arXiv:2301.00485v1 [math.AP] 1 Jan 2023

结构声学模型的爆破

BAOWEI FENG、YANQIU GUO 和 MOHAMMAD A. RAMMAHA

Abstract. 本文研究了结构声学模型中弱解的有限时间爆破。该模型由定义在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上的半线性波动方程组成，并与作用于弹性壁（即边界的一个平坦部分）上的 Berger板方程强耦合。该系统受到多种相互竞争的力的影响，包括边界和内部的源项与阻尼项。我们强调，作用于波动方程的幂型源项允许具有一个 *supercritical*指数，也就是说，其对应的涅米茨基算子从H^1 到 L^2并非局部 Lipschitz 连续。本文通过考虑初始数据的两种情形，证明了当源项强于阻尼项时弱解的爆破结果：（i）初始总能量为负；（ii）初始总能量为正但较小，而初始二次能量足够大。本研究中最主要的挑战来自弹性壁上波动方程与板方程的耦合。

1. Introduction

我们研究非线性力作用下结构声学模型的有限时间爆破。具体而言，我们考虑以下非线性偏微分方程耦合系统:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u + g_1(u_t) = f(u) & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ w_{tt} + \Delta^2 w + g_2(w_t) + u_t|_\Gamma = h(w) & \text{in } \Gamma \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times (0,T), \\ \partial_\nu u = w_t & \text{on } \Gamma \times (0,T), \\ w = \partial_{\nu_\Gamma} w = 0 & \text{on } \partial\Gamma \times (0,T), \\ (u(0), u_t(0)) = (u_0, u_1), \quad (w(0), w_t(0)) = (w_0, w_1), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中初始数据属于有限能量空间，即

$$(u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ and } (w_0, w_1) \in H^2_0(\Gamma) \times L^2(\Gamma).$$

T空间 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 在 (2.1) 中定义，由所有在 Γ_0 上消失的 H^1 函数组成 .

这里，$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个有界、开放、连通且具有光滑边界 $\partial\Omega = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma}$的区域，其中 Γ_0 和 Γ 是两个互不相交、开放、连通且具有正勒贝格测度的集合。此外， Γ 是Ω边界的一个平坦部分，称为弹性壁。

Date:2023年1月1日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 35L70。*Key words and phrases.* 结构声学；波动方程—板方程模型；有限时间爆破；局部与整体存在性。

边界 $\partial\Omega$的部分 Γ_0 描述了一面刚性壁，而耦合发生在柔性壁 Γ上。

非线性项 f 和 h 分别是作用于波动方程与板方程的源项，其中源项 $f(u)$ 的阶为超临界阶，也就是说，其对应的涅米茨基算子从 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 并非局部 Lipschitz 连续。对于三维区域 Ω，超临界阶意味着幂函数 f 的指数大于 3。需要强调的是，两个源项 $f(u)$ 和 $h(w)$ 都允许具有可能导致有限时间内不稳定（爆破）的“坏”符号。此外，系统还受到另外两种力的影响，即 $g_1(u_t)$ 和 $g_2(w_t)$，它们分别代表作用于波动方程与板方程的摩擦阻尼项。向量 ν 和 ν_Γ分别表示 Γ 和 $\partial\Gamma$的外法向量。

诸如 (1.1) 这样的模型可用于描述由刚性壁和柔性壁共同围成的声学腔室中的气体压力。腔室内的压力由波动方程的解描述，而柔性壁的振动则由耦合的 Berger 板方程的解描述。

描述结构声学相互作用的偏微分方程模型有着悠久的历史。这些模型在物理学和数学文献中都广为人知，其渊源可追溯至 [6, 21] 中研究的经典模型。关于结构声学模型的稳定化与能控性，已有大量研究。读者可参阅 Lasiecka 的专著 [23] ，其中全面综述了这一领域，并引用了许多相关研究。其他相关成果包括 [2, 3, 4, 5, 11, 14, 15, 22]。然而，文献尚未研究非线性力作用下结构声学模型的有限时间爆破问题，因此本文将探讨这一问题。

我们的目标是理解结构声学模型 (1.1) 中源项与阻尼之间的相互作用，以及这些相互作用如何影响弱解的行为。Becklin 和 Rammaha 在 [7], 中证明了系统 (1.1) 的弱解具有局部适定性，并且还表明，当阻尼比源项更强时，解整体存在。在我们的论文 [12], 中，我们运用势阱理论，证明了弱解的整体存在性，并估计了能量衰减率，前提是初始数据来自势阱的稳定部分。在本文中，我们将展示当源项强于阻尼项时弱解的爆破现象，并考虑初始数据的两种情形：(i) 初始总能量为负，这意味着非线性力所产生的初始势能足够大；(ii) 初始总能量为正但足够小，而初始二次能量较大。在这种情况下，初始数据来自势阱的不稳定部分。为了直观地理解这些爆破现象，可以设想某个非线性力持续作用于弹性壁，使其振动增强；与此同时，另一个非线性力作用于声学腔室内的气体，使其压力升高。当这些力超过阻尼效应时，系统便会在某个有限时间内崩溃。

证明系统 (1.1) 的弱解发生爆破的困难，源于波动方程与板方程在弹性壁（即边界的平坦部分）上的耦合。我们注意到，(1.1) 中这两个演化方程通过项 $u_t|_\Gamma$ where Γ is the elastic wall 相互耦合。由于我们考虑波动方程的弱解， u_t belongs to $L^2(\Omega)$，而一般的 L^2 函数可能没有定义良好的

Ω 边界上的迹。在系统 (1.1) 中，项 $u_t|_\Gamma$ 是通过板方程以弱意义定义的。但我们没有关于 $L^2(\Gamma)$ 范数的合适估计来控制 $u_t|_\Gamma$。因此，在整个爆破结果的证明过程中，我们力求避免直接估计 $u_t|_\Gamma$；我们的思路是利用方程的结构，将 $u_t|_\Gamma$ 转换为另一个项。请注意，证明爆破的基本策略是证明函数 $Y(t) = G^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t)$ 在有限时间内趋于无穷大。函数$Y(t)$曾用于 [13], ，其中 $G(t)$ 是总能量的相反数。但在 [13] 及文献中许多其他相关研究里，$N(t)$ 通常定义为未知函数的 L^2 范数。不过，在我们的论证中，我们采用一种技巧，在 $N(t)$ 中加入额外项 $\int_0^t \int_\Gamma \gamma u(\tau) \cdot w(\tau) d\Gamma d\tau$（见 (3.2)）。这一额外项有助于将估计中的棘手项 $u_t|_\Gamma$ 转换为性质良好的项 w_t，其中w_t 的 $L^2(\Gamma)$ 范数是能量的一部分。

必须指出，在原始的线性结构声学模型中， u 满足波动方程 $u_{tt} - \Delta u = 0$。然而，为解决我们证明爆破结果时遇到的一些技术难题，我们在线性部分中添加了项 u ，使系统 (1.1) 中的线性算子变为 $u_{tt} - \Delta u + u$；该算子通常出现在 Klein-Gordon方程中。线性算子中的附加项 u 有助于我们估计 (3.19) 中 u 的迹的 $L^2(\Gamma)$范数，因为它使我们能够获得不等式右端精确的系数，而这对我们的论证至关重要。

源项-阻尼相互作用有着重要的应用。一方面，在控制理论中，可以利用阻尼项使系统稳定；另一方面，则可以通过增强源项造成不稳定性。Georgiev 和 Todorova 的开创性研究[13]阐明了波动方程中有趣的源项-阻尼相互作用。Bociu 和 Lasiecka 撰写了一系列论文 [8, 9, 10] ，研究区域内部及边界上具有超临界源项和阻尼项的波动方程。此外，Guo [16]证明，只要摩擦阻尼项足够强，能够抑制源项导致的解增长，即使源项的指数任意大，三维波动方程仍具有整体适定性。关于耦合波动方程中的源项-阻尼相互作用，也可参阅论文 [17, 18, 19] 。

本文内容安排如下。在第2节中，我们陈述 Becklin 和 Rammaha 在 [7] 中关于适定性的结果，以及我们此前关于弱解整体存在性和能量衰减的结果 [12]。此外，我们还陈述本文的主要结果，即弱解的有限时爆破。在第 3 节中，我们假设初始总能量为负，证明弱解会爆破。在第4节中，我们假设初始总能量为正，证明有限时爆破。

2. Preliminaries and main results

2.1. 记号。全文将使用以下关于 L^p 空间范数和标准内积的记号约定：

$$||u||_p = ||u||_{L^p(\Omega)}, \qquad (u,v)_\Omega = (u,v)_{L^2(\Omega)},$$
$$|u|_p = ||u||_{L^p(\Gamma)}, \qquad (u,v)_\Gamma = (u,v)_{L^2(\Gamma)}.$$

我们还用记号 γu 表示 u 在 Γ上的迹。按照惯例， C 始终表示一个通用的正常数，该常数可能在不同的行中发生变化。

此外，我们令

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}, \tag{2.1}$$

以及 $\|u\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} := (\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$。众所周知，标准范数 $\|u\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)}$ 与 $\|\nabla u\|_2$ 等价。基于类似的原因，我们设 $\|w\|_{H^2_0(\Gamma)} = |\Delta w|_2$。

在证明中，将用到以下索obolev嵌入： $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 以及 $H^1(\Gamma) \hookrightarrow L^q(\Gamma)$，对任意 $1 \le q < \infty$ 均成立。

2.2. 弱解的适定性。全文中，我们在以下假设下研究 (1.1)。

假设 2.1。

阻尼： $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续且单调递增的函数，并且 $g_1(0) = g_2(0) = 0$。此外，在无穷远处满足以下增长条件：存在正常数 α 和 β，使得对于 $|s| \ge 1$,

$$\alpha|s|^{m+1} \le g_1(s)s \le \beta|s|^{m+1}, \ with\ m \ge 1,$$
$$\alpha|s|^{r+1} \le g_2(s)s \le \beta|s|^{r+1}, \ with\ r \ge 1.$$

源项： f 和 h 是 $C^1(\mathbb{R})$ 中的函数，使得

$$|f'(s)| \le C(|s|^{p-1} + 1), \ with\ 1 \le p < 6,$$
$$|h'(s)| \le C(|s|^{q-1} + 1), \ with\ 1 \le q < \infty.$$

参数： $p\frac{m+1}{m} < 6$。

为建立唯一性结果，以下假设是必要的。

假设 2.2。对于 $p > 3$，我们假设 $f \in C^2(\mathbb{R})$，且对所有 $u \in \mathbb{R}$， $|f''(u)| \le C(|u|^{p-2} + 1)$。

我们首先给出 (1.1) 的适当弱解的定义。

定义 2.3。若一对函数 (u, w) 在区间 $[0, T]$ 上满足以下条件，则称其为 (1.1) 的弱解:

(i) $u \in C([0,T];\ H^1_{\Gamma_0}(\Omega)),\ u_t \in C([0,T];\ L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$, (ii) $w \in C([0,T];\ H^2_0(\Gamma)),\ w_t \in C([0,T];\ L^2(\Gamma)) \cap L^{r+1}(\Gamma \times (0,T))$, (iii) $(u(0)\ u_t(0)) = (u_0, u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, (iv) $(w(0)\ w_t(0)) = (w_0, w_1) \in H^2_0(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, (v) Th

函数 u 和 w 对所有 $t \in [0, T$满足以下变分恒等式]:

$$\begin{aligned}(u_t(t), \phi(t))_\Omega - (u_1, \phi(0))_\Omega - \int_0^t (u_t(\tau), \phi_t(\tau))_\Omega d\tau + \int_0^t (\nabla u(\tau), \nabla\phi(\tau))_\Omega d\tau \\ + \int_0^t (u(\tau), \phi(\tau))_\Omega d\tau - \int_0^t (w_t(\tau), \gamma\phi(\tau))_\Gamma d\tau + \int_0^t \int_\Omega g_1(u_t(\tau))\phi(\tau) dx d\tau \\ = \int_0^t \int_\Omega f(u(\tau))\phi(\tau) dx d\tau,\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$(w_t(t)+\gamma u(t),\psi(t))_\Gamma-(w_1+\gamma u_0,\psi(0))_\Gamma-\int_0^t(w_t(\tau),\psi_t(\tau))_\Gamma d\tau$$
$$-\int_0^t(\gamma u(\tau),\psi_t(\tau))_\Gamma d\tau+\int_0^t(\Delta w(\tau),\Delta\psi(\tau))_\Gamma d\tau$$
$$+\int_0^t\int_\Gamma g_2(w_t(\tau))\psi(\tau)d\Gamma d\tau=\int_0^t\int_\Gamma h(w(\tau))\psi(\tau)d\Gamma d\tau, \tag{2.3}$$

对所有满足以下条件的测试函数 ϕ和 ψ： $\phi\in C([0,T];\ H^1_{\Gamma_0}(\Omega))\cap L^{m+1}(\Omega\times(0,T))$,$\psi\in C\left([0,T];\ H_0^2(\Gamma)\right)$，且 $\phi_t\in L^1(0,T;\ L^2(\Omega))$，以及 $\psi_t\in L^1(0,T;\ L^2(\Gamma))$.

本文的工作基于 Becklin 和 Rammaha 在 [7]中确立的存在性结果。为方便读者，我们首先在 [7]中概述重要结果。

定理 2.4（局部和整体弱解 [7]）。在假设 2.1 成立的条件下，方程 (1.1) 存在一个局部弱解 (u,w)，其定义在 $[0,T_0]$ 上，其中某个 $T_0>0$取决于初始能量 $E(0)$，二次能量 $E(t)$ 定义为

$$E(t):=\frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|_2^2+\|\nabla u(t)\|_2^2+\|u(t)\|_2^2+|w_t(t)|_2^2+|\Delta w(t)|_2^2\right). \tag{2.4}$$

- (u,w) 对所有 $t\in[0,T_0]$都满足以下能量恒等式:

$$E(t)+\int_0^t\int_\Omega g_1(u_t)u_t dxd\tau+\int_0^t\int_\Gamma g_2(w_t)w_t d\Gamma d\tau$$
$$=E(0)+\int_0^t\int_\Omega f(u)u_t dxd\tau+\int_0^t\int_\Gamma h(w)w_t d\Gamma d\tau. \tag{2.5}$$

- 除假设 2.1 外，若我们还假设 $u_0\in L^{p+1}(\Omega)$、 $p\le m$ 和 $q\le r$，则上述解 (u,w) 是整体弱解，并且 T_0 可以任意大。

- 若假设 2.1 和假设 2.2 成立，并且进一步假设 $u_0\in L^{\frac{3}{(p-1)2}}(\Omega)$，则 (1.1) 的~~弱~~解是唯一的。
- 若假设 2.1 成立，并且进一步假设 $u_0\in L^{3(p-1)}(\Omega)$ 和$m\ge 3p-4$ 在 $p>3$ 时成立，则 (1.1) 的弱解是唯一的。

2.3. 势阱解。本小节简要讨论源自椭圆方程理论的势阱理论。为此，我们需要对源项 $f(u)$ 和 $h(w)$ 施加额外假设。

假设 2.5。

- 存在一个非负函数 $F(u)\in C^1(\mathbb{R})$，使得 $F'(u)=f(u)$，且 F是 $p+1$阶齐次函数，即对于 $\lambda>0,\ u\in\mathbb{R}$，有 $F(\lambda u)=\lambda^{p+1}F(u)$。
- 存在一个非负函数 $H(s)\in C^1(\mathbb{R})$，使得 $H'(s)=h(s)$，且 H是 $q+1$阶齐次函数，即 $H(\lambda s)=\lambda^{q+1}H(s)$，对于 $\lambda>0,\ s\in\mathbb{R}$。

注记 2.6。由欧拉齐次函数定理可知

$$uf(u)=(p+1)F(u),\quad wh(w)=(q+1)H(w). \tag{2.6}$$

根据假设 2.1 以及 F 和 H的齐次性，可知存在正常数 M，使得

$$F(u) \le M|u|^{p+1}, \quad H(w) \le M|w|^{q+1}. \tag{2.7}$$

此外，由于 (2.6)， f 是 p 阶齐次的，而 h 是 q阶齐次的，满足

$$|f(u)| \le M(p+1)|u|^p, \quad |h(w)| \le M(q+1)|w|^q. \tag{2.8}$$

回顾一下，二次能量 $E(t)$ 已在 (2.4) 中引入。现在，我们将系统 (1.1) 的总能量 $\mathcal{E}(t)$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) :&= E(t) - \int_\Omega F(u(t))dx - \int_\Gamma H(w(t))d\Gamma \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_2^2 + |w_t(t)|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2\right) \\ &\quad - \int_\Omega F(u(t))dx - \int_\Gamma H(w(t))d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.9}$$

于是，能量恒等式 (2.5) 等价于

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \int_\Omega g_1(u_t)u_t dx d\tau + \int_0^t \int_\Gamma g_2(w_t)w_t d\Gamma d\tau = \mathcal{E}(0). \tag{2.10}$$

设 $X := H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^2_0(\Gamma)$，我们定义泛函 $\mathcal{J}\colon X \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathcal{J}(u,w) := \frac{1}{2}(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2) - \int_\Omega F(u(t))dx - \int_\Gamma H(w(t))d\Gamma, \tag{2.11}$$

其中 $\mathcal{J}(u,w)$ 是系统的势能。于是我们有

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{J}(u,w) + \frac{1}{2}(\|u_t(t)\|_2^2 + |w_t(t)|_2^2). \tag{2.12}$$

关于 $\mathcal{J}$ 在 (u,w) 处的 Fréchet 导数 $\in X$ 为

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}'(u,w), (\phi,\psi)\rangle &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx + \int_\Gamma \Delta w \cdot \Delta \psi d\Gamma + \int_\Omega u\phi dx \\ &\quad - \int_\Omega f(u)\phi dx - \int_\Gamma h(w)\psi d\Gamma, \end{aligned} \tag{2.13}$$

对于 $(\phi,\psi) \in X$。尼赫里流形 $\mathcal{N}$ 可定义为

$$\mathcal{N} := \left\{(u,w) \in X\backslash\{(0,0)\} : \langle \mathcal{J}'(u,w), (u,w)\rangle = 0\right\},$$

结合式 (2.13) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = \Big\{(u,w) \in X\backslash\{(0,0)\} : \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2 &= (p+1)\int_\Omega F(u)dx \\ &+ (q+1)\int_\Gamma H(w)d\Gamma\Big\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

根据我们论文中的引理 2.8 [12] 和 [18], 中的引理2.7，势阱d 的深度为正，并且满足

$$d := \inf_{(u,w)\in\mathcal{N}} \mathcal{J}(u,w) = \inf_{(u,w)\in X\setminus\{(0,0)\}} \sup_{\lambda\geq 0} \mathcal{J}(\lambda(u,w)) > 0, \tag{2.15}$$

对于 $1 < p \leq 5,\ q > 1$。

我们定义

$$\mathcal{W} := \{(u,w) \in X : \mathcal{J}(u,w) < d\},$$

$$\mathcal{W}_1 := \left\{(u,w) \in \mathcal{W} : \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2 > (p+1)\int_\Omega F(u)dx + (q+1)\int_\Gamma H(w)d\Gamma\right\} \cup \{(0,0)\},$$

$$\mathcal{W}_2 := \left\{(u,w) \in \mathcal{W} : \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2 < (p+1)\int_\Omega F(u)dx + (q+1)\int_\Gamma H(w)d\Gamma\right\}.$$

显然， $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$和 $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset.$。我们称 $\mathcal{W}$为势阱， d 为势阱的深度。我们称 $\mathcal{W}_1$ 为势阱的稳定部分，称 $\mathcal{W}_2$ 为势阱的不稳定部分。

对于来自势阱稳定部分的初始数据，我们已证明了 [12]中整体解的以下结果。

定理2.7（势阱解 [12]）。假设假设 2.1 和假设 2.5 成立。设 $1 < p \leq 5$ 和 $q > 1$。进一步假设 $(u_0, w_0) \in \mathcal{W}_1$ 且 $\mathcal{E}(0) < d$。则系统 (1.1) 存在一个整体解 (u, w)。此外，对于任意 $t \geq 0$，我们有

$$\begin{cases} (i)\ \mathcal{J}(u,w) \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0), \\ (ii)\ (u,w) \in \mathcal{W}_1, \\ (iii)\ E(t) \leq \dfrac{cd}{c-2}, \\ (iv)\ \dfrac{c-2}{c}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq E(t), \end{cases}$$

其中 $c = \min\{p+1, q+1\} > 2$。

In 论文 [12], 我们还研究了势阱解的能量衰减率。

定理2.7证明了 $\mathcal{W}_1$ 在动力学下的不变性。事实上，对于 $\mathcal{W}_2$，我们也有相同的结果。

引理 2.8。假设假设 2.1 和假设 2.5 成立。设 $1 < p \leq 5$ and$q > 1$。进一步假设 $(u_0, w_0) \in \mathcal{W}_2$ and $\mathcal{E}(0) < d$。则弱解 $(u(t)\ w(t))$ 对所有 $t \in [0, T)$ 均属于 $\mathcal{W}_2$，其中 $[0, T)$ 是最大存在区间。

证明。请参见附录。 □

注 2.9. 对于来自势阱不稳定部分 $\mathcal{W}_2$ 的初始值，我们将陈述一个爆破解果，即推论 2.15。

2.4. 主要结果。我们的第一个结果是：当源项强于阻尼项且初始能量为负时，解会发生爆破。为陈述我们的第一个爆破解果，我们需要对源项作出额外假设。

假设 2.10。

- 存在一个函数 $F(u) \in C^1(\mathbb{R})$，使得 $F'(u) = f(u)$。此外，存在 $c_0 > 0$ 和 $c_1 > 3$，使得

$$F(u) \geq c_0|u|^{p+1}, \quad uf(u) \geq c_1 F(u), \quad \forall\ u \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

- 存在一个函数 $H(s) \in C^1(\mathbb{R})$，使得 $H'(s) = h(s)$。此外，存在 $c_2 > 0$ 和 $c_3 > 3$，使得

$$H(s) \geq c_2|s|^{q+1}, \quad sh(s) \geq c_3 H(s), \quad \forall\ s \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

下面的爆破解果表明，若初始能量为负，且源项比相应的阻尼项占主导地位，则方程 (1.1) 的每个弱解都会在有限时间内爆破。

定理 2.11（负初始能量下的爆破）。设假设 2.1 和假设 2.10 成立。假设 $p > m$、$q > r$ 和 $\mathcal{E}(0) < 0$。则系统 (1.1) 的弱解 $(u(t)\ w(t))$ 会在有限时间内爆破。特别地，

$$\limsup_{t \to T^-} (\|\nabla u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2) = +\infty,$$

对于某个 $0 < T < \infty$。

注 2.12. 综合假设 2.1 中的条件 $p > m \geq 1$ 和 $p\frac{m+1}{m} < 6$，可得定理 2.11 成立所需的限制条件：$1 < p < 5$ 和 $1 \leq m < 5$。

第二个结果是初始能量为正的势阱解发生爆破。在陈述这一结果之前，我们先定义几个常数。设 $y_0 > 0$ 是方程的唯一解

$$MK_1(p+1)(2y_0)^{\frac{p-1}{2}} + MK_2(q+1)(2y_0)^{\frac{q-1}{2}} = 1. \tag{2.18}$$

常数 $0 < K_1$、$K_2 < \infty$ 定义如下：

$$K_1 := \sup_{u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{p+1}^{p+1}}{\|\nabla u\|_2^{p+1}}, \quad K_2 := \sup_{w \in H_0^2(\Gamma)\setminus\{0\}} \frac{|w|_{q+1}^{q+1}}{|\Delta w|_2^{q+1}}, \tag{2.19}$$

其中，当 $1 \leq p \leq 5$ 且 $q \geq 1$时，K_1 和 K_2 均有定义。此外，令

$$\hat{d} := y_0 - MK_1(2y_0)^{\frac{p+1}{2}} - MK_2(2y_0)^{\frac{q+1}{2}}, \tag{2.20}$$

其中 $M > 0$ 已在式 (2.7) 中引入。

注记 2.13. 我们断言

$$0 < \hat{d} \leq d, \tag{2.21}$$

其中，d 是势阱的深度，定义见公式 (2.15)。(2.21) 的不等式证明见附录。

此外，我们定义正常数

$$A := \frac{\lambda}{2(6+\lambda)} y_0, \quad \text{where } \lambda := \min\{c_1 - 3, c_3 - 3\} > 0. \tag{2.22}$$

于是我们得到以下结果。

定理 2.14（正初始能量下的爆破）。假设假设 2.1、假设 2.5 和假设 2.10 成立。令

$$E(0) > y_0, \quad and \quad 0 \le \mathcal{E}(0) < \min\{A, \hat{d}\}. \tag{2.23}$$

那么，只要 $p > m$ and$q > r$，方程 (1.1) 的弱解 $(u(t)\ w(t))$ 就会在有限时间内爆破。特别地，

$$\limsup_{t \to T^-} (\|\nabla u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2) = +\infty,$$

对于某个 $0 < T < \infty$。

推论 2.15。假设假设 2.1、假设 2.5 和假设 2.10 成立。令 $p > m$、 $q > r$ 和

$$0 \le \mathcal{E}(0) < \min\{A, \hat{d}\}.$$

如果 $(u_0, w_0) \in \mathcal{W}_2$，则方程 (1.1) 的弱解 $(u(t)\ w(t))$ 会在有限时间内爆破。

3. Blow-up of solutions with negative initial energy

在本节中，我们证明定理 2.11，该定理表明：当源项比阻尼项占主导且初始总能量为负时，系统 (1.1) 的弱解会在有限时间内爆破。

定理 2.11 的证明。设 $(u(t)\ w(t)$ 是按照定义 2.3 意义下的方程 (1.1) 的一个弱解。我们将此类解 $(u(t)\ w(t))$ 的寿命 T 定义为所有$T^* > 0$的上确界，使得在$[0, T^*]$上，$(u(t)\ w(t))$ 是按照定义 2.3 意义下的系统 (1.1) 的一个解。下面我们将证明 T是有限的，并得到解的寿命的一个上界。

与 [1, 8, 17], 中对任意 $t \in [0, T$ 的情形一样），我们定义

$$G(t) = -\mathcal{E}(t), \quad S(t) = \int_\Omega F(u(t))dx + \int_\Gamma H(w(t))d\Gamma,$$

其中，总能量 $\mathcal{E}(t)$ 已在式 (2.9) 中引入。

显然，

$$G(t) = -\frac{1}{2}(\|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2) + S(t),$$

这意味着

$$\|u_t(t)\|_2^2 + |w_t(t)|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2 = -2G(t) + 2S(t). \tag{3.1}$$

我们定义

$$N(t) := \frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_2^2 + |w(t)|_2^2\right) + \int_0^t \int_\Gamma \gamma u(\tau) \cdot w(\tau) d\Gamma d\tau, \tag{3.2}$$

那么我们有

$$N'(t) = \int_\Omega u(t)u_t(t)dx + \int_\Gamma w(t)w_t(t)d\Gamma + \int_\Gamma \gamma u(t)\cdot w(t)d\Gamma. \tag{3.3}$$

由假设 2.10 可知

$$S(t) \geq c_0\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} + c_2|w(t)|_{q+1}^{q+1}. \tag{3.4}$$

由于 $G(t) = -\mathcal{E}(t)$，能量恒等式 (2.10) 可写为

$$G(t) = G(0) + \int_0^t\int_\Omega g_1(u_t)u_t dxd\tau + \int_0^t\int_\Gamma g_2(w_t)w_t d\Gamma d\tau.$$

然后根据假设 2.1 以及 (u, w) 的正则性，我们推知 $G(t)$ 是绝对连续的，并且

$$G'(t) = \int_\Omega g_1(u_t)u_t dx + \int_\Gamma g_2(w_t)w_t d\Gamma \geq \alpha\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + \alpha|w_t(t)|_{r+1}^{r+1} \geq 0, \tag{3.5}$$

在 $[0, T$ 上几乎处处成立。于是 $G(t)$ 是非递减的。鉴于 $G(0) = -\mathcal{E}(0) > 0$，我们得到对任意 $0 \leq t < T$,

$$0 < G(0) \leq G(t) \leq S(t). \tag{3.6}$$

由 (3.1) 和 (3.6)，我们得到

$$\|u_t(t)\|_2^2 + |w_t(t)|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2 < 2S(t). \tag{3.7}$$

我们引入一个常数 a ，使其满足

$$0 < a < \min\left\{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{p+1},\ \frac{1}{r+1} - \frac{1}{q+1},\ \frac{p-1}{2(p+1)},\ \frac{q-1}{2(q+1)}\right\}. \tag{3.8}$$

定义

$$Y(t) := G^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t), \tag{3.9}$$

其中 $0 < \varepsilon \leq \min\{1, G(0)\}$ 将在稍后确定。函数 $Y(t)$取自 Georgiev 和 Todorova 的重要著作 [13] 。

我们的目标是证明 $Y(t)$ 在有限时间内趋于无穷大。
首先，我们断言

$$Y'(t) = (1-a)G^{-a}(t)G'(t) + \varepsilon N''(t), \tag{3.10}$$

其中

$$\begin{aligned} N''(t) = {} & \|u_t(t)\|_2^2 + |w_t(t)|_2^2 - (\|\nabla u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2 + \|u(t)\|_2^2) - \int_\Omega g_1(u_t(t))u(t)dx \\ & - \int_\Gamma g_2(w_t(t))w(t)d\Gamma + \int_\Omega u(t)f(u(t))dx + \int_\Gamma w(t)h(w(t))d\Gamma \\ & + 2\int_\Gamma \gamma u(t)\cdot w_t(t)d\Gamma, \quad \text{a.e. on } [0, T). \end{aligned} \tag{3.11}$$

我们注意到， $N''(t)$ 可以通过对 (3.3) 中的 $N'(t)$ 求导并使用 (1.1) 中的方程形式上得到。不过，这一形式上的过程需要如下论证才能成立。

根据定义 2.3， $u_t \in L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$。由于 $u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$，因此参照注 2.12 可得，对于 $1 \le m < 5$，有 $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$。于是我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |u|^{m+1} dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \left| \int_0^t u_t(\tau) d\tau + u_0 \right|^{m+1} dxdt \\ &\le C(T^{m+1} \|u_t(t)\|^{m+1}_{L^{m+1}(\Omega\times(0,T))} + T\|u_0\|^{m+1}_{m+1}) < \infty. \end{aligned} \tag{3.12}$$

这意味着对所有 $T \ge 0$， $u(t) \in L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$。我们可以用同样的论证得到$w(t) \in L^{r+1}(\Gamma \times (0,T))$。于是， $u(t)$ 和 $w(t)$ 分别满足定义 2.3 中对测试函数 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 所施加的正则性限制。然后，在 (2.2) 中用 u 替换 ϕ，在 (2.3) 中用 w 替换 ψ，并利用 (3.3) 得到

$$\begin{aligned} N'(t) &= (u, u_t)_\Omega + (w, w_t)_\Gamma + (\gamma u, w)_\Gamma \\ &= \int_\Omega u_0 u_1 dx + \int_\Gamma (w_0 w_1 + \gamma u_0 w_0) d\Gamma + \int_0^t (\|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2) d\tau \\ &\quad - \int_0^t (\|\nabla u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2 + \|u\|_2^2) d\tau + 2\int_0^t \int_\Gamma \gamma u \cdot w_t d\Gamma d\tau - \int_0^t \int_\Omega g_1(u_t) u dx d\tau \\ &\quad - \int_0^t \int_\Gamma g_2(w_t) w d\Gamma d\tau + \int_0^t \int_\Omega u f(u) dx d\tau + \int_0^t \int_\Gamma w h(w) d\Gamma d\tau. \end{aligned} \tag{3.13}$$

下面我们证明 $N'(t)$ 是绝对连续的，因此可以对其求导。

回顾事实 $u \in C([0,t]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ 以及嵌入 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$。由注 2.12 可知 $1 < p < 5$。因此，对所有 $t \in [0,T)$，

$$\int_0^t \left| \int_\Omega u f(u) dx \right| d\tau \le C \int_0^t \int_\Omega (|u|^p + 1)|u| dx d\tau < \infty. \tag{3.14}$$

此外，由于 $w \in H^2_0(\Gamma) \hookrightarrow L^\infty(\Gamma)$，我们有

$$\int_0^t \left| \int_\Gamma w h(w) d\Gamma \right| d\tau \le C_T \int_0^t \int_\Gamma |w|^{q+1} d\Gamma d\tau < \infty. \tag{3.15}$$

利用迹定理，我们看到

$$2\int_0^t \left| \int_\Gamma \gamma u \cdot w_t d\Gamma \right| d\tau \le C \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau + \int_0^t |w_t|_2^2 d\tau < \infty. \tag{3.16}$$

由于 (3.12) 以及 $u_t \in L^{m+1}(\Omega \times (0,T))$ 的正则性，我们推得对所有$t \in [0,T)$，

$$\int_0^t \left| \int_\Omega g_1(u_t) u dx \right| d\tau + \int_0^t \left| \int_\Gamma g_2(w_t) w d\Gamma \right| d\tau < \infty. \tag{3.17}$$

于是，(3.14)–(3.17) 以及 (u,w) 的正则性表明，(3.13) 右端的所有项都是绝对连续的，因此我们可以对 (3.13) 求导，从而得出所声称的 $N''(t)$ 公式 (3.11) 成立。

接下来，我们旨在求出 $N''(t)$ 的下界。

利用杨氏不等式，我们可得

$$2\left|\int_\Gamma \gamma u\cdot w_t\,d\Gamma\right|\le 2|w_t|_2^2+\frac{1}{2}|\gamma u|_2^2. \tag{3.18}$$

现在我们估计项 $|\gamma u|_2^2$。不失一般性，假设边界的平坦部分 Γ 是水平的，因此 Γ 的单位法向量为 $\mathbf{n}=(0,0,1)$。回顾 $\partial\Omega=\overline{\Gamma_0\cup\Gamma}$ 和 $u|_{\Gamma_0}=0$。我们定义向量场 $\mathbf{F}=(0,0,u^2)$，并利用散度定理得到

$$\begin{aligned}|\gamma u|_2^2&=\int_\Gamma u^2d\Gamma=\int_{\Gamma\cup\Gamma_0}u^2d(\Gamma\cup\Gamma_0)=\int_{\Gamma\cup\Gamma_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d(\Gamma\cup\Gamma_0)=\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\\&=\int_\Omega (u^2)_z dx=2\int_\Omega uu_z dx\le\|u\|_2^2+\|u_z\|_2^2\le\|u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

由 (3.18) 和 (3.19) 可得

$$2\left|\int_\Gamma \gamma u\cdot w_t d\Gamma\right|\le 2|w_t|_2^2+\frac{1}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2. \tag{3.20}$$

于是，由 (3.11) 和 (3.20) 得

$$\begin{aligned}N''(t)\ge\|u_t\|_2^2-|w_t|_2^2-\frac{3}{2}(\|\nabla u\|_2^2+|\Delta w|_2^2+\|u\|_2^2)-\int_\Omega g_1(u_t)udx\\-\int_\Gamma g_2(w_t)wd\Gamma+\int_\Omega uf(u)dx+\int_\Gamma wh(w)d\Gamma.\end{aligned} \tag{3.21}$$

注意到，由于 (3.1)，$\|\nabla u\|_2^2+|\Delta w|_2^2+\|u\|_2^2=-(\|u_t\|_2^2+|w_t|_2^2)+2S(t)-2G(t)$，并利用假设 $uf(u)\ge c_1F(u)$，以及由 (2.16)-(2.17) 得到的 $wh(w)\ge c_3H(w)$，由 (3.21) 可推知

$$\begin{aligned}N''(t)&\ge\frac{5}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}|w_t|_2^2-3S(t)+3G(t)-\int_\Omega g_1(u_t)udx-\int_\Gamma g_2(w_t)wd\Gamma\\&\quad+c_1\int_\Omega F(u)dx+c_3\int_\Gamma H(w)d\Gamma\\&\ge\frac{5}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}|w_t|_2^2+3G(t)-\int_\Omega g_1(u_t)udx-\int_\Gamma g_2(w_t)wd\Gamma+\lambda S(t),\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中我们令 $\lambda:=\min\{c_1-3,c_3-3\}>0$。

利用 $g_1(s)s\le\beta|s|^{m+1}$、H¨older 不等式以及 $p>m$，可得

$$\int_\Omega g_1(u_t)udx\le\beta\int_\Omega|u_t|^m|u|dx\le\beta\|u\|_{m+1}\|u_t\|_{m+1}^m\le\beta|\Omega|^{\frac{p-m}{(p+1)(m+1)}}\|u\|_{p+1}\|u_t\|_{m+1}^m,$$

结合 (3.4) 可得

$$\int_\Omega g_1(u_t)udx\le\beta|\Omega|^{\frac{p-m}{(p+1)(m+1)}}c_0^{-\frac{1}{p+1}}S^{\frac{1}{p+1}}(t)\|u_t\|_{m+1}^m=R_1S^{\frac{1}{p+1}}(t)\|u_t\|_{m+1}^m, \tag{3.23}$$

其中常数 $R_1:=\beta|\Omega|^{\frac{p-m}{p+1}}c_0^{-\frac{1}{p+1}}$。

然后利用杨氏不等式、(3.5) 和 (3.6)，由 (3.23) 可得，对于任意$\delta_1 > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_1(u_t)u dx &\le R_1 S^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(t)S^{\frac{1}{m+1}}(t)\|u_t\|_{m+1}^m \\ &\le G^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(t)\Big[\delta_1 S(t) + C_{\delta_1}R_1^{\frac{m+1}{m}}\|u_t\|_{m+1}^{m+1}\Big] \\ &\le \delta_1 G^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(t)S(t) + C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}G'(t)G^{-a}(t)G^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(t) \\ &\le \delta_1 G^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0)S(t) + C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}G'(t)G^{-a}(t)G^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0), \qquad (3.24)\end{aligned}$$

其中 $a > 0$ 满足 (3.8)，因此 $a + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1} < 0$。类似地，对于任意$\delta_2 > 0$，我们可以得到,

$$\int_\Gamma g_2(w_t)w d\Gamma \le \delta_2 G^{\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0)S(t) + C_{\delta_2}\frac{R_2^{\frac{r+1}{r}}}{\alpha}G'(t)G^{-a}(t)G^{a+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0), \qquad (3.25)$$

其中 $R_2 := \beta|\Gamma|^{\frac{q-r}{q+1}}\underline{\qquad}()(r+1)C_2^{-\frac{1}{q+1}}$。

将 (3.24) 和 (3.25) 代入 (3.22)，得到

$$\begin{aligned}N''(t) \ge{}& \frac{5}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}|w_t|_2^2 + 3G(t) + \Big[\lambda - \delta_1 G^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) - \delta_2 G^{\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0)\Big]S(t) \\ &- \left[C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}G^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) + C_{\delta_2}\frac{R_2^{\frac{r+1}{r}}}{\alpha}G^{a+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0)\right]G'(t)G^{-a}(t). \qquad (3.26)\end{aligned}$$

引入常数 $\delta_1 = \frac{\lambda}{4}G^{\frac{1}{m+1}-\frac{1}{p+1}}(0)$ 和 $\delta_2 = \frac{\lambda}{4}G^{\frac{1}{r+1}-\frac{1}{q+1}}(0)$。因此，由 (3.10) 和 (3.26) 可推得

$$\begin{aligned}Y'(t) \ge{}& \left[(1-a) - \varepsilon C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}G^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) - \varepsilon C_{\delta_2}\frac{R_2^{\frac{r+1}{r}}}{\alpha}G^{a+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0)\right]G'(t)G^{-a}(t) \\ &+ \frac{5}{2}\varepsilon\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon|w_t|_2^2 + 3\varepsilon G(t) + \frac{\lambda}{2}\varepsilon S(t). \qquad (3.27)\end{aligned}$$

注意到 $0 < a < \frac{1}{2}$，我们取 $0 < \varepsilon < 1$ 充分小，使得

$$\rho := (1-a) - \varepsilon C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}G^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) - \varepsilon C_{\delta_2}\frac{R_2^{\frac{r+1}{r}}}{\alpha}G^{a+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0) \ge 0,$$

由 (3.27) 得到

$$Y'(t) \ge \rho G'(t)G^{-a}(t) + \frac{5}{2}\varepsilon\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon|w_t|_2^2 + 3\varepsilon G(t) + \frac{\lambda}{2}\varepsilon S(t) > 0. \qquad (3.28)$$

这表明 $Y(t)$ 在 $[0,T)$ 上递增，其中

$$Y(t) = G^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t) > Y(0) = G^{1-a}(0) + \varepsilon N'(0).$$

如果 $N'(0) \geq 0$，那么我们无需对 ε 作任何进一步的条件限制。但是，如果 $N'(0) < 0$，我们还要取 ε，使得 $0 < \varepsilon \leq \sqrt[1-a]{G^{1-a}(0)\, 2N'(0)}$。无论如何，我们都有

$$Y(t) \geq \frac{1}{2} G^{1-a}(0) > 0, \quad \text{for } t \in [0, T). \tag{3.29}$$

最后，我们将证明下列不等式成立：

$$Y'(t) \geq C\varepsilon^{1+\sigma} Y^{\mu}(t), \quad \text{for } t \in [0, T), \tag{3.30}$$

其中，$C > 0$ 是一个与 ε无关的通用常数，并且

$$1 < \mu = \frac{1}{1-a} < 2, \quad \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\} > 0,$$

and

$$\sigma_1 = 1 - \frac{2}{(1-2a)(p+1)} > 0, \quad \sigma_2 = 1 - \frac{2}{(1-2a)(q+1)} > 0,$$

由 (3.8) 可知。

事实上，若 $N'(t) \leq 0$ 对于某个 $t \in [0, T)$成立，则对于该 t值，我们得到

$$Y^{\mu}(t) = [G^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t)]^{\mu} \leq G(t). \tag{3.31}$$

于是，由 (3.28) 和 (3.31) 可推得

$$Y'(t) \geq 3\varepsilon G(t) \geq 3\varepsilon^{1+\sigma} G(t) \geq 3\varepsilon^{1+\sigma} Y^{\mu}(t).$$

若 $N'(t) > 0$ 对于某个 $t \in [0, T)$，我们首先注意到 $Y(t) = G^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t) \leq G^{1-a}(t) + N'(t)$，那么

$$Y^{\mu}(t) \leq C\Big[G(t) + [N'(t)]^{\mu}\Big]. \tag{3.32}$$

应用 H¨older 不等式、杨氏不等式、迹定理，并利用 $1 < \mu < 2$，由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}
[N'(t)]^{\mu} &\leq \Big(\|u_t\|_2 \|u\|_2 + |w_t|_2 |w|_2 + |\gamma u|_2 |w|_2\Big)^{\mu} \\
&\leq C\Big(\|u_t\|_2^{\mu} \|u\|_2^{\mu} + |w_t|_2^{\mu} |w|_2^{\mu} + |\gamma u|_2^{\mu} |w|_2^{\mu}\Big) \\
&\leq C\Big(\|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p+1}^{\frac{2\mu}{2-\mu}} + |w_t|_2^2 + |w|_{q+1}^{\frac{2\mu}{2-\mu}} + \|\nabla u\|_2^2 + |w|_{q+1}^{\frac{2\mu}{2-\mu}}\Big).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

由于 $\mu = \frac{1}{1-a}$ 和 $\sigma_1 > 0$，可得

$$\frac{2\mu}{(2-\mu)(p+1)} - 1 = \frac{2}{(1-2a)(p+1)} - 1 = -\sigma_1 < 0. \tag{3.34}$$

注意到 $\varepsilon \leq G(0)$，由 (3.4)、(3.6) 和 (3.34) 可推得

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{p+1}^{\frac{2\mu}{2-\mu}} &= (\|u(t)\|_{p+1}^{p+1})^{\frac{2\mu}{(2-\mu)(p+1)}} \leq CS(t)^{\frac{2\mu}{(2-\mu)(p+1)}} \\
&\leq CS(t)^{\frac{2\mu}{(2-\mu)(p+1)} - 1} S(t) \leq CG^{-\sigma_1}(0) S(t) \leq C\varepsilon^{-\sigma_1} S(t).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

同理，我们有

$$|w(t)|_{q+1}^{\frac{2\mu}{2-\mu}} \leq C\varepsilon^{-\sigma_2} S(t). \tag{3.36}$$

回顾 $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\} > 0$ 和 $\varepsilon^{-\sigma} > 1$。将 (3.35) 和 (3.36) 代入 (3.33)，得到

$$\begin{aligned}[N'(t)]^{\mu} &\le C\Big(\|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon^{-\sigma} S(t)\Big) \\ &\le C\Big(\|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2 + S(t) + \varepsilon^{-\sigma} S(t)\Big) \\ &\le C\varepsilon^{-\sigma}\Big(\|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2 + S(t)\Big), \end{aligned} \tag{3.37}$$

这里用到了（3.7）。结合（3.28）、（3.32）和（3.37），我们推得:

$$\begin{aligned} Y'(t) &\ge C\varepsilon\Big[G(t) + \|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2 + S(t)\Big] \\ &\ge C\varepsilon\Big[G(t) + \varepsilon^{\sigma}[N'(t)]^{\mu}\Big] \\ &\ge C\varepsilon^{1+\sigma}\Big[G(t) + [N'(t)]^{\mu}\Big] \ge C\varepsilon^{1+\sigma} Y^{\mu}(t), \end{aligned}$$

fo对于所有满足 $N'(t) > 0$ 的 $t \in [0, T$ 值。无论如何，（3.30）都成立 e.

由（3.29）和（3.30）可知，最大寿命 T 必然是有限的，且

$$T < C\varepsilon^{-(1+\sigma)} Y^{-\frac{a}{1-a}}(0) \le C\varepsilon^{-(1+\sigma)} G^{-a}(0). \tag{3.38}$$

N注意，在爆破时刻 T，二次能量必定趋于无穷大 :

$$\limsup_{t \to T^-} E(t) = +\infty. \tag{3.39}$$

我们声称

$$\limsup_{t \to T^-} (\|\nabla u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2) = +\infty. \tag{3.40}$$

事实上，由 (3.1) 可知

$$E(t) = -G(t) + S(t) < S(t), \tag{3.41}$$

因为 $G(t) > 0$ 在 $[0, T)$ 上。由 (3.40)-(3.41) 可得

$$\limsup_{t \to T^-} S(t) = +\infty. \tag{3.42}$$

回忆注 2.12 中的 $p < 5$，则有

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2 \ge C(\|u\|_{p+1}^{p+1} + |w|_{q+1}^{q+1}) \ge CS(t),$$

结合 (3.42)，我们得到 (3.40)。证明完成。 □

4. Blow-up of solutions with positive initial energy

本节旨在证明定理 2.14 及其推论。这些结果表明，如果源项占主导地位、强于阻尼项，且初始总能量 $\mathcal{E}(0)$ 为正但足够小，而初始二次能量 $E(0)$ 足够大，那么系统 (1.1) 的弱解会在有限时间内爆破。基本思路源自势阱理论。

4.1. 定理 2.14 的证明。

定理 2.14 的证明。我们采用了 [13, 20, 24] 中的一些思路。我们将这类解 $(u(t)\ w(t))$ 的寿命 T 定义为所有满足以下条件的 $T^* > 0$ 的上确界：$(u(t)\ w(t))$ 在 $[0, T^*]$ 上按照定义 2.3 的意义是系统 (1.1) 的一个解。

利用 (2.7) 和 (2.19)，可得对于 $t \in [0, T)$，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= E(t) - \int_\Omega F(u)dx - \int_\Gamma H(w)d\Gamma \\ &\geq E(t) - M\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} - M|w(t)|_{q+1}^{q+1} \\ &\geq E(t) - MK_1\|\nabla u\|_2^{p+1} - MK_2|\Delta w|_2^{q+1} \\ &\geq E(t) - MK_1(2E(t))^{\frac{p+1}{2}} - MK_2(2E(t))^{\frac{q+1}{2}}, \quad \text{for all } t \in [0, T). \end{aligned} \tag{4.1}$$

定义函数 $F_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 为

$$F_1(y) := y - MK_1(2y)^{\frac{p+1}{2}} - MK_2(2y)^{\frac{q+1}{2}}, \tag{4.2}$$

其中，正常数 K_1、K_2 已在 (2.19) 中给出，$M > 0$ 则在 (2.7) 中引入。于是，(4.1) 等价于以下形式：

$$\mathcal{E}(t) \geq F_1(E(t)), \quad \forall\ t \in [0, T). \tag{4.3}$$

根据 p、$q > 1$，可知 $F_1(y)$ 连续可微、凹，且在 $y = y_0 > 0$ 处取得最大值，其中 y_0 满足

$$MK_1(p+1)(2y_0)^{\frac{p-1}{2}} + MK_2(q+1)(2y_0)^{\frac{q-1}{2}} = 1. \tag{4.4}$$

我们定义

$$\hat{d} := \sup_{[0,\infty)} F_1(y) = F_1(y_0) = y_0 - MK_1(2y_0)^{\frac{p+1}{2}} - MK_2(2y_0)^{\frac{q+1}{2}}. \tag{4.5}$$

由于函数 $F_1(y)$ 在 $y = y_0$ 处取得最大值，因此当 $\hat{} y > y_0$ 时，$F_1(y)$ 单调递减。又因为 $0 \leq \mathcal{E}(0) < d = F_1(y_0)$，所以存在一个唯一常数 y_1，使得

$$F_1(y_1) = \mathcal{E}(0), \quad \text{with } y_1 > y_0 > 0. \tag{4.6}$$

由此可由 (4.3) 得出

$$\hat{d} = F_1(y_0) > F_1(y_1) = \mathcal{E}(0) \geq \mathcal{E}(t) \geq F_1(E(t)), \quad \forall\ t \in [0, T). \tag{4.7}$$

注意，$F_1(y)$ 连续，并且当 $y > y_0$ 时单调递减；$E(t)$ 也连续。由于我们假设 $E(0) > y_0$，由 (4.7) 可推得

$$E(t) \geq y_1 > y_0, \quad \forall\ t \in [0, T). \tag{4.8}$$

与第 3 节一样，我们定义

$$N(t) := \frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_2^2 + |w(t)|_2^2\right) + \int_0^t \int_\Gamma \gamma u(\tau) \cdot w(\tau) d\Gamma d\tau,$$

and

$$S(t) := \int_\Omega F(u(t))dx + \int_\Gamma H(w(t))d\Gamma. \tag{4.9}$$

我们定义

$$\mathcal{G}(t) := A - \mathcal{E}(t), \tag{4.10}$$

其中，常数 A 已在 (2.22) 中引入。

由能量恒等式 (2.10)，我们知道 $\mathcal{E}'(t) \leq 0$，因此 $\mathcal{G}'(t) \geq 0$，即 $\mathcal{G}(t)$ 随时间非递减。由于我们假设 $\mathcal{E}(0) < A$，那么 $\mathcal{G}(0) := A - \mathcal{E}(0) > 0$。因此，我们有

$$\mathcal{G}(t) \geq \mathcal{G}(0) > 0, \quad \text{for all } t \in [0, T). \tag{4.11}$$

我们考虑函数

$$Y(t) := \mathcal{G}^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t), \tag{4.12}$$

对于满足 (3.8) 且满足 $\varepsilon > 0$ 的某个 $a \in (0, 1\,2)$。我们计划通过选取足够小的 ε，证明 $Y(t)$ 在有限时间内趋于无穷大。采用与 (3.10) 相同的论证，我们得到

$$Y'(t) = (1-a)\mathcal{G}^{-a}(t)\mathcal{G}'(t) + \varepsilon N''(t), \tag{4.13}$$

其中

$$\begin{aligned} N''(t) = \|u_t(t)\|_2^2 + |w_t(t)|_2^2 - (\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2) - \int_\Omega g_1(u_t(t))u(t)dx \\ - \int_\Gamma g_2(w_t(t))w(t)d\Gamma + \int_\Omega u(t)f(u(t))dx + \int_\Gamma w(t)h(w(t))d\Gamma \\ + 2\int_\Gamma \gamma u(t)\cdot w_t(t)d\Gamma, \quad \text{a.e. on } [0,T). \end{aligned} \tag{4.14}$$

沿用 (3.12)-(3.21) 中的相同估计，我们得到

$$\begin{aligned} N''(t) \geq \|u_t\|_2^2 - |w_t|_2^2 - \frac{3}{2}(\|\nabla u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2 + \|u\|_2^2) - \int_\Omega g_1(u_t)udx \\ - \int_\Gamma g_2(w_t)wd\Gamma + \int_\Omega uf(u)dx + \int_\Gamma wh(w)d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.15}$$

由于

$$\|\nabla u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2 + \|u\|_2^2 = 2A - \|u_t\|_2^2 - |w_t|_2^2 + 2S(t) - 2\mathcal{G}(t),$$

a并注意到 $uf(u) \geq c_1 F(u)$，$wh(w) \geq c_3 H(w)$，于是我们由 (4.15) 得出 t

$$N''(t) \geq \frac{5}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}|w_t|_2^2 - 3A + 3\mathcal{G}(t) + \lambda S(t) - \int_\Omega g_1(u_t)udx - \int_\Gamma g_2(w_t)wd\Gamma,$$

其中 $\lambda := \min\{c_1 - 3, c_3 - 3\} > 0$。由（4.9）、（4.10）和（2.9），我们有 e

$$S(t) = \mathcal{G}(t) - A + E(t).$$

Then

$$\begin{aligned} N''(t) \geq \frac{5}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}|w_t|_2^2 - \left(3 + \frac{\lambda}{2}\right)A + \left(3 + \frac{\lambda}{2}\right)\mathcal{G}(t) + \frac{\lambda}{2}E(t) + \frac{\lambda}{2}S(t) \\ - \int_\Omega g_1(u_t)udx - \int_\Gamma g_2(w_t)wd\Gamma, \quad \text{for } t \in [0,T). \end{aligned}$$

回顾（4.8）和（2.22），可得

$$\frac{\lambda}{4}E(t) > \frac{\lambda}{4}y_0 = \left(3+\frac{\lambda}{2}\right)A, \text{ for all } t \in [0,T).$$

由此可得

$$\begin{aligned} N''(t) \geq \frac{5}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}|w_t|_2^2 + \left(3+\frac{\lambda}{2}\right)\mathcal{G}(t) + \frac{\lambda}{4}E(t) + \frac{\lambda}{2}S(t) \\ - \int_\Omega g_1(u_t)u dx - \int_\Gamma g_2(w_t)w d\Gamma, \quad \text{for } t \in [0,T). \end{aligned} \tag{4.16}$$

回想 $\lambda = \min\{c_1-3, c_3-3\} > 0$，我们有 $A = \frac{\lambda}{12+2\lambda}y_0 < y_0$。于是，由 (4.8) 可得

$$\mathcal{G}(t) = A - \mathcal{E}(t) = A - E(t) + S(t) < y_0 - y_1 + S(t) < S(t), \tag{4.17}$$

对于 $t \in [0,T)$。此外，由 (4.10) 和能量不等式 (2.10) 可推得

$$\mathcal{G}'(t) = -\mathcal{E}'(t) = \int_\Omega g_1(u_t)u_t dx + \int_\Gamma g_2(w_t)w_t d\Gamma \geq \alpha\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \alpha|w_t|_{r+1}^{r+1} \geq 0, \tag{4.18}$$

对于所有 $t \in [0,T)$。然后，我们采用与 (3.24) 和 (3.25) 中相同的论证，由 (4.17)-(4.18) 得到

$$\int_\Omega g_1(u_t)u dx \leq \delta_1 \mathcal{G}^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0)S(t) + C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}\mathcal{G}'(t)\mathcal{G}^{-a}(t)\mathcal{G}^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0), \tag{4.19}$$

$$\int_\Gamma g_2(w_t)w d\Gamma \leq \delta_2 \mathcal{G}^{\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0)S(t) + C_{\delta_2}\frac{R_2^{\frac{r+1}{r}}}{\alpha}\mathcal{G}'(t)\mathcal{G}^{-a}(t)\mathcal{G}^{a+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0), \tag{4.20}$$

对于任意 $\delta_1, \delta_2 > 0$，其中常数 a 满足 (3.8)。

将 (4.16)、(4.19) 和 (4.20) 代入 (4.13)，得到

$$\begin{aligned} Y'(t) &= (1-a)\mathcal{G}^{-a}(t)\mathcal{G}'(t) + \varepsilon N''(t) \\ &\geq \left[(1-a) - \varepsilon C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}\mathcal{G}^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) - \varepsilon C_{\delta_2}\frac{R_2^{\frac{r+1}{r}}}{\alpha}\mathcal{G}^{a+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0)\right]\mathcal{G}^{-a}(t)\mathcal{G}'(t) \\ &\quad + \varepsilon\left[\frac{5}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}|w_t|_2^2 + \left(3+\frac{\lambda}{2}\right)\mathcal{G}(t) + \frac{\lambda}{4}E(t)\right] \\ &\quad + \varepsilon\left[\frac{\lambda}{2} - \delta_1\mathcal{G}^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) - \delta_2\mathcal{G}^{\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0)\right]S(t). \end{aligned} \tag{4.21}$$

此时，我们选取 $\delta_1, \delta_2 > 0$ 使得

$$\frac{\lambda}{2} - \delta_1\mathcal{G}^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) - \delta_2\mathcal{G}^{\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0) \geq \frac{\lambda}{4}.$$

对于这些固定的值 δ_1、$\delta_2 > 0$，我们选择 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得

$$(1-a) - \varepsilon C_{\delta_1}\frac{R_1^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha}\mathcal{G}^{a+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}(0) - \varepsilon C_{\delta_2}\frac{R_2^{\frac{r+1}{r}}}{\alpha}\mathcal{G}^{a+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{r+1}}(0) \geq \frac{1}{2}(1-a).$$

于是，由 (4.21) 得到

$$Y'(t) \geq \varepsilon \left[\frac{5}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}|w_t|_2^2 + \left(3 + \frac{\lambda}{2}\right)\mathcal{G}(t) + \frac{\lambda}{4}E(t) \right] + \frac{\lambda}{4}\varepsilon S(t) > 0, \tag{4.22}$$

对所有 $t \in [0, T)$。因此， $Y(t)$ 在 $[0, T)$ 上递增，其中

$$Y(t) = \mathcal{G}^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t) > Y(0) = \mathcal{G}^{1-a}(0) + \varepsilon N'(0).$$

类似于 (3.29)，可以将 ε 取得充分小，使得

$$Y(t) \geq \frac{1}{2}\mathcal{G}^{1-a}(0) > 0, \quad \text{for } t \in [0, T). \tag{4.23}$$

现在，我们断言

$$Y'(t) \geq C\varepsilon^{1+\sigma} Y^{\mu}(t), \quad \text{for } t \in [0, T), \tag{4.24}$$

其中 $\mu := \frac{1}{1-a_2} \in (1,2)$，且 σ :max=，满足 $\{\sigma_1, \sigma_2\} > 0$ $(1-2a)(p+1) > 0$ 以及 $\sigma_2 = 1 - \frac{}{(1-2a)(q+1)} > 0$。通过结合 (4.23) 求解微分不等式 (4.24)，我们推得最大寿命 T 必然有限，且

$$T < C\varepsilon^{-(1+\sigma)} Y^{-\frac{a}{1-a}}(0) \leq C\varepsilon^{-(1+\sigma)}\mathcal{G}^{-a}(0).$$

为证明 (4.24)，我们采用如下论证。若对某个 $t \in [0, T)$ 有 $N'(t) \leq 0$，则对于该 t 的取值，我们得到

$$Y^{\mu}(t) = [\mathcal{G}^{1-a}(t) + \varepsilon N'(t)]^{\mu} \leq \mathcal{G}(t). \tag{4.25}$$

由此我们根据 (4.22) 和 (4.25) 推得

$$Y'(t) \geq 3\varepsilon\mathcal{G}(t) \geq 3\varepsilon^{1+\sigma}\mathcal{G}(t) \geq 3\varepsilon^{1+\sigma} Y^{\mu}(t),$$

对于任意满足 $N'(t) \leq 0$ 的 t 值，

若对于某个 $t \in [0, T, \quad N'(t) > 0$，则

$$Y^{\mu}(t) \leq C\Big[\mathcal{G}(t) + [N'(t)]^{\mu}\Big]. \tag{4.26}$$

由 (4.17) 和 (4.11) 可知， $S(t) > \mathcal{G}(t) \geq \mathcal{G}(0) > 0$。令 $\varepsilon \leq \mathcal{G}(0)$。接着，依照估计 (3.33)–(3.36)，我们可以推出

$$[N'(t)]^{\mu} \leq C(\|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varepsilon^{-\sigma} S(t)) \leq C\varepsilon^{-\sigma}(E(t) + S(t)). \tag{4.27}$$

结合 (4.22)、(4.27) 和 (4.26)，我们得到

$$\begin{aligned} Y'(t) &\geq C\varepsilon\Big[\|u_t\|_2^2 + |w_t|_2^2 + \mathcal{G}(t) + E(t) + S(t)\Big] \\ &\geq C\varepsilon\Big[\mathcal{G}(t) + \varepsilon^{\sigma}[N'(t)]^{\mu}\Big] \geq C\varepsilon^{1+\sigma}\Big[\mathcal{G}(t) + [N'(t)]^{\mu}\Big] \geq C\varepsilon^{1+\sigma} Y^{\mu}(t), \end{aligned}$$

对于任意满足 $N'(t) > 0$ 的 t 值。因此，我们得出 (4.24) 对所有 $t \in [0, T$ 的取值均成立。

最后，采用与第 3 节相同的论证，我们得出 $\limsup_{t \to T^-}(\|\nabla u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2) = +\infty$。证明至此完成。□

4.2. 推论 2.15 的证明。推论 2.15 指出，如果源项超过阻尼项，且初始总能量 $\mathcal{E}(0)$ 为正但足够小，并且初始数据来自 $\mathcal{W}_2$，即势阱的不稳定部分，那么系统 (1.1) 的弱解将在有限时间内爆破。

推论 2.15 的证明。只需证明，若 $(u_0, w_0) \in \mathcal{W}_2$，则 $E(0) > y_0$。由于 $(u_0, w_0) \in \mathcal{W}_2$，根据 $\mathcal{W}_2$ 的定义可得

$$\|\nabla u_0\|_2^2 + |\Delta w_0|_2^2 + \|u_0\|_2^2 < (p+1)\int_\Omega F(u_0)dx + (q+1)\int_\Gamma H(w_0)d\Gamma,$$

结合 (2.7)，可推出

$$\|\nabla u_0\|_2^2 + |\Delta w_0|_2^2 + \|u_0\|_2^2 < M(p+1)\|u_0\|_{p+1}^{p+1} + M(q+1)|w_0|_{q+1}^{q+1}. \tag{4.28}$$

令 $X := H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H_0^2(\Gamma)$，并回顾 (2.19) 中 K_1, K_2 的定义。由 (4.28) 可得

$$\begin{aligned}\|(u_0, w_0)\|_X^2 &< M(p+1)K_1\|\nabla u_0\|_2^{p+1} + M(q+1)K_2|w_0|_2^{q+1} \\ &\le M(p+1)K_1\|(u_0, w_0)\|_X^{p+1} + M(q+1)K_2\|(u_0, w_0)\|_X^{q+1}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

将 (4.29) 两边除以 $\|(u_0, w_0)\|_X^2$，得到

$$M(p+1)K_1\|(u_0, w_0)\|_X^{p-1} + M(q+1)K_2\|(u_0, w_0)\|_X^{q-1} > 1.$$

结合 (2.18)，可得

$$\begin{aligned}&MK_1(p+1)\left(\|(u_0, w_0)\|_X^2\right)^{\frac{p-1}{2}} + MK_2(q+1)\left(\|(u_0, w_0)\|_X^2\right)^{\frac{q-1}{2}} \\ &\quad > 1 = MK_1(p+1)(2y_0)^{\frac{p-1}{2}} + MK_2(q+1)(2y_0)^{\frac{q-1}{2}}.\end{aligned}$$

由于 $p, q > 1$，因此我们有

$$\|(u_0, w_0)\|_X^2 > 2y_0, \tag{4.30}$$

这意味着 $E(0) > y_0$。然后，利用定理 2.14，我们得到弱解在有限时间内爆破。□

5. Appendix

5.1. 引理 2.8 的证明。

引理 2.8 的证明。根据能量等式 (2.10) 和 (2.12)，我们有

$$\mathcal{J}(u, w) \le \mathcal{E}(t) \le \mathcal{E}(0) < d, \quad \text{for } t \in [0, T). \tag{5.1}$$

于是 $(u(t)\ w(t)) \in \mathcal{W}$。为了证明 $(u(t)\ w(t)) \in \mathcal{W}_2$，我们采用反证法。假设存在 $t_1 \in (0, T)$ 使得 $(u(t_1)\ w(t_1)) \notin \mathcal{W}_2$。回想 $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}$和$\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$，于是我们得到 $(u(t_1)\ w(t_1)) \in \mathcal{W}_1$。

由 (2.8) 和中值定理可得，对于任意 $t_0 \in [0, T)$，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |F(u(t)) - F(u(t_0))|dx &\le C\int_\Omega (|u(t)|^p + |u(t_0)|^p)|u(t) - u(t_0)|dx \\ &\le C(\|u(t)\|_{p+1}^p + \|u(t_0)\|_{p+1}^p)\|u(t) - u(t_0)\|_{p+1}.\end{aligned}$$

注意到 $p \le 5$, 并利用嵌入 $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ 以及弱解 $u \in C([0,T); H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ 的正则性, 我们得出 $\int_\Omega F(u(t))dx \to \int_\Omega F(u(t_0))dx$ 当 $t \to t_0$ 时成立, 这意味着函数 $t \mapsto \int_\Omega F(u(t))dx$ 在 $[0,T)$ 上连续。类似地, 可得函数 $t \mapsto \int_\Gamma H(w(t))d\Gamma$ 在 $[0,T)$ 上连续。

由于 $(u(0)\ w(0)) \in \mathcal{W}_2$ 且 $(u(t_1)\ w(t_1)) \in \mathcal{W}_1$, 由连续性和介值定理可知, 存在 $s \in (0,t_1]$ 使得

$$\|\nabla u(s)\|_2^2 + |\Delta w(s)|_2^2 + \|u(s)\|_2^2 = (p+1)\int_\Omega F(u(s))dx + (q+1)\int_\Gamma H(w(s))d\Gamma. \quad (5.2)$$

定义 t^* 为满足（5.2）的 $s \in (0,t_1]$ 上的下确界点。则 $t^* \in (0,t_1]$ 且对于任意 $t \in [0,t^*)$, $(u(t)\ w(t)) \in \mathcal{W}_2$。下面分两种情况讨论:

情形 1. $(u(t^*)\ w(t^*)) \neq (0,0)$。由于（5.2）对 t^*成立, 因此 $(u(t^*)\ w(t^*)) \in \mathcal{N}$。由（2.15）可得 $\mathcal{J}(u(t^*)\ w(t^*)) \ge d$。由于对任意 $t \in [0,T)$, $\mathcal{E}(t) \ge \mathcal{J}(u(t)\ w(t))$, 故可得$\mathcal{E}(t^*) \ge d$。这与（5.1）矛盾。

情形 2。$(u(t^*)\ w(t^*)) = (0,0)$。注意, 对于任意 $t \in [0,t^*)$, 都有 $(u(t)\ w(t)) \in \mathcal{W}_2$。由 (2.7) 可得, 对于任意 $t \in [0,t^*)$,

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 + |\Delta w(t)|_2^2 + \|u(t)\|_2^2 \le C(\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} + |w(t)|_{q+1}^{q+1}) \le C(\|\nabla u(t)\|_2^{p+1} + |\Delta w(t)|_2^{q+1}),$$

这意味着

$$\|(u(t),w(t))\|_X^2 < C(\|(u(t),w(t))\|_X^{p+1} + \|(u(t),w(t))\|_X^{q+1}), \quad t \in [0,t^*),$$

其中 $X = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^2_0(\Gamma)$。于是, 对于任意 $t \in [0,t^*)$, 我们有

$$\|(u(t),w(t))\|_X^{p-1} + \|(u(t),w(t))\|_X^{q-1} > \frac{1}{C}.$$

这就得到, 对于任意 $t \in [0,t^*)$, 有 $\|(u(t)\ w(t))\|_X > s_0$, 其中 $s_0 > 0$ 是 $s^{p-1} + s^{q-1} = \frac{1}{C}$ 的唯一正解, 其中 $p,q > 1$。由弱解 $(u(t)\ w(t))$ 的连续性可知, $\|(u(t^*)\ w(t^*))\|_X \ge s_0 > 0$。这与 $(u(t^*)\ w(t^*)) = (0,0)$ 矛盾。因此, 对于所有 $t \in [0,T)$, 都有 $(u(t)\ w(t)) \in \mathcal{W}_2$。□

5.2. 不等式 (2.21) 的证明。

ˆ (2.21) 的证明。我们证明 $0 < d \le d$。事实上, 利用 (2.20) 和 (2.18), 可得

$$\begin{aligned}
\hat{d} &= y_0 - MK_1(2y_0)^{\frac{p+1}{2}} - MK_2(2y_0)^{\frac{q+1}{2}} \\
&= y_0 - \frac{2y_0}{p+1}\cdot MK_1(p+1)(2y_0)^{\frac{p-1}{2}} - \frac{2y_0}{q+1}\cdot MK_2(q+1)(2y_0)^{\frac{q-1}{2}} \\
&\ge y_0 - \max\left\{\frac{2y_0}{p+1}, \frac{2y_0}{q+1}\right\}\left[MK_1(p+1)(2y_0)^{\frac{p-1}{2}} + MK_2(q+1)(2y_0)^{\frac{q-1}{2}}\right] \\
&= y_0 - \max\left\{\frac{2y_0}{p+1}, \frac{2y_0}{q+1}\right\} = y_0 \cdot \min\left\{\frac{p-1}{p+1}, \frac{q-1}{q+1}\right\},
\end{aligned}$$

ˆ, 利用事实 $p,q > 1$, 可推出 $d > 0$。

设 $X = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^2_0(\Gamma)$。由 (2.7)、(2.11) 和 (2.19) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u,w) &\geq \frac{1}{2}(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2) - M(\|u\|_{p+1}^{p+1} + |w|_{q+1}^{q+1}) \\ &\geq \frac{1}{2}(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + |\Delta w|_2^2) - MK_1\|\nabla u\|_2^{p+1} - MK_2|\Delta w|_2^{q+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\|(u,w)\|_X^2 - MK_1\|(u,w)\|_X^{p+1} - MK_2\|(u,w)\|_X^{q+1} \\ &:= \Lambda(\|(u,w)\|_X), \end{aligned} \tag{5.3}$$

with

$$\Lambda(y) = \frac{1}{2}y^2 - MK_1y^{p+1} - MK_2y^{q+1}.$$

由于 $p,\ q > 1$，因此

$$\Lambda'(y) = y[1 - MK_1(p+1)y^{p-1} - MK_2(q+1)y^{q-1}],$$

在 y^* 处仅有一个正零点，其中 y^* 满足

$$MK_1(p+1)(y^*)^{p-1} + MK_2(q+1)(y^*)^{q-1} = 1. \tag{5.4}$$

容易验证，$\Lambda(y)$ 在 $y = y^*$ 处取得最大值，即

$$\Lambda(y^*) = \sup_{[0,\infty)} \Lambda(y) = \frac{1}{2}(y^*)^2 - MK_1(y^*)^{p+1} - MK_2(y^*)^{q+1}.$$

由 (2.18) 和 (5.4) 可得 $(y^*)^2 = 2y_0$。因此，

$$\Lambda(y^*) = y_0 - MK_1(2y_0)^{\frac{p+1}{2}} - MK_2(2y_0)^{\frac{q+1}{2}} = \hat{d}. \tag{5.5}$$

由 (5.3) 得到

$$\mathcal{J}(\lambda(u,w)) \geq \Lambda(\lambda\|(u,w)\|_X), \text{ for all } \lambda \geq 0.$$

由此可得

$$\sup_{\lambda\geq 0} \mathcal{J}(\lambda(u,w)) \geq \Lambda(y^*).$$

于是由 (2.15) 和 (5.5) 可推得

$$d = \inf_{(u,w)\in X\setminus(0,0)} \sup_{\lambda\geq 0} \mathcal{J}(\lambda(u,w)) \geq \Lambda(y^*) = \hat{d}.$$

ˆ这表明 d 不大于势阱的深度 d。 □

References

[1] C. O. Alves、M. M. Cavalcanti、V. N. Domingos Cavalcanti、M. A. Rammaha 和 D. Toundykov. 关于具有阻尼项和源项的非线性波动方程组解的存在性、一致衰减率与爆破. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2(3):583–608, 2009. [2] G. Avalos. 具有点控制的结构声学模型的适定性. 载于 *Differential geometric methods in the control of partial differential equations (Boulder, CO, 1999)* 268 ,

Contemp. 卷，第 – 页. Amer. *Math.* 1 22 2000 Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，. [3] G. Avalos 和 I. Lasiecka. 具有非线性耗散的结构声学模型解的一致衰减率. *Appl. Math. Comput. Sci.*, 8(2):287–312, 1998. [4] G. Avalos 和 I. Lasiecka. 结构声学相互作用的精确能控性.

J. Math. Pures Appl. , ( ): – .

(9) 82 8 1047 1073, 2003

[5] G. Avalos 和 I. Lasiecka. 边界控制与局部控制作用下声波/板相互作用有限能量状态的精确能控性. *Adv. Differential Equations*, 10 930, 2005 8 901( ): – .[6] J. T. Beale. 声学边界条件的谱性质. *Indiana Univ. Math. J.*, 25(9):895– 917, 1976.[7] A. R. Becklin 和 M. A. Rammaha. 具有超临界源项和阻尼项的结构声学模型的Hadamard适定性. *Evol. Equ. Control Theory*, 10(4):797–836, 2021. [8] L. Bociu 和 I. Lasiecka. 具有非线性边界源项、内部源项和阻尼的半线性波动方程弱解的爆破. *Appl. Math. (Warsaw)*, 35(3):281–304, 2008. [9] L. Bociu 和 I. Lasiecka. 具有超临界边界/内部源项和阻尼的半线性波动方程弱解的唯一性. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 22(4):835–860, 2008. [10] L. Bociu 和 I. Lasiecka. 具有超临界源项和阻尼的非线性波动方程的局部Hadamard适定性. *J. Differential Equations*, 249(3):654–683, 2010. [11] J. Cagnol、I. Lasiecka、C. Lebiedzik 和 J.-P. Zol´esio. 柔性曲壁结构声学模型的一致稳定性. *J. Differential Equations*, 186(1):88–121, 2002. [12] B. Feng、Y. Guo 和 M. A. Rammaha. 结构声学模型解的渐近行为. *arXiv:2202.09656v1*, 2022. [13] V. Georgiev 和 G. Todorova. 具有非线性阻尼项和源项的波动方程解的存在性. *J. Differential Equations*, 109(2):295–308, 1994. [14] M. Grobbelaar-Van Dalsen. 以 Reissner-Mindlin 板或Timoshenko梁为界面的结构声学模型. *J. Math. Anal. Appl.*, 320(1):121–144, 2006. [15] M. Grobbelaar-Van Dalsen. 纳入结构部件剪切效应和热效应的结构声学模型. *J. Math. Anal. Appl.*, 341(2):1253–1270, 2008. [16] Y. Guo. 具有超临界源项和阻尼项的非线性波动方程的整体适定性. *J. Math. Anal. Appl.*, 477(2):1087–1113, 2019. [17] Y. Guo 和 M. A. Rammaha. 非线性波动方程组解的爆破与超临界源项. *Appl. Anal.*, 92(6):1101–1115, 2013. [18] Y. Guo 和 M. A. Rammaha. 具有阻尼和超临界源项的波动方程组的整体存在性与能量衰减. *Z. Angew. Math. Phys.*, 64(3):621–658, 2013. [19] Y. Guo 和 M. A. Rammaha. 具有阻尼、超临界边界源项和内部源项的非线性波动方程组. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366(5):2265–2325, 2014. [20] Y. Guo、M. A. Rammaha 和 S. Sakuntasathien. 具有超临界非线性项的黏弹性双曲方程的爆破. *J. Differential Equations*, 262(3):1956–1979, 2017. [21] M. S. Howe. *Acoustics of fluid-structure interactions*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press，剑桥，1998. [22] I. Lasiecka.

3 *J. Math. Pures Appl.* 维结 *(9)* 78 2 203 232, 1999

构声学模型的边界稳定化. , ( ): – . [23] I. Lasiecka.

Mathematical control theory of coupled PDEs 75 *CBMS-NSF Regional Conference* , . *Series in Applied Mathematics*

卷. 工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，2002. [24] E. Vitillaro. 一类含耗散演化方程的整体不存在性定理.

Arch. , ( ): –

Ration. Mech. Anal. 149 2 155 182, 1999

.

Department of Mathematics Southwestern University of Finance and Economics Chengdu , 611130 P. R. China

, ,*Email address*: bwfeng@swufe.edu.cn

Department of Mathematics and Statistics, Florida International University, Miami FL33199, USA*Email address*: yanguo@fiu.edu

Department of Mathematics, University of Nebraska–Lincoln, Lincoln, NE 68588-0130, USA*Email address*: mrammaha1@unl.edu