arXiv:2301.00492v1 [math.AP] 2 Jan 2023

具有无界时间可测系数的完全退化二阶演化方程的加权 $L_q(L_p)$ 理论

ILDOO KIM

ABSTRACT. 我们研究具有零初始数据的完全退化二阶演化方程

$$u_t = a^{ij}(t)u_{x^ix^j} + b^i(t)u_{x^i} + c(t)u + f, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \tag{0.1}$$

其中 $a^{ij}(t)$、 $b^i(t)$、 $c(t)$ 均为局部可积函数，且 $(a^{ij}(t))_{d\times d}$ 是一个最小特征值为 $\delta(t) \geq 0$ 的半正定对称矩阵。我们证明存在正常数 N，使得

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u| + |u_{xx}|)^p \, dx \right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))\delta(t)dt$$
$$\leq N \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p \, dx \right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))(\delta(t))^{1-q} dt, \tag{0.2}$$

其中 p、 $q \in (1,\infty)$、 $\alpha(t) = \int_0^t \delta(s)ds$，且 w 是一个 Muckenhoupt 权。

1. INTRODUCTION

毋庸置疑，具有退化系数或无界系数的二阶偏微分方程长期以来得到了广泛研究。据我们所知，这项研究始于 Keldysh、Fichera 和 Oleˇınik 的工作（例如参见 [23, 10, 37, 38, 39]）。此外，在 Calder $L_p$on 和 Zygmund 的工作之后，人们开始广泛研究调和分析、傅里叶分析和偏微分方程中的（最大正则性） $L_q(L_p)$-理论及其推广。关于这些´-理论及其推广的历史研究和背景，我们推荐参阅一些优秀著作 L_p。如今，有大量论文从不同角度研究退化系数和无界系数。对于近期从不同角度开展的研究，我们仅推荐读者参阅 [31, 32, 42, 18, 19, 21, 22] [26, 11, 9, 35, 12, 17, 33, 16, 15, 27, 34, 40, 2, 36, 1, 6, 14, 20, 7,。这些结果研究了 Sobolev 空间中具有退化系数或无界系数的方程。

由于方程存在退化，除非在估计中引入权重，否则很难指望获得解的完整正则性估计。例如，取主系数 $a^{ij}(t) = 0$，对所有 i, j, t，我们可以看出，不可能

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35K65，35B65，35K15。*Key words and phrases.* 退化二阶抛物型方程，加权 L_p估计，零初值问题。I. Kim 获得了由韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目支持（编号：NRF-2020R1A2C1A01003959）。

获得无权的最大 L_p-正则性

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |u_{xx}(t,x)|^p dtdx \leq N \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p dtdx. \tag{1.1}$$

因此，权重通常用于控制系数的退化或无界性（奇异性）。然而，文献中的大多数结果都关注区域边界附近的退化或奇异性。若考虑全空间，由于 $u_t = f$这类极端情形（可将其理解为系数满足0.1中的一个方程，其中系数为 $a^{ij}(t) = 0$ 对所有 t均成立），通常自然不会期待解具有正则性增益。因此，对于全空间中具有退化性的二阶方程的可解性，人们过去通常只证明弱解的存在性和唯一性，而不考虑方程带来的正则性增益。

尽管如此，我们仍有办法用一个权重来表示解 L_p的二阶导数的 u 范数，即使该权重在全空间中也可能是奇异的。例如，假设退化发生在时间区间（a，b）上，则 $\delta(t) = 0$对所有 $t \in (a, b)$均成立。此时，我们无法期待扩散方程带来平滑增益，且 u_{xx} Sobolev二阶导数并不存在。然而，由于（ $\delta(t)$中第一行含有权重，因此若将（0.2）的第二行理解为反常积分，该不等式仍然成立。据我们所知，这类估计最早由作者及其合作者在 [24, 25]中提出。本文在估计中加入 Muckenhoupt 权，并将L_p估计推广为带低阶项的 $L_q(L_p)$ 估计。

众所周知，概率方法在处理无界且具有退化性的首项系数时非常有效（参见 [29, 4]）。我们要指出，概率工具对于得到本文的结果发挥了非常重要的作用。特别是，为了得到（0.2），需要理解常数 N、退化性与系数无界性 $a^{ij}(t)$ 之间的关系。诸如（1.1）这样的最大 L_p-正则性估计最初源自奇异积分算子的 L_p-有界性。然而，由于各参数以复杂的方式结合在一起以控制算子的奇异性，难以从奇异积分理论中确定与系数相关参数之间的确切关系。我们发现，通过应用解的概率表示，这种关系可以更加明晰（见定理 4.3）。

我们相信，我们的结果能够为具有空间依赖系数的退化二阶方程或区域问题带来各种有趣的加权估计。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们介绍主要结果。第 u3 节给出了概率解的表示及其在估计带一般权重的解 中的应用。第 4 节展示了非退化方程的加权估计。最后，第 5 节给出了主要定理的证明。

我们以本文中使用的记号结束引言。

- 本文始终采用爱因斯坦求和约定。

• $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示自然数系和整数系。按照惯例，R^d 表示点所构成的欧几里得空间

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix}.$$

通常，向量 x 的坐标以行向量形式表示，即 $x = (x^1, \ldots, x^d)$。我们用记号 $(a^{ij})_{d\times d}$ 表示一个 $d\times d$ 矩阵，其第 i 行、第 j 列的元素为 a^{ij}。对于 $i = 1, ..., d$、多重指标 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$、$\alpha_i \in \{0, 1, 2, ...\}$ 以及函数 $u(x)$，我们定义

$$u_{x^i} = \frac{\partial u}{\partial x^i} = D_i u, \quad D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot D_d^{\alpha_d} u.$$

• $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的无穷次可微函数空间。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 是由 $\mathbb{R}^d$ 上无穷次可微且快速衰减的函数构成的施瓦茨空间。用 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 表示 $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 中具有紧支集的子空间。

• 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ 以及赋范空间 F，我们用 $C(\mathcal{O}; F)$ 表示定义在 $\mathcal{O}$ 上、取值于 F 的所有连续函数 u 构成的空间，并满足 $|u|_C := \sup_{x\in O} |u(x)|_F < \infty$。

• 对于 $p \in [1, \infty)$、赋范空间 F 和测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$，我们用 $L_p(X, \mathcal{M}, \mu; F)$ 表示所有 F 值的 $\mathcal{M}^\mu$ 可测函数 u 所构成的空间，使得

$$\|u\|_{L_p(X,\mathcal{M},\mu;F)} := \left(\int_X \|u(x)\|_F^p \, \mu(dx) \right)^{1/p} < \infty,$$

其中 $\mathcal{M}^\mu$ 表示关于测度 μ 对 $\mathcal{M}$ 的完备化。如果给定的测度和 σ 代数不会引起混淆，我们通常将它们省略。

• 对于可测集 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$，$|\mathcal{O}|$ 表示 $\mathcal{O}$ 的勒贝格测度。

• 我们分别用 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示 d 维傅里叶变换和逆傅里叶变换。也就是说，$\mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbf{R}_d} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx$ 以及 $\mathcal{F}^{-1}[f](x) := {}^1_{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}_d} e^{i\xi\cdot x} f(\xi) d\xi$。

• 如果存在正常数 N 使得 $a \le Nb$，我们就记作 $a \lesssim b$。常数 N 可能在不同位置发生变化，即使在同一行中也是如此。如果我们写作 $N = N(a, b, \cdots)$，这表示常数 N 仅依赖于 $a, b, \cdots$。常数 N 的依赖关系通常会在定理、引理和推论的陈述中说明。

2. 设置与主要结果

全文中，我们固定 $d \in \mathbb{N}$ 表示空间变量的维数；除非另有特别说明，所有函数均为实值函数。我们研究以下退化二阶演化方程

$$\begin{aligned} &u_t(t,x) = a^{ij}(t) u_{x^i x^j}(t,x) + b^i(t) u_{x^i}(t,x) + c(t) u(t,x) + f(t,x), \\ &u(0,x) = 0, \qquad\qquad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们强调，系数 $a^{ij}(t)$、 $b^i(t)$和 $c(t)$不满足任何正则性条件。更重要的是，系数 $a^{ij}(t)$、 $b^i(t)$和 $c(t)$可以无界且退化。以下给出系数$a^{ij}(t)$、 $b^i(t)$和 $c(t)$的更具体条件。

假设 2.1. (i) 假设存在一个可测映射 $\delta(t)$，其定义域为 $(0,\infty)$，值域为 $[0,\infty)$，使得

$$a^{ij}(t)\xi^i\xi^j \geq \delta(t)|\xi|^2 \quad \forall t \in [0,\infty) \text{ and } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) 假设系数 $a^{ij}(t)$、 $b^i(t)$ 和 $c(t)$ 均局部可积，即

$$\int_0^T \left(|a^{ij}(t)| + |b^i(t)| + |c(t)|\right) dt < \infty \qquad \forall T \in (0,\infty) \text{ and } \forall i,j. \tag{2.2}$$

对于 $T \in (0,\infty)$，若 u 是 $(0,T)$ 上的可测函数 $\times\, \mathbb{R}^d$，则称其为局部可积函数，当且仅当

$$\int_0^t \int_{|x|<c} |u(t,x)|dxdt < \infty \quad \forall t \in (0,T) \text{ and } \forall c > 0.$$

定义 2.2 (解)。 设 $T \in (0,\infty)$ 和 f 是 $(0,T) \times \mathbb{R}^d$上的局部可积函数。称局部可积函数 u 是方程 (2.1) 的一个解，如果对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}(u(t,\cdot),\varphi) = &\int_0^t \left(u(s,\cdot), a^{ij}(s)\varphi_{x^ix^j} + b^i(s)\varphi_{x^i} + c(s)\varphi\right) ds \\ &+ \int_0^t (f(s,\cdot),\varphi)\, ds \quad \forall t \in (0,T),\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $(u(t,\cdot)\ \varphi)$ 表示 $L_2(\mathbb{R}^d)$-内积，即

$$(u(t,\cdot),\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\varphi(x)dx.$$

注 2.3. 根据解的定义，显然

$$a^{ij}(t)u_{x^ix^j} = \frac{a^{ij}(t)+a^{ji}(t)}{2}u_{x^ix^j}.$$

因此，不失一般性，我们可以假设系数矩阵 $(a^{ij}(t))_{d\times d}$对所有 t均为非负对称矩阵。此外，假设 $\delta(t)$ 中的 2.1(i) 可以取为 $(a^{ij}(t))_{d\times d}$ 的最小特征值。

我们回顾 Muckenhoupt 权重的定义。

定义 2.4（Muckenhoupt 权）。对于 $q \in (1,\infty)$，令 $A_q(\mathbb{R})$ 表示所有满足以下条件的非负局部可积函数 w on $\mathbb{R}$ 的类:

$$[w]_{A_q(\mathbb{R})} := \sup_{-\infty<a<b<\infty} \left(\fint_{(a,b)} w(t)dt\right)\left(\fint_{(a,b)} w(t)^{-1/(q-1)}dt\right)^{q-1} < \infty,$$

其中

$$\fint_{(a,b)} w(t)dt = \frac{\int_a^b w(t)dt}{b-a}.$$

最后，我们给出主要结果。

定理 2.5。 设 $T\in(0,\infty)$, $p,q\in(1,\infty)$, 且 $w\in A_q(\mathbb{R})$。假设条件 2.1 成立。那么，对于任意定义在 f 上的 $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ 局部可积函数，存在唯一解 u 满足方程 (2.1)，使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,x)(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}\right]$$
$$\leq\left[\int_0^{\alpha(T)}w(t)^{-\frac{1}{q-1}}dt\right]^{q-1}\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}dt, \tag{2.4}$$

$$\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,x)(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))\delta(t)dt$$
$$\leq[w]_{A_q(\mathbb{R})}[\alpha(T)]^q\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}dt, \tag{2.5}$$

and

$$\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_{xx}(t,x)(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))\delta(t)dt$$
$$\leq N\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}dt, \tag{2.6}$$

其中 $\alpha(t)=\int_0^t\delta(s)ds$ 且 N 是一个仅依赖于 d、 p、 q 和$[w]_{A_q(\mathbb{R})}$的正常数。特别地，对于任意 $-1<\beta<q-1$,

$$\sup_{t\in[0,T]}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,x)(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}\right]$$
$$\leq\left[\frac{q-1}{q-1-\beta}\right]^{q-1}\left[\int_0^T\delta(t)dt\right]^{q-1-\beta}$$
$$\times\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}\left|\int_0^t\delta(s)ds\right|^{\beta}(\delta(t))^{1-q}dt, \tag{2.7}$$

$$\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,x)(t,x)|^p\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}\left|\int_0^t\delta(s)ds\right|^{\beta}\delta(t)dt$$
$$\leq[|t|^{\beta}]_{A_p(\mathbb{R})}\left[\int_0^T\delta(t)dt\right]^{q}$$
$$\times\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}\left|\int_0^t\delta(s)ds\right|^{\beta}(\delta(t))^{1-q}dt, \tag{2.8}$$

and

$$\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_{xx}(t,x)(t,x)|^p\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}\left|\int_0^t\delta(s)ds\right|^{\beta}\delta(t)dt$$
$$\leq N\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p\,dx\right)^{q/p}e^{-q\int_0^t c(s)ds}\left|\int_0^t\delta(s)ds\right|^{\beta}(\delta(t))^{1-q}dt, \tag{2.9}$$

其中 N 仅依赖于 d、 p、 q和 β。

定理2.5的证明见第5节。

注2.6。(i) 对于 $t \in [0,T]$ 使得 $\delta(t) = 0$，不能由（2.6）保证 Sobolev 导数 $u_{xx}(t,x)$ 的存在。此外， $\delta(t)$ 可能在一个具有正勒贝格测度的集合上为零，这与 Muckenhoupt 权相去甚远。

(ii) 由于 $\delta(t)$ 可能在一个具有正测度的集合上为零，因此该积分

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p \, dx \right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))(\delta(t))^{1-q} dt$$

按广义意义理解，即

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p \, dx \right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))(\delta(t))^{1-q} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p \, dx \right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t)+\varepsilon t)(\delta(t)+\varepsilon)^{1-q} dt. \quad (2.10)$$

(iii) 若

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(s,x)|^p dx \right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(s))|\delta(s)|^{1-q} ds < \infty,$$

那么，定理 f 中的局部可积条件2.5并非必要。换言之，有限性条件蕴含 f的局部可积性。为考察这一事实，令 $t \in (0,T)$，并令 $c > 0$。那么，对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$，应用 Hölder 不等式以及变量代换 $\alpha(t) + \varepsilon t \to t$，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{|x|<c} |f(t,x)| dx ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)| 1_{|x|<c} dx 1_{0<s<t} ds \\
&\le N \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p dx \right)^{1/p} 1_{0<s<t} ds \\
&\le N \left[\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(s,x)|^p dx \right)^{q/p} e^{-q\int_0^s c(\rho)d\rho} w(\alpha(s)+\varepsilon s)|\delta(s)+\varepsilon|^{1-q} ds \right]^{1/q} \\
&\quad \times \left[\int_0^t e^{\frac{q}{q-1}\int_0^s c(\rho)d\rho} w^{-\frac{1}{q-1}}(\alpha(s)+\varepsilon s)(\delta(s)+\varepsilon) ds \right]^{(q-1)/q} \\
&\le N \left[\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(s,x)|^p dx \right)^{q/p} w(\alpha(s)+\varepsilon s)|\delta(s)+\varepsilon|^{1-q} ds \right]^{1/q} \quad (2.11) \\
&\quad \times e^{\frac{q}{q-1}\int_0^t |c(s)|ds} \left[\int_0^{\alpha(t)+t} w^{-\frac{1}{q-1}}(s) ds \right]^{(q-1)/q}.
\end{aligned}$$

显然， $e^{\frac{q}{q-1}\int_0^t |c(s)|ds} < \infty$ 因为函数 $c(t)$ 是局部可积的。此外，由于 $w \in A_p(\mathbb{R})$， $\int^{\alpha(t)+t} w^{-\frac{1}{q-1}}(s) ds$ 是有限的。因此，在 $\varepsilon \to 0$ （2.11）中取 f，即可[0]（形式上）得到其局部可积性。

（iv）（2.4）和（2.5）即使对于 $p=1$ 或 $p=\infty$ （见推论 3.3）也成立。此外，利用 Muckenhoupt 权的定义，不难验证（2.4）比（2.5）给出了更强的估计，即（2.4）蕴含（2.5）。然而，利用解的概率表示，可以对（2.5）略作改进，因为一般而言，不能直接由（2.4）得到它。事实上，形式上利用（3.12）并取

$$h_1(t)=w(\alpha(t))\delta(t)$$

and

$$h_2(t)=w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q},$$

我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))\delta(t)dt\\ &\le \int_0^T \left[w(\alpha(t))\delta(t)\left[\int_0^t |w(\alpha(s))|\delta(s)|^{1-q}|^{-\frac{1}{q-1}}ds\right]^{q-1}\right.\\ &\qquad \left.\times \int_0^t \|f(s,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(s))|\delta(s)|^{1-q}ds\right]dt.\end{aligned}$$

(v) 显然，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_{xx}(t,x)(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))\delta(t)dt\\ &\le N\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}dt\end{aligned}$$

如果 $w_0(x)$ 有界且上下有界，则.....然而，如果 $w(x)$ 存在退化或奇异性（无界），那么我们认为在估计中无法加入 $w_0\in A_p(\mathbb{R}^d)$。换言之，一般来说，无法预期存在正常数 N 使得

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_{xx}(t,x)(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))\delta(t)dt\\ &\le N\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds} w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}dt. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

为证明这一点，假设2.12) 成立，且 $b(t)=c(t)=0$ 对所有 t均成立。则我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_{xx}(t,x)(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p} w(\alpha(t))\delta(t)dt\\ &\le N\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p} w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}dt. \qquad (2.13)\end{aligned}$$

那么，函数 $v(t,x)=u\left(t,x+\int_0^t b(s)ds\right)$成为

$$\begin{aligned}&v_t(t,x)=a^{ij}(t)v_{x^ix^j}(t,x)+b^i(t)v_{x^i}(t,x)+f\left(t,x+\int_0^t b(s)ds\right),\\ &v(0,x)=0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

因此，由（2.13）以及 $p=q=2$ 和 $\delta(t)=1$，可得

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v_{xx}(t,x)(t,x)|^2 w_0\left(x+\int_0^t b(s)ds\right) w(t)dxdt$$
$$\leq N\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^2 w_0\left(x+\int_0^t b(s)ds\right) w(t)dxdt.$$

注意到

$$(t,x)\mapsto w(t)w_0\left(x+\int_0^t b(s)ds\right)\notin A_2(\mathbb{R}^{d+1})$$

除非 $\int_0^t b(s)ds$ 对所有 t 都一致地为常向量，w 通常具有奇异性或退化。因此，若方程中存在非平凡系数 2.12，我们就不能期望得到 $b(t)$。此外，我们的主要工具是概率解表示，例如3.2。在主定理证明的许多部分中，我们利用该表示所具有的 L_p-范数的平移不变性。因此，即使在 $b(t)=0$ 对所有 t 成立的情形下，也无法用我们的方法得到2.12（见注 4.4）。

(vi) 定理 2.5 中各项估计的常数均不依赖于系数的积分 a^{ij}, b^i和 c。因此，对于固定时间 $T\in(0,\infty)$，系数的可积性条件（2.2）可以放宽为

$$\int_0^t \left(|a^{ij}(t)|+|b^i(t)|+|c(t)|\right)dt<\infty \qquad \forall t\in(0,T) \text{ and } \forall i,j.$$

3. Probabilistic solution representations

本节首先考虑不含低阶项的方程，即

$$u_t(t,x)=a^{ij}(t)u_{x^ix^j}(t,x)+f(t,x) \qquad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^d$$
$$u(0,x)=0. \tag{3.1}$$

设 B_t 是在满足通常条件的滤过概率空间 $(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ 上的布朗运动。众所周知，任意可预测函数 $\sigma(t):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$满足

$$\int_0^t |\sigma(s)|^2 ds<\infty \quad (a.s.) \quad \forall t\in[0,t],$$

Itˆo 积分

$$X_t=\int_0^t \sigma(s)dB_s$$

是良定义的，并且对随机过程 $f(X_t)$ 和光滑函数 f (参见 [30, 第 5]章)。此外，方程 (3.1 的解 u 可以由函数 f 与随机过程 X_t的复合的期望导出。下面给出更明确的表述。

定理 3.1. 设 $T\in(0,\infty)$，且 f 是 $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ 上的局部可积函数。假设函数 $t\in(0,\infty)\mapsto A(t):=\left(a^{ij}(t)\right)_{d\times d}$ 局部可积，即对每个 i 和 j,

$$\int_0^T a^{ij}(t)dt<\infty$$

且系数 $\left(a^{ij}(t)\right)_{d\times d}$ 非负，即

$$a^{ij}(t)\xi^i\xi^j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \ and \ \forall t \in (0,T].$$

于是，存在唯一解 u 满足 (3.1)，且该解 u 由下式给出

$$u(t,x) = \int_0^t \mathbb{E}\left[f(s, x + X_t - X_s)\right] ds, \tag{3.2}$$

其中

$$X_t := \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{A}^{ij}(s) dB_s^j,$$

且 $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ 是一个 d 维布朗运动（维纳过程），积分为 Itô 随机积分。此外，对于任意 $p \in [1,\infty]$，有

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_p} \leq \int_0^t \|f(s,\cdot)\|_{L_p} ds \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.3}$$

且对于定义在 $[0,T]$ 上的任意正函数（几乎处处） h_1 和 h_2，有

$$\begin{aligned}&\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q h_1(t) dt \\ &\leq \int_0^T \left[h_1(t)\left[\int_0^t |h_2(s)|^{-\frac{1}{q-1}} ds\right]^{q-1} \int_0^t \|f(s,\cdot)\|_{L_p}^q h_2(s) ds\right] dt.\end{aligned} \tag{3.4}$$

证明。第一部分。（唯一性）

尽管系数可能无界或退化，但利用经典傅里叶变换方法和 Gr¨onwall 不等式，可以轻松得到解的唯一性。为给出严谨的细节，取一个 φ，它是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上的非负函数，且积分为 1。对于 $\varepsilon \in (0,1)$，记

$$\varphi^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

设 u 是以下方程的一个解

$$\begin{aligned}u_t(t,x) &= a^{ij}(t) u_{x^i x^j}(t,x) + f(t,x)\\ u(0,x) &= 0\end{aligned}$$

并定义

$$u^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t,y)\varphi^\varepsilon(x-y) dy.$$

只需证明，对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$ 和 $t \in (0,T)$, $u(t,x) = 0$ 几乎处处成立 $x \ in \mathbb{R}^d$。固定 $\varepsilon \in (0,1)$, $t \in (0,T)$, 并取 $x \in \mathbb{R}^d$。回顾解的定义，并将 $\varphi^\varepsilon(x-\cdot)$ 代入（2.3），得到

$$u^\varepsilon(t,x) = \int_0^t a^{ij}(s)\left(u^\varepsilon\right)_{x^i x^j}(s,x) ds. \tag{3.5}$$

对每个 $\varepsilon \in (0,\ 1)$ 和 $t \in (0,\ T)$, (3.5) 对所有 $x \in \mathbb{R}^d$均成立。对 (d维 x) 中的 3.5关于 x 取傅里叶变换并取绝对值。于是有

$$\left|\mathcal{F}[u^\varepsilon(t,\cdot)](\xi)\right| \leq \int_0^t \left|a^{ij}(s)\xi^i\xi^j\right| \left|\left[\mathcal{F}[u^\varepsilon(s,\cdot)]\right](\xi)\right| ds \tag{3.6}$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$。注意，对每个 $\varepsilon \in (0,\ 1)$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^d$，(3.6) 对所有 $t \in (0,\ T)$ 均成立。因此，最后应用 Gr¨onwall 不等式，得到

$$|\mathcal{F}[u^\varepsilon(t,\cdot)](\xi)| = 0$$

对于所有的 $\varepsilon \in (0,1)$、 $t \in (0,T)$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^d$，从而完成了解 u 的唯一性证明。

第二部分。（存在性）

解 u 的存在性无法通过经典的傅里叶变换方法证明，因为系数可能退化。因此，我们采用概率方法来证明解的存在性。众所周知，若非齐次项 f 光滑（即使对于更一般的 f 在 L_p-类中）也是如此。然而，要找到一篇与我们的设定完全吻合的恰当参考文献并不容易（参见[25, 第 3]节），因此我们详细给出证明。我们主要使用的工具是伊藤公式和光滑逼近。证明分为三个步骤。

步骤1。（光滑情形）在此步骤中，我们假设对于每个 $t \in (0,T)$， $f(t,x)$ 关于 x 二次连续可微。

回忆一下，对于每个 t， $\left(a^{ij}(t)\right)_{d\times d}$ 都是半正定对称矩阵。因此，存在一个 $d \times d$ 矩阵 $\sqrt{A}(t)$，使得

$$A(t) = \sqrt{A}(t) \times \sqrt{A}^*(t),$$

其中， $\sqrt{A}^*$ 表示 $\sqrt{A}$的转置矩阵。回忆

$$X_t = \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{A}(s)dB_s.$$

我们断言，函数

$$u(t,x) := \int_0^t \mathbb{E}\left[f(s, x + X_t - X_s)\right] ds \tag{3.7}$$

成为方程（2.1）的一个解。正如前面所提到的，基于傅里叶变换等解析方法，很难证明 u（3.2）中定义的函数成为方程（2.1）的一个解，因为 a^{ij}（t）的退化会使 u 的傅里叶变换失去可积性。不过，仍然可以应用伊藤公式。固定$s \in$（0， T），并且 $x \in \mathbb{R}^d$。对

$$f\left(s, x + \sqrt{2}\int_s^t \sqrt{A}(r)dB_r\right).$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} f\left(s, x + \sqrt{2}\int_s^t \sqrt{A}(r)dB_r\right) &= f(s,x) + \int_s^t f_{x^i}\left(s, \int_s^\rho \sqrt{A}(r)dB_r\right) dB_\rho \\ &\quad + \int_s^t a^{ij}(\rho) f_{x^i x^j}\left(s, x + \sqrt{2}\int_s^\rho \sqrt{A}(r)dB_r\right) d\rho \end{aligned} \tag{3.8}$$

对所有 $s \le t < T\,(a.s)$。对（3.8）取期望，并利用 Itˆo 积分的性质

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t f_{x^i}\left(s, \int_s^\rho \sqrt{A}(r)dB_r\right) dB_\rho\right] = 0,$$

并回忆 X_t 的定义，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[f\left(s,x+X_t-X_s\right)\right]\\&=f(s,x)+\mathbb{E}\left[\int_s^t a^{ij}(\rho)f_{x^ix^j}\left(s,x+X_\rho-X_s\right)d\rho\right]\end{aligned}\tag{3.9}$$

对任意 $0<s\leq t<T$。对两边进行积分 $\int_0^t\cdot\,ds$，并对（3.9）应用 Fubini 定理，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\mathbb{E}\left[f\left(s,x+X_t-X_s\right)\right]ds\\&=\int_0^t f(s,x)ds+\int_0^t\mathbb{E}\left[\int_s^t a^{ij}(\rho)f_{x^ix^j}\left(s,x+X_\rho-X_s\right)d\rho\right]ds\\&=\int_0^t f(s,x)ds+\int_0^t a^{ij}(\rho)\int_0^\rho\mathbb{E}\left[f_{x^ix^j}\left(s,x+X_\rho-X_s\right)\right]dsd\rho.\end{aligned}$$

最后，由（ u 中的定义（3.7），可得

$$u_t(t,x)=a^{ij}(t)u_{x^ix^j}(t,x)+f(t,x)$$

对所有 $t\in(0,T)$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$。

步骤 2。（有界情形）在这一步中，我们假设 f 有界。

我们使用 Sobolev磨光子。对于 $\varepsilon\in(0,1)$，记

$$f^\varepsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-\varepsilon y)\varphi(y)dy,$$

and

$$u^\varepsilon(t,x)=\int_0^t\mathbb{E}\left[f^\varepsilon(s,x+X_t-X_s)\right]ds$$

对所有 $t\in(0,T)$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$。然后由步骤1中的结果可得

$$u_t^\varepsilon(t,x)=a^{ij}(t)u^\varepsilon_{x^ix^j}(t,x)+f^\varepsilon(t,x).$$

特别地，应用分部积分，对于任意 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$(u^\varepsilon(t,\cdot),\phi)=\int_0^t\left(u^\varepsilon(s,\cdot),a^{ij}(s)\phi_{x^ix^j}\right)ds+\int_0^t\left(f^\varepsilon(s,\cdot),\phi\right)ds\quad\forall t\in(0,T).$$

由于 f 有界，应用控制收敛定理可容易验证

$$u(t,x):=\int_0^t\mathbb{E}\left[f(s,x+X_t-X_s)\right]ds=\limsup_{\varepsilon\downarrow0}u^\varepsilon(t,x)\ (a.e.)$$

并且它成为方程（3.1）的一个解。

步骤3。（一般情形）

只需去掉 f 有界这一条件。由于方程 (3.1) 的线性以及平凡的分解 $f(t,x)=f^+(t,x)-f^-(t,x)$，我们可以假设 f 非负，其中 $f^+(t,x)=\frac{|f_{(t,\ x)}|+f(t,\ x)}{2}$ 且 $f^-(t,x)=$

~~$|f(t,x)|=f(t,x)2$~~。对于 $M>0$，定义 $f^M(t,x):=f(t,x)\wedge M:=\min\{f(t,x)\ M\}$ 并记作

$$u^M(t,x)=\int_0^t \mathbb{E}\left[f^M(s,x+X_t-X_s)\right]ds.$$

然后根据步骤 2 的结果，对任意 $M>0$，我们有

$$(u^M(t,\cdot),\phi)=\int_0^t \left(u^M(s,\cdot),a^{ij}(s)\phi_{x^ix^j}\right)ds+\int_0^t \left(f^M(s,\cdot),\phi\right)ds \quad \forall t\in(0,T). \tag{3.10}$$

显然，$u^M(t,x)\to u(t,x)$ 对所有 $t\in(0,T)$ 均成立，且当 $x\in\mathbb{R}^d$ 时，$M\to\infty$。最后，取 $M\to\infty$ 并将（3.10）中的单调收敛定理和控制收敛定理应用于此，可得 u 是（3.1）的一个解。

第三部分。（估计）

我们证明（3.3）和（3.4）。由（3.2）、广义闵可夫斯基不等式以及 L_p-空间的平移不变性，

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_p}\le\int_0^t\|f(s,\cdot)\|_{L_p}ds.$$

此外，应用 Hölder 不等式，我们有

$$\int_0^T\|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q h_1(t)dt\le\int_0^T h_1(t)\int_0^t\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^q h_2(s)ds\left[\int_0^t|h_2(s)|^{-\frac{1}{q-1}}ds\right]^{q-1}dt.$$

□

注 3.2. 假设

$$\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}dt<\infty.$$

那么，由于（3.3）以及（3.1）的线性性，可以很容易地找到一个 u 的连续修正，使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u(t,\cdot)\|_{L_p}\le\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}ds\quad\forall t\in[0,T].$$

推论 3.3。设 $T\in(0,\infty)$、$p\in[1,\infty]$和 $q\in(1,\infty)$。假设 *2.1* 成立。此外，假设 h_1和 h_2是定义在 $[0,T]$上的函数，且几乎处处为正。那么对于任意定义在 f上的局部可积函数 $(0,T)\times\mathbb{R}^d$，方程 u 存在唯一解 (2.1)，使得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left[\|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}\right]\\&\le\left[\int_0^T|h_2(t)|^{-\frac{1}{q-1}}dt\right]^{q-1}\int_0^T e^{-q\int_0^t c(s)ds}\|f(t,\cdot)\|_{L_p}^q h_2(t)dt.\end{aligned}\tag{3.11}$$

and

$$\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds} h_1(t)dt$$
$$\leq \int_0^T \left[h_1(t) \left[\int_0^t |h_2(s)|^{-\frac{1}{q-1}} ds \right]^{q-1} \int_0^t e^{-q\int_0^s c(\rho)d\rho} \|f(s,\cdot)\|_{L_p}^q h_2(s)ds \right] dt. \quad (3.12)$$

证明。设 v 是该方程的一个解

$$v_t(t,x) = a^{ij}(t)v_{x^ix^j}(t,x) + e^{-\int_0^t c(s)ds} f\left(t, x - \int_0^t b(s)ds\right),$$
$$v(0,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d.$$

定义 $U(t,x) = e^{\int_0^t c(s)ds} v\left(t, x + \int_0^t b(s)ds\right)$，其中 $b(t) = (b^1(t)\ldots, b^d(t))$。那么

$$\begin{aligned}
&U_t(t,x)\\
&= c(t)U(t,x) + e^{\int_0^t c(s)ds}\left(v_t\left(t, x+\int_0^t b(s)ds\right) + b^i(t)v_{x^i}\left(t, x+\int_0^t b(s)ds\right)\right)\\
&= c(t)U(t,x)\\
&\quad + e^{\int_0^t c(s)ds}\left(a^{ij}(t)v_{x^ix^j}\left(t, x+\int_0^t b(s)ds\right) + e^{-\int_0^t c(s)ds} f(t,x)\right)\\
&\quad + e^{\int_0^t c(s)ds}\left(b^i(t)v_{x^i}\left(t, x+\int_0^t b(s)ds\right)\right)\\
&= a^{ij}(t)U_{x^ix^j}(t,x) + b^i(t)U_{x^i}(t,x) + c(t)U(t,x) + f(t,x)
\end{aligned}$$

and

$$U(0,x) = 0.$$

因此，根据解的唯一性，方程 u （2.1）的解为

$$u(t,x) = e^{\int_0^t c(s)ds} v\left(t, x + \int_0^t b(s)ds\right)$$

显然

$$v(t,x) = e^{-\int_0^t c(s)ds} u\left(t, x - \int_0^t b(s)ds\right).$$

将（3.4）应用于 v，并利用 L_p-范数的平移不变性，得到（3.12）。此外，根据（3.3）和 H¨older 不等式，对于任意 $0 \leq t \leq T$，有

$$\begin{aligned}
&e^{-q\int_0^t c(s)ds}\|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q\\
&= \|v(t,\cdot)\|_{L_p}^q\\
&\leq \int_0^t e^{-q\int_0^s c(\rho)d\rho}\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^q h_2(s)ds \left[\int_0^t |h_2(s)|^{-\frac{1}{q-1}} ds\right]^{q-1}\\
&\leq \int_0^T e^{-q\int_0^t c(s)ds}\|f(t,\cdot)\|_{L_p}^q h_2(t)dt \left[\int_0^T |h_2(s)|^{-\frac{1}{q-1}} ds\right]^{q-1},
\end{aligned}$$

这显然意味着（3.11）。 □

4. Estimates for non-degenerate equations

本节首先回顾具有一致椭圆性和有界系数时的加权估计，并将这些估计应用于我们的模型方程（3.1）。我们记

$$\|f\|_{L_{p,q}(T,w)}=\left(\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p dx\right)^{q/p}w(t)dt\right)^{1/q}.$$

通常，$L_{p,\,q}(T,w)$ 表示 $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ 上所有满足 $\|f\|_{L_{p,\,q}(T,\,w)}<\infty$ 的局部可积函数 f 所构成的空间。

定理 4.1. 设 $T\in(0,\infty)$，$p,q\in(1,\infty)$ 和 $w\in A_q(\mathbb{R})$。假设系数 $a^{ij}(t)$ 一致有界且椭圆，即存在正常数 M 和 δ 使得

$$M|\xi|^2\geq a^{ij}(t)\xi^i\xi^j\geq\delta|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^d. \tag{4.1}$$

那么，对于任意 $f\in L_{p,\,q}(T,w)$，存在方程 u 的唯一解 (3.1) 使得

$$\left(\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_{xx}(t,x)|^p dx\right)^{q/p}w(t)dt\right)^{1/q}$$
$$\leq N\left(\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p dx\right)^{q/p}w(t)dt\right)^{1/q}, \tag{4.2}$$

其中

$$N=N\left(p,q,M,\delta,[w]_{A_q(\mathbb{R})}\right).$$

证明。这是一个众所周知的结果，结合一些经典结果即可轻易得到。然而，很难找到一篇论文直接涵盖这一结果。因此，我们参考了两篇近期论文 [5, 定理 2。2]，它们处理更一般的系数，以及 [3, 定理 2。14]，后者研究时间可测伪微分算子。 □

注 4.2。 定理 4.1 足以满足我们的应用需求。然而，如 [5,定理 2。2] 和 [3, 定理 2。14]所示，$w_0(x)\in A_p(\mathbb{R}^d)$ 在满足（4.2）的条件下，可以包含于（4.1）中。换言之，我们可以找到一个正常数 N 使得

$$\left(\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_{xx}(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p}w(t)dt\right)^{1/q}$$
$$\leq N\left(\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p w_0(x)dx\right)^{q/p}w(t)dt\right)^{1/q},$$

其中

$$N=N\left(p,q,M,\delta,[w]_{A_q(\mathbb{R})},[w_0]_{A_p(\mathbb{R}^d)}\right).$$

接下来，我们希望加强定理4.1。具体而言，我们证明 N在（4.2）中的常数与系数 M 的上界 $a^{ij}(t)$ 无关，并给出常数 N 与椭圆常数 δ之间更精确的关系。不过，似乎几乎不可能仅凭解析工具证明这一点。因此，我们回顾解的概率表示，以加强定理 4.1。

定理4.3。设 $T \in (0,\infty)$、 $p,q \in (1,\infty)$ 和 $w \in A_q(\mathbb{R})$。假设系数 $a^{ij}(t)$ 一致椭圆，即存在正常数 δ 使得

$$a^{ij}(t)\xi^i\xi^j \geq \delta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{4.3}$$

此外，我们假设系数 $a^{ij}(t)$ 局部可积，即

$$\int_0^t a^{ij}(s)ds < \infty \qquad \forall t \in (0,T).$$

那么，对于任意 $f \in L_{p,\,q}(T,\ w)$，存在唯一解 u 满足 (3.1) 且满足

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_{xx}(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt \leq \frac{N}{\delta^q}\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt, \tag{4.4}$$

其中

$$N = N\left(p,q,[w]_{A_q(\mathbb{R})}\right).$$

证明。（步骤1） $a^{ij}(t)u_{x^ix^j} = \delta\Delta u$。

对于这个简单情形，我们使用该方程的基本缩放性质。令 $v(t,x) = u(t,\sqrt{\delta}x)$。由于 u 是下列方程的解

$$u_t(t,x) = \delta\Delta u(t,x) + f(t,x)$$
$$u(0,x) = 0,$$

我们有

$$v_t(t,x) = \Delta v(t,x) + f(t,\sqrt{\delta}x)$$
$$v(0,x) = 0.$$

因此，应用（4.2），我们有

$$\left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v_{xx}(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt\right)^{1/q}$$
$$\leq N\left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,\sqrt{\delta}x)|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt\right)^{1/q},$$

其中

$$N = N\left(p,q,[w]_{A_q(\mathbb{R})}\right).$$

最后，通过简单的变量替换 $\sqrt{\delta}x \to x$，我们得到（4.4）。

（步骤 2）一般 $a^{ij}(t)u_{x^ix^j}$。

为证明一般情形，我们使用概率解表示。我们可以假设

$$\int_0^T a^{ij}(t)dt < \infty$$

由于常数 N 在（4.4）中与 T无关。此外，由于平凡的常数延拓 $a^{ij}(t)$ $1_{t\in(0,T)} + a^{ij}(T)\,1_{t\geq T}$，我们可以假设 $a^{ij}(t)$ 定义在（0，∞）上。考虑概率空间（Ω，$\mathbb{P}$）中的两个相互独立的 d维布朗运动 B_t 和 W_t。

$$\left(a^{ij}(t)\right)_{d\times d} = A(t) = \sqrt{A}(t) \times \sqrt{A}^*(t),$$

$$X_t := \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{A}^{ij}(s)dB_s^j,$$

$$X_t^2 := \sqrt{2}\int_0^t \left(\sqrt{A(s)-\delta I}^{ij}\right) dB_s^j,$$

$$X_t^1 := \sqrt{2}\sqrt{\delta} I^{ij} W_t^j,$$

其中， $I = (I^{ij})_{d\times d}$ 表示一个 d 乘 d 的单位矩阵，其对角元素为1，其余元素为零；而 $\sqrt{A(s)-\delta I}$ 是一个矩阵，使得

$$\sqrt{A(s)-\delta I}\sqrt{A(s)-\delta I} = A(s)-\delta I,$$

这由（4.3）可知，即 $A(s)-\delta I$ 是一个半正定对称矩阵。因此，由于（3.2），解 u 可表示为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \mathbb{E}\left[f(s, x+X_t-X_s)\right] ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}\left[f(s, x+X_t^1-X_s^1+X_t^2-X_s^2)\right] ds, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，最后一个等式成立，是因为$X_t - X_s$和 $X_t^1 - X_s^1 + X_t^2 - X_s^2$的两个概率分布对所有 $0 < s < t$均相等。此外，由于两个布朗运动 B_t 和 W_t相互独立，我们可以将（4.5）中的随机参数拆分开来。此外，应用富比尼定理可得

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^t \mathbb{E}\left[f(s, x+X_t^1-X_s^1+X_t^2-X_s^2)\right] ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}'\left[\mathbb{E}\left[f(s, x+X_t^1(\omega)-X_s^1(\omega)+X_t^2(\omega')-X_s^2(\omega'))\right]\right] ds \\ &= \mathbb{E}'\left[\int_0^t \mathbb{E}\left[f(s, x+X_t^1(\omega)-X_s^1(\omega)+X_t^2(\omega')-X_s^2(\omega'))\right] ds\right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

对每个固定的 ω'，函数

$$v^{\omega'}(t,x) := \int_0^t \mathbb{E}\left[f(s, x+X_t^1(\omega)-X_s^1(\omega)-X_s^2(\omega'))\right] ds$$

成为方程的一个解

$$\begin{aligned} v_t^{\omega'}(t,x) &= \delta\Delta v^{\omega'}(t,x) + f(t, x-X_t^2(\omega')) \\ v^{\omega'}(0,x) &= 0. \end{aligned}$$

因此，根据步骤1中的结果，

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v_{xx}^{\omega'}(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt \le \frac{N}{\delta^q}\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t, x-X_t^2(\omega'))|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt, \tag{4.7}$$

其中 N 仅取决于 p、 q、 $[w]_{A_q(\mathbb{R})}$ 以及 κ_0。此外，由（4.6）可得，

$$u_{xx}(t,x) = \mathbb{E}'\left[v_{xx}^{\omega'}\left(t, x+X_t^2(\omega')\right)\right]. \tag{4.8}$$

最后应用（4.8）、（4.7）、广义闵可夫斯基不等式和詹森不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_{xx}(t,x)|^p dx \right)^{q/p} w(t) dt \\
&\leq N \mathbb{E}' \left[\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v_{xx}^{\omega'}(t, x + X_t^2(\omega'))|^p dx \right)^{q/p} w(t) dt \right] \\
&\leq \frac{N}{\delta^q} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p w\left(x + k(t)\right) dx \right)^{q/p} w(t) dt.
\end{aligned}$$

□

注4.4. 我们希望存在一个正常数 N，使得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_{xx}(t,x)|^p dx \right)^{q/p} w(t) dt \right)^{1/q} \\
&\qquad \leq \frac{N}{\delta^q} \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p dx \right)^{q/p} w(t) dt \right)^{1/q},
\end{aligned}$$

其中

$$N = N\left(p, q, [w]_{A_q(\mathbb{R})}, [w_0]_{A_p(\mathbb{R}^d)}\right).$$

然而，按照定理 4.3 的证明无法得到这一结论，因为

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(t, x - X_t^2(\omega'))|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^p dx \quad \forall \omega' \text{ and } \forall t$$

在证明中用到了。

5. Proof of the main theorem

定理的证明**2.5**

根据定理 3.1，解 u 的存在性和唯一性显而易见。此外，由于对任意 $-1 < \beta_1 < q - 1$，$|t|^\beta \in A_q(\mathbb{R})$（见例 7.1.7），因此可以由 (2.4)、(2.5) 和 (2.6) 轻易推出 (2.7)、(2.8) 和 (2.9)。因此，只需证明 (2.4)、(2.5) 和 (2.6)。设 u 为 (2.1) 的解。首先证明 (2.4) 和 (2.5)。对于每个 $\varepsilon \in (0, 1)$，记

$$h_{1,\varepsilon}(t) = w(\alpha(t) + \varepsilon t)\left(\delta(t) + \varepsilon\right)$$

and

$$h_{2,\varepsilon}(t) = w(\alpha(t) + \varepsilon t)|\delta(t) + \varepsilon|^{1-q}.$$

由（3.11）和（3.12），经过简单的变量代换，

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\left[\|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}\right]\\
&\le\left[\int_0^T \left|w(\alpha(t)+\varepsilon t)|\delta(t)+\varepsilon|^{1-q}\right|^{-\frac{1}{q-1}}dt\right]^{q-1}\\
&\quad\times\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t)+\varepsilon t)|\delta(t)+\varepsilon|^{1-q}(t)dt\\
&\le\left[\int_0^{\alpha(T)+\varepsilon T} |w(t)|^{-\frac{1}{q-1}}dt\right]^{q-1}\\
&\quad\times\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t)+\varepsilon t)|\delta(t)+\varepsilon|^{1-q}(t)dt
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t)+\varepsilon t)\left(\delta(t)+\varepsilon\right)dt\\
&\le\left[\int_0^T w(\alpha(t)+\varepsilon t)\left(\delta(t)+\varepsilon\right)\left[\int_0^t |w(\alpha(s)+\varepsilon s)|\delta(s+\varepsilon)|^{1-q}|^{-\frac{1}{q-1}}ds\right]^{q-1}dt\right]\\
&\quad\times\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t)+\varepsilon t)|\delta(t+\varepsilon)|^{1-q}dt.
\end{aligned}$$

此外，取 $\varepsilon\to 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\left[\|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}\right]\\
&\le\left[\int_0^{\alpha(T)} |w(t)|^{-\frac{1}{q-1}}dt\right]^{q-1}\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}(t)dt
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))\left(\delta(t)\right)dt\\
&\le\left[\int_0^T w(\alpha(t))\left(\delta(t)\right)\left[\int_0^t |w(\alpha(s))|\delta(s)|^{1-q}|^{-\frac{1}{q-1}}ds\right]^{q-1}dt\right]\\
&\quad\times\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_{L_p}^q e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))|\delta(t)|^{1-q}dt. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

有人可能会认为，这个极限过程似乎不够清楚。然而，如果我们的权重 w 是连续的，那么这一点就很清楚。此外，如果 w 有界，那么 w 可以用具有一致上界的连续函数列来逼近。最后，对任意正常数 $M>0$考虑 $w\wedge M$，根据单调收敛定理，我们可以完成极限过程，其中 $M\to\infty$。

我们继续估计（5.1）中的中间项。回顾$[w]_{A_p(\mathbb{R})}$ 的定义，并作变量代换 $\alpha(t):=\int_0^t\delta(s)ds\to t$，我们

have

$$\begin{aligned}
&\int_0^T w(\alpha(t))\delta(t)\left[\int_0^t |w(\alpha(s))|\delta(s)|^{1-q}|^{-\frac{1}{q-1}}ds\right]^{q-1}dt\\
&\leq \int_0^T w(\alpha(t))\delta(t)dt\left[\int_0^T |w(\alpha(t))|^{-\frac{1}{q-1}}\delta(t)ds\right]^{q-1}\\
&\leq \int_0^{\alpha(T)} w(t)dt\left[\int_0^{\alpha(T)} |w(t)|^{-\frac{1}{q-1}}ds\right]^{q-1}\\
&\leq [w]_{A_p(\mathbb{R})}\left[\alpha(T)\right]^q.
\end{aligned}$$

将上述计算代入（5.1），得到（2.5）。

接下来我们证明（2.6）。不妨假设 f 在$[0,T]\times\mathbb{R}^d$中具有紧支集。我们将证明分为几个步骤。

（步骤1） $\delta(t)\geq\varepsilon$ 且 $b^i(t)=c(t)=0$ 对所有 i 和 t成立。

首先假设存在一个正常数 $\varepsilon\in(0,1)$，使得 $\delta(t)\geq\varepsilon$对所有 t成立。此外，在这第一步中，假设对所有 t 以及 i， $b^i(t)=0$ 且 $c(t)=0$。记

$$\alpha(t)=\int_0^t \delta(s)ds.$$

于是 $\beta(t)$变为严格递增函数，且它有逆函数 $\beta(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$，满足

$$\beta'(t)=\frac{1}{\alpha'(\beta(t))}=\frac{1}{\delta(\beta(t))}\quad\forall t\in[0,\infty). \tag{5.2}$$

定义 $v(t,x)=u(\beta(t),x)$。于是由于 u 是（2.1）的一个解，

$$v_t(t,x)=u_t(\beta(t),x)\beta'(t)=\frac{a^{ij}(\beta(t))}{\delta(\beta(t))}v_{x^ix^j}(t,x)+\frac{f(\beta(t),x)}{\delta(\beta(t))}$$

以及 $v(0,x)=0$。注意，

$$\frac{a^{ij}(\beta(t))}{\delta(\beta(t))}\xi^i\xi^j\geq|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^d.$$

换言之， v 变为以下方程的解

$$\begin{aligned}
&v_t(t,x)=\tilde{a}^{ij}(t)v_{x^ix^j}(t,x)+\frac{f(\beta(t),x)}{\delta(\beta(t))}\qquad(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^d,\\
&u(0,x)=0,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

其系数为 $\tilde{a}^{ij}(t)=\frac{a^{ij}(\beta(t))}{\delta(\beta(t))}$其椭圆常数为 1。此外，显然 $\tilde{a}^{ij}(t)$ 是局部可积的。事实上，通过变量替换$\beta(t)\to t$ 以及（5.2），

$$\int_0^T\tilde{a}^{ij}(t)dt=\int_0^{\beta(T)}a^{ij}(t)dt<\infty.$$

因此，应用（4.4），可得

$$\left(\int_0^{T_0}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|v_{xx}(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt\right)^{1/q}$$
$$\leq N\left(\int_0^{T_0}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{f(\beta(t),x)}{\delta(\beta(t))}\right|^p dx\right)^{q/p} w(t)dt\right)^{1/q}, \tag{5.4}$$

其中

$$N = N\left(p,q,[w_0]_{A_q(\mathbb{R})},\kappa\right)$$

且 T_0 是一个常数，使得 $\beta(T_0) = T$。通过在$\beta(t) \to t$ 中对5.4进行变量替换，我们最终得到

$$\left(\int_0^{T}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_{xx}(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(\alpha(t))\delta(t)dt\right)^{1/q}$$
$$\lesssim \left(\int_0^{T}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(\alpha(t))(\delta(t))^{1-q}dt\right)^{1/q}. \tag{5.5}$$

（步骤 2） $b^i(t) = c(t) = 0$ 对所有 i 和 t 均成立。

在此步骤中，我们去掉条件 $\delta(t) \geq \varepsilon$。对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$，我们可以将式（2.1）改写为

$$u_t(t,x) = (a^{ij}(t)+\varepsilon I_{d\times d})u_{x^ix^j}(t,x) + f(t,x) - \varepsilon\Delta u,$$
$$u(0,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d,$$

其中 $I_{d\times d}$ 表示 d 由 d 构成的单位矩阵，其对角元素为 1，其余元素为零。因此，应用（5.5），我们得到

$$\left(\int_0^{T}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_{xx}(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(\alpha_\varepsilon(t))(\delta(t)+\varepsilon)dt\right)^{1/q}$$
$$\lesssim \left(\int_0^{T}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(\alpha_\varepsilon(t))(\delta(t)+\varepsilon)^{1-q}dt\right)^{1/q}$$
$$+\left(\int_0^{T}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varepsilon\Delta u(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w(\alpha_\varepsilon(t))(\delta(t)+\varepsilon)^{1-q}dt\right)^{1/q}, \tag{5.6}$$

其中 $\alpha_\varepsilon(t) = \int_0^t(\delta(s)+\varepsilon)ds$。注意到

$$\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varepsilon\Delta u(t,x)|^p w(x+k(t))dx\right)^{q/p} w_0(\alpha_\varepsilon(t))(\delta(t)+\varepsilon)^{1-q}dt$$
$$= \int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta u(t,x)|^p w(x+k(t))dx\right)^{q/p} w_0(\alpha_\varepsilon(t))(\delta(t)+\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\delta(t)+\varepsilon}\right)^q dt,$$

$$(\delta(t)+\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\delta(t)+\varepsilon}\right)^q \leq (\delta(t))^{1-q}$$

and

$$(\delta(t)+\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\delta(t)+\varepsilon}\right)^{q}\to 0 \text{ as } \varepsilon\to 0,$$

其中 $0^{1-q}:=\infty$。因此，由控制收敛定理以及式（2.10）中积分的定义，在式（ $\varepsilon\to 0$ （5.6）中取，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_{xx}(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w_0(\alpha(t))\delta(t)dt\\ &\lesssim\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(t,x)|^p dx\right)^{q/p} w_0(\alpha(t))(\delta(t))^{1-q}dt.\end{aligned}\tag{5.7}$$

（步骤 3）（一般情形）。

设 v 是方程的一个解

$$\begin{aligned}&v_t(t,x)=a^{ij}(t)v_{x^ix^j}(t,x)+e^{-\int_0^t c(s)ds}f\left(t,x-\int_0^t b(s)ds\right),\\ &v(0,x)=0, \qquad\qquad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

如证明推论3.3中所示，解 u 由下式给出

$$u(t,x)=e^{\int_0^t c(s)ds}v\left(t,x+\int_0^t b(s)ds\right)$$

且显然

$$v(t,x)=e^{-\int_0^t c(s)ds}u\left(t,x-\int_0^t b(s)ds\right).$$

将（5.7）应用于 v，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-\int_0^t c(s)ds}u_{xx}\left(t,x-\int_0^t b(s)ds\right)(t,x)\right|^p dx\right)^{q/p}\\ &\quad\times w(\alpha(t))\delta(t)dt\\ &\lesssim\int_0^T\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|f\left(t,x-\int_0^t b(s)ds\right)\right|^p dx\right)^{q/p} e^{-q\int_0^t c(s)ds}w(\alpha(t))(\delta(t))^{1-q}dt.\end{aligned}$$

最后，平移 $x\to x+\int_0^t b(s)ds$ 引出（2.6）。

□

6. Acknowledgement

我谨向 Kyeong-Hun Kim 教授致谢，感谢他细致审阅并提出宝贵意见。

References

[1] H. Amann. 具有强边界退化的线性抛物型方程。 *Journal of Elliptic and Parabolic Equations* 6 1 123 144, 2020 , ( ): – .[2] D. Cao, T. Mengesha, and T. Phan. 退化与奇异椭圆方程弱解的加权 -$W^{1,p}$ 估计。 *Indiana University Mathematics Journal*, 第 2225–2277 页, 2018 年。[3] J.-H. Choi and I. Kim. 关于具有时间可测伪微分算子的抛物型偏微分方程的加权 L_p-正则性理论。 *arXiv preprint arXiv:2205.12463*, 2022 年。[4] S. Cerrai. *Second order PDE's in finite and infinite dimension: a probabilistic approach*。柏林, 海德堡: Springer Berlin Heidelberg, 2001 年。[5] H. Dong and D. Kim. 一种用于含局部与非局部时间导数的抛物型方程加权混合范数估计的方法。 *Advances in Mathematics*, 377:107494, 2021 年。[6] H. Dong and T. Phan. 关于具有奇异或退化系数的抛物型方程与椭圆型方程。 *arXiv preprint arXiv:2007.04385*, 2020 年。[7] H. Dong and T. Phan. 具有奇异或退化系数的抛物型方程与椭圆型方程：狄利克雷问题。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 374(09):6611–6647, 2021 年。[8] H. Dong and T. Phan. 具有奇异或退化系数的抛物型方程的正则性。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 60(1):1–39, 2021 年。[9] K. Du, S. Tang, and Q. Zhang. 全空间中线性退化反向随机偏微分方程的 $W^{m,p}$-解（$p \geq 2$）。 *Journal of Differential Equations*, 254 7 2877 2904, 2013 ( ): – .[10] G. Fichera. 关于二阶椭圆抛物型方程边值问题的统一理论。 *Matematika*, 7(6):99–122, 1963 年。[11] S. Fornaro, G. Metafune, D. Pallara, and R. Schnaubelt. lp 空间和连续函数空间中的 Tricomi 型退化算子。 *Journal of Differential Equations*, 252(2):1182–1212, 2012 年。[12] S. Fornaro, G. Metafune, D. Pallara, and R. Schnaubelt. 在边界处一阶退化且具有向外漂移的 L^2 中的二阶椭圆算子。 *Communications on Pure and Applied Analysis* 14 2 407, 2015 , ( ): .[13] S. Fornaro, G. Metafune, D. Pallara, and R. Schnaubelt. L^p- 空间中的多维退化算子。 *Communications on Pure and Applied Analysis*, 21(6):2115, 2022 年。[14] T. Gadjiev, M. Kerimova, and G. Gasanova. 退化方程边值问题的可解性。 *Ukrainian Mathematical Journal*, 72(4), 2020 年。[15] T. S. Gadjiev, G. H. Gasanova, and G. Zulfaliyeva. 一类退化椭圆抛物型方程解的先验估计。 *Transactions of NAS of Azerbaijan Issue* , , ( ): *Mathematics* 37 1 92 108, 2017 – .[16] M. Gerencs´er. 具有极值性质的随机偏微分方程。2016 年。[17] M. Gerencs´er, I. Gy¨ongy, and N. Krylov. 关于 Sobolev 空间中退化随机偏微分方程的可解性。 *Stochastic Partial Differential Equations: Analysisand Computations*, 3(1):52–83, 2015 年。[18] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis, Third edition*。Springer, 2014 年。[19] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis, Third edition*。Springer, 2014 年。[20] I. Gy¨ongy and S. Wu. 关于随机积分微分方程的 L_p -可解性。 *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput* 9 2 295 34, 2021 ,( ), - .[21] T. Hyt¨onen, J. Van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. *Analysis in Banach spaces*, 第 12 卷。Springer, 2016 年。[22] T. Hyt¨onen, J. Van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. , 第 卷。Springer, 。[23] M. Keldysh. "关于区域边界上椭圆型方程某些退化情形", 苏联科学院通报 77。1951 年。[24] I. Kim and K.-H. Kim. 退化抛物型方程的二阶导数估计。 *Journal of Differential Equations*, 265(11):5959–5983, 2018 年。[25] I. Kim and K.-H. Kim. 关于具有无界且完全退化的主系数的二阶随机偏微分方程的尖锐 L_p 正则性结果。 *arXiv preprint arXiv:1905.07545* 2019 , 。

[26] K.-H. Kim. 定义在边界退化的 c 1 区域上的抛物型方程的 Sobolev 空间理论。
Communications in Partial Differential Equations, 32(8):1261–1280, 2007. [27] K.-H. Kim and K. Lee. 关于从退化状态开始的热扩散。 *Journal of Differential Equations* 262 3 2722 2744, 2017 , ( ): – .

[28] A. Kozhanov, U. Abulkayirov, and G. Ashurova. 退化抛物型方程中时间型系数的确定逆问题。[29] N. V. Krylov. *Introduction to the theory of diffusion processes*. 美国数学学会, 1995.[30] N. V. Krylov. *Introduction to the theory of random processes*. 美国数学学会, 2002.[31] N. V. Krylov. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces*, volume 96. 美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州, 2008.[32] O. A. Lady˘zenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* 23 1988 , volume . 美国数学学会, .[33] J.-M. Leahy and R. Mikulevi˘cius. 关于由跳跃过程驱动的退化线性随机演化方程。 *Stochastic Processes and their Applications*, 125(10):3748–3784, 2015. [34] P. Li, P. R. Stinga, and J. L. Torrea. 关于若干基本抛物型方程的加权混合范数Sobolev估计。 *Communications on Pure & Applied Analysis*, 16(3):855, 2017. [35] I. Mamedov. 系数不连续的二阶椭圆抛物型方程的第一边值问题。 *Journal of Mathematical Sciences*, 190(1):104–134, 2013. [36] D. D. Monticelli, K. R. Payne, and F. Punzo. 矩阵值权Sobolev空间的 Poincar´e 不等式及其在退化偏微分方程中的应用。 *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* 149 1 61 100, 2019 , ( ): – .

[37] O. A. Oleinik. 关于退化椭圆型和抛物型方程解的光滑性。载于 *Doklady Akademii Nauk*, volume 163, pages 577–580. 俄罗斯科学院, 1965. [38] O. A. Oleinik. 关于二阶线性和拟线性椭圆抛物型偏微分方程的一些结果。 *ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI RENDICONTI-CLASSE DI SCIENZE FISICHE-MATEMATICHE & NATURALI*, 40(5):775, 1966. [39] O. A. Oleinik. *Second-order equations with nonnegative characteristic form*. Springer Science & Business Media, 2012.[40] J. Pruess. 关于具有完全一阶边界退化和强向外漂移的二阶椭圆算子。 *Archiv der Mathematik*, 108(3):301–311, 2017. [41] S. Schochet. 非一致抛物型偏微分方程的 Sobolev 估计。 *Partial Differential Equations and Applications* 3 1 1 25, 2022 , ( ): – .

[42] E. M. Stein and T. S. Murphy. *Harmonic analysis: real-variable methods orthogonality and oscillatory integrals* 3 1993 , , , volume . Princeton University Press, .[43] G. Zulfaliyeva. 退化非线性椭圆型方程解的光滑性。 *International Journal of Applied Mathematics* 35 1 49, 2022 Inter- , ( ): .

数据可用性

本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

Department of mathematics, Korea university, 1 anam-dong sungbuk-gu, Seoul, southKorea 136-701*Email address*: waldoo@korea.ac.kr