收敛、q_{γ_k} 到 q的一致收敛、$\mu^o_{\gamma_k}$到 μ^o的弱*收敛，以及λ_{γ_k}到 λ的收敛，可得

$$1 = \|\bar{p}(1)\| + \|q\|_\infty + \|\mu^o\|_{\text{T.V.}} + \lambda. \tag{50}$$

我们用反证法。若 $\bar{p}(1) = 0$ 且 $\lambda = 0$，由（31）可得 $\bar{p} = 0$。因此，由（41）可得 $\dot{q}(t) = 0$ 对几乎处处的 $t \in [0,1]$ 成立。这表明

$$\beta(t)\mu^o(dt) = -dq(t) = 0 \ \text{ and } \ q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(\tau)d\tau = 0,\ \ \forall t \in [0,1]. \tag{51}$$

由于由（46）和（48）可知，$\operatorname{supp}\{\mu^o\} \subset \mathcal{A}$ 且 $\beta(t) \neq 0$ 对所有 $t \in \mathcal{A}$均成立，（51）的第一个方程可得 $\mu^o = 0$。因此，$\|\bar{p}(1)\| + \|q\|_\infty + \|\mu^o\|_{\text{T.V.}} + \lambda = 0$，这与（50）矛盾。至此，非平凡性条件的证明完成，进而定理 4.8 中条件（i）-（vi）的证明也就完成了。□

5 附录

本节给出定理 4.1 和 4.6 的证明，并建立本文不同部分中用到的辅助结果。我们首先证明定理 4.1。

Proof of Theorem 4.1. (i)：由于在 $L^2([0,1];\ \mathbb{R}^m)$ 中导数一致有界，$W^{1,2}$-序列 u_{γ_k} 等度连续。根据（A4.2），紧集 $U(t)$ 一致有界，因此 u_{γ_k} 在 $C([0,1];\ \mathbb{R}^m)$ 中一致有界。由此，Arzel`a-Ascoli 定理断言，u_{γ_k} 存在一个子序列（下文不再重新标记），一致收敛于一个绝对连续函数 u，且对所有 $t \in [0,1]$，$u(t) \in U(t)$。由于 $\dot{u}_{\gamma_k}$ 在 $L^2([0,1];\ \mathbb{R}^m)$ 中一致有界，因此经过选取子序列后，它在 L^2 中弱收敛。$(u_{\gamma_k}(0))_k$ 的有界性进而表明，$\dot{u}_{\gamma_k}$ 的 L^2-弱极限为 $\dot{u}$，从而 $u \in \mathcal{W}$。x 是与（x_0，u）对应的（D）的唯一解这一事实，以及本部分前述结论，均可得出

可直接由定理 3.9(ii) 得出。

(ii): 现在，假设$c_{\gamma_k} \in C$（k）对于 $k \geq k_o$，其中 k_o 是定理3.1中的秩
1. 首先证明 $(\xi_{\gamma_k})_k$ 具有一致有界变差。由于 ψ 和 $\nabla\psi$在 C上是利普茨连续的，且 x_{γ_k}对于 $k \geq k_o$是利普希茨连续的，我们推得，对于 $k \geq k_o$，函数 $\xi_{\gamma_k}(\cdot)\nabla\psi(x_{\gamma_k}(\cdot))$（其中 ξ_{γ_k}在（21）中定义）在 $[0,1]$上是利普希茨连续的。同样，$f(\cdot,\cdot)$在 $C\times(\mathbb{U}+\tilde{\rho}\bar{B})$ 上的利普希茨性质（进而 $f_\Phi(\cdot,\cdot)$ 的利普希茨性质）以及 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ 属于 $W^1,\infty \times W^{1,2}$ 这一事实，得到 $f_\Phi(x_{\gamma_k}(\cdot)\, u_{\gamma_k}(\cdot))$ 属于 $W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n)$。因此，

$$\zeta_{\gamma_k}(t) := \frac{d}{dt} f_\Phi(x_{\gamma_k}(t), u_{\gamma_k}(t)),$$

几乎处处存在 $t \in [0,1]$。令 $f_\Phi = (f_\Phi^1,\ \cdots,\ f_\Phi^n)^\top$，并利用$x_{\gamma_k}(t) \in$对所有$C(\ t \in [0,1])$成立，且$u_{\gamma_k}(t) \in U(t) \subset \mathbb{U}$对 $t \in [0,1]$几乎处处成立，由[39, 定理 21],的证明可知

$$\zeta_{\gamma_k}^i(t) \in \langle \partial f_\Phi^i(x_{\gamma_k}(t), u_{\gamma_k}(t)), (\dot{x}_{\gamma_k}(t), \dot{u}_{\gamma_k}(t))\rangle,\ \ t \in [0,1] \text{ a.e., } \forall i = 1, \cdots, n.$$

由于假设 $(\|\dot{u}_{\gamma_k}\|_2)_k$有界，且根据定理 3.11，$(\|\dot{x}_{\gamma_k}\|_\infty)_k$有界，因此序列 $(\|\zeta_{\gamma_k}\|_2)_k$被某个 $M_\zeta > 0$所界，该值取决于$\bar{M}$、 $\bar{M}_\psi$、 η以及 $(\|\dot{u}_{\gamma_k}\|_2)_k$的界。

由于 $f_\Phi(x_{\gamma_k}(\cdot)\, u_{\gamma_k}(\cdot)) \in W^{1,\ 2}([0,1];\ \mathbb{R}^n)$，$(D_{\gamma_k})$ 的右端可推出 $\dot{x}_{\gamma_k}$属于 $W^{1,\ 2}([0,1];\ \mathbb{R}^n)$，函数 $|\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(\cdot))\ \dot{x}_{\gamma_k}(\cdot)\rangle|$ 也如此。这还意味着 $\xi_{\gamma_k} \in W^{2,\ 2}([0,1];\ \mathbb{R}^+)$，因为

$$\dot{\xi}_{\gamma_k}(t) = \gamma_k^2 e^{\gamma_k\psi(x_{\gamma_k}(t))}\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle.$$

接下来，通过 $\ddot{x}_{\gamma_k}$ （D_{γ_k}）用 ζ_{γ_k} 和 $\dot{x}_{\gamma_k}$ 表示进行计算，并利用以下事实：对于 $h \in AC$（$[0,1];\ \mathbb{R}$），我们有

$$\frac{d}{dt}|h(t)| = \left(\frac{d}{dt}h(t)\right)\operatorname{sign}(h(t))\ \text{ a.e. } t \in (0,1),^{2}$$

由此可知，存在可测函数 $\vartheta_{\gamma_k}^1$ 和 $\vartheta_{\gamma_k}^2$，其在 t 处的取值属于 $\partial^2\psi$（x_{γ_k}（t）），对几乎所有 $t \in [0,1]$均成立，并且对于几乎处处的 $t \in [0,1]$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle| \\
&= \left[\left\langle \vartheta_{\gamma_k}^1(t)\dot{x}_{\gamma_k}(t), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\right\rangle + \langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \ddot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle\right]\overbrace{\operatorname{sign}(\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle)}^{\alpha(t)} \\
&= \left[\left\langle \vartheta_{\gamma_k}^1(t)\dot{x}_{\gamma_k}(t), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\right\rangle + \langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \zeta_{\gamma_k}(t) - \xi_{\gamma_k}(t)\vartheta_{\gamma_k}^2(t)\dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle\right]\alpha(t) \\
&\quad -\langle\underbrace{\gamma_k\xi_{\gamma_k}(t)\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle}_{\dot{\xi}_{\gamma_k}(t)}\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\rangle\alpha(t) \\
&= \left[\left\langle \vartheta_{\gamma_k}^1(t)\dot{x}_{\gamma_k}(t), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\right\rangle + \left\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \zeta_{\gamma_k}(t) - \xi_{\gamma_k}(t)\vartheta_{\gamma_k}^2(t)\dot{x}_{\gamma_k}(t)\right\rangle\right]\alpha(t) \\
&\quad -\gamma_k\xi_{\gamma_k}(t)\,|\langle\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle|\ \|\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\|^2.
\end{aligned}$$

对两边在 $[0,1]$上积分，并利用（$\|\dot{x}_{\gamma_k}\|_\infty$）$_k$和（$\|\xi_{\gamma_k}\|_\infty$）$_k$的有界性（根据定理3.11），以及假设 (A2.1)，可知存在一个~ ¯常数 M_1，它依赖于 M，M_ψ，M_ψ，η和 M_ζ，使得

$$\int_0^1 |\dot{\xi}_{\gamma_k}(t)|\|\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\|^2 dt \leq \tilde{M}_1.$$

[2]符号函数 sign：$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义如下：对于 $x \neq 0$，$\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$；对于 $x = 0$，其值为 0。

利用（8）和假设 (A2.2)，可得

$$\int_0^1 |\dot{\xi}_{\gamma_k}(t)|dt = \int_0^1 \gamma_k^2 e^{\gamma_k \psi(x_{\gamma_k}(t))} |\langle \nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle| dt$$

$$= \int_{\{t:\|\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\|\le\eta\}} \gamma_k^2 e^{\gamma_k \psi(x_{\gamma_k}(t))} |\langle \nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle| dt$$

$$+ \int_{\{t:\|\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\|>\eta\}} \gamma_k^2 e^{\gamma_k \psi(x_{\gamma_k}(t))} |\langle \nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \dot{x}_{\gamma_k}(t)\rangle| \frac{\|\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\|^2}{\|\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t))\|^2} dt$$

$$\le \eta\left(\bar{M} + \frac{2\bar{M}\bar{M}_\psi}{\eta}\right)\gamma_k^2 e^{-\gamma_k \varepsilon} + \frac{\tilde{M}_1}{\eta^2} \le \eta\left(\bar{M} + \frac{2\bar{M}\bar{M}_\psi}{\eta}\right) + \frac{\tilde{M}_1}{\eta^2} =: \tilde{M}_2,$$

~ ¯ ¯当 k 充分大时，其中 M_2 取决于给定的常数 M、M_ψ、M_ψ、η以及 $(\|\dot{u}_{\gamma_k}\|_2)_k$ 的上界。因此，当 k 充分大时，序列 ξ_{γ_k} 满足 $V_0^1(\xi_{\gamma_k}) \le \tilde{M}_2$.

另一方面，根据定理 3.11，$\|\xi_{\gamma_k}\|_\infty \le \frac{2\bar{M}}{\eta}$对所有 $k \ge k_o$。因此，根据 Helly 第一定理，ξ_{γ_k} 存在一个逐点收敛的子序列（下文仍记为原序列），其极限为某个函数 $\tilde{\xi} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$，且满足 $\|\tilde{\xi}\|_\infty \le \frac{2\bar{M}}{\eta}$并且

$V_0^1\ \tilde{\xi}\ \le \tilde{M}_2$ $\tilde{\xi}$ L^∞ ξ_{γ_k}( )。由于其逐点 *strongly* L^2 $\tilde{\xi}$ i ξ_{γ_k} 收敛于且在 中一致有界，故在 中收敛于。然而，根据本定理的第( )部分，在 中弱收敛于，因此，。于是，在 中逐点且强收敛于，并且 (;) 满足

$$V_0^1(\xi) \le \tilde{M}_2. \tag{52}$$

¯由于 f在 M上是 $C \times (\mathbb{U} + \tilde{\rho}B)$-利普希茨的，$u \in \mathcal{W}$，$\nabla\psi$是利普希茨的，且 $\xi \in BV$，因此方程 (12)（由 $(x,\ u,\ \xi)$ 满足）现在对所有 $t \in [0,1]$都成立。这表明 (13) 对所有 $t \in [0,1]$也成立，并且 $\dot{x} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$。

还需证明 $\dot{x}_{\gamma_k}$具有一致有界变差，并且在 L^2中逐点且强收敛到 $\dot{x} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$。由于 $\xi_{\gamma_k}(\cdot)\nabla\psi(x_{\gamma_k}(\cdot))$ 是利普希茨的，$\_u_{\gamma_k} \in \mathcal{W}$，且 f在 $C \times (\mathbb{U} + \tilde{\rho}B)$ 上是 M-利普希茨的，因此 (D_{γ_k}) 对所有 $t \in [0,1]$ 都成立，即

$$\dot{x}_{\gamma_k}(t) = f_\Phi(x_{\gamma_k}(t), u_{\gamma_k}(t)) - \xi_{\gamma_k}(t)\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)), \quad \forall\, t \in [0,1].$$

因此，利用该定理的第i部分、$f_\Phi(\cdot,\cdot)$的连续性、序列 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k}, \xi_{\gamma_k})_k$具有一致有界变差并逐点收敛到 (x,u,ξ)，以及 (x,u,ξ) 对所有 $t \in [0,1]$均满足（12），我们得到序列 $\dot{x}_{\gamma_k}$有界变差并逐点收敛到 $\dot{x} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$。由于 $(\|\dot{x}_{\gamma_k}\|_\infty)_k$有界，我们得出序列 $\dot{x}_{\gamma_k}$也在 L^2中 *strongly*收敛到 $\dot{x}$。因此，x_{γ_k}在 $W^{1,2}$的范数拓扑下强收敛到 x。□

下面给出我们逼近结果的证明，即定理 4.6。

Proof of 4 6 k C_0 k $\subset \tilde{C}_0$ δ C_1 k $\subset$定理。。我们考虑足够大的，使得 ( ) $\tilde{C}_1$ δ 23 4 2 $\bar{x}_{\gamma_k} \longrightarrow \bar{x}$ *strongly* $W^{1\ 2}$ k ( ) 和 ( ) ( )，见 ( )。根据推论。，在中，因此，对于足够大的¯，$\bar{x}_{\gamma_k}(t) \in B_\delta(\bar{x}(t))$ 对所有 $t \in [0,1]$ 均成立，且 $\bar{y}_{\gamma_k}(1)$ $\in [-\delta,\delta]$，其中

$$\bar{y}_{\gamma_k}(t) := \int_0^t \|\dot{\bar{x}}_{\gamma_k}(s) - \dot{\bar{x}}(s)\|^2 ds.$$

因此，三元组状态 $(\bar{x}_{\gamma_k}, \bar{y}_{\gamma_k}, \bar{z}_{\gamma_k} := 0)$ 是 (D_{γ_k}) 在 $((\bar{c}_k, 0, 0)\ \bar{u})$ 下的解，其中 $\_\bar{x}_{\gamma_k}(t) \in B_\delta(\bar{x}(t))$，且 $\bar{u}(t) \in U(t) \cap B_\delta(\bar{u}(t))$，对所有 $t \in [0,1]$ 均成立，并且 $(\bar{x}_{\gamma_k}(1)\ \bar{y}_{\gamma_k}(1)\ \bar{z}_{\gamma_k}(1) = 0) \in C_1(k) \times [-\delta,\delta] \times [-\delta,\delta]$。因此，当 k 充分

大时，$(\bar{x}_{\gamma_k}, \bar{y}_{\gamma_k}, 0, \bar{u})$ 是 (P_{γ_k}) 的一个 *admissible*四元组。利用 g 在 $C_0(\delta) \times C_1(\delta)$ 上的连续性以及 $J(x,u,z,u)$ 的定义，我们得到 $J(x,u,z,u)$ 有下界。因此，当 k 足够大时，$\inf(P_{\gamma_k})$ 是 *finite*。

固定 k充分大，使得 $\inf(P_{\gamma_k})$ 为 *finite*。令 $(x^n_{\gamma_k}, y^n_{\gamma_k}, z^n_{\gamma_k}, u^n_{\gamma_k})_n \in W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}) \times AC([0,1];\ \mathbb{R}) \times \mathcal{W}$为 (P_{γ_k}) 的极小化序列，即该序列是 (P_{γ_k}) 的可容许序列，并且

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} J(x^n_{\gamma_k}, y^n_{\gamma_k}, z^n_{\gamma_k}, u^n_{\gamma_k}) = \inf(P_{\gamma_k}). \tag{53}$$

由于对每个 n，$x^n_{\gamma_k}$ 都为 $(x^n_{\gamma_k}(0)\, u^n_{\gamma_k})$ 求解 (D_{γ_k})，且 $(x^n_{\gamma_k}(0))_n \in C_0(k) \subset C$，因此由 (18) 可得，序列 $(x^n_{\gamma_k})_n$ 在 $C([0,1];\ \mathbb{R}^n)$ 中一致有界，序列 $(\dot{x}^n_{\gamma_k})_n$ 在 L^2 中一致有界。另一方面，由 (A4.2) 可知，集合 $U(t)$ 是紧且一致有界的，因此，属于 $\mathcal{W}$ 的序列 $(u^n_{\gamma_k})_n$在 $C([0,1];\ \mathbb{R}^m)$ 中一致有界。此外，其导数序列 $(\dot{u}^n_{\gamma_k})_n$ 必须在 L^2 中一致有界。事实上，若不然，则存在 $\dot{u}^n_{\gamma_k}$ 的一个子序列（不妨仍记为原序列），使得 $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\dot{u}^n_{\gamma_k}\|_2 = \infty$.

利用 g 在 $C_0(\delta) \times C_1(\delta)$ 上有界这一点，可得

$$\begin{aligned} J(x^n_{\gamma_k}, y^n_{\gamma_k}, z^n_{\gamma_k}, u^n_{\gamma_k}) &\geq \min_{(c_1,c_2)\in\tilde{C}_0(\delta)\times\tilde{C}_1(\delta)} g(c_1,c_2) + \frac{1}{2} z^n_{\gamma_k}(1) \\ &= \min_{(c_1,c_2)\in\tilde{C}_0(\delta)\times\tilde{C}_1(\delta)} g(c_1,c_2) + \frac{1}{2}\|\dot{u}^n_{\gamma_k} - \dot{u}\|_2^2 \end{aligned}$$

因此，$\lim_{n\longrightarrow\infty} J(x^n_{\gamma_k}, y^n_{\gamma_k}, z^n_{\gamma_k}, u^n_{\gamma_k}) = \infty$，这与（53）矛盾。因此，$(\dot{u}^n_{\gamma_k})_n$在 L^2 中也一致有界。于是，根据 Arzel`a-Ascoli 定理，沿着一个子序列（不再重新标记），序列 $(x^n_{\gamma_k}, u^n_{\gamma_k})_n$一致收敛到一对 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$，而序列 $(\dot{x}^n_{\gamma_k}, \dot{u}^n_{\gamma_k})_n$在 L^2 中弱收敛到一对 $(\dot{x}_{\gamma_k}, \dot{u}_{\gamma_k})$。因此，$(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k}) \in W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n) \times \mathcal{W}$。此外，以下两个不等式成立

$$\|\dot{x}_{\gamma_k} - \dot{\bar{x}}\|_2^2 \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|\dot{x}^n_{\gamma_k} - \dot{\bar{x}}\|_2^2 \ \text{ and } \ \|\dot{u}_{\gamma_k} - \dot{\bar{u}}\|_2^2 \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|\dot{u}^n_{\gamma_k} - \dot{\bar{u}}\|_2^2. \tag{54}$$

由于 $C_0(k)$、$C_1(k)$、$B_\delta(\bar{x}(t))$ 和 $U(t)\cap B_\delta(\bar{u}(t))$ 对所有 $t\in[0,1]$ 都是闭集，并且由序列 $(x^n_{\gamma_k}, u^n_{\gamma_k})$ 到 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ 的一致收敛性可知，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，我们得到包含关系 $x_{\gamma_k}(0) \in C_0(k)$ 和 $x_{\gamma_k}(1) \in C_1(k)$，以及 $x_{\gamma_k}(t) \in B_\delta(\bar{x}(t))$，还有 $u_{\gamma_k}(t) \in U(t) \cap \bar{B}_\delta(\bar{u}(t))$，对所有 $t\in[0,1]$ 均成立。为证明 x_{γ_k} 是对应于 $(x_{\gamma_k}(0)\, u_{\gamma_k})$ 的 (D_{γ_k}) 的解，我们首先利用 $x^n_{\gamma_k}$ 是对于 $(x^n_{\gamma_k}(0)\, u^n_{\gamma_k})$ 的 (D_{γ_k}) 的解这一事实，即对于 $t\in[0,1]$,

$$x^n_{\gamma_k}(t) = x^n_{\gamma_k}(0) + \int_0^t \left[f_\Phi(x^n_{\gamma_k}(s), u^n_{\gamma_k}(s)) - \gamma_k e^{\gamma_k \psi(x^n_{\gamma_k}(s))} \nabla\psi(x^n_{\gamma_k}(s)) \right] ds.$$

利用 $(x^n_{\gamma_k}(t)\, u^n_{\gamma_k}(t)) \in [C\cap\bar{B}_\delta(\bar{x}(t))] \times [U(t)\cap\bar{B}_\delta(\bar{u}(t))]$, f_Φ 在 $[C\cap\mathbb{B}_\delta(\bar{x})] \times [(\mathbb{U}+\tilde{\rho}B)\cap\mathbb{B}_\delta(\bar{u})]$, 上是利普希茨函数，且 $(x^n_{\gamma_k}, u^n_{\gamma_k})$ 一致收敛到 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$，那么在最后一个方程中取 $n\longrightarrow\infty$ 时的极限，可得 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ 满足相同的方程，即，

$$\dot{x}_{\gamma_k}(t) = f_\Phi(x_{\gamma_k}(t), u_{\gamma_k}(t)) - \gamma_k e^{\gamma_k\psi(x_{\gamma_k}(t))}\nabla\psi(x_{\gamma_k}(t)),\ \ t\in[0,1] \text{ a.e.}$$

我们对所有 $t\in[0,1]$ 定义，

$$y_{\gamma_k}(t) := \int_0^t \|\dot{x}_{\gamma_k}(\tau) - \dot{\bar{x}}(\tau)\|^2 d\tau \ \text{ and } \ z_{\gamma_k}(t) := \int_0^t \|\dot{u}_{\gamma_k}(\tau) - \dot{\bar{u}}(\tau)\|^2 d\tau.$$

显然，我们有：

- $y_{\gamma_k} \in AC([0,1];\ \mathbb{R})$，$\dot{y}_{\gamma_k}(t) = \|\dot{x}_{\gamma_k}(t) - \dot{\bar{x}}(t)\|^2$，$t\in[0,1]$ a.e., and $y_{\gamma_k}(0) = 0$.
- $z_{\gamma_k} \in AC([0,1];\ \mathbb{R})$，$\dot{z}_{\gamma_k}(t) = \|\dot{u}_{\gamma_k}(t) - \dot{\bar{u}}(t)\|^2$，$t\in[0,1]$ a.e., and $z_{\gamma_k}(0) = 0$.

此外，由于 $\|\dot{x}^n_{\gamma_k}-\dot{\bar{x}}\|_2^2=y^n_{\gamma_k}(1)\in[-\delta,\delta]$ 且 $\|\dot{u}^n_{\gamma_k}-\dot{\bar{u}}\|_2^2=z^n_{\gamma_k}(1)\in[-\delta,\delta]$，不等式（54）中的两个不等式可得

$$y_{\gamma_k}(1)\in[-\delta,\delta]\ \text{ and }\ z_{\gamma_k}(1)\in[-\delta,\delta]. \tag{55}$$

因此，$(x_{\gamma_k},y_{\gamma_k},z_{\gamma_k},u_{\gamma_k})$ 是 (P_{γ_k}) 的可容许解。现在利用 (53) 和 (54) 的第二个不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\inf(P_{\gamma_k})=\lim_{n\longrightarrow\infty}J(x^n_{\gamma_k},y^n_{\gamma_k},z^n_{\gamma_k},u^n_{\gamma_k})\\
&=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(g(x^n_{\gamma_k}(0),x^n_{\gamma_k}(1))+\frac{1}{2}\left(\|u^n_{\gamma_k}(0)-\bar{u}(0)\|^2+z^n_{\gamma_k}(1)+\|x^n_{\gamma_k}(0)-\bar{x}(0)\|^2\right)\right)\\
&=g(x_{\gamma_k}(0),x_{\gamma_k}(1))+\frac{1}{2}\|u_{\gamma_k}(0)-\bar{u}(0)\|^2+\frac{1}{2}\liminf_{n\longrightarrow\infty}\|\dot{u}^n_{\gamma_k}-\dot{\bar{u}}\|_2^2+\frac{1}{2}\|x_{\gamma_k}(0)-\bar{x}(0)\|^2\\
&\geq g(x_{\gamma_k}(0),x_{\gamma_k}(1))+\frac{1}{2}\|u_{\gamma_k}(0)-\bar{u}(0)\|^2+\frac{1}{2}\|\dot{u}_{\gamma_k}-\dot{\bar{u}}\|_2^2+\frac{1}{2}\|x_{\gamma_k}(0)-\bar{x}(0)\|^2\\
&=J(x_{\gamma_k},y_{\gamma_k},z_{\gamma_k},u_{\gamma_k}).
\end{aligned}$$

因此，对每个足够大的 k，$(x_{\gamma_k},y_{\gamma_k},z_{\gamma_k},u_{\gamma_k})$ 都是 (P_{γ_k}) 的最优解。

正如注 4.4 所述，当 k 足够大时，$C_0(k)\subset C(k)\subset C$。于是，由引理 3.6 和定理 3.9$(i)$ 可知，序列 $(x_{\gamma_k},\xi_{\gamma_k})_k$ 存在一个未重新标记的子序列，其中 ξ_{γ_k} 由 (21) 给出，该子序列具有 $(x_{\gamma_k})_k$，并一致收敛到某个 $x\in W^{1,2}([0,1];\ \mathbb{R}^n)$，其像包含于 C；$(\dot{x}_{\gamma_k},\xi_{\gamma_k})_k$ 在 L^2 中弱收敛到 $(\dot{x},\xi)$，且 ξ 支撑于 $I^0(x)$。

现在，考虑序列 $(u_{\gamma_k})_k$，它属于 $\mathcal{W}$。它在 L^2. 中的导数一致有界。事实上，$(\bar{x}_{\gamma_k},\bar{y}_{\gamma_k},0,\bar{u})$ 的可容许性，以及 $(x_{\gamma_k},y_{\gamma_k},z_{\gamma_k},u_{\gamma_k})$ 对于 (P_{γ_k}) 的最优性，意味着

$$J(x_{\gamma_k},y_{\gamma_k},z_{\gamma_k},u_{\gamma_k})\leq g(\bar{x}_{\gamma_k}(0),\bar{x}_{\gamma_k}(1))+\frac{1}{2}\|\bar{x}_{\gamma_k}(0)-\bar{x}(0)\|^2. \tag{56}$$

~　　~这与 g 在 $C_0(\delta)\times C_1(\delta)$ 上的连续性、序列 $(x_{\gamma_k})_k$ 和 $(\bar{x}_{\gamma_k})_k$ 的一致有界性，以及 $U(0)$ 的有界性共同意味着，对于某个 $\hat{}M>0$，有

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_{\gamma_k}-\dot{\bar{u}}\|_2^2\ \leq\ &2\left(g(\bar{x}_{\gamma_k}(0),\bar{x}_{\gamma_k}(1))-g(x_{\gamma_k}(0),x_{\gamma_k}(1))+\|\bar{x}_{\gamma_k}(0)-\bar{x}(0)\|^2\right.\\
&\left.-\|u_{\gamma_k}(0)-\bar{u}(0)\|^2-\|x_{\gamma_k}(0)-\bar{x}(0)\|^2\right)\leq\hat{M}.
\end{aligned}$$

因此，$(u_{\gamma_k})_k$ 在 L^2 中的导数一致有界。现在，此外我们还有 $x_{\gamma_k}(0)\in C_0(k)\subset C(k)$，故可以应用定理 4.1。我们得到 u_{γ_k} 的一个子序列（不重新编号），以及 $u\in\mathcal{W}$，使得 $(x_{\gamma_k},u_{\gamma_k})$ 一致收敛到 (x,u)，$\dot{u}_{\gamma_k}$ 在 L^2 中弱收敛到 $\dot{u}$；定理 3.11 的所有结论均成立，包括对所有 $t\in[0,1]$，$x_{\gamma_k}(t)\in\text{int}\ C$；$(\dot{x}_{\gamma_k},\xi_{\gamma_k})$ 在 L^2 中 *strongly* 收敛到 $(\dot{x},\xi)$；$\dot{x}\in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$、$\xi\in BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$；并且对所有 $t\in[0,1]$，(x,u,ξ) 满足 (12)-(13)，且 x 唯一地求解 (D)（对应于 u），也就是说，

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f_\Phi(x(t),u(t))-\xi(t)\nabla\psi(x(t))\in f(x(t),u(t))-\partial\varphi(x(t)),\ \forall\, t\in[0,1],\\ x(0)\in C_0\cap\bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(0)).\end{cases}$$

此外，我们有

$$\|\dot{u}-\dot{\bar{u}}\|_2^2\leq\liminf_{k\longrightarrow\infty}\|\dot{u}_{\gamma_k}-\dot{\bar{u}}\|_2^2. \tag{57}$$

我们将证明 (x,u) 对 (P) 是可容许的。由于 $\dot{x}_{\gamma_k}$ 在 L^2 中强收敛于 $\dot{x}$，并利用 (55) 和 (57)，可得：

- $\|\dot{x}-\dot{\bar{x}}\|_2^2=\lim_{k\longrightarrow\infty}\|\dot{x}_{\gamma_k}-\dot{\bar{x}}\|_2^2=\lim_{k\longrightarrow\infty}y_{\gamma_k}(1)\overset{(55)}{\in}[-\delta,\delta]$.
- $\|\dot{u}-\dot{\bar{u}}\|_2^2\overset{(57)}{\leq}\liminf_{k\longrightarrow\infty}\|\dot{u}_{\gamma_k}-\dot{\bar{u}}\|_2^2=\liminf_{k\longrightarrow\infty}z_{\gamma_k}(1)\overset{(55)}{\in}[-\delta,\delta]$.

因此，$\|\dot{x}-\dot{\bar{x}}\|_2^2 \le \delta$和 $\|\dot{u}-\dot{\bar{u}}\|_2^2 \le \delta$.由于$x_{\gamma_k}(1) \in C_1(k)$，(24)(b) 推出 $x(1) \in C_1 \cap \bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(0))$。此外，对所有 $t \in [0,1]$，两个包含关系 $x_{\gamma_k}(t) \in \bar{B}_\delta(\bar{x}(t))$ 和$u_{\gamma_k}(t) \in U(t) \cap B_\delta(\bar{u}(t))$，连同 $(x_{\gamma_k}, u_{\gamma_k})$ 一致收敛于 (x,u)，可得 $x(t) \in B_\delta(\bar{x}(t))$ 和 $u(t) \in U(t) \cap B_\delta(\bar{u}(t))$，对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。因此，(x,u) 对 (P) 是可容许的。于是，$(\bar{x},\bar{u})$ 对 (P) 的最优性意味着

$$g(\bar{x}(0),\bar{x}(1)) \le g(x(0),x(1)). \tag{58}$$

现在，$\bar{x}_{\gamma_k}$ 到 $\bar{x}$的（56）、（58），一致收敛，g的连续性，以及$x_{\gamma_k}(0)$到 $x(0)$的收敛，意味着

$$u(0)=\bar{u}(0) \text{ and } \liminf_{k\longrightarrow\infty}\Big(\|\dot{u}_{\gamma_k}-\dot{\bar{u}}\|_2^2\Big)=0, \text{ and} \tag{59}$$

$$x(0)=\bar{x}(0) \text{ and } g(\bar{x}(0),\bar{x}(1))=g(x(0),x(1)). \tag{60}$$

等式 (59) 表明，u_{γ_k}存在一个子序列（不再另行标记），使得 $\dot{u}_{\gamma_k}$ 在 L^2 中收敛到 $\dot{\bar{u}}$。由此可得，u_{γ_k} 一致收敛到$\bar{u}$，因此有 $u=\bar{u}$。于是，u_{γ_k} 在 $\mathcal{W}$ 中强收敛到 $\bar{u}$。此外，由于$u=\bar{u}$，函数 x 和 $\bar{x}$ 满足具有相同控制 $\bar{u}$ 和初始条件的动力系统（D），见（60）；因此，根据（D）解的唯一性，有 $x=\bar{x}$。利用引理 3.5，我们还可得 $\xi=\bar{\xi}$。因此，

$$x_{\gamma_k} \xrightarrow[C([0,1];\,\mathbb{R}^n)]{\text{uniformly}} \bar{x} \text{ and } (\dot{x}_{\gamma_k},\xi_{\gamma_k}) \xrightarrow[L^2([0,1];\,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+)]{\text{strongly}} (\dot{\bar{x}},\bar{\xi}).$$

这意味着 $(y_{\gamma_k},z_{\gamma_k})$ 在 $W^{1,1}([0,1];\ \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$的强拓扑下 $\longrightarrow(0,0)$。

由于$x_{\gamma_k}(1) \in \big[(C_1\cap\bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(1)))-\bar{x}(1)+\bar{x}_{\gamma_k}(1)\big]\cap(\text{int } C)$，且$\bar{x}_{\gamma_k}(1)$收敛到 $\bar{x}(1)$，因此当 k充分大时，$x_{\gamma_k}(1) \in \big[(C_1\cap\bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(1)))+\tilde{\rho}B\big]\cap(\text{int } C)$。另一方面，根据 $C_0(k)$的定义以及 ρ_k收敛到0可知，当 k足够大时，$x_{\gamma_k}(0) \in \big[(C_0\cap\bar{B}_{\delta_o}(\bar{x}(0)))+\tilde{\rho}B\big]\cap(\text{int } C)$。至此，定理4.6的证明完成。□

在下一个引理中，将为D的解推导一个紧性结果，其中控制被限制为属于 $\mathcal{W}$ 和 $x(1) \in C_1$。这里用到了 (D) 与方程 (12)-(13) 之间的等价性。

引理 5.1（(D) 的紧轨迹与控制） *Assume that* (A1)-(A4.3) *hold. Let* $x_j\ u_j\ _j$ *be a sequence in* $W^{1,\infty}\times\mathcal{W}$ *satisfying* D *with* $x_j\ 1 \in C_1$ *for*$(,),\ ()(),,()()$ *all* $j\in\mathbb{N}$ *and* $\|\dot{u}_j\|_2\ _j$ *be bounded. Consider* $\xi_j\ _j$ *the corresponding sequence in* $L^\infty \quad \mathbb{R}^+$ *obtained via* 3 5 *that is* 12 - 13 (

$[0,1] \quad x_j\ u_j\ \xi_j$ *satisfies for*;) 引理。,,(,,)()() *all* j. *Then there exist a subsequence of* $x_j\ u_j\ \xi_j\ _j$ *we do not relabel and* $x\ u\ \xi \in (,,),,(,,)_{W^{1,\infty}}([0,1];\ \mathbb{R}^n)\times\mathcal{W}\times L^\infty([0,1];\ \mathbb{R}^+)$ *such that* $(x_j,u_j)_j$ *converges uniformly to* (x,u), $(\dot{x}_j,\xi_j)_j$ *now converges pointwise to* $(\dot{x},\xi)\in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)\times BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$ $\dot{u}_j$ *converge weakly in* L^2 *to* $\dot{u}\ \xi$ *and* $x\ u\ \xi$ *satisfies* 12 - 13 *with* $x\ 1 \in C_1$. *In*,,(,,)()()() *particular* $x\ u$ *is admissible for* P *and* $x_j\ _j$ *converges to* x *strongly in the norm*,()()(), (;) *topology of* $W^{1\ 2}\ [0,1]\ \mathbb{R}^n$.

Proof 对序列 $(x_j)_j$在注3.4中使用 (11)，由 $(\|\dot{u}_j\|_2)_j$的有界性、对所有 $t\in[0,1]$ 均有 $u_j(t)) \in U(t)$，以及集合 $U(t)$ 是紧且一致有界的，根据 (A4.2)，阿尔泽拉-阿斯科利定理给出 $(x_j,u_j)_j$的一个子序列（不再重新编号），该子序列一致收敛到绝对连续对 (x,u)，且对所有 $t\in[0,1]$ 均有 $(x(t)\ u(t)\in C\times U(t)$，并且 $(\dot{x}_j,\dot{u}_j)_j$ 在L^2 中弱收敛到 $(\dot{x},\dot{u})$。由于对所有 $j\in\mathbb{N}$，$x_j(0)\in C_0$ 且 $x_j(1)\in C_1$，由此 (A4.1) 和 (A4.3)

可得 $x(0) \in C_0$ 且 $x(1) \in C_1$。利用推论 4.2，我们得到 $\|\xi_j\|_\infty \le \frac{\bar{M}}{2\eta}\xi_j \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$，以及 $V_0^1(\xi_j) \le \tilde{M}_2$，其中 $\tilde{M}_2$ 取决于 $(\|\dot{u}_j\|_2)_j$的一致界。由 Helly 第一定理，$(\xi_j)_j$ 收敛 *pointwise* 到 $\xi \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^+)$。另一方面，推论 4.2 还表明，对所有 $t \in [0,1]$，(12) 均成立，即

$$\dot{x}_j(t) = f_\Phi(x_j(t), u_j(t)) - \xi_j(t)\nabla\psi(x_j(t)),\ \ \forall t \in [0,1]. \tag{61}$$

因此，取 $j \longrightarrow \infty$ 在（61）中的逐点极限可知，$(\dot{x}_j)_j$ 逐点收敛于其 L^2-极限 $\dot{x}$，因此，$\dot{x} \in BV([0,1];\ \mathbb{R}^n)$。由于 $(x_j,\ u_j)$ 是 (D) 的解，（11）表明 $(\|\dot{x}_j\|_\infty)_j$ 一致有界，因此，$(\dot{x}_j)_j$ 收敛到$\dot{x}$ *strongly* 在 L^2中。

现在证明 $\xi(t)$支撑于 $I^0(x)$。固定 $t \in I^-(x)$，即$x(t) \in \operatorname{int} C$。由于$(x_j)_j$ 一致收敛于 x，因此我们可以找到 $\delta_o > 0$ 和 $j_o \in \mathbb{N}$，使得对所有 $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap [0,1]$ 以及所有 $j \ge j_o$，都有$x_j(s) \in \operatorname{int} C$。于是，由于 ξ_j满足（13），$\xi_j(s) = 0$。因此，对于 $s \in (t-\delta_o, t+\delta_o) \cap [0,1]$，$\xi_j(s) \longrightarrow 0$，从而 $\xi(t) = 0$，这证明 ξ支撑于 $I^0(x)$。因此，将引理 3.5 应用于(x,u,ξ)，可得(x,u)是(D)的解，$\xi \in L^\infty([0,1];\ \mathbb{R}^+)$，且$(x,u,\xi)$满足（13）。□

在下面的注记中，我们提供有关约束资格条件（CQ）性质的重要信息。

Remark 5.2

(*i*) 令 $F\colon [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$为一个具有闭且非空值的下半连续多值映射。对于 $d_F(t,x) := d(x, F(t))$，由 [25, 命题 2.3] 可知，对于 $t \in [0,1]$和 $x \in F(t)$，凸包 $(\bar{N}^L_{F(t)}(x))$ 是尖的，当且仅当 $0 \notin \partial_x^> d_F(t,x)$。Clarke 在 [9, 第 121] 页为一般函数 $g(t,x)$ 引入了 $\partial_x^> g(t,x)$ 的概念。对于 $g(t,x) := d_F(t,x)$，[25, 推论 2.2] 表明

$$\partial_x^> d_F(t,x) = \operatorname{conv}\left\{\zeta : \zeta = \lim_{i\longrightarrow\infty} \zeta_i,\ \|\zeta_i\| = 1,\ \zeta_i \in N^P_{F(t_i)}(x_i) \text{ and } (t_i,x_i) \xrightarrow{\operatorname{Gr} F} (t,x)\right\},$$

其中 $(t_i,x_i) \xrightarrow{\operatorname{Gr} F} (t,x)$ 表示 $(t_i,x_i) \longrightarrow (t,x)$，且对所有 i，$x_i \in F(t_i)$。因此，对于 $h \in C([0,1];\ F)$，F在 h处满足约束资格条件（CQ），当且仅当对所有 $t \in [0,1]$，$0 \notin \partial_x^> d_F(t,h(t))$。注意，多值映射 $(t,x) \mapsto \partial_x^> d_F(t,x)$ 一致有界，具有紧凸值，且其图是闭集。

(*ii*) 利用近端法不等式，可以很容易地扩展命题 2.3(d)证明中的论证，从而说明：若下半连续多值映射 F具有闭的、 *r-prox-regular*值（对某个 $r > 0$ 而言，而非凸值），则凸包 $(\bar{N}^L_{F(t)}(\cdot)) = N^P_{F(t)}(\cdot) = N^L_{F(t)}(\cdot) = N_{F(t)}(\cdot)$，并且当且仅当 $F(t)$ 在 x 处是上图Lipschitz 时，此锥在 $x \in F(t)$ 处是尖的，参见定理 7.3 和习题 9。因此，取值为闭的且 r-近端正则集的下半连续多值映射 $F\colon [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$，在 $h \in C([0,1];\ F)$ 处满足约束资格条件（CQ），当且仅当对所有 $t \in [0,1]$，$F(t)$ 在 $h(t)$ 处是上图 Lipschitz。

(*iii*) 如果对所有 $t \in [0,1]$都有 $F(t) = F$，其中 F 为闭集，则 $\operatorname{conv}(\bar{N}^L_{F(t)}(\cdot)) = N_F(\cdot)$，并且当且仅当 F 在 x 处为上图Lipschitz 时，该锥在 $x \in F$ 处是尖的。因此，常值多值映射 C_F 在 $h \in F$ 处满足约束资格条件（CQ），当且仅当对所有 $t \in [0,1]$，在 $h(t)$ 处为上图Lipschitz。

我们以如下技术引理结束本节，该引理用于定理4.8中弱最大化条件“此外”部分的证明。该引理的证明基于法锥的局部性质、近端法不等式，以及在我们的设定下近端、Mordukhovich 和 Clarke 法锥彼此相同这一事实。

引理 **5 3** *Let* $F \quad [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *be a lower semicontinuous multifunction with closed*. : (; *and nonempty values and let* $h \in C\ [0,1] \quad F$ *. If there exist* $\varepsilon_o > 0$ *and* $r > 0$ *such*)*that* $F(t) \cap B_{\varepsilon_o}(h(t))$ *is* r*-prox-regular for all* $t \in [0,1]$*, then for any* $\delta > 0$ *we have*

$$\operatorname{conv}\,(\bar{N}^L_{F(t)\cap\bar{B}_\delta(h(t))}(h(t))) = N^P_{F(t)\cap\bar{B}_{\varepsilon_o}(h(t))}(h(t)),\ \ \forall t \in [0,1].$$

Moreover, for all $t \in [0,1]$ *and for all* $\zeta \in$ 凸包 ($\bar{N}^L_{F\,(t)\cap\bar{B}_\delta(h(t))}$(*h*(*t*))) *we have*

$$\langle \zeta, v - h(t)\rangle \le \frac{\|\zeta\|}{\min\{\varepsilon_o, 2r\}}\|v - h(t)\|^2,\ \ \forall v \in F(t).$$

参考文献

[1] Adam, L., Outrata, J.：关于与常微分方程耦合的扫掠过程的最优控制，《离散与连续动力系统B辑》19，2709–2738 (2014)

[2]Aubin, J.-P.：《可行性理论》，现代 Birkhäuser 经典丛书，Birkhäuser/施普林格，巴塞尔-波士顿-柏林（2009）

[3]Brokate, M., Krejˇc´ı：《涉及速率无关变分不等式的常微分方程系统最优控制》，《离散与连续动力系统B辑》18，331–348（2013）

[4]Brudnyi, A., Brudnyi, Y.：《几何分析在延拓与迹问题中的方法》，第1卷，《数学专著》102。Birkhäuser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔（2012）。

[5] Cao, T.H., Colombo, G., Mordukhovich, B., Nguyen, D.：《全控制扫掠过程的优化》，微分方程杂志295，138–186（2021）

[6] Cao, T.H., Mordukhovich, B.：通过离散近似对扰动扫掠过程进行最优控制，《离散与连续动力系统》B辑 21，3331–3358（2016）

[7] Cao, T.H., Mordukhovich, B.：受控扫掠过程的最优性条件及其在人群运动模型中的应用，《离散与连续动力系统》B辑 22，267–306（2017）

[8] Cao, T.H., Mordukhovich, B.：非凸扰动扫掠过程的最优控制，《微分方程杂志》266，1003–1050（2019）[9] Clarke, F.H.：《优化与非光滑分析》，约翰·威立，纽约（1983）

n[10] Clarke, F.H.：《泛函分析、变分法与最优控制》，《数学研究生教材》264，施普林格，伦敦（2013）[11]Clarke, F.H., Yu. Ledyaev, Yu., Stern, R.J., Wolenski, P.R.：《非光滑分析与控制理论》，《数学研究生教材》178，施普林格出版社，纽约（1998）[12] Clarke, F.H., Stern, R.J., Wolenski, P.R.：近端光滑性与下界性质，《凸分析杂志》2，117–144（1995）C^2 Colombo, G., Henrion, R., Hoang, N.D., Mordukhovich, B.S.：扫掠过程的最优控制，《动力学、连续与离散脉冲系统 B辑》19，117–159（2012）[13] Colombo, G., Henrion, R., Hoang, N.D., Mordukhovich, B.S.：多面体控制集上的扫掠过程最优控制，《微分方程杂志》260（2016）第4期，3397–3447。[14] Colombo, G., Marigonda, A.：一类非凸函数的可微性，《变分法》25，1–31（2005）[15] Colombo, G., Mordukhovich,B., Nguyen, D.：受约束的不连续控制下扰动扫掠过程的优化，《SIAM控制与优化杂志》58第4期，2678–2709（2020）[16] de Pinho, M.d.R., Ferreira, M.M.A., Smirnov, G.V.：涉及扫掠过程的最优控制，《集合值变分分析》27，第2期，523–548（2019）[17] de Pinho, M.d.R., Ferreira, M.M.A., Smirnov, G.V.：更正：涉及扫掠过程的最优控制，《集合值变分分析》27，1025–1027（2019）[18] de Pinho, M.d.R., Ferreira, M.M.A., Smirnov, G.V.：扫掠过程最优控制：数值方法，《优化理论与应用杂志》185，845–858（2020）[19] de Pinho, M.d.R., Ferreira, M.M.A., Smirnov, G.V.：具有扫掠系统和端点约束的最优控制问题的必要条件，《优化》71:11，3363–3381（2021）[20]Federer, H.：曲率测度，《美国数学会汇刊》93，418–491（1959）[21] Hiriart-Urruty, J.-B.：利普希茨函数的延拓，《数学分析与应用杂志》77，539–554（1980）[22] Hoehener, D.：带纯状态约束的控制问题二阶最优性条件的变分方法，《SIAM控制与优化杂志》50，第3期，1139–1173

[24] Vladimir Kadets, 《泛函分析与测度论教程》, 由 Andrei Iacob 从 2006 年俄文版翻译, Universitext。施普林格, Cham（2018）[25] Loewen, P.D., Rockafellar, R.T.: 《非光滑优化中的伴随弧》, 《美国数学会汇刊》325, 第 1 期, 39–72（1991）[26] Luenberger, D.G: 《向量空间方法与优化》, John Wiley & Sons, Inc.（1969）[27] Mordukhovich,B.S.: 《变分分析与广义微分, I: 基本理论》, 施普林格, 柏林（2006）[28] Moreau, J.J.: 《被可变凸集扫过》, I, 《凸分析研讨班论文集》, 蒙彼利埃 1, 报告 ´15, 36 页（ 1971 ）[29]Moreau, J.J.: 《被可变凸集扫过》, II, 《凸分析研讨班论文集》, 蒙彼利埃 2, 报告´3, 43 页（1972）[30] Moreau, J.J.: 希尔伯特空间中与移动凸集相关的演化问题, 《微分方程杂志》26, 347–374（1977）[31] Nour, C., Stern, R.J., Takche, J.: 近端光滑性与外球条件, 《凸分析杂志》16(2), 501–514（2009）[32]Nour, C., Zeidan, V.: 受控非凸扫掠过程的数值解, 《IEEE 控制系统快报》第 6 卷, 1190–1195（2022）[33]Nour, C., Zeidan, V.: 具有可分离端点的非凸扫掠过程的最优控制: 局部极小点的非光滑极大值原理, 《微分方程杂志》第 318 卷, 113–168（2022）。[34] Poliquin, R.A., Rockafellar, R.T., Thibault, L.: 距离函数的局部可微性, 《美国数学会汇刊》352, 5231–5249（2000）[35] Rockafellar, R.T.: $\mathbb{R}^n$中闭集边界的 Clarke 切锥, 《非线性分析: 理论、方法与应用》3, 145–154（1979）[36] Rockafellar, R.T., Wets, R.J.-B.: 《变分分析》, 《数学科学基础丛书》317, 施普林格出版社, 柏林（1998）[37] Vinter, R.B.: 《最优控制》, Birkh¨auser, 《系统与控制: 基础与应用》, 波士顿（2000）[38] Zeidan, V., Nour, C., Saoud, H.: 受控非凸扫掠过程的非光滑极大值原理, 《微分方程杂志》第 269 卷, 第 11 期, 9531–9582（2021）

[39]Zeidan, V.: 广义 Bolza 问题中的一种修正 Hamilton-Jacobi 方法, 《应用数学与优化》第 11 期, 97–109（1984）