稀疏随机环境中随机游走的弱淬火极限定理

DARIUSZ BURACZEWSKI、PIOTR DYSZEWSKI 和 ALICJA KO-LODZIEJSKA

Abstract. 我们研究整数集上简单对称随机游走的一个扰动版本的淬火行为。随机游走者以对称方式移动，但在一些随机选定的标记点处，我们施加随机漂移。我们证明，如果标记点之间的间隔是独立同分布的，并且具有正则变差性质且指标足够小，那么随机游走者位置不存在强淬火极限定律。因此，我们在随机测度弱收敛的背景下研究淬火极限律。

arXiv:2301.00478v1 [math.PR] 1 Jan 2023

1. Introduction

整数集上的简单对称随机游走（SRW）是最经典且最易理解的随机过程之一：从零点出发的粒子在每个单位时间内以概率 $1/2$ 移动到相邻位置之一。该过程是一个时间齐次且空间齐次的马尔可夫链，即其增量独立于过去，并且转移不依赖于时间和过程的当前位置。在许多情况下，环境的齐次性限制了该过程的适用性。在众多应用模型中，可能会出现某些障碍，如杂质、涨落等。因此，将这些不规则性表示为随机环境是很自然的；众所周知，即使是对环境的微小扰动，也会影响随机过程的性质。1981 年，Harrison and Shepp [15] 描述了略有扰动的环境中的 SRW 行为，只将从 0 到 1 的转移概率替换为某个固定的 $p \in (0,1)$。他们观察到，缩放极限并不是布朗运动，而是偏斜布朗运动。

我们旨在研究随机扰动环境中的随机游走。我们的主要结果涉及所谓的稀疏随机环境中的随机游走（RWSRE），该过程由 [17], 引入，其中环境的均匀性仅在 $\mathbb{Z}$ 的一个稀疏子集上受到扰动。更具体地说，我们首先随机选取一个整数子集，其位置由一个具有正整数跳跃的标准随机游走标记；接着，在选定的位置施加随机漂移。本文可视为对近期文献 [17, 6, 5], 的延续，其中描述了退火极限定理。然而，这些退火型结果并未解决这样一个问题：仅凭环境是否足以高度确定地决定该过程的分布行为。本文中，我们固定环境，并关注淬火情形下随机过程的极限行为。正如本文所示，即使在极为稀疏的随机环境中，随机扰动介质所引起的涨落也会影响随机游走者的条件分布。

我们在此考虑的 RWSRE 模型可视为 SRW 与 Solomon 于七十年代提出的模型之间的一种插值。后者称为一维随机环境随机游走（RWRE），其中所有位置都关联着随机的独立同分布权重，用以描述向右邻点移动的概率。很快

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：60K37；次要分类：60F05；60G57。
Key words and phrases. 弱收敛、点过程、正则变差、随机环境中的随机游走、稀疏随机环境。

人们便清楚地认识到，系统中额外的环境噪声会对模型的行为产生重大影响。事实上，关于该模型的各类问题，例如极限定理和大偏差，其答案都仅以环境为依据，而将过程随机运动的影响边缘化。

1.1. 一般设定。 为定义我们的模型，令 $\Omega = (0,1)^{\mathbb{Z}}$ 表示所有可能的环境构型的集合，并赋予相应的柱代数 σ-代数$\mathcal{F}$和概率测度 P。按照 P 分布的 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个随机元素 $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 称为随机环境。Ω 中的每个元素 ω 和整数 x 都在带有柱代数 σ-代数 $\mathcal{G}$ 的集合 $\mathcal{X} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ 上诱导出一个概率测度 P_ω^x，使得 $\mathrm{P}_\omega^x[X_0 = x] = 1$ 和

$$\mathrm{P}_\omega^x\left[X_{n+1} = j | X_n = i\right] = \begin{cases} \omega_i, & \text{if } j = i+1, \\ 1-\omega_i, & \text{if } j = i-1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{X}$。容易看出，在 P_ω^x 下，X 构成一个最近邻随机游走，它是 $\mathbb{Z}$ 上的时间齐次马尔可夫链，并称为随机环境中的随机游走。环境的随机性 ω 会显著影响 X 的各种性质。因此，研究 X 在退火测度 $\mathbb{P}^x = \int \mathrm{P}_\omega^x \mathrm{P}(\mathrm{d}\omega)$ 下的行为是很自然的；该测度定义为 $(\Omega \times \mathcal{X}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G})$ 上满足以下条件的唯一概率测度：

$$\mathbb{P}^x[F\times G] = \int_F \mathrm{P}_\omega^x[G]\,\mathrm{P}(\mathrm{d}\omega), \quad F\in\mathcal{F}, \quad G\in\mathcal{G}.$$

下文中，我们将记 $\mathrm{P}_\omega = \mathrm{P}_\omega^0$ 和 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$。事实证明，一般而言，在退火概率 X 下，X 不再是马尔可夫链，因为它通常呈现长程依赖。

我们关注当 $\to\infty$ 时 X_n 的极限定理；不过，本文讨论相应首次通过时间序列 $T = (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的渐近行为，即

$$T_n = \inf\{k\in\mathbb{N} : X_k = n\}. \tag{1.1}$$

我们将在淬火情形下研究 T_n 的分布，也就是说，我们将考察

$$\mu_{n,\omega}(\cdot) = \mathrm{P}_\omega\left[(T_n - b_n)/a_n \in \cdot\,\right]$$

对于适当选取的序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它们可能依赖于 ω。在当前情形下，μ_n 由 $\mu_n(\omega) = \mu_{n,\,\omega}$ 定义，是 $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ 上概率测度空间 $\mathcal{M}_1$ 中的一个随机元素，其中 $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ 表示博雷尔 σ-代数。$\mathcal{M}_1$ 在 Prokhorov 距离下构成一个完备可分度量空间。序列 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限行为可分为两种类型。若 $\mu_n \to \mu$ 在 $\mathcal{M}_1$ 中几乎处处成立，即关于概率测度 P，ω，测度序列 $\{\mu_{n,\omega}\}$ 弱收敛到 μ，则称 T 满足强淬火极限定理；若 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 在 $\mathcal{M}_1$ 中成立，则称 T 满足弱淬火极限定律。这里及下文中，$\Rightarrow$ 表示弱收敛。

现在我们将讨论概率测度 P（即环境分布）的不同选择。为使引言简洁，我们将讨论范围限定于独立同分布随机环境（这是 P 最经典的选择）以及稀疏随机环境，后者将在下文深入研究。

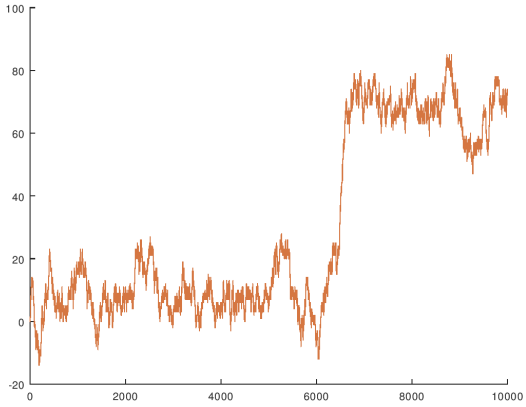


FIGURE 1.1. 独立同分布随机环境中的随机游走：以概率 $1/3$ 为 $\omega_0 = 1/3$，以概率 $2/3$ 为 $\omega_0 = 3/4$，以及 $\alpha \approx 1{,}35$。

1.2. 独立同分布环境。 环境分布 P 最简单且研究最广泛的选择之一是独立同分布随机环境中的随机游走，它对应于乘积测度，在该测度下，$\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成一列独立同分布（i.i.d.）随机变量。在其开创性著作中，Kesten等人 [16] 利用了随机游走与随机树之间的如下联系 [14]：T 的一维分布与带移民的随机环境分枝过程相关联，其繁殖律的均值服从 $(1-\omega_0)/\omega_0$。这一观察后来得出结论：T 属于某个 α-稳定分布的吸引域，其中 $\mathrm{E}[\omega_0^{-\alpha}(1-\omega_0)^{\alpha}] = 1$，前提是存在这样的 $\alpha \in (0,2)$（见图 1.3）。仔细考察 Kesten等人 [16] 的主要结果后可以发现，中心化与缩放由 $(1-\omega_0)/\omega_0$ 的分布决定，这意味着行者的行为并不会显著影响极限行为。进而，要理解随机运动，就需要研究 P_ω 下 T 的行为。若 $\alpha > 2$，则一个形式如下的强淬火极限定理 [24, 13]

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_\omega\left[(T_n - \mathrm{E}_\omega[T_n])/(\sigma\sqrt{n}) \in \mathrm{d}x\right] = e^{-x^2/2}\mathrm{d}x/\sqrt{2\pi}$$

在 $\mathcal{M}_1$ 中几乎必然成立，其中 $\sigma^2 = \mathrm{E}[\mathrm{Var}_\omega[T_1]] < \infty$。从 [18, 20] 中的结果可以看出，在 $\alpha < 2$ 情形下，T 不存在强淬火极限定理。事实上，对于 $\alpha < 2$，可以找到 T 沿不同序列得到的不同强淬火极限。这又引出了对弱淬火情形下 T 的分析，也就是 μ_n 的弱极限。首先考虑映射 H：$\mathcal{M}_p \to \mathcal{M}_1$，定义如下：对于一个点过程 $\zeta = \sum_{i\geq 1}\delta_{x_i}$，其中 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是这些点的任意一种枚举，定义

$$H(\zeta)(\cdot) = \begin{cases} \mathbb{P}\big[\sum_{i\geq 1} x_i(\tau_i - 1) \in \cdot\big], & \sum_{i\geq 1} x_i^2 < \infty, \\ \delta_0(\cdot), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

其中，$\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个独立同分布的、均值为 1 的指数随机变量序列。随后，[9, 12, 19] 的主要结果表明，对于 $\alpha < 2$,

$$\mathrm{P}_\omega\big[n^{-1/\alpha}(T_n - \mathrm{E}_\omega T_n) \in \cdot\big] \Rightarrow H(N)$$

在 $\mathcal{M}_1$ 中，其中 N 是定义在 $(0,\ \infty)$ 上、强度为 $c_N x^{-\alpha-1}\mathrm{d}x$ 的泊松点过程，其中 $c_N > 0$ 为某个常数。

1.3. 稀疏随机环境。 现在我们来明确本文所关注的对象。我们将在一种环境概率 P 下进行研究，在这种概率测度下，随机

游走 X 除了一些随机标记点外将作对称移动；在这些标记点处，我们施加随机漂移。标记点将按照双边随机游走分布。记 $((\xi_k,\lambda_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ 为随机向量 (ξ,λ) 的一列独立副本，其中 $\lambda\in(0,1)$ 且 $\xi\in\mathbb{N}$，P-几乎必然。考虑前述双边随机游走$S=(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，其定义如下

$$S_n=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}\xi_k, & \text{if } n>0,\\ 0, & \text{if } n=0,\\ -\sum_{k=n+1}^{0}\xi_k, & \text{if } n<0,\end{cases}$$

我们定义随机环境 $\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\Omega$ 如下

$$\omega_n=\begin{cases}\lambda_k, & \text{if } n=S_k \text{ for some } k\in\mathbb{Z},\\ 1/2, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{1.2}$$

序列 S 确定了放置随机漂移 $2\lambda_k-1$ 的标记点。由于在未标记点 n 处（也就是说，在大多数点处），向右跳跃的概率是确定的，且等于 $\omega_n=1/2$，因此将 ω 称为稀疏随机环境是很自然的。沿用 [17] 的说法，我们将上文定义的、以 ω 为稀疏随机环境的稀疏随机环境中的随机游走称为 RWSRE。

例 1.1. 当 $\mathrm{P}[\xi=1]=1$ 时，稀疏随机环境中的随机游走等价于独立同分布环境中的随机游走。

例 1.2. 假设 ξ 与 λ 独立，且服从几何分布 $\mathrm{P}[\xi=k]=a(1-a)^{k-1}$, $k\geq 1$，其中 $a\in$ 属于 (0,1)。那么，式 (1.2) 中给出的稀疏随机环境等价于一个独立同分布环境，其中 ω_0 服从 $\mathrm{P}[\omega_0\in\cdot]=a\mathrm{P}[\lambda\in\cdot]+(1-a)\delta_{1/2}(\cdot)$。

在退火情形下，稀疏随机环境中的随机游走已在 [17, 6, 5] 中得到详细研究。在 [17] 中，作者探讨了 RWSRE 的暂态性与常返性，并证明了 X 的强大数定律和一些分布极限定理。与独立同分布随机环境的情形一样，该比例

$$\rho=\frac{1-\lambda}{\lambda}$$

自然地出现在对随机游走渐近行为的描述中。根据 [17，定理 3.1]，X 在概率测度 P 下几乎必然向右暂态，当

$$\mathrm{E}\log\rho\in[-\infty,0)\quad\text{and}\quad\mathrm{E}\log\xi<\infty.\tag{1.3}$$

注意，(1.3) 中的第一个条件排除了 $\rho=1$ 几乎必然成立、从而 X 为简单随机游走的退化情形。在 (1.3) 条件下，RWSRE 也满足强大数定律，即

$$T_n/n\to 1/v\quad\mathbb{P}-a.s.\tag{1.4}$$

其中

$$v=\begin{cases}\frac{(1-\mathrm{E}\rho)\mathrm{E}\xi}{(1-\mathrm{E}\rho)\mathrm{E}\xi^2+2\mathrm{E}\rho\xi\mathrm{E}\xi} & \text{if } \mathrm{E}\rho<1,\ \mathrm{E}\rho\xi<\infty \text{ and } \mathrm{E}\xi^2<\infty,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

参见 [17] 中的定理 3.3 和 [6] 中的命题 2.1。我们立即指出，(1.3) 中的条件在我们的主要结果所需条件下均成立。因此，本文研究的稀疏随机环境中的随机游走均向右暂态。

T 的渐近行为由两个要素控制。第一个要素与独立同分布环境的情形类似，是满足以下条件的 $\alpha>0$：

$$\mathrm{E}\,[\rho^{\alpha}]=1.\tag{1.5}$$

参数 $\alpha>0$（如果存在）用于量化随机转移概率 λ_k' 对随机游走者渐近行为的影响。第二个

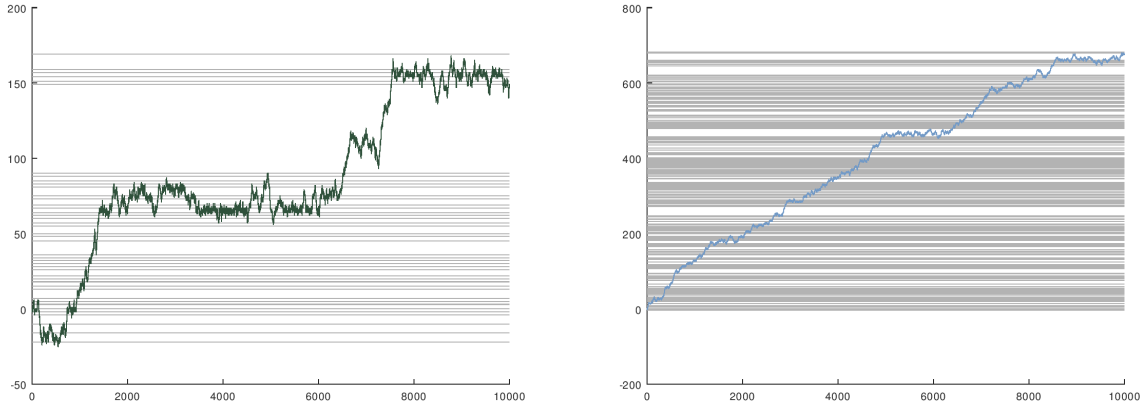


FIGURE 1.2. RWSRE: $\beta = 1.2$和 $\alpha \approx 0.52$ （左侧）以及 $\beta = 1.2$和 $\alpha \approx 1.85$ （右侧）。灰色水平线表示标记点

要素是 ξ 的尾部行为，即当 $t \to \infty$ 时 $\mathrm{P}[\xi > t]$ 的渐近行为。若 $\mathrm{E}[\xi^4] < \infty$，则相对于退火概率 T， T 属于某个 α-稳定分布 [6, 的吸引域，其行为与独立同分布环境下观察到的完全相同。若 ξ 的尾部正则变差，且指数为 $-\beta$，其中 $\beta \in (0, 4)$，即当 $t \to \infty$ 时，则会出现新的现象，

$$\mathrm{P}[\xi > t] \sim t^{-\beta}\ell(t)$$

对于某个函数 ℓ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在无穷远处缓变。本文中及下文中，对于两个函数 f, $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$只要 $f(t)/g(t) \to 1$，当 $t \to \infty$时，我们记作 $f(t) \sim g(t)$。回忆一下，若函数 ℓ 满足对任意常数 $c > 0$，当 $t \to \infty$ 时有 $\ell(ct) \sim \ell(t)$，则称其在无穷远处缓变。可以看出，若 ξ 的尾部具有正则变差性，指数为 $\beta \in (0, 4)$，且 $\mathrm{E}[\xi] < \infty$，那么相对于退火概率，T属于 $\gamma = \min\{\alpha, \beta/2\}$ 的 γ-稳定分布的吸引域，见 [6]。

对于较小的 β，可以看到稀疏随机环境的影响与过程在未标记点处的随机运动之间相互作用。为陈述这一结果，令 ϑ 为一个非负随机变量，其拉普拉斯变换为

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\vartheta}\right] = \frac{1}{\cosh(\sqrt{s})}, \quad s > 0. \tag{1.6}$$

注意， 2ϑ 的分布与一维布朗运动离开区间 $[-1, 1]$ 的出界时间相同，见 [23, 命题 II.3.7]。接下来，考虑 $\mathbb{K} = [0, \infty]^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上的测度 η，定义如下:

$$\eta(\{(v, u) \in \mathbb{K} : u > x_1 \text{ or } v > x_2\}) = x_1^{-\beta} + \mathbb{E}[\vartheta^{\beta/2}]x_2^{-\beta/2} - \mathbb{E}[\min\{x_1^{-\beta}, \vartheta^{\beta/2}x_2^{-\beta/2}\}]$$

对于 x_1, $x_2 > 0$。现在令 $N = \sum_k \delta_{(t_k, \mathbf{j}_k)}$ 为定义在 $[0, \infty) \times \mathbb{K}$ 上、强度为 $\mathrm{LEB} \otimes \eta$ 的泊松点过程，其中 LEB 表示一维勒贝格测度。在温和的可积性假设下（见 [5, 引理 6.4], ），积分

$$\mathbf{L}(t) = (L_1(t), L_2(t)) = \int_{[0,t]\times\mathbb{K}} \mathbf{j}\, N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}\mathbf{j}), \qquad t \geq 0$$

收敛，并定义了一个具有 L´evy 测度 η的二维非稳定 L´evy 过程。接下来考虑 β-逆从属过程

$$L_1^{\leftarrow}(t) = \inf\{s > 0 : L_1(s) > t\}, \qquad t \geq 0.$$

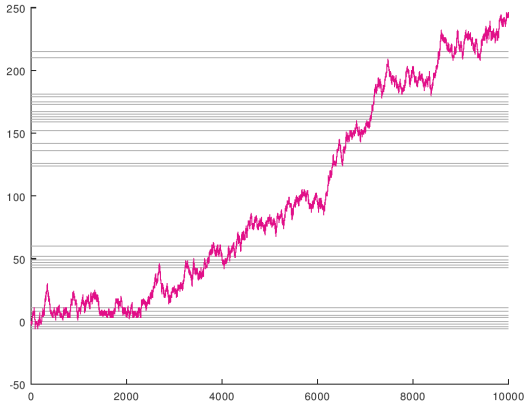


FIGURE 1.3. RWSRE: $\beta = 0.8$ 和 $\alpha \approx 1.85$。灰色水平线表示标记点。

最后，若 $\beta < 2\alpha$ 且 $\beta \in (0,1)$，则在一些额外的温和可积性假设下，[5, 定理 21],相对于退火概率

$$T_n/n^2 \Rightarrow 2L_2(L_1^{\leftarrow}(1)^-) + 2\vartheta(1 - L_1(L_1^{\leftarrow}(1)^-))^2$$

在 $\mathbb{R}$中弱收敛。本文旨在给出这一结果的淬火版本。正如我们将在主定理中看到的，右侧的项 $L_2(L_1^{\leftarrow}(1)-)$和 $L_1(L_1^{\leftarrow}(1-))$可视为环境的贡献，而 ϑ则代表随机游走者在靠近 n 的未标记点处运动所产生的贡献。关于退火极限结果的完整处理，尤其是互补情形 $\beta \geq 2\alpha$，请读者参阅 [5]。

本文结构如下：第2节将对我们的设定和主要结果作精确描述。第3节将对环境进行初步分析。主要结果证明中的关键部分见第4节和第5节，分别在这两节中我们证明强淬火极限不存在，并证明弱淬火极限。

2. WEAK QUENCHED LIMIT LAWS

本节将介绍我们的主要结果。从现在起，我们将只考虑由（1.2）给出的稀疏随机环境。我们假设

$$\mathrm{P}[\xi > t] \sim t^{-\beta}\ell(t) \tag{2.1}$$

对于某个 $\beta \in (0, 4)$ 和缓变 ℓ。我们将重点讨论这样的情形：系统的渐近行为并非仅由环境决定，因此我们还将假设

$$\mathrm{E}[\rho^{2\gamma}] < 1, \qquad \mathrm{E}[\xi^{\gamma}\rho^{3\gamma}] < \infty \tag{2.2}$$

对于某个参数 $\gamma \in (\beta/4, 1 \wedge \beta)$。条件（2.2）中的第一个条件保证，$T_n$ 的部分涨落将来自过程在未标记点上所花费的时间。第二个条件纯粹是技术性的。注意，我们并不假设存在满足（1.5）的 $\alpha > 0$。

我们的第一个结果表明，在强意义下，T_n不存在淬火极限。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为任意一个正实数序列，使得

$$n\mathrm{P}[\xi > a_n] \to 1.$$

那么，由于假设 ξ 的尾部是正则变差的，序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 也具有指数为 $1/\beta$的正则变差。也就是说，存在某个缓变函数 ℓ_1，使得

$$a_n = n^{1/\beta}\ell_1(n).$$

序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 将在我们的结果中充当缩放因子。第一个结果表明，对于 T，不存在强淬火极限定律。

定理 2.1. 假设 (1.3)、(2.1) 和 (2.2)成立。那么，对于 P 几乎每个 ω，都不存在序列 $\{A_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{C_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得标准化随机变量序列 $(T_n - C_n(\omega))/A_n(\omega)$ 依分布收敛（相对于 P_ω）到一个非平凡随机变量。

因此，与独立同分布环境的情形一样，T_n 的渐近淬火行为应以弱淬火收敛来表述。与退火极限定理的情形一样，我们需要区分中度稀疏（$\mathrm{E}\xi < \infty$）和高度稀疏（$\mathrm{E}\xi = \infty$）的随机环境。

为描述前者，令 $\{\vartheta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为一列独立同分布副本，服从分布 (1.6) 的 ϑ，并令 $G: \mathcal{M}_p \to \mathcal{M}_1$ 定义如下:

$$G(\zeta)(\cdot) = \begin{cases} \mathrm{P}\left[\sum_{i\geq 1} x_i(2\vartheta_i - 1) \in \cdot\right], & \int x^2\zeta(\mathrm{d}x) < \infty, \\ \delta_0(\cdot) & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.3}$$

对于 $\zeta = \sum_{i\geq 1}\delta_{x_i}$，其中 $\{x_i\}$ 是该点测度的任意枚举。

定理 2.2。 假设 (1.3)、(2.1) 和 (2.2) 成立。若 $\mathrm{E}\xi < \infty$，则

$$\mathrm{P}_\omega\left[(T_n - \mathrm{E}_\omega T_n)/a_n^2 \in \cdot\right] \Rightarrow G(N)(\cdot)$$

在 $\mathcal{M}_1$ 中，其中 N 是定义在 $(0,\infty)$ 上、强度为 $\beta x^{-\beta/2-1}\mathrm{d}x/2\mathrm{E}\xi$ 的泊松点过程。

在引入陈述强稀疏随机环境中结果所需的记号之前，我们先讨论表述相对简单的临界情形。记

$$m_n = n\mathrm{E}\left[\xi\mathbf{1}_{\{\xi\leq a_n\}}\right].$$

注意，由卡拉马塔定理 [2, 定理 1.5。11] ，序列 $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是指数为 $1/\beta$ 的正则变差序列。此外，当 $\beta = 1$ 时， $a_n = o(m_n)$；当 $\beta < 1$时， $a_n \sim (1-\beta)m_n$。接下来令 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的渐近逆，即任意满足以下条件的自然数集递增序列:

$$\lim_{n\to\infty} c_{m_n}/n = \lim_{n\to\infty} m_{c_n}/n = 1.$$

根据正则变差序列渐近逆的性质， [2, 定理 1.5.12]， c_n 在渐近等价意义下定义良好，且正则变差指数为β。最后，根据正则变差序列复合的性质， $\{a_{c_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$正则变差指数为 1，且当 $\beta = 1$时， $a_{c_n} = o(n)$。

定理 2.3. 假设(1.3)、(2.1) 和(2.2)。若$\mathrm{E}\xi = \infty$ 且 $\beta = 1$，则

$$\mathrm{P}_\omega\left[(T_n - \mathrm{E}_\omega T_n)/a_{c_n}^2 \in \cdot\right] \Rightarrow G(N)(\cdot)$$

在 $\mathcal{M}_1$中，其中 N 是定义在$(0,\infty)$ 上的泊松点过程，强度为 $x^{-3/2}\mathrm{d}x/2$。

定理 2.2 和定理 2.3 中的极限随机测度，与独立同分布环境情形下的对应测度具有一些共同性质 [19, 注 1.5]。具体而言，利用泊松点过程的叠加和缩放性质，可以直接证明，对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和 G， G_1，……， G_n，若它们是定理 2.2 或定理 2.3 中极限随机测度 $G(N)$ 的独立同分布副本，

$$G_1 * G_2 * \ldots * G_n(\cdot) \stackrel{d}{=} G(\cdot/n^{2/\beta}). \tag{2.4}$$

在强稀疏情形下陈述我们的结果，需要引入一些额外的记号。与退火结果的情形一样，采用非递减 c`adl`ag 函数的框架，而非点过程，是最方便的。记非递减 c`adl`ag 函数 $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 所成的类为 $\mathbb{D}^\uparrow$，并对 $h \in \mathbb{D}^\uparrow$ 考虑

$$\Upsilon(h) = \sup\{h(t) \,:\, t \in \mathbb{R}_+,\, h(t) \le 1\}. \tag{2.5}$$

最后，对于 $h \in \mathbb{D}^\uparrow$，将 $\{x_k(h)\ t_k(h)\}_k$ 记为 h 的任意一个跳跃枚举，即 $t_k = t_k(h) \in \mathbb{R}_+$，其中 $k \in \mathbb{N}$ 是非负半轴上的所有点，使得 h 在这些点处有一个（左）间断，且跳跃大小为 $x_k(h) = h(t_k) - h(t_k^-) > 0$。注意，随机级数 $\sum_{k:h(t_k)\le 1} x_k(h)^2(2\vartheta_k - 1)$ 收敛，因为其期望值可由 $h(1)\mathbb{E}|2\vartheta - 1|$ 控制。最后，令 $F\colon \mathbb{D}^\uparrow \to \mathcal{M}_1$ 定义为

$$F(h)(\cdot) = \mathrm{P}\left[(1-\Upsilon(h))^2(2\vartheta_0 - 1) + \sum_{k:h(t_k)\le 1} x_k(h)^2(2\vartheta_k - 1) \in \cdot\right].$$

注意，如果对于某个 t，有 $h(t) = 1$，那么必然有 $\Upsilon(h) = 1$。

定理 2.4. 假设 (1.3)、(2.1) 和 (2.2)。若 $\beta \in (0,1)$，则

$$\mathrm{P}_\omega\left[(T_n - \mathrm{E}_\omega T_n)/n^2 \in \cdot\right] \Rightarrow F(L)(\cdot)$$

in $\mathcal{M}_1$，其中 L 是一个 β-稳定的 *Lévy* 次级过程，其 *Lévy* 测度为 $\nu(x,+\infty) = x^{-\beta}$。

有趣的是，极限测度 $F(L)$ 不具有 (2.4) 意义下的自相似性。也就是说，对于任意 a, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$，以下对象的分布

$$F_1 * F_2(\cdot) \quad \text{and} \quad F((\cdot - a)/b)$$

彼此不同，其中 F, F_1 和 F_2 是定理 2.4 中极限随机测度$F(L)$ 的独立副本。

3. Auxiliary results

现在我们将介绍一些证明中会用到的引理。我们将讨论一些随机级数的性质，以及命中时间 (1.1) 的渐近行为。

3.1. 相关随机过程的估计 $\{R_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ **和** $\{W_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$。我们将频繁使用以下记号：对于整数 $i \le j$,

$$\Pi_{i,j} = \prod_{k=i}^{j} \rho_k, \qquad R_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \xi_k \Pi_{i,k-1}, \qquad W_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \xi_k \Pi_{k,j}. \tag{3.1}$$

我们还将利用以下极限

$$R_i = \lim_{j\to\infty} R_{i,j} = \sum_{k=i}^{\infty} \xi_k \Pi_{i,k-1}, \qquad W_j = \lim_{i\to-\infty} W_{i,j} = \sum_{k=-\infty}^{j} \xi_k \Pi_{k,j}. \tag{3.2}$$

注意，若 $\mathrm{E}\log\rho < 0$ 和 $\mathrm{E}\log\xi < \infty$，则这两个级数均收敛，这可由大数定律和 Borel-Cantelli 引理的直接应用得出（见 [3, 定理 2.1.3]）。随机变量 R_i's 和 W_j's 具有相同的分布，并满足递推公式

$$R_i = \xi_i + \rho_i R_{i+1} \qquad \text{and} \qquad W_j = \rho_j \xi_j + \rho_j W_{j-1}.$$

因此，我们可以援引 [3,引理 2.3.1] 的证明，推知关于 R_i's 和 W_j's 的矩存在性的以下结果。下文中，我们用 R （分别用 W）表示 $\{R_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ （分别为 $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$）中的一个一般元素。

引理 3.1。设 $\alpha > 0$。若 $\mathrm{E}\rho^\alpha < 1$、$\mathrm{E}\rho^\alpha\xi^\alpha < \infty$ 和 $\mathrm{E}\xi^\alpha < \infty$，则 $\mathrm{E}R^\alpha$ 和 $\mathrm{E}W^\alpha$ 均有限。

3.2. 命中时间。 现在我们描述停时序列$T = \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一些性质，这有助于我们更好地理解过程 X，并指出其中在证明主要结果时起关键作用的组成部分。我们首先分析标记点 S上的命中时间 T，即

$$T_{S_i} = \inf\{n : \ X_n = S_i\}.$$

事实证明，可以使用式（3.1）中给出的$R_{i,\ j}$来表示区间（$S_i,\ S_j$）的退出概率。也就是说，对于 $i < k < j$，我们有

$$\mathrm{P}_\omega^{S_k}[T_{S_i} > T_{S_j}] = \frac{R_{i+1,k}}{R_{i+1,j}}, \qquad \mathrm{P}_\omega^{S_k}[T_{S_i} < T_{S_j}] = \Pi_{i+1,k}\frac{R_{k+1,j}}{R_{i+1,j}}. \tag{3.3}$$

参见定理 2.1 的证明。令

$$\mathbb{T}_k = T_{S_k} - T_{S_{k-1}}$$

粒子到达 S_{k-1}后，到达第 k个标记点 S_k 所需的时间。使用 W_j来描述 $\mathbb{T}_k$的期望值:

$$\mathrm{E}_\omega\mathbb{T}_k = \mathrm{E}_\omega^{S_{k-1}}T_{S_k} = \xi_k^2 + 2\xi_k W_{k-1}, \tag{3.4}$$

参见引理 2.1 的证明。

注意，随机变量 $\mathbb{T}_k$ 可以分解为两部分之和：轨迹到达 S_{k-1} 后、到达 S_k前，在 S_{k-1}左侧停留的时间，以及在 S_{k-1}右侧停留的时间。出于下文将会说明的技术原因，我们根据粒子进入 S_{k-1}的方向，将恰好位于 S_{k-1} 点的访问划分到这两个集合之一。具体而言，我们定义

$$\mathbb{T}_k^l = \#\big\{n \in (T_{S_{k-1}}, T_{S_k}] : \ X_n < S_{k-1} \ \text{ or } \ (X_{n-1}, X_n) = (S_{k-1} - 1, S_{k-1})\big\},$$

也就是说，$\mathbb{T}_k^l$ 是粒子在（$-\infty,\ S_{k-1} - 1$] 中所花时间与从 $S_{k-1} - 1$ 到 S_{k-1}的步数之和。类似地，我们定义

$$\mathbb{T}_k^r = \#\big\{n \in (T_{S_{k-1}}, T_{S_k}] : \ S_{k-1} < X_n \le S_k \ \text{ or } \ (X_{n-1}, X_n) = (S_{k-1} + 1, S_{k-1})\big\}.$$

因此，我们可以写成

$$\mathbb{T}_k = T_{S_k} - T_{S_{k-1}} = \mathbb{T}_k^l + \mathbb{T}_k^r.$$

注意，给定 ω后，随机变量 $\{\mathbb{T}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在概率测度 P_ω 下相互独立；然而，对于固定的 k，$\mathbb{T}_k^l$ 和 $\mathbb{T}_k^r$ 彼此相互依赖。综上，我们得到以下分解，后文将反复用到:

$$T_{S_k} = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{T}_j = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{T}_j^l + \sum_{j=1}^{k}\mathbb{T}_j^r =: T_{S_k}^l + T_{S_k}^r.$$

为了进一步推进，我们需要详细分析 $\mathbb{T}_j^r$、 $\mathbb{T}_j^l$ ，并描述它们的淬火期望值和淬火方差。下面我们证明，到达任意一个选定位置（S_k）$_k$ 后，连续向左的游程可以忽略不计。这意味着 T_{S_k}的行为主要由 $T_{S_k}^r$决定。

3.3. 序列 $\{T_{S_n}^r\}$。注意，在概率测度 P_ω下， $\mathbb{T}_k^r$ 的分布与如下时间相同：从 0 出发，简单随机游走在 $[0, \xi_k]$ 上首次到达 ξ_k所需的时间，其中 0 处设有反射屏障。这就是我们将 $\mathbb{T}_k^r$ 中对 S_{k-1}的访问计入，但只计入来自 $S_{k-1} + 1$的访问的原因。事实上，令（Y_n）$_n$ 为定义在 $\mathbb{Z}$上的简单随机游走，且与环境 ω独立。定义

$$U_n = \inf\{m : |Y_m| = n\}, \tag{3.5}$$

也就是说，U_n 是反射随机游走首次命中 n的时刻。那么，对每个 $k > 0$，在固定环境 ω下，$\mathbb{T}_k^r \overset{d}{=} U_{\xi_k}$。接下来我们将考察 ξ_k 的渐近性质如何影响 $\mathbb{T}_k^r$的渐近性质。为此，我们将利用上述等式

在分布意义下成立，因此我们首先需要描述当 n趋于无穷时 U_n 的渐近性质。省略下一个引理的证明，因为它可由对鞅 Y_n^2-n、 $Y_n^4-6nY_n^2+3n^2+2n$、$Y_n^6-15nY_n^4+(45n^2+30n)Y_n^2-(15n^3+30n^2+16n)$和$\exp\{\pm tY_n\}\cosh(t)^{-n}$应用 Doob 最优停时定理的标准方法得到。

引理 3.2。 设 U_n，其中 $n\in\mathbb{N}$ 由(3.5)给出。我们有

$$\mathrm{E}U_n=n^2,\quad \mathrm{E}U_n^2=5n^4/3-2n^2/3.$$

此外，当 $n\to\infty$ 时，

$$U_n/n^2\Rightarrow 2\vartheta,$$

ϑ 由(1.6)中定义的 ϑ 给出。此外，随机变量族 $\{n^{-4}U_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致可积。

序列 $T^r_{S_n}=\sum_{k=1}^n\mathbb{T}^r_k$ 是由 P_ω 个独立随机变量 $\{\mathbb{T}^r_k\}$ 之和。由于根据引理 3.2,

$$\mathrm{Var}_\omega\mathbb{T}^r_k=\frac{2}{3}\xi_k^4-\frac{2}{3}\xi_k^2, \tag{3.6}$$

方差 $\mathrm{Var}_\omega T^r_{S_n}$ 的渐近行为为 $(2/3)\sum_{k=1}^n\xi_k^4$，因此满足稳定极限定理 [11, 定理 3.8。2]。此外，我们可以利用关于独立同分布的正则变动随机变量之和的精确大偏差结果 [8,定理 9。1] 来描述 $\mathrm{Var}_\omega T^r_{S_n}$ 的偏差。也就是说，对于任意趋于无穷大的序列 $\{\alpha_n\}$，

$$\mathrm{P}[\mathrm{Var}_\omega T^r_{S_n}\geq\alpha_n a_n^4]\sim(2/3)^{\beta/4}n\alpha_n^{-\beta/4}a_n^{-\beta}\ell(\alpha_n^{1/4}a_n).$$

现在我们可以利用 Potter 界 [2, 定理 1.5.6] 来控制 $\ell(\alpha_n^{1/4}a_n)$，其中 $\ell(a_n)$。由此可得一个对数尺度下的渐近大偏差结果。我们在下面的引理中总结这一讨论。

推论 3.3。 序列 $\{\mathrm{Var}_\omega T^r_{S_n}/a_n^4\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依分布收敛（相对于概率测度 P）到某个稳定随机变量 Z。此外，对任意趋于无穷的序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，

$$\log\mathrm{P}[\mathrm{Var}_\omega T^r_{S_n}\geq\alpha_n a_n^4]\sim-\beta\log(\alpha_n)/4.$$

3.4. 序列 $\{T^l_{S_n}\}$。 $\mathbb{T}^l_k$ 的结构更为复杂。我们可以将其表示为 F_k的独立副本之和，其中 F_k表示从 S_k向左的一次游程长度，由此得到其淬火期望和淬火方差的公式。

引理 3.4. 以下公式成立

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\omega F_k&=2(\xi_k+W_{k-1}),\\ \mathrm{Var}_\omega F_k&=8\sum_{j<k}\Pi_{j+1,k-1}\left(\xi_{j+1}W_j^2+\xi_{j+1}^2W_j+\frac{1}{3}(\xi_{j+1}^3-\xi_{j+1})\right)\\ &\quad-4W_{k-1}^2+(-14\xi_k+10)W_{k-1}-4\xi_k^2+4\xi_k\end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\omega\mathbb{T}^l_k&=2\xi_kW_{k-1},\\ \mathrm{Var}_\omega\mathbb{T}^l_k&=8\xi_k\sum_{j<k-1}\Pi_{j+1,k-1}\left(\xi_{j+1}W_j^2+\xi_{j+1}^2W_j+\frac{1}{3}(\xi_{j+1}^3-\xi_{j+1})\right)\\ &\quad+\xi_k(1-\lambda_{k-1})\Big(\big(\xi_k(1-\lambda_{k-1})+2\lambda_{k-1}\big)(2W_{k-1}-\rho_{k-1})^2\\ &\quad-6(\xi_{k-1}-1)\rho_{k-1}W_{k-2}+\rho_{k-1}\Big).\end{aligned} \tag{3.8}$$

证明。 由于环境 $\{(\rho_k, \xi_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是平稳的，只需对 $k=0$ 或 $k=1$计算上述所有公式。我们先考虑 $\mathbb{T}_1^l$。注意，从 0 出发的粒子可以从右侧或左侧反复返回 0。根据经典破产问题，$\mathrm{P}_\omega^1(T_0 > T_{\xi_1}) = 1/\xi_1$。因此，从 1 出发的粒子在到达 ξ_1之前会经过点 0 M_1 次，其中 M_1 服从参数为 $1/\xi_1$ 、均值为$\xi_1 - 1$的几何分布。这正是 $\mathbb{T}_1^r$所统计的对 0 的访问次数。在从 0 到 1 的连续两步之间，也就是说，在第 m步与第 $(m+1)$ 步之间，粒子会在 $(-\infty, 0]$中停留一段时间。特别是，它从左侧对 0 的访问恰好包含在 $\mathbb{T}_1^l$中。我们将这样的游程记作 $G_0(m)$，并将其一般副本记作 G_0 。也就是说， $G_0(G_k$，分别)是粒子在访问 1（ S_k+1，分别）之前，在 $(-\infty, 0]$ ($(-\infty, S_k]$中停留的时间。于是 $G_0 \overset{d}{=} T_1 - 1$ （或更一般地， $G_k \overset{d}{=} T_{S_k+1} - T_{S_k} - 1$）。

随机变量 G_0 由 $(-\infty, -1]$ 中的 N_m 个互不相交的游程组成，其中 N_m 表示在下一步跳至 1 之前从 0 跳出的次数。由于粒子以概率 $(1-\lambda_0)$ 跳至 -1， N_m 服从均值为 ρ_0 的几何分布。综上，$\mathbb{T}_1^l$ 可分解为

$$\mathbb{T}_1^l = \sum_{m=0}^{M_1} G_0(m) = \sum_{m=0}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_m} F_0(j,m), \tag{3.9}$$

其中 $F_0(j,m)$ 表示从 0 开始的一次向左游程的长度。注意，在概率测度 P_ω 下，N_m 和 F_0 (j,m) 都是独立同分布的。此外，第一个求和包含 $m=0$，因为过程从 0 开始。

回顾一下，若对于某个随机变量 N 以及一个与 N 独立的独立同分布序列 $\{X_n\}$，有 $S_N = \sum_{k=1}^N X_i$ ，则

$$\mathrm{Var} S_N = \mathrm{E}N \cdot \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}N \cdot (\mathrm{E}X)^2. \tag{3.10}$$

结合上述公式与 (3.9)，容易推出

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\omega \mathbb{T}_1^l &= \xi_1\rho_0 \mathrm{E}_\omega F_0, \\ \mathrm{Var}_\omega \mathbb{T}_1^l &= \xi_1\rho_0 \mathrm{Var}_\omega F_0 + \left(\xi_1^2\rho_0^2 + \xi_1\rho_0\right)(\mathrm{E}_\omega F_0)^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由于 F_0 是一次从 0 开始且以向左跳跃开头的游程所需的时间，利用经典破产问题的解并结合公式 (3.4)，可得

$$\mathrm{E}_\omega F_0 = 1 + \mathrm{E}_\omega^{-1} T_0 = 1 + (\xi_0 - 1) + \frac{1}{\xi_0}\mathrm{E}_\omega^{S_{-1}} T_{S_0} = 2(\xi_0 + W_{-1}),$$

任意邻域穿越时间的淬火方差公式已在 [13, 引理 3]中给出，并得到（3.7）。将这些公式代入（3.11），利用$\rho_0 W_{-1} = W_0 - \xi_0\rho_0$这一事实，最后化简该表达式即可得到（3.8）。□

引理 3.5。 对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $\theta \geq 0$,

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{Var}_\omega T_{S_n}^l \geq \varepsilon n^\theta a_n^4\right] \leq o(1)/n^{\theta\gamma}, \quad n\to\infty,$$

其中 γ 是满足（2.2）的参数。特别地,

$$\frac{1}{a_n^4}\mathrm{Var}_\omega T_{S_n}^l \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

证明。 要证明该引理，需要处理方差公式 (3.8)。为避免冗长繁琐的论证，我们将说明如何估计其中两项，即证明

$$\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^n \xi_k \cdot \sum_{j<k-1} \Pi_{j+1,k-1}\xi_{j+1} W_j^2 \geq \varepsilon n^\theta a_n^4\right] \leq o(1)/n^{\theta\gamma}, \quad n\to\infty \tag{3.12}$$

and

$$\mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cdot\sum_{j<k-1}\Pi_{j+1,k-1}\xi_{j+1}^3\geq\varepsilon n^\theta a_n^4\Big]\leq o(1)/n^{\theta\gamma},\quad n\to\infty. \tag{3.13}$$

其余各项均可用完全相同的论证处理。

回忆 $\gamma\in(\beta/4,\ 1\wedge\beta)$ 和 $\mathrm{E}\rho^{2\gamma}<1$。由马尔可夫不等式以及 ξ_k、$\Pi_{j+2,\,k-1}$、$\rho_{j+1}\xi_{j+1}$ 和 W_j 的独立性可得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cdot\sum_{j<k-1}\Pi_{j+1,k-1}\xi_{j+1}W_j^2\geq\varepsilon n^\theta a_n^4\Big]&\leq\frac{1}{\varepsilon^\gamma n^{\theta\gamma}a_n^{4\gamma}}\mathrm{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cdot\sum_{j<k-1}\Pi_{j+1,k-1}\xi_{j+1}W_j^2\Big]^\gamma\\&\leq\frac{1}{\varepsilon^\gamma n^{\theta\gamma}a_n^{4\gamma}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\xi_k^\gamma\cdot\sum_{j<k-1}\mathrm{E}\Pi_{j+2,k-1}^\gamma\mathrm{E}[\rho_{j+1}^\gamma\xi_{j+1}^\gamma]\mathrm{E}W_j^{2\gamma}\leq\frac{Cn}{\varepsilon^\gamma n^{\theta\gamma}a_n^{4\gamma}}=\frac{o(1)}{n^{\theta\gamma}},\end{aligned}$$

最后一个不等式由我们的假设 (2.2) 和引理 3.1 得出。这就证明了 (3.12)。对于第二个公式 (3.13)，我们采用类似的方法：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cdot\sum_{j<k-1}\Pi_{j+1,k-1}\xi_j^3\geq\varepsilon n^\theta a_n^4\Big]&\leq\frac{1}{\varepsilon^\gamma a_n^{4\gamma}}\mathrm{E}\Big[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cdot\sum_{j<k-1}\Pi_{j+1,k-1}\xi_j^3\Big]^\gamma\\&\leq\frac{1}{\varepsilon^\gamma n^{\theta\gamma}a_n^{4\gamma}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\xi_k^\gamma\cdot\sum_{j<k-1}\mathrm{E}\Pi_{j+2,k-1}^\gamma\mathrm{E}[\rho_{j+1}^\gamma\xi_{j+1}^{3\gamma}]\leq\frac{Cn}{\varepsilon^\gamma n^{\theta\gamma}a_n^{4\gamma}}=\frac{o(1)}{n^{\theta\gamma}}.\end{aligned}$$

利用引理的第一部分和 $\theta=0$，我们得出 $\mathrm{Var}_\omega T_{S_n}^l/a_n^4$依概率收敛于 0。□

4. Absence of a strong limit

现在我们的目标是证明定理 2.1，即“分布中的强极限”不存在。在证明的大部分内容中，我们将考虑标准归一化，即$C_n(\omega)=\mathrm{E}_\omega T_n$, $A_n(\omega)=\sqrt{\mathrm{Var}_\omega T_n}$，并研究归一化序列

$$\widetilde{T}_n=\frac{T_n-\mathrm{E}_\omega T_n}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega T_n}}. \tag{4.1}$$

~我们将证明，对于 P-几乎处处的 ω，存在其子序列 $\{T_{n_k}(\omega)\}$ 收敛于 $2\vartheta-1$；然而，另一方面，正如我们将看到的，这不可能是整个序列的极限。最后我们将证明，不存在能导出非平凡极限的其他归一化。

强淬火极限不存在，根本原因在于，对于 P-几乎处处的 ω，都可以找到一个无限子序列 $\{\xi_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$，使得 ξ_{n_l+1} 的取值异常大，因此 $T_{S_{n_l+1}}-T_{S_{n_l}}$（即随机游走从 S_{n_l} 移动到 S_{n_l+1}所需的时间）要么远大于 $T_{S_{n_l}}$，要么与 $T_{S_{n_l}}$ 相当。

首先，我们需要构造一个概率为一的有利环境。为此，我们考虑两个递增序列 $\{p_n\}$、$\{q_n\}$，它们发散至 $+\infty$，使得

$$2p_n<q_n<p_{n+1}/2,\qquad p_n/q_n\to0\qquad\text{and}\qquad\frac{a_{q_n}}{a_{2p_n}}\geq n^\theta \tag{4.2}$$

对于 $\theta>$，$\max\{1/(4\gamma)\ \ 1/\beta\}$。注意，例如可以取 $p_n=2^{2^n}$、$q_n=p_{n+1}/4$。

我们需要证明，过程在区间 $[S_{2p_n},S_{2q_n}]$ 内的行为由其在时间 T_{2p_n} 之后的位置决定，而在考察时间 q_n 和尺度 a_{q_n} 时，它截至时间 $2p_n$ 的先前取值可以忽略。随机游走 X 的轨迹无法相对于 P 划分为独立部分，因为该过程可能出现向左的大幅游程，而且环境并非均匀。为此，我们将截去 X 中变得过大的向左游程。我们考虑一个新过程，记作$\underline{X}=\{\underline{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$。该过程的行为基本与前一个过程相同，并在

同一环境中演化，只有一处细微差别。具体而言，在 X 到达 $\overline{S}_{q_n}$ 之后、到达 S_{2q_n} 之前，我们在点 S_{p_n} 处设置一道屏障，也就是说，该过程不能返回到 S_{p_n} 以下。不过，当 X 到达 S_{2q_n} 时，这道屏障就会移除。当然，我们可以在同一概率空间上耦合这两个过程：在 S_{p_n} 到达 S_{q_n} 之后、到达 S_{2q_n} 之前，移除所有向左偏移。

对于任意 k，我们以显然的方式定义随机变量 T_k, $\mathbb{T}_k$, $\mathbb{T}_k^r$, $\mathbb{T}_k^l$，例如

$$\overline{T}_k = \inf\{j : \overline{X}_j = k\}, \quad \overline{\mathbb{T}}_k = \overline{T}_{S_k} - \overline{T}_{S_{k-1}}.$$

于是，对所有 k's 都有 $\mathbb{T}_k^r = \overline{\mathbb{T}}_k^r$，而对于 $k \notin \bigcup_n$，有 $\mathbb{T}_k^l = \mathbb{T}_k^l$（$q_n$，$2q_n$]。注意，$\mathbb{T}_k - \mathbb{T}_k$ 是过程 X 在到达 S_{k-1} 之后、到达 S_k之前处于 S_{p_k} 以下所花费的时间。下面的引理保证了过程 X 和 $\overline{X}$ 的渐近性质具有可比性。

引理 4.1. 对于任意 $\varepsilon \in (0, 1)$，且对 概率测度 P-几乎处处的 ω，存在 $N = N(\omega)$ 使得

$$\sum_{q_n < k \le 2q_n} \mathrm{E}_\omega(\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k) < \varepsilon^n \tag{4.3}$$

and

$$\sum_{q_n < k \le 2q_n} \mathrm{Var}_\omega(\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k) < \varepsilon^n \tag{4.4}$$

对于 $n > N$。

此外

$$\mathbb{T}_n = \overline{\mathbb{T}}_n \ \textit{a.s. for large (random) } n.$$

证明。固定 $k \in (q_n, 2q_n]$。为描述$\mathbb{T}_k - \mathbb{T}_k = \mathbb{T}_k^l - \mathbb{T}_k^l$ 的淬火均值和淬火方差，我们需要计算轨迹 X 在到达 S_{k-1} 之后、到达 S_k 之前，在 S_{p_n} 以下所花费的时间。为此，我们按引理 3.4 的证明进行分解，即将

$$\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k = \sum_{m=1}^{M_k} \sum_{j=0}^{N_m} F_{p_n}(j, m), \tag{4.5}$$

其中，M_k 表示在时间区间 $(T_{S_{k-1}}, T_{S_k}]$ 内，随机游走从右侧访问 S_{p_n} 的次数；N_m 表示从右侧到达 S_{p_n} 后连续向左偏移的次数；$F_{p_n}(j, m)$ 是相应游程的长度。注意，N_m 服从几何分布，其均值为 ρ_{p_n}，方差为 $\rho_{p_n}(1 + \rho_{p_n})$。因此，由公式 (3.10) 和 (3.7),

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\omega\left[\sum_{j=0}^{N_m} F_{p_n}(j, m)\right] &= \rho_{p_n} \mathrm{E}_\omega F_{p_n} = 2W_{p_n} \\ \mathrm{Var}_\omega\left[\sum_{j=0}^{N_m} F_{p_n}(j, m)\right] &= \rho_{p_n} \mathrm{Var}_\omega F_{p_n} + \rho_{p_n}(1 + \rho_{p_n}) \left(\mathrm{E}_\omega F_{p_n}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

接下来，注意到对任意 $m > 0$，$\mathrm{P}_\omega[M_k = m] = r s^{m-1}(1 - s)$，其中

$$r = \mathrm{P}_\omega^{S_{k-1}}\left[T_{S_{p_n}} < T_{S_k}\right]$$

并再次运用赌徒破产问题，

$$s = \mathrm{P}_\omega^{S_{p_n}+1}\left[T_{S_{p_n}} < T_{S_k}\right] = 1 - \frac{1}{\xi_{p_n+1}} \mathrm{P}_\omega^{S_{p_n+1}}\left[T_{S_{p_n}} > T_{S_k}\right].$$

我们可以轻松计算 M_k 的均值和方差，并利用公式 (3.3) 将它们表示为环境的函数。化简后得到，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\omega M_k &= \frac{r}{1-s} = \xi_k \Pi_{p_n+1,k-1}, \\ \mathrm{Var}_\omega M_k &= \frac{r(1+s-r)}{(1-s)^2} = \xi_k \Pi_{p_n+1,k-1} \left(2R_{p_n+1,k-1} + \xi_k \Pi_{p_n+1,k-1} - 1\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此，由 (3.1)、(4.6) 和 (4.7)，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\omega \left[\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k\right] &= 2\xi_k \Pi_{p_n+1,k-1} W_{p_n}, \\ \mathrm{Var}_\omega \left[\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k\right] &= \xi_k \Pi_{p_n,k-1} \mathrm{Var}_\omega F_{p_n} \\ &\quad + \xi_k \Pi_{p_n,k-1} \left(\mathrm{E}_\omega F_{p_n}\right)^2 \left(1 + 2 \sum_{j=p_n+1}^{k-1} \xi_j \Pi_{p_n,j-1} + \xi_k \Pi_{p_n,k-1}\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

现在，我们准备证明 (4.3)。我们有

$$\mathrm{P}\left[\sum_{q_n<k\le 2q_n} \mathrm{E}_\omega(\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k) \ge \varepsilon^n \right] \le \varepsilon^{-n} \sum_{q_n<k\le 2q_n} \mathrm{E}\left[2\xi_k \Pi_{p_n+1,k-1} W_{p_n}\right]^\gamma \le C\varepsilon^{-n} (\mathrm{E}\rho^\gamma)^{q_n-p_n},$$

其中，$\gamma \in (0,1)$ 是一个足够小的常数，使得 $\mathrm{E}\rho^\gamma < 1$、$\mathrm{E}\xi^\gamma < \infty$ 和 $\mathrm{E}W^\gamma < \infty$（见 (2.2) 和引理 3.1）。于是，根据 Borel-Cantelli 引理

$$\mathrm{P}\left[\sum_{q_n<k\le 2q_n} \mathrm{E}_\omega(\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k) \ge \varepsilon^n \quad \text{i.o.} \right] = 0,$$

由此得到 (4.3)。公式 (4.4) 基本上可以用同样的论证证明。将 (3.7) 与 (4.8) 结合，需要计算方差的精确表达式；接着，按照上述方法，并分别考虑各个加项（如引理 3.4 的证明中所示），即可推出 (4.4)。细节从略。

最后，我们写出

$$\mathbb{P}[\mathbb{T}_k \ne \overline{\mathbb{T}}_k] = \mathrm{E}\left[\mathrm{P}_\omega[\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k \ge 1]\right] \le \mathrm{E}\left[\mathrm{E}_\omega(\mathbb{T}_k - \overline{\mathbb{T}}_k)\right] \le C\left(\mathrm{E}\rho^\gamma\right)^{k-p_n}$$

再一次借助 Borel-Cantelli 引理，从而推出我们的最终结论。 □

引入新过程 X 的优点在于，它的行为与 X 类似；从极限定理的角度看，这种改变无法区分。不过，在这里可以指出独立部分：$\{X_k\}_{k\in(T_{q_n},T_{2q_n}]}$ 相对于概率测度 P 独立。

现在我们可以描述环境所需的性质了。下面的集合取决于若干参数。给定 $d < D$ 和 $b < B$，以及 $\varepsilon > 0$，令

$$\begin{aligned} U_n(d,D,b,B,\varepsilon) = \Bigg\{ &\text{there exists } k \in (q_n, 2q_n] \text{ such that } \frac{\mathrm{Var}_\omega(\overline{T}^r_{S_k} - \overline{T}^r_{S_{2p_n}})}{a^4_{k+1}} \in (d,D), \\ &\frac{\mathrm{Var}_\omega(\overline{T}^l_{S_k} - \overline{T}^l_{S_{2p_n}})}{a^4_{k+1}} \le \varepsilon, \quad \frac{\mathrm{Var}_\omega \overline{G}_k + (\mathrm{E}_\omega \overline{G}_k)^2}{a_{k+1}} \le \varepsilon, \quad \frac{\xi^4_{k+1}}{a^4_{k+1}} \in (b,B) \Bigg\}, \end{aligned}$$

其中 $\overline{G_k}$ 是 X 从 S_k 出发、在击中 S_k+1 之前的左侧游程长度。当然，$\mathrm{E}_\omega G_k \le \mathrm{E}_\omega \overline{G}_k$，且 $\mathrm{Var}_\omega G_k \le \mathrm{E}_\omega G^2_k$。我们希望考虑属于无穷多个集合 U_n 的环境。不过，给定 ω 后，我们希望能灵活选择所有参数。下面的引理说明这些环境的测度为 1。

引理 4.2。假设条件 (2.1) 和 (2.2) 均成立。那么事件

$$\mathcal{U} = \bigcap \left\{ \limsup_n U_n(d,D,b,B,\varepsilon) \,:\, d,D,b,B \in \mathbb{Q}^+,\ d<D, b<B,\ b > 3\cdot 2^{4/\beta} D,\ \varepsilon > 0 \right\}$$

的概率为 *1*。

证明。 由于上述公式中的交集本质上是关于一个可数的参数集合进行的（显然可以将其限制在有理参数 ε上），因此只需证明，对于固定参数 $d<D$、 $b<B$，满足 $b>3\cdot 2^{5/\beta-1}D$ 和 $\varepsilon>0$,

$$\mathrm{P}\big[\limsup_n U_n\big]=1,$$

对于 $U_n=U_n\,(d,\ D,\ b,\ B,\ \varepsilon)$。注意到事件 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是独立的，因为U_n 仅取决于 $\{\omega_j\}_{j\in[p_n,2q_n]}$，并且根据（4.2），集合 $\{[p_n,2q_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ 两两不交。因此，应用 Borel-Cantelli 引理，只需证明存在$\delta_0>0$，使得对于充分大的指标 n,

$$\mathrm{P}[U_n]>\delta_0. \tag{4.9}$$

我们需要估计 U_n 定义中出现的所有事件的概率。记

(4.10)
$$V_k^1=\left\{\mathrm{Var}_\omega(\overline{T}^r_{S_k}-\overline{T}^r_{S_{2p_n}})/a_{k+1}^4\in(d,D)\right\},\quad V_k^2=\left\{\mathrm{Var}_\omega(\overline{T}^l_{S_k}-\overline{T}^l_{S_{2p_n}})/a_{k+1}^4\le\varepsilon\right\},$$
$$V_k^3=\left\{\left(\mathrm{Var}_\omega\overline{G}_k+(\mathrm{E}_\omega\overline{G}_k)^2\right)/a_{k+1}\le\varepsilon\right\},\quad V_{k+1}^4=\left\{\xi_{k+1}^4/a_{k+1}^4\in(b,B)\right\}.$$

为了估计 V_k^1 的概率，注意到根据 (4.2)，对于任意 $k\in(q_n,2q_n]$，我们有 $a_{k-2p_n}/a_{k+1}\to 1$, 因此

$$\mathrm{P}[V_k^1]=\mathrm{P}\left[\frac{2/3\sum_{2p_n<j\le k}(\xi_k^4-\xi_k^2)}{a_{k-2p_n}^4}\cdot\frac{a_{k-2p_n}^4}{a_{k+1}^4}\in(d,D)\right]\xrightarrow{n\to\infty}\delta\in(0,1),$$

根据引理 3.2。回想一下，引理 3.5 的第二个结论恰好意味着 $\mathrm{P}[V_k^2]\to 1$。第三，回想一下，$\mathrm{Var}_\omega G_k+(\mathrm{E}_\omega G_k)^2\le\mathrm{E}_\omega\overline{G}_k^2+(\mathrm{E}_\omega\overline{G}_k)^2$，是一个平稳序列，由此得到 $(\mathrm{Var}_\omega G_k+(\mathrm{E}_\omega G_k)^2)/a_k\xrightarrow{\mathrm{P}}0$，即 $\mathrm{P}[V_k^3]\to 1$。最后，注意到由于我们对参数的选择，定义 U_n 的事件对于不同的 k 取值互不相交。事实上，若 $k,j\in(q_n,2q_n]$, $k<j$ 且 $\xi_{k+1}^4\ge ba_{k+1}^4$，则 $V_{k+1}^4\cap V_j^1=\emptyset$，因为根据引理 3.2，当 n 足够大时，我们有

$$\frac{\mathrm{Var}_\omega(\overline{T}^r_{S_j}-\overline{T}^r_{S_{2p_n}})}{a_j^4}\sim\frac{\frac{2}{3}\sum_{i=2p_n}^j\xi_i^4}{a_j^4}\ge\frac{2}{3}\,\frac{\xi_{k+1}^4}{a_{2q_n}^4}\ge\frac{2}{3}\,\frac{ba_{q_n}^4}{a_{2q_n}^4}\ge\frac{b}{3\cdot 2^{4/\beta}}>D.$$

综上，对于某个 $\delta'>0$ 以及足够大的 n

$$\mathrm{P}[U_n]=\mathrm{P}\left[\bigcup_{q_n<k\le 2q_n}V_k^1\cap V_k^2\cap V_k^3\cap V_{k+1}^4\right]=\sum_{q_n<k\le 2q_n}\mathrm{P}\left[V_k^1\cap V_k^2\cap V_k^3\right]\mathrm{P}\left[V_{k+1}^4\right]$$
$$\ge\sum_{q_n<k\le 2q_n}\frac{\delta}{2}\cdot\mathrm{P}\left[\xi_{k+1}/a_{k+1}\in(b,B)\right]\ge\frac{\delta\delta'}{2}\sum_{q_n<k\le 2q_n}\frac{1}{k}\sim\frac{\delta\delta'\log 2}{2}.$$

总之， U_n 的概率有下界，这推出了 (4.9)，并完成了证明。□

定理 *2.1* 的证明。根据引理 3.5 和我们的假设 (4.2)，Borel-Cantelli 引理给出

$$\mathrm{P}\big[\forall\varepsilon>0\ \mathrm{Var}_\omega T_{S_{2p_n}}\ge a_{q_n}^4\varepsilon\ \ \text{i.o.}\big]=0.$$

因此，根据引理 4.2，该集合

$$\mathcal{U}\cap\left\{\forall\varepsilon>0\ \mathrm{Var}_\omega T_{S_{2p_n}}\ge a_{q_n}^4\varepsilon\ \text{i.o.}\right\}^c$$

的概率为 1。从现在起，我们固定取自上述事件的 ω，它也满足引理 4.1 的结论。假设给定 ω,

$$\widetilde{T}_n = \frac{T_n - \mathrm{E}_\omega T_n}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega T_n}} \Rightarrow Y_\omega \qquad n \to \infty, \tag{4.11}$$

对于某个随机变量 Y_ω。我们固定参数 $d < D$、$b < B$，使得 $b > 3 \cdot 2^{5/\beta - 1} D$ 且 $\varepsilon > 0$。

取两个序列 $\{n_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $k_m \in (q_{n_m}, q_{2n_m}]$，使得

$$\omega \in V^1_{k_m} \cap V^2_{k_m} \cap V^3_{k_m} \cap V^4_{k_m+1},$$

其中所有集合均在 (4.10) 中定义。我们还可以假设（必要时删去该序列中的有限个元素），对所有指标 m

$$\mathrm{Var}_\omega T_{S_{2p_{n_m}}} < a^4_{k_m} \varepsilon. \tag{4.12}$$

引理 4.1 表明，给定 ω，差值 $(T_n - \mathrm{E}_\omega T_n) - (T_n - \mathrm{E}_\omega T_n)$ 几乎处处有界，且 $\mathrm{Var}_\omega T_n / \mathrm{Var}_\omega T_n$ 收敛于 1，因此由 (4.11) 可得

$$\frac{\overline{T}_n - \mathrm{E}_\omega \overline{T}_n}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_n}} \Rightarrow Y_\omega \qquad n \to \infty. \tag{4.13}$$

考虑以下分解,

$$\frac{\overline{T}_{S_{k_m+1}} - \mathrm{E}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}} = v_m \cdot V_m + w_m \cdot W_m + Z_m, \tag{4.14}$$

其中

$$V_m = \frac{\overline{T}_{S_{k_m}} - \mathrm{E}_\omega \overline{T}_{S_{k_m}}}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m}}}}, \qquad v_m = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m}}}}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}},$$

$$W_m = \frac{\overline{\mathbb{T}}^r_{k_m+1} - \mathrm{E}_\omega \overline{\mathbb{T}}^r_{k_m+1}}{\xi^2_{k_m+1}}, \qquad w_m = \frac{\xi^2_{k_m+1}}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}},$$

$$Z_m = \frac{\overline{\mathbb{T}}^l_{k_m+1} - \mathrm{E}_\omega \overline{\mathbb{T}}^l_{k_m+1}}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}}.$$

随机变量 V_m 和 (W_m, Z_m) 相对于概率测度 P_ω独立。由 (4.13)，V_m 依分布收敛到 Y_ω，而 W_m根据引理 3.2 收敛到 $2\vartheta - 1$。因此，我们需要理解这两个确定性序列（给定 ω）$\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$、$\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$以及随机变量序列 $\{Z_m\}$的行为。为此，我们需要理解上述公式中出现的方差的行为。首先注意，在所考虑的事件上，回想 (3.10)，我们有

$$\mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}^l_{k_m+1} \le \xi_{k_m+1} \mathrm{Var}_\omega \overline{G}_{k_m} + \xi^2_{k_m+1} (\mathrm{E}_\omega \overline{G}_{k_m})^2 \le \varepsilon a^3_{k_m+1} B^{1/2}. \tag{4.15}$$

应用施瓦茨不等式和众所周知的不等式 $2ab \le a^2/C + Cb^2$，对于任意 n 以及任意大的常数 C，我们很容易证明

$$-\mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}^r_n / C + (1-C)\mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}^l_n \le \mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}_n - \mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}^r_n \le \mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}^r_n / C + (1+C)\mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}^l_n.$$

将上述不等式与 (4.12) 及 U_n 的定义结合起来，我们得到

$$\left[\varepsilon(1-C) + \left(1 - \frac{1}{C}\right) d\right] a^4_{k_m+1} \le \mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m}} \le \left[\varepsilon + \varepsilon(1+C) + \left(1 + \frac{1}{C}\right) D\right] a^4_{k_m+1}$$

and

$$\left[o(1)(1-C)+\left(1-\frac{1}{C}\right)b\right]a_{k_m+1}^4 \le \mathrm{Var}_\omega \overline{\mathbb{T}}_{k_m+1} \le \left[o(1)(1+C)+\left(1+\frac{1}{C}\right)B\right]a_{k_m+1}^4.$$

上述不等式保证 $\mathrm{Var}_\omega T_{S_{k_m+1}}$ 的量级为 $a_{k_m+1}^{\overline{+}}$。对于任意小的 $\delta>0$，选择适当的参数 ε，C 和足够大的指标 k_m

$$(1-\delta)\frac{d}{D+B} \le v_m^2 \le (1+\delta)\cdot\frac{D}{d+b} \tag{4.16}$$

and

$$(1-\delta)\frac{b}{D+B} \le w_m^2 \le (1+\delta)\cdot\frac{B}{d+b} \tag{4.17}$$

令 δ 趋于 0，并假设这些参数满足

$$\frac{d}{D+B} \le \liminf_{n\to\infty} v_m^2 \le \limsup_{n\to\infty} v_m^2 \le \frac{D}{d+b} \tag{4.18}$$

and

$$\frac{b}{D+B} \le \liminf_{n\to\infty} w_m^2 \le \limsup_{n\to\infty} w_m^2 \le \frac{B}{d+b}. \tag{4.19}$$

注意，对任意 $\eta>0$，利用切比雪夫不等式和 (4.15)，我们有：

$$\mathrm{P}_\omega[|Z_m|>\eta] = \mathrm{P}\left[\left|\overline{\mathbb{T}}_{k_m+1}^l - \mathrm{E}_\omega\overline{\mathbb{T}}_{k_m+1}^l\right| > \eta\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}\right] \le \frac{Ca_{k_m+1}^3}{\eta^2 \mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}} \to 0.$$

这证明了

$$Z_m \xrightarrow{\mathrm{P}_\omega} 0, \quad m\to\infty. \tag{4.20}$$

容易看出，对于任意固定的 d和 D，都可以构造序列 $\{b_m\}$，$\{B_m\}$，$\{k_m\}$，使得 b_m，$B_m\to\infty$、$b_m/B_m\to 1$ 以及不等式 (4.18) 和 (4.19) 成立。于是 $v_m\to 0$且 $w_m\to 1$。由于序列 $\{V_m\}$ 是紧的，我们有

$$\frac{\overline{T}_{S_{k_m+1}} - \mathrm{E}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}{\sqrt{\mathrm{Var}_\omega \overline{T}_{S_{k_m+1}}}} = v_m\cdot V_m + w_m\cdot W_m + Z_m \Rightarrow 2\vartheta - 1.$$

因此，如果极限 (4.11)、(4.13) 存在，则二者都必须等于 $Y_\omega = 2\vartheta-1$。

接下来，固定所有参数 b，B，d，D，注意到两个序列 $\{v_m\}$、$\{w_m\}$ 都是有界的，因此我们可以假设（必要时选取它们的子序列），它们分别收敛到某个 v 和 w。由于随机变量序列 $\{V_m\}$和 $\{W_m\}$ 相互独立，我们得出

$$2\vartheta - 1 \overset{d}{=} Y_\omega \overset{d}{=} v(2\vartheta_v - 1) + w(2\vartheta_w - 1), \tag{4.21}$$

其中 ϑ_v、ϑ_w 相互独立。然而，例如（1.6）就无法满足这个方程。这导致矛盾，并证明极限 (4.11) 不存在。

总而言之，到目前为止，我们已经证明，在（4.1）中定义的序列 $\{T_n\}$ 不可能依分布收敛。然而，采用不同的归一化仍有可能得到一个收敛序列，因此我们需要排除这种可能性。接下来考虑另一种归一化 $T_n = T_n/A_n + C_n$，其中序列为 $\{A_n\}$ 和 $\{C_n\}$。还需回顾一下，我们已经知道，如果极限存在，它必定等于 $2\vartheta-1$。

首先注意到 A_n 必须有界。事实上，假设存在其子序列 $\{A_{n_k}\}$ 收敛到 $+\infty$。那么，由于 $\{\widetilde{T}_n\}$ 是紧的，我们有 $\widetilde{T}_{n_k}/A_{n_k} \xrightarrow{\text{概率测度 P}} 0$，因此，序列 $\{C_{n_k}\}$ 必须收敛到某个极限 C，最终得到 $T_{n_k}\Rightarrow C$，这是一个平凡的极限。

接下来我们固定参数 b, B, d, D，并考虑满足上述所有要求的子序列 $\{k_m\}$。如果序列 $\{A_n\}$ 包含一个收敛到正数 A 的子序列 $\{A_{k_m}\}$，那么序列 $\{C_{k_m}\}$ 同样必须收敛到某个 C。重复上述计算，我们再次得到方程 (4.21)，从而导出矛盾。

因此，序列 $\{A_{k_m}\}$ 必须收敛到 0。然而，在这种情况下，由于 $w_n W_m + Z_m \Rightarrow w(2\vartheta - 1)$，序列 $\{(w_m W_m + Z_m)/A_{k_m}\}$ 不可能是紧的；最后，由于 $\widehat{V_n}$ 相互独立，根据 (4.14)，序列 T_{k_m} 不可能是紧的并依分布收敛。定理得证。

□

5. 弱淬火极限定律的证明

在本节最后部分，我们将完整证明主要结果。首先，我们将介绍一种合适的耦合。随后，我们将分别讨论中度稀疏情形和强稀疏情形。

5.1. 耦合。 第一步，我们将沿着标记点证明结果。也就是说，我们分析

$$\phi_{n,\omega}(\cdot) = \mathrm{P}_\omega \left[a_n^{-2} \left(T_{S_n} - \mathrm{E}_\omega[T_{S_n}] \right) \in \cdot \right]. \tag{5.1}$$

论证的主要部分集中于 $T^r_{S_n} = \sum_{k=1}^n \mathbb{T}^r_k$ 的极限定律。回忆一下，U_n 是在 (3.5) 中定义的，即反射随机游走首次到达 n 的时刻。对于每个 $k > 0$，在固定环境 ω 下，有 $\mathbb{T}^r_k \stackrel{d}{=} U_{\xi_k}$。借助引理 3.2 和斯科罗霍德表示定理，我们可以假设我们的空间上存在随机变量 $U^{(k)}_n$ 和 ϑ_k，使得：

- $\{U_{(k)n}\}_n$, ϑ_k 对于 $k \in \mathbb{N}$，是 $\{U_n\}_n$, ϑ 的独立副本；
- $\{U_{(k)n}, \vartheta_k : n, k \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{\xi_k : k \in \mathbb{N}\}$ 相互独立；
- U在 L^2 中依 $n \to \infty$ 收敛；
- 对于所有 ω, $U_{(k)}$ ξ_k 和 $\mathbb{T}^r_k$ 在概率测度 P_ω 下具有相同的分布。

注意，L^2 中的收敛由引理 3.2 中给出的依分布收敛和一致可积性保证。

为简化记号，我们将用 U_{ξ_k} 代替 $U^{(k)}_{\xi_k}$。

命题 5.1. 假设(2.1)成立。那么当 $n \to \infty$ 时，

$$a_n^{-4} \mathrm{Var}_\omega \left[T^r_{S_n} - \mathrm{E}_\omega T^r_{S_n} - \sum_{k=1}^n \xi_k^2 (2\vartheta_k - 1) \right] \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

证明. 首先注意到

$$\mathrm{Var}_\omega \left[T^r_{S_n} - \mathrm{E}_\omega T^r_{S_n} - \sum_{k=1}^n \xi_k^2 (2\vartheta_k - 1) \right] = \mathrm{Var}_\omega \left[\sum_{k=1}^n \left(U_{\xi_k} - 2\xi_k^2 \vartheta_k \right) \right].$$

对于 $\varepsilon > 0$ 令 $I^1_n = \{k \le n : \xi_k > \varepsilon a_n\}$ 且 $I^2_n = \{k \le n : \xi_k \le \varepsilon a_n\}$。则对于任意 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \left[\mathrm{Var}_\omega \left[\sum_{k=1}^n \left(U_{\xi_k} - 2\xi_k^2 \vartheta_k \right) \right] > \delta a_n^4 \right] \le \\ \mathrm{P} \left[\sum_{k \in I^1_n} \xi_k^4 \mathrm{Var}_\omega \left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2} - 2\vartheta_k \right] > \frac{\delta a_n^4}{2} \right] + \mathrm{P} \left[\sum_{k \in I^2_n} \xi_k^4 \mathrm{Var}_\omega \left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2} - 2\vartheta_k \right] > \frac{\delta a_n^4}{2} \right]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

由于 $U_n^{(k)}$，ϑ_k 是 U_n，ϑ 的独立副本，使得 $U_n/n^2 \to \vartheta$ 属于 L^2，因此存在 $M > 0$ 使得

$$\mathrm{Var}_\omega\left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2} - 2\vartheta_k\right] < M \quad \text{for all } k, \omega,$$

此外，当 $N \in \mathbb{N}$ 足够大时

$$\mathrm{Var}_\omega\left[\frac{U_N^{(k)}}{N^2} - 2\vartheta_k\right] < \varepsilon \quad \text{for all } k, \omega.$$

因此，当 n 足够大时，我们可以估计

$$\mathrm{P}\left[\sum_{k\in I_n^1} \xi_k^4 \mathrm{Var}_\omega\left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2} - 2\vartheta_k\right] > \frac{\delta a_n^4}{2}\right] \le \mathrm{P}\left[\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^4}{a_n^4} > \frac{\delta}{2\varepsilon}\right].$$

由于序列 $\sum_{k=1}^n \xi_k^4/a_n^4$ 在概率测度 P 下弱收敛于某个 $\beta/4$-稳定变量$L_{\beta/4}$，上述右端的概率收敛于 $\mathrm{P}[L_{\beta/4} > \delta/(2\varepsilon)]$。为估计（5.2）中的第二项，注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left[\sum_{k\in I_n^2} \xi_k^4 \mathrm{Var}_\omega\left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2} - 2\vartheta_k\right] > \frac{\delta a_n^4}{2}\right] &\le \mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^n \xi_k^4 \mathbb{1}_{\{\xi_k \le \varepsilon a_n\}} > \frac{\delta a_n^4}{2M}\right] \\ &\le \frac{2M}{\delta} a_n^{-4} \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^n \xi_k^4 \mathbb{1}_{\{\xi_k \le \varepsilon a_n\}}\right] = \frac{2M}{\delta} n a_n^{-4} \mathrm{E}\left[\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{\xi_1 \le \varepsilon a_n\}}\right].\end{aligned}$$

根据富比尼定理，我们有

$$\mathrm{E}\left[\xi_1^4 \mathbb{1}_{\{\xi_1 \le \varepsilon a_n\}}\right] \le \int_0^{\varepsilon a_n} 4t^3 \mathrm{P}[\xi_1 > t] dt$$

卡拉马塔定理 [2, 定理 1.5。11]表明，右端的表达式与 $4\varepsilon^4 a_n^4 \mathrm{P}[\xi_1 > \varepsilon a_n] \sim 4\varepsilon^{4-\beta} n^{-1} a_n^4$ 渐近等价。最后，对于任意 ε，$\delta > 0$，我们可以得出

$$\limsup_n \mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^n \xi_k^4 \mathrm{Var}_\omega\left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2} - \vartheta_k\right] > \delta a_n^4\right] \le \frac{8M}{\delta}\varepsilon^{4-\beta} + \mathrm{P}\left[L_{\beta/4} > \frac{\delta}{2\varepsilon}\right]$$

并令 ε 趋于 0，我们即可得出所需结果。 □

现在我们可以确定由 (5.1) 给出的序列 $\phi_n(\omega) = \phi_{n,\,\omega}$ 的弱极限。回顾 (2.3) 中定义的映射 G。

引理 5.2。映射 G 是可测的。

备注 5.3。引理 5.2 的证明与 [19] 中的引理 1.2 完全相同，因此省略。证明的一部分是说明该映射

$$G_2 : \ell^2 \ni (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^\infty x_k(2\vartheta_k - 1) \in \cdot\right] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$$

是连续的。

定理 5.4。假设 (2.1)和 (2.2)成立。则

$$\phi_n \Rightarrow G(N_\infty),$$

在 $\mathcal{M}_1$ 中，其中 N_∞ 是一个强度为 $\beta x^{-\beta/2-1}\mathrm{d}x/2$ 的泊松点过程。

在该结果的证明中，我们将使用以下引理。

引理 5.5 ([19, 注 3。4])。 设 θ_n 是定义在同一概率空间上的一列随机概率测度，定义于 $\mathbb{R}^2$ 。令 γ_n 和 γ_n' 表示 θ_n 的边缘分布。假设

$$\mathrm{E}_{\theta_n}(X-Y) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \quad and \quad \mathrm{Var}_{\theta_n}(X-Y) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0,$$

其中， X *an* Y 是 $\mathbb{R}^2$中的坐标变量。若 $\gamma_n \Rightarrow \gamma$，则 $\gamma_n' \Rightarrow \gamma$。

定理 *5.4* 的证明。 首先，注意到随机点测度序列 $N_n = \sum_{k=1}^n \delta_{\xi_k^2 a_n^{-2}}$ 弱收敛到 N_∞。事实上，这可由应用 [21, 命题 3.21]并验证以下结论得出：

$$n\mathrm{P}[\xi^2/a_n^2 \in \cdot] \to \mu(\cdot) \quad \text{vaguely on } (0,\infty]$$

其中 $\mu(\mathrm{d}x) = \beta x^{-\beta/2-1}\mathrm{d}x/2$。

由于 G 不连续，我们不能直接应用连续映射定理；与 [19], 中的情形类似，我们不得不采用一种更繁琐的论证。定义

$$G_\varepsilon : \mathcal{M}_p((0,\infty]) \ni \sum_{k=1}^\infty \delta_{x_k} \mapsto \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^\infty x_k(2\vartheta_k - 1)\,\mathbb{1}_{\{x_k>\varepsilon\}} \in \cdot\right] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}).$$

于是，对任意 $\varepsilon > 0$ ，映射 G_ε 在集合 $\mathcal{M}_p^\varepsilon := \{\zeta \in \mathcal{M}_p : \zeta(\{\varepsilon,\infty\}) = 0\}$上连续；事实上，取 ζ_n, $\zeta \in \mathcal{M}_p^\varepsilon$ 使得 $\zeta_n \to \zeta$ 按疏拓扑收敛。于是，根据 [21, 命题 3.13], ，由于集合 $[\varepsilon,\infty]$ 在 $(0,\ \infty]$ 中是紧的，存在 $p_\varepsilon < \infty$ 以及 ζ和 ζ_n 中各点的一个枚举（当 n 充分大时），使得

$$\zeta_n(\cdot \cap [\varepsilon,\infty]) = \sum_{k=1}^{p_\varepsilon} \delta_{x_k^n}, \quad \zeta(\cdot \cap [\varepsilon,\infty]) = \sum_{k=1}^{p_\varepsilon} \delta_{x_k}$$

and

$$(x_1^n, \ldots, x_{p_\varepsilon}^n) \to (x_1, \ldots, x_{p_\varepsilon}) \quad \text{as } n \to \infty.$$

因此

$$G_\varepsilon(\zeta_n)(\cdot) = \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{p_\varepsilon} x_k^n(2\vartheta_k - 1) \in \cdot\right] \Rightarrow \mathbb{P}\left[\sum_{k=1}^{p_\varepsilon} x_k(2\vartheta_k - 1) \in \cdot\right] = G_\varepsilon(\zeta)(\cdot).$$

根据 [1, 定理 3.2], ，要证明 $G(N_n) \Rightarrow G(N_\infty)$，只需证明

$$G_\varepsilon(N_n) \Rightarrow_n G_\varepsilon(N_\infty) \qquad \text{for all } \varepsilon > 0, \tag{5.3}$$

$$G_\varepsilon(N_\infty) \Rightarrow_\varepsilon G(N_\infty), \tag{5.4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\rho(G_\varepsilon(N_n), G(N_n)) > \delta\right] = 0 \qquad \text{for all } \delta > 0, \tag{5.5}$$

其中 ρ 是 $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ 上的 Prokhorov度量。

首先，对任意 $\varepsilon > 0,\ N_\infty \in \mathcal{M}_p^\varepsilon$ 几乎必然成立。因此，由于 G_ε 是连续的，根据连续映射定理，(5.3) 得以满足。

对任意序列 $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ 和 $\varepsilon > 0$ ，定义 $\boldsymbol{x}^\varepsilon \in \ell^2$ 为 $x_k^\varepsilon = x_k\,\mathbb{1}_{\{x_k>\varepsilon\}}$。根据控制收敛定理，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\boldsymbol{x}^\varepsilon \to \boldsymbol{x}$ 在 ℓ^2 中收敛。因此，由于注 5.3 中定义的映射 G_2是连续的， $G_2(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \Rightarrow G_2(\boldsymbol{x})$ 也成立。这意味着，对于任意满足 $\boldsymbol{x} \in \ell^2$ 的点过程 $\zeta = \sum_k \delta_{x_k}$ ，

$$G_\varepsilon(\zeta) = G_2(\boldsymbol{x}^\varepsilon) \Rightarrow G_2(\boldsymbol{x}) = G(\zeta),$$

这就得到了 (5.4)。

回顾一下，如果 $\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y$ 是定义在同一概率空间上的随机变量 X, Y 的分布，那么 $\rho(\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y)^3 < \mathrm{E}|X-Y|^2$（参见 [10, 定理 11.3.5]）。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left[\rho(G_\varepsilon(N_n), G(N_n)) > \delta\right] &\le \mathrm{P}\left[\mathrm{E}_\omega\left|a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\,\mathbb{1}_{\{\xi_k\le\varepsilon a_n\}}(2\vartheta_k-1)\right|^2 > \delta^3\right]\\ &= \mathrm{P}\left[\mathbb{E}(2\vartheta_1-1)^2 a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\,\mathbb{1}_{\{\xi_k\le\varepsilon a_n\}} > \delta^3\right],\end{aligned}$$

由于 $(2\vartheta_k-1)_k$ 是一列均值为 0 且独立于环境的独立同分布变量。记 $C=\mathbb{E}(2\vartheta_1-1)^2,$，则

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[\rho(G_\varepsilon(N_n), G(N_n)) > \delta\right] &\le \limsup_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\,\mathbb{1}_{\{\xi_k\le\varepsilon a_n\}} > \frac{\delta^3}{C}\right]\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[a_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varepsilon a_n\,\mathbb{1}_{\{\xi_k\le\varepsilon a_n\}} > \frac{\delta^3}{C}\right]\\ &\le \lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k > \frac{\delta^3}{\varepsilon C}\right].\end{aligned}$$

序列 $a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 弱收敛于某个 β-稳定变量 L_β，因此

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k > \frac{\delta^3}{\varepsilon C}\right] = \mathrm{P}\left[L_\beta > \frac{\delta^3}{\varepsilon C}\right] \to 0 \quad \text{as } \varepsilon\to 0,$$

这就证明了 (5.5)。

因此 $G(N_n) \Rightarrow G(N_\infty)$。现在，根据命题 5.1 以及引理 5.5 和 3.5，定理的断言得证。□

5.2. **中度稀疏随机环境**。

定理 *2.2* 的证明。由于 $\mathrm{E}\xi_1 < \infty$, $\alpha = (\mathrm{E}\xi_1)^{-1}$ 有定义。设 $N_\infty = \sum_n \delta_{x_n}$是定理 5.4 中的泊松点过程，并令 $N_\infty^\alpha = \sum_n \delta_{\alpha^{2/\beta}x_n}$。那么 N_∞^α 是强度为 $\beta\alpha x^{-\beta/2-1}\mathrm{d}x/2$的泊松点过程。令

$$\begin{aligned}\phi_n^\alpha(\omega)(\cdot) = \phi_{n,\omega}^\alpha(\cdot) &= \mathrm{P}_\omega\left[a_n^{-2}(T_{S_{\alpha n}} - \mathrm{E}_\omega T_{S_{\alpha n}}) \in \cdot\right]\\ &= \mathrm{P}_\omega\left[(a_{\alpha n}/a_n)^2 a_{\alpha n}^{-2}(T_{S_{\alpha n}} - \mathrm{E}_\omega T_{S_{\alpha n}}) \in \cdot\right],\end{aligned}$$

其中 $S_{\alpha n} := S_{\lfloor \alpha n\rfloor}$，由引理 5.5 和定理 5.4 可得 $\phi_n^\alpha \Rightarrow G(N_\infty^\alpha)$。接下来只需证明

$$a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[(T_{S_{\alpha n}} - \mathrm{E}_\omega T_{S_{\alpha n}}) - (T_n - \mathrm{E}_\omega T_n)\right] = a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\alpha n}} - T_n\right] \xrightarrow{\mathrm{P}} 0,$$

由此，根据引理 5.5 可得 $\mu_n \Rightarrow G(N_\infty^\alpha)$。

注意，在事件 $\{n \le S_{\alpha n}\}$ 发生时，对于任意满足 $S_k \le n$ 的 k，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\alpha n}} - T_n\right] = \sum_{j=n+1}^{S_{\alpha n}}\mathrm{Var}_\omega\left[T_j - T_{j-1}\right] &\le \sum_{j=S_k+1}^{S_{\alpha n}}\mathrm{Var}_\omega\left[T_j - T_{j-1}\right]\\ &= \mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\alpha n}} - T_{S_k}\right]\end{aligned}$$

并且对于任意满足 $S_k \ge n$ 的 k，在 $\{S_{\alpha n} \le n\}$ 上也类似，

$$\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\alpha n}} - T_n\right] \le \mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_k} - T_{S_{\alpha n}}\right].$$

因此，对于任意 $\delta > 0$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left[a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\alpha n}} - T_n\right] > \delta\right] &\leq \mathrm{P}\left[|S_{\alpha n} - n| > \varepsilon n\right] \\ &\quad + \mathrm{P}\left[a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\lfloor \alpha n\rfloor + \lfloor \varepsilon n\rfloor}} - T_{S_{\alpha n}}\right] > \delta\right] \\ &\quad + \mathrm{P}\left[a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\alpha n}} - T_{S_{\lfloor \alpha n\rfloor - \lfloor \varepsilon n\rfloor}}\right] > \delta\right] \\ &= \mathrm{P}\left[\left|\frac{S_{\alpha n}}{\alpha n} - \frac{1}{\alpha}\right| > \frac{\varepsilon}{\alpha}\right] + 2\mathrm{P}\left[a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\varepsilon n}}\right] > \delta\right].\end{aligned}$$

根据大数定律，第一项趋于 0（回忆 $1/\alpha = \mathrm{E}\xi_1$）。为估计第二项，注意到

$$\mathrm{Var}_\omega\left[T^r_{S_{\varepsilon n}}\right] = \sum_{k=1}^{\varepsilon n}\mathrm{Var}_\omega T^r_{\xi_k} \overset{(3.6)}{=} \sum_{k=1}^{\varepsilon n}\frac{2}{3}(\xi_k^4 - \xi_k^2) \leq \sum_{k=1}^{\varepsilon n}\xi_k^4,$$

并且关于概率测度 P，$a_n^{-4}\sum_{k=1}^{\varepsilon n}\xi_k^4 \Rightarrow \varepsilon^{-4/\beta}L_{\beta/4}$ 而根据引理 3.5，$a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T^l_{S_{\varepsilon n}}\right] \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$。因此

$$\limsup_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[a_n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T_{S_{\varepsilon n}}\right] > \delta\right] \leq \mathrm{P}\left[L_{\beta/4} > \frac{\delta}{\varepsilon^{4/\beta}}\right].$$

通过取足够小的 ε，最后一个表达式可以任意小。 □

5.3. 强稀疏性：预备知识。 从现在起，我们假设 $\mathrm{E}\xi = \infty$。这种情况下技术上更加复杂，但基本原理仍然相同。将 S 的首次通过时间记为

$$\nu_n = \inf\{k > 0 \,:\, S_k > n\}.$$

回忆我们记作

$$m_n = n\mathrm{E}\left[\xi \mathbf{1}_{\{\xi \leq a_n\}}\right] \quad \text{and} \quad d_n = 1/\mathrm{P}[\xi > n].$$

我们用 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 表示 $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的渐近逆，即任意满足以下条件的实数递增序列：

$$\lim_{n\to\infty} c_{m_n}/n = \lim_{n\to\infty} m_{c_n}/n = 1.$$

正如预期的那样，S_n 以 m_n 的尺度增长，因此 ν_n 必须以 c_n 的尺度增长（其含义将在我们即将精确定义的极限定理中说明）。为此，我们需要证明 S_n/m_n 和 ν_n/c_n 与 S 轨迹的其他一些特征联合收敛。因此，我们需要使用 c`adl`ag 函数的框架。回顾一下，$\mathbb{D}$ 表示右连续且在每一点都有左极限的函数空间。对于 $h \in \mathbb{D}$，我们通过以下方式定义 $h^{\leftarrow} \in \mathbb{D}$：

$$h^{\leftarrow}(t) = \inf\{s \,:\, h(s) > t\}.$$

Con考虑由非递减函数构成的 $\mathbb{D}^{\uparrow} \subseteq \mathbb{D}$，并取 $M\colon\ \mathbb{D}^{\uparrow} \to \mathcal{M}$ 定义如下：

$$M(h) = \sum_k \delta_{x_k} \otimes \delta_{t_k},$$

其中，对于 $h \in \mathbb{D}^{\uparrow}$，$\{t_k\}$ 是 h 的不连续点，而 $x_k = h(t_k) - h(t_k^-)$ 是 t_k 处跳跃的大小。

引理 5.6。 函数 $M\colon\ \mathbb{D}^{\uparrow} \to \mathcal{M}$ 关于 J_1 拓扑是连续的 $y.$

证明。 设 $f_n, f \in \mathbb{D}^{\uparrow}$ 满足 $f_n \to f$ 在 J_1 拓扑中。对于任意非负连续函数 φ: (0, $+\infty] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$，其具有紧支集，我们可以找到 $\varepsilon > 0$ 和 $T > 0$

使得 $\varphi(x,t)=0$，若 $x\le\varepsilon$ 或 $t\ge T$。由于 $f\in\mathbb{D}^{\uparrow}$，它在区间 $[0,T]$ 上只有有限多个大于 ε 的跳跃，

$$\int\varphi(x,t)\,Mf(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t)=\sum_{k=1}^{N}\varphi(x_k,t_k)$$

对于某些 N、$t_1<\cdots<t_N<T$ 和 $x_k>\varepsilon$。

By J_1 拓扑的定义，存在一个由连续递增函数 $\lambda_n:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T]}|\lambda_n(t)-t|\to 0,\quad \sup_{t\in[0,T]}|f_n(t)-f(\lambda_n(t))|\to 0. \tag{5.6}$$

当 n 足够大时，$\sup_{t\in[0,T]}|\lambda_n(t)-t|<T-t_N$，这意味着 $f\circ\lambda_n$ 在区间 $[0,T)$ 上恰有 N 个跳跃，发生于时刻 $\lambda_n^{-1}(t_k)$。此外，当 n 足够大时，$\sup_{t\in[0,T]}|f_n(t)-f(\lambda_n(t))|<\varepsilon/3$,由此可知，除 $f\circ\lambda_n$ 的不连续点外，f_n 的跳跃间隔不会小于 ε。

固定 $k\in\{1,\dots N\}$。由 (5.6) 可知，当 n 足够大时，f_n 在 $\lambda_n^{-1}(t_k)$ 处确实有一个跳跃，记为 x_k^n，并注意到当 $n\to\infty$ 时 $x_k^n\to x_k$；特别地，当 n 足够大时，$x_k^n>\varepsilon$。此外还可推出，当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n^{-1}(t_k)\to t_k$。这意味着，对于充分大的 n

$$\int\varphi(x,t)\,Mf_n(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t)=\sum_{k=1}^{N}\varphi(x_k^n,\lambda_n^{-1}(t_k))$$

最后一个表达式趋于 $\int\varphi(x,\ t)\ Mf(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}t)$，当 $n\to\infty$ 时成立，从而得到 $Mf_n\to Mf$。□

考虑由下式给出的 $\mathcal{M}_1((0,\ +\infty]\times[0,+\infty))$ 的一个随机元素

$$\Lambda_n=\sum_{j=1}^{\infty}\delta_{\xi_j/a_n}\otimes\delta_{j/n}$$

以及由下式定义的 $\mathbb{D}^{\uparrow}$ 的随机元素

$$L_n(t)=S_{\lfloor nt\rfloor}/a_n\text{ for }\beta<1,\quad\text{and}\qquad\widetilde{L}_n(t)=S_{\lfloor nt\rfloor}/m_n\text{ for }\beta=1. \tag{5.7}$$

回忆 $\Upsilon\colon\ \mathbb{D}^{\uparrow}\to\mathbb{R}$ 在 (2.5) 中定义。

引理 5.7。若 $\beta<1$，则

$$\left(L_n,\Lambda_n,\frac{\nu_n}{d_n},\frac{S_{\nu_n-1}}{n}\right)\Rightarrow(L,M(L),L^{\leftarrow}(1),\Upsilon(L)) \tag{5.8}$$

在 $(\mathbb{D},J_1)\times\mathcal{M}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中，其中 $L=(L_t)_{t\ge0}$ 是严格递增的 β-稳定子*ordinator*，其 *L´évy* 测度由 $\nu(x,+\infty)=x^{-\beta}$给出。

若 $\beta=1$，则

$$\left(\widetilde{L}_n,\frac{\nu_n}{c_n},\frac{S_{\nu_n-1}}{n}\right)\Rightarrow(\mathrm{id},1,1) \tag{5.9}$$

在 $(\mathbb{D},J_1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中，其中 $\mathrm{id}\colon\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是恒等函数。

证明。先考虑 $\beta<1$。根据标准的函数型弱收敛结果，可得稳定的 L´évy 运动 [22,推论 7.1],

$$L_n\Rightarrow L\quad\text{in }(\mathbb{D},J_1).$$

注意到

$$\Lambda_n=M(L_n)$$

且函数 M 是 J_1-连续的，根据引理 5.6。此外，

$$\frac{\nu_n}{d_n} = L^{\leftarrow}_{d_n}\left(\frac{n}{a_{d_n}}\right)$$

并且映射 $h \mapsto h^{\leftarrow}$ 在 M_1 拓扑下连续。下文将使用 [26]中引入的记号。对于 $h \in \mathbb{D}$，令 h^- 为 h的 lcrl（左连续且具有右侧极限）版本，即 $h^-(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} h(t-\varepsilon)$ 且 $h^-(0) = 0$。类似地，令h^+ 表示一条 lcrl 路径的 rcll 版本。令 $\Phi : \mathbb{D}^{\uparrow} \to \mathbb{D}$ 定义为

$$\Phi(h) = (h^- \circ (h^{\leftarrow})^-)^+.$$

最后，注意到对于任意 $k \in \mathbb{N}$，在集合 $[S_k/a_{d_n}, S_{k+1}/a_{d_n}$上， $\Phi(L_{d_n})$ 为常数且等于 S_k/a_{d_n}，因此

$$\frac{S_{\nu_n-1}}{a_{d_n}} = \Phi\left(L_{d_n}\right)\left(\frac{n}{a_{d_n}}\right).$$

根据 [26]， Φ 在 $\mathbb{D}^{\uparrow\uparrow} \subset \mathbb{D}$上是 J_1-连续的，其中 $\mathbb{D}^{\uparrow\uparrow} \subset \mathbb{D}$是严格递增的无界函数集合。由于 $L \in \mathbb{D}^{\uparrow\uparrow}$ 几乎必然成立，根据连续映射定理，我们得到依分布联合收敛

$$(L_n, M(L_n), L_n^{\leftarrow}, \Phi(L_n)) \to (L, M(L), L^{\leftarrow}, \Phi(L))$$

在 $(\mathbb{D}, J_1)\times\mathcal{M}_p((0,\infty]\times[0,\infty))\times(\mathbb{D}, M_1)\times(\mathbb{D}, J_1)$ 中。由斯科罗霍德表示定理，我们可以假设上述收敛几乎必然成立。

由于极限过程没有固定不连续点，根据 [26] 中的命题 2.4，得到

$$\frac{\nu_n}{d_n} \to L^{\leftarrow}(1) \quad \text{and} \quad \frac{S_{\nu_n-1}}{a_{d_n}} \to \Phi(L)(1) = \Upsilon(L)$$

几乎必然成立。

$\beta = 1$ 的情形类似，并可由以下事实推出：根据 [22，推论 7.1] 以及 J_1 拓扑的性质，

$$\widetilde{L}_n \Rightarrow \mathrm{id} \quad \text{in } (\mathbb{D}, J_1).$$

将此与

$$\frac{\nu_n}{c_n} = \widetilde{L}^{\leftarrow}_{c_n}\left(\frac{n}{m_{c_n}}\right), \qquad \frac{S_{\nu_n-1}}{m_{c_n}} = \Phi\big(\widetilde{L}_{m_n}\big)\left(\frac{n}{m_{c_n}}\right)$$

以及 $\beta < 1$ 情形中的论证结合起来，即可得到所需结论。 □

注记 5.8。 注意，关于序列 $(\xi_k)_k$ 的所有信息都由过程$\sim\Lambda_n$ 承载，因此也由 L_n 承载，或者等价地，由 L_n承载。因此，我们可以假设我们的空间上存在随机变量 $U_n^{(k)}$， ϑ_k如第 5.1 节所述，并且引理 5.7 给出的收敛同时几乎必然成立。

引理 5.9. 假设(2.1) 成立。若 $\beta < 1$，则

$$n^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T^r_{S_{\nu_n-1}} - \mathrm{E}_\omega T^r_{S_{\nu_n-1}} - \sum_{k=1}^{\nu_n-1}\xi_k^2(2\vartheta_k - 1)\right] \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

若 $\beta = 1$ 且$\mathrm{E}\xi = \infty$，则

$$a_{c_n}^{-4}\mathrm{Var}_\omega\left[T^r_{S_{\nu_n-1}} - \mathrm{E}_\omega T^r_{S_{\nu_n-1}} - \sum_{k=1}^{\nu_n-1}\xi_k^2(2\vartheta_k - 1)\right] \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

证明。 可以采用与命题 5.1 的证明相同的论证。首先考虑$\beta \in (0,1)$。由 $\{\nu_n/d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的紧性，我们可以选取 $C > 0$，使概率 $\mathrm{P}[\nu_n > Cd_n]$ 任意小。接下来，在事件 $\{\nu_n \le Cd_n\}$ 上，

$$\mathrm{Var}_\omega\left[T^r_{S_{\nu_n-1}} - \mathrm{E}_\omega T^r_{S_{\nu_n-1}} - \sum_{k=1}^{\nu_n-1}\xi_k^2(2\vartheta_k - 1)\right] \le \mathrm{Var}_\omega\left[\sum_{k=1}^{Cd_n}\left(U_{\xi_k} - 2\xi_k^2\vartheta_k\right)\right].$$

由此，由于 $a_{Cd_n} \sim C^{1/\beta}n$，可以像命题 5.1 的证明那样进行论证，从而证明

$$\sum_{k\in I_n^1}\frac{\xi_k^4}{n^4}\mathrm{Var}_\omega\left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2}-2\vartheta_k\right]\xrightarrow{\mathrm{P}}0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{k\in I_n^2}\frac{\xi_k^4}{n^4}\mathrm{Var}_\omega\left[\frac{U_{\xi_k}}{\xi_k^2}-2\vartheta_k\right]\xrightarrow{\mathrm{P}}0,$$

其中 $I_n^1=\{k\le Cd_n:\ \xi_k>\varepsilon n\}$，$I_n^2=\{k\le Cd_n:\ \xi_k\le\varepsilon n\}$，且 $\varepsilon>0$ 固定。当 $\beta=1$ 且 $\mathrm{E}\xi=\infty$ 时，可以运用相同的论证，并结合 $\{\nu_n/c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的紧性。□

引理 5.10。假设(2.1) 成立。若 $\beta\in(0,1)$，则

$$n^{-4}\mathrm{Var}_\omega T^l_{S_{\nu_n}}\xrightarrow{\mathrm{P}}0.$$

若 $\beta=1$ 且 $\mathbb{E}\xi=\infty$，则

$$a_{c_n}^{-4}\mathrm{Var}_\omega T^l_{S_{\nu_n}}\xrightarrow{\mathrm{P}}0.$$

证明。考虑 $\beta<1$ 的情形。任取 $C>0$，并写作

$$\mathrm{P}\left[n^{-4}\mathrm{Var}_\omega T^l_{S_{\nu_n}}\ge\varepsilon\right]\le\mathrm{P}\left[\nu_n\ge Cd_n\right]+\mathrm{P}\left[\mathrm{Var}_\omega T^l_{S_{[Cd_n]}}\ge\varepsilon n^4\right].$$

由于 $a_{Cd_n}\sim C^{1/\beta}n$，由引理 3.5 可知，第二项在 $n\to\infty$ 时趋于 0。只要将 $C>0$ 取足够大，第一项就可以任意小。在 $\beta=1$ 的情形下，可以用类似的论证，将 d_n 替换为 c_n。□

为证明下面的引理，令 $(\{U_n^0\}_{n\in\mathbb{N}},\vartheta_0)$ 如前所述，是由引理 3.2 的断言给出的 $(\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}},\vartheta)$ 的一个副本，且与环境独立。

引理 5.11. 假设对于 $\beta\le1$ 和 $\mathrm{E}\xi=\infty$，(2.1) 和 (2.2) 成立。那么

$$\frac{U^0_{n-S_{\nu_n-1}}-\mathrm{E}_\omega U^0_{n-S_{\nu_n-1}}}{n^2}-(1-\Xi)^2(2\vartheta_0-1)\xrightarrow{\mathrm{P}}0,$$

其中，对于 $\beta<1$，$\Xi=\Upsilon(L)$；对于 $\beta=1$，$\Xi=1$。

证明。由注 5.8 可知，$S_{\nu_n-1}/n\to\Xi$，概率测度 P 几乎必然成立。其次，根据关键更新定理的标准应用，[11, 定理 2.6.12]，条件 $\mathbb{E}\xi=\infty$ 蕴含 $n-S_{\nu_n-1}\xrightarrow{\text{概率测度 P}}\infty$。引理的断言由以下事实可得:

$$\begin{aligned}\frac{U^0_{n-S_{\nu_n-1}}-\mathrm{E}_\omega U^0_{n-S_{\nu_n-1}}}{n^2}-(1-\Xi)^2(2\vartheta_0-1)=\\ -\left(1-\frac{S_{\nu_n-1}}{n}\right)^2+(1-\Xi)^2+\left(1-\frac{S_{\nu_n-1}}{n}\right)^2\frac{U^0_{n-S_{\nu_n-1}}}{(n-S_{\nu_n-1})^2}-(1-\Xi)^2 2\vartheta_0\end{aligned}$$

以及引理 3.2。□

5.4. **强稀疏性：** $\beta=1$。现在我们将重点研究 $\beta=1$ 且 $\mathrm{E}\xi=\infty$ 的情形。根据引理 5.5、5.9、5.10 和 5.11，只需研究$\sum_{k=1}^{\nu_n-1}\xi_k^2(2\vartheta_k-1)$ 的淬火行为。

定理 *2.3* 的证明。固定 $\varepsilon>0$。在集合 $\{|\nu_n-c_n|\le\varepsilon c_n\}$,

$$\mathrm{E}_\omega\left(\sum_{k=c_n+1}^{\nu_n}\xi_k^2(2\vartheta_k-1)\right)^2=\sum_{k=c_n+1}^{\nu_n}\xi_k^4\mathbb{E}(2\vartheta-1)^2\le^{st}C\sum_{k=1}^{\varepsilon c_n}\xi_k^4.$$

注意到

$$a_{c_n}^{-4}\sum_{k=1}^{\varepsilon c_n}\xi_k^4=\varepsilon^4(1+o(1))\sum_{k=1}^{\varepsilon c_n}\xi_k^4/a^4_{\varepsilon c_n}.$$

由于右侧的序列在 n中是紧的，因此可得

$$a_{c_n}^{-4}\mathrm{E}_\omega\bigg(\sum_{k=c_n+1}^{\nu_n}\xi_k^2(2\vartheta_k-1)\bigg)^2\xrightarrow{\mathrm{P}}0.$$

以类似的方式，

$$a_{c_n}^{-4}\mathrm{E}_\omega\bigg(\sum_{k=\nu_n+1}^{c_n}\xi_k^2(2\vartheta_k-1)\bigg)^2\xrightarrow{\mathrm{P}}0.$$

因此，$(T_n-\mathrm{E}_\omega T_n)/a_{c_n}^2$ 的淬火律的弱极限将与以下极限一致:

$$\mathrm{P}_\omega\left[\sum_{k=1}^{c_n}\xi_k^2(2\vartheta_k-1)/a_{c_n}^2\in\cdot\right].$$

后者的弱极限为 $G(N)$，这可由定理 2.2 的证明推出。 □

5.5. **强稀疏性：** $\beta<1$。

定理 *2.4* 的证明。设 $\mu_{n,\omega}$ 表示 $(T_n-\mathrm{E}_\omega T_n)/n^2$ 的淬火律。那么

$$\mu_{n,\omega}(\cdot)=\mathrm{P}_\omega\left[\frac{T_n-T_{S_{\nu_n-1}}-\mathrm{E}_\omega[T_n-T_{S_{\nu_n-1}}]}{n^2}+\frac{T_{S_{\nu_n-1}}-\mathrm{E}_\omega[T_{S_{\nu_n-1}}]}{n^2}\in\cdot\right]$$

为了处理概率测度下的第二项，我们可以像之前一样，将随机游走者在连续两个 S_k 之间为 $k\le n$ 所花费的时间解耦。第一部分将借助引理 5.11 加以控制。和之前一样，令 (U_n^0,ϑ_0) 为引理 3.2 中断言所给出的 (U_n,ϑ) 的一个副本，且与环境独立。那么，在 P_ω 下，$U_{n-S_{\nu_n-1}}$的分布与游走到达 S_{ν_n-1} 后、到达 n 前在 $[S_{\nu_n-1},n)$ 中所花费时间的分布相同。由引理 5.10 和引理 5.5，$\mu_{n,\omega}$ 的弱极限与以下对象的弱极限相同

$$\bar\mu_{n,\omega}(\cdot)=\mathrm{P}_\omega\left[\frac{U^0_{n-S_{\nu_n-1}}-\mathrm{E}_\omega U^0_{n-S_{\nu_n-1}}}{n^2}+\frac{T^r_{S_{\nu_n-1}}-\mathrm{E}_\omega[T^r_{S_{\nu_n-1}}]}{n^2}\in\cdot\right].$$

回顾式 (5.7) 中给出的随机函数 L_n，对于一个 càdlàg 函数 h，我们用 $\{x_k(h)\ t_k(h)\}$ 表示其不连续点的任意枚举，即 $x_k(h)=h(t_k)-h(t_k^-)>0$，其中 $t_k(h)=t_k$。注意，结合式 (2.5) 中给出的 Υ，由引理 5.5、5.9、5.10 和 5.11 可知，$\bar\mu_{n,\omega}$ 的极限将与以下对象的极限一致

$$F^n(\cdot)=\mathrm{P}_\omega\left[\frac{a_{d_n}^2}{n^2}(1-\Upsilon(L_{d_n}))^2(2\vartheta_0-1)+\frac{a_{d_n}^2}{n^2}\sum_k x_k(L_{d_n})^2(2\vartheta_k-1)\mathbf{1}_{\{L_{d_n}(t_k)<n/a_{d_n}\}}\in\cdot\right]$$

只需证明 $F^n\Rightarrow F(L)$。为此，可以采用定理 5.4 证明中的相同方法。具体而言，考虑 $\varepsilon>0$

$$F^n_\varepsilon(\cdot)=\mathrm{P}_\omega\bigg[\frac{a_{d_n}^2}{n^2}(1-\Upsilon(L_{d_n}))^2(2\vartheta_0-1)+\frac{a_{d_n}^2}{n^2}\sum_k x_k(L_{d_n})^2(2\vartheta_k-1)\mathbf{1}_{\{x_k(L_{d_n})>\varepsilon\}}\mathbf{1}_{\{L_{d_n}(t_k)<n/a_{d_n}\}}\in\cdot\bigg].$$

对于固定的 $\varepsilon>0$, $F^n_\varepsilon\to F^\infty_\varepsilon$，其中

$$F^\infty_\varepsilon(\cdot)=\mathrm{P}_\omega\left[(1-\Upsilon(L))^2(2\vartheta_0-1)+\sum_k x_k(L)^2(2\vartheta_k-1)\mathbf{1}_{\{x_k(L)>\varepsilon\}}\mathbf{1}_{\{L(t_k)\le1\}}\in\cdot\right]$$

由于相关点过程收敛且 $a_{d_n}/n\to1$。接着我们证明，当 $\varepsilon\to0$ 时，$F^\infty_\varepsilon\Rightarrow F(L)$。最后，我们证明 (5.5) 在此情形下也成立，并得出结论。□

致谢。DB 和 PD 得到了波兰国家科学中心（Opus，资助编号 2020/39/B/ST1/00209）的资助。AK 得到了波兰国家科学中心（Opus，资助编号 2019/33/B/ST1/00207）的资助。

References

1. P. Billingsley，概率测度的收敛，第二版，Wiley 概率与统计丛书：概率与统计，John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1999，Wiley-Interscience 出版物。2. N. H. Bingham、C. M. Goldie 和 J. L. Teugels，正则变差，数学及其应用百科全书，第 27 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1987。3. D. Buraczewski、E. Damek 和 T. Mikosch，幂律尾随机模型，Springer 运筹学与金融工程丛书，Springer，[Cham],2016，方程 $X = AX + B$。4. D. Buraczewski 和 P. Dyszewski，随机环境中随机游走的精确大偏差，《电子概率学杂志》**23**（2018），1–26。5. D. Buraczewski、P. Dyszewski、A. Iksanov 和 A. Marynych，强稀疏随机环境中的随机游走，《随机过程及其应用》**130**（2020），3990–4027。6. D. Buraczewski、P. Dyszewski、A. Iksanov、A. Marynych 和 A. Roitershtein，中度稀疏随机环境中的随机游走，《电子概率学杂志》**24**（2019）。7. A. Dembo、Y. Peres 和 O. Zeitouni，一维随机环境中随机游走的尾部估计，《数学物理通讯》**181**（1996），第 3 期，667–683。8. D. Denisov、A. B. Dieker 和 V. Shneer，次指数性条件下随机游走的大偏差：大跳跃区域，《概率年刊》**36**（2008），1946–1991。9. D. Dolgopyat 和 I. Goldsheid，一维随机环境中最近邻随机游走的淬火极限定理，《数学物理通讯》**315**（2012），第 1 期，241–277。10. R. M. Dudley，实分析与概率论，CRC 出版社，2018。11. R. Durrett，概率论：理论与例子，剑桥统计与概率数学丛书，第 49 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2019。12. N. Enriquez、C. Sabot、L. Tournier 和 O. Zindy，随机环境中暂态随机游走涨落的淬火极限 $\mathbb{Z}^1$，《应用概率年刊》**23**（2013），第 3 期，1148–1187。13. I. Goldsheid，一维随机环境中的简单暂态随机游走：中心极限定理，《概率论及相关领域》**139**（2007），第 1–2 期，41–64。14. T. E. Harris，首次通过与再现分布，《美国数学会会刊》**73**（1952），第 3 期，471–486。15. J.M Harrison 和 L.A. Shepp，关于偏斜布朗运动，《概率年刊》（1981），309–313。16. H. Kesten、M. V. Kozlov 和 F. Spitzer，随机环境中随机游走的极限定律，《数学汇刊》**30**（1975），第 2 期，145–168。17. A. Matzavinos、A. Roitershtein 和 Y. Seol，稀疏随机环境中的随机游走，《电子概率学杂志》**21**（2016）。18. J. Peterson，随机环境中暂态、弹道型、次高斯一维随机游走的淬火极限，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年鉴》**45**（2009），第 3 期，685–709。19. J. Peterson 和 G. Samorodnitsky，随机环境中暂态一维随机游走的弱淬火极限分布，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年鉴》**49**（2013），第 3 期，722–752。

20. J. Peterson 和 O. Zeitouni，随机环境中暂态、零速度一维随机游走的淬火极限，《概率年刊》**37**（2009），第 1 期，143–188。21. S. I. Resnick，极值、正则变差与点过程，Springer New York，1987。22. ，重尾现象：概率与统计建模，Springer Science & Business Media，2007。23. D. Revuz 和 M. Yor，连续鞅与布朗运动，2004。24. A. Sma¨ıl，随机环境中随机游走的渐近行为，《应用概率杂志》**36**（1999），第 2 期，334–349。25. F. Solomon，随机环境中的随机游走，《概率年刊》**3**（1975），第 1 期，1–31。26. P. Straka 和 B. I. Henry，滞后与超前耦合连续时间随机游走、更新时刻及其联合极限，《随机过程及其应用》**121**（2011），324–336。27. W. Whitt，首次通过时间过程的弱收敛，1971，第 417–422 页。28. O. Zeitouni，随机环境中的随机游走，2004。

Dariusz Buraczewski, Piotr Dyszewski and Alicja Kolodziejska：弗罗茨瓦夫大学数学研究所，波兰弗罗茨瓦夫 50-384*E-mail*：dariusz.buraczewski@math.uni.wroc.pl, piotr.dyszewski@math.uni.wroc.pl, alicja.kolodziejska@math.uni.wroc.pl