arXiv:2301.00507v1 [math.DG] 2 Jan 2023

关于喷射的测地线与射影完备性

Guojun Yang

摘要

测地线在喷射-芬斯勒几何中发挥着重要作用，它们是流形上喷射向量场的积分曲线。本文针对喷射或芬斯勒度量的测地线完备性，建立了一些比较定理并探讨了刚性问题。本文在测地线层面上对具有弱里奇常数（即常曲率）的射影平坦喷射进行分类。此外，本文引入一种测地线方法，依据一族具有 $2(n-1)$ 个自由常数参数的曲线作为测地线，来确定一个 n 维喷射。最后，本文表明，若所有测地线的测地线参数定义域满足某一条件，则喷射是射影完备的。

关键词：喷射、测地线、完备性、路径空间、芬斯勒度量
MR(2000)主题分类：53B40,53C60

1 引言

喷射几何研究流形上喷射的性质，并且与芬斯勒几何密切相关。每个芬斯勒度量都会诱导出一个自然喷射，但有许多喷射并非芬斯勒可度量化（即不能由任何芬斯勒度量诱导）（[3, 5, 10]）。因此，一个热门研究课题是探究给定喷射是否可度量化，更重要的是，为某些类别的喷射给出可度量化的充要条件（[2, 11, 12]）。研究一些特殊类别喷射的性质也很重要，例如（局部）射影平坦喷射、Berwald喷射、具有标量（分别为各向同性、常数）曲率的喷射、Hamel（分别为 Funk）喷射（[2, 6, 11, 12]）。

流形 M 上的喷射 G 在 $TM \setminus \{0\}$ 的锥形区域 $\mathcal{C}$ 上定义了一个特殊的向量场，并由此自然地定义其积分曲线；这些积分曲线在流形 M 上的投影称为测地线。测地线在喷射流形或芬斯勒流形上的比较定理和刚性问题研究中发挥着重要作用。在 [8], , Z. Shen 研究了两个逐点射影相关的爱因斯坦芬斯勒度量，并确定了沿测地线的度量。在 [10], , 本文作者针对逐点射影相关的喷射与芬斯勒度量，得到了关于其里奇曲率的比较定理，并对相应的射影因子进行了估计。在 [1], , R. Bryant 证明，在 S^2 上具有正的常数旗曲率的测地可逆 Finlser度量是黎曼度量。在 [7], , C. Robles 对常数旗曲率 Randers度量的测地线进行了分类。在 [4],, L. Huang 和 X. Mo 得到了两个芬斯勒度量 $\tilde{F}$ 与 F 的测地线之间的关系，其中 F 由导航数据（F, V）定义，且 V 是 F 上的相似向量场。本文研究具有弱里奇常数的射影平坦喷射、通过测地线方法构造喷射，以及喷射的射影完备性。

在 [11], 中，文中引入了常曲率喷射，并指出常曲率喷射 G 是弱里奇常数的（里奇曲率沿 G 的任意测地线保持不变）。对于两个逐点射影相关喷射，它们的测地线作为点集是相同的，且其测地线参数通过射影因子密切相关。基于这一事实，我们可以在测地线层面确定一个弱里奇常数的射影平坦喷射。

我们考虑一个射影平坦喷射流形 (G M)，即

$$G^i = \widetilde{G}^i + Py^i, \tag{1}$$

~其中，G 是定义在 M 上的局部闵可夫斯基喷射。我们有如下定理。

定理 1.1 若式 (1) 中的喷射 G 是弱里奇常数 $Ric_{;0} = 0$ 或具有常曲率，则沿着 G 的任意测地线 $x = x(s)$， $P(s)$: $= P(x(s)\ x'(s))$ 可由以下情形之一给出:

$$P(s) = \frac{1}{s+\kappa}, \quad P(s) = -c \cdot \tan(cs+\kappa), \quad P(s) = -\frac{c(1-\kappa e^{2cs})}{1+\kappa e^{2cs}}, \tag{2}$$

其中 c、κ 为常数。此外，若 G 完备，则 $P(s)$ 可表示为

$$P(s) = -\frac{c(1-\kappa e^{2cs})}{1+\kappa e^{2cs}}. \tag{3}$$

在定理 1.1 中，我们还可以通过式 (2) 给出 G 的测地线参数 ~与 G 之间的关系（见命题 3.1、推论 3.3）。

一个 n 维喷射的测地线族，若将其视为点集或路径，则依赖于 2($n-1$) 个自由常数参数。路径空间是满足某些条件的一族曲线（定义 4.1）。我们可以自由构造许多有趣的路径空间，尤其是在二维情形下。从一个路径空间出发，可以构造与之对应的喷射。

定理 1.2 在一个 n 维路径空间 $\mathcal{G}$ 中，局部坐标系（x^i）中的所有路径都可以在变量 t 下参数化，并具有 2($n-1$) 个自由常数参数 u、v，如下所示:

$$x = x(t) = \sigma(t; u, v), \qquad (u, v \in R^{n-1}). \tag{4}$$

此外，参数方程 (4) 导出一个喷射 G，其测地线由式 (4) 给出，其中 t 为其测地线参数；如果给定一个新变量 $s = s(t) = s(t; u, v)$，且满足 $\dot{s}(t) > 0$，那么它将导出一个喷射 G $\in Proj$(G)，其中 s 为其测地线参数。

如果一族曲线可以按形式 (4) 参数化，那么在式 (4) 中乘以辅助参数 $c > 0$ 和 t，即可通过消去参数 u、v、c、t 得到相应的喷射。下面给出一些例子，说明如何从给定的路径空间求出喷射（见例4.5–4.8）。

在研究芬斯勒流形或喷射流形上的刚性问题时，假设所考虑的（芬斯勒）喷射是（正向/负向）完备的，这一点很重要。给定的喷射不一定是（正向/负向）完备的。因此，一个自然的问题是：喷射能否在射影意义下（正向/负向）完备。我们在以下结果（定理 1.3）中，在一定条件下解决了这个问题。

定理 1.3 设 G 是流形 M 上的一个喷射，其每条测地线 $x = x(t)$ 都定义在由下列情形之一给出的极大区间 I 上

$$I = (a, b), \quad or \quad (a, +\infty), \quad or \quad (-\infty, b), \tag{5}$$

其中 $a = a(u, v) < 0, b = b(u, v) > 0$ 是锥形区域 $\mathcal{C}$ 上的 C^∞ 函数，且 $u = x(0)$ $v = \dot{x}(0)$。那么 G 在 $\mathcal{C}$ 上是射影（正向/负向）完备的。

在定理 1.3 中，通常我们也可以像式 (4) 那样取 u, v （参见例 5.5）。如果不满足条件 (5)，则无法确定 G 是否射影完备（参见例 5.5 ）。我们将例 5.2–5.5 作为定理 1.3 的应用。芬斯勒度量不一定是射影（正向/负向）完备的；也就是说，如果定理 1.3 中的 G 是芬斯勒喷射，那么与 G 射影等价的相应喷射未必是芬斯勒喷射。

2 射影关系中的测地线参数

在我们的讨论中， M上的喷射是定义在$TM\setminus\{0\}$的锥形区域 $\mathcal{C}$ 上的光滑向量场 G（一个重要的情形是 $\mathcal{C}=TM\setminus\{0\}$），在 TM 中的局部坐标系 (x^i,y^i) 下表示如下

$$\mathbf{G}=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i\frac{\partial}{\partial y^i},$$

其中， G^i 是满足 $G^i(x,\lambda y)=\lambda^2G^i(x,y)$ 的局部齐次函数， $\lambda>0$。若$\mathcal{C}=TM\setminus\{0\}$，则称 G 为正则；否则称其为奇异。

G 的积分曲线投影到 M 上后即为 G 的测地线。设 $x=x(s)$ 是 G 的一条测地线，则它满足以下常微分方程:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+2G^i(x,\frac{dx}{ds})=0,$$

其中， s 称为测地线 $x=x(s)$ 的测地线参数。用满足 $ds/dt>0$ 的一般参数 t 对测地线$x=x(s)$重新参数化，可得

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i(x,\frac{dx}{dt})=\gamma(t)\frac{dx^i}{dt},\tag{6}$$

其中， $\gamma(t)$ 由下式给出

$$\gamma(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\Big/\frac{ds}{dt}=-\frac{d^2t}{ds^2}\Big/(\frac{dt}{ds})^2.\tag{7}$$

设 G $\bar{}$G 是由 $\bar{G}^i=G^i+Py^i$ 逐点射影相关的两个喷射。设 $x=x(t)$作为点集是 G 或 G 的一条测地线，其一般参数为 t。于是沿测地线$x=x(t)$，由 (6) 和 (7) 可得

$$2P(t)=\frac{\bar{s}''(t)}{\bar{s}'(t)}-\frac{s''(t)}{s'(t)},\quad \big(P(t):=P(x(t),x'(t))\big),\tag{8}$$

其中， s、$\bar{s}$ 分别是曲线 $x=x(t)$在G、$\bar{\text{G}}$中的测地线参数。特别地，沿着G的一条测地线 $x=x(s)$，由（8）可得

$$2P(s)=\frac{\bar{s}''(s)}{\bar{s}'(s)},\quad \big(P(s):=P(x(s),x'(s))\big),\tag{9}$$

若将G的测地线 $x=x(s)$表示为 $\bar{\text{G}}$的测地线 $x=x(\bar{s})$，由（9）可得

$$2P(\bar{s})=2P(x(s),x'(s))\frac{ds}{d\bar{s}}=\frac{\bar{s}''(s)}{\big(\bar{s}'(s)\big)^2},\quad \big(P(\bar{s}):=P(x(\bar{s}),x'(\bar{s}))\big).\tag{10}$$

因此，若已知 $P(s)$或 $P(\bar{s})$，则可由（9）或（10）得到关系 $\bar{s}=\bar{s}(s)$。

例2.1 设 F 是强凸域$\Omega\subset R^n$上的芬克度量。定义一个射影平坦喷射G如下:

$$G^i=Py^i,\quad P:=cF,$$

其中 c 是一个常数。G 的任意测地线 $x=x(t)$（作为点集）可表示为

$$x=x(t)=vt+u,\quad \big(-\frac{1}{F(u,-v)}<t<\frac{1}{F(u,v)}\big),$$

其中 u、$v \in R^n$ 是常向量。我们有

$$F(vt+u,v)=\frac{F(u,v)}{1-tF(u,v)}. \tag{11}$$

令 s 为 G 的测地线参数。则由 (9) 和 (11) 得

$$\frac{s''(t)}{s'(t)}=2cF(vt+u,v)=\frac{2cF(u,v)}{1-tF(u,v)}, \tag{12}$$

将其对 $s(0)=0$ 积分，得到

$$s=s(t)=\begin{cases}\kappa\ln\big[1-tF(u,v)\big], & (c=\frac{1}{2}),\\ \kappa\Big[1-\big(1-tF(u,v)\big)^{1-2c}\Big], & (c\neq\frac{1}{2}),\end{cases} \tag{13}$$

其中 κ 为常数，$\kappa<0$ 当 $c\geq 1/2$ 时成立，且 $\kappa>0$ 当 $c<1/2$ 时成立。因此，当 $c\geq 1/2$ 时，该喷射正向完备；对于 $c<1/2$，任意测地线都定义在一个有限开区间上。此外，当且仅当 $c=0$、1、$1/2$ 时，喷射 G（局部）可度量化（见 *[10]*）。

例 2.2 在例 2.1 中，若喷射 G 由下式给出

$$G^i(y):=Py^i,\quad P:=c\big[F(y)-F(-y)\big],$$

则由 (11) 和

$$F(vt+u,-v)=\frac{F(u,-v)}{1+tF(u,-v)}. \tag{14}$$

由 (9) 可得

$$\frac{s''(t)}{s'(t)}=\frac{2cF(u,v)}{1-tF(u,v)}-\frac{2cF(u,-v)}{1+tF(u,-v)},$$

对其积分，并代入 $s(0)=0$，得到

$$s=s(t)=\kappa\int_0^t\Big[\big(1-tF(u,v)\big)\big(1+tF(u,-v)\big)\Big]^{-2c}dt, \tag{15}$$

其中 $\kappa>0$ 为常数。由（15）显然可得，当 $c\geq 1/2$ 时，G 是完备的；当 $c<1/2$ 时，s在有限开区间内有界。

3 弱里奇常数的射影平坦喷射

对于喷射 G，黎曼曲率张量 $R^i{}_k$ 定义为

$$R^i{}_k:=2\partial_kG^i-y^j(\partial_j\dot\partial_kG^i)+2G^j(\dot\partial_j\dot\partial_kG^i)-(\dot\partial_jG^i)(\dot\partial_kG^j),$$

其中定义 $\partial_k:=\partial/\partial x^k,\dot\partial_k:=\partial/\partial y^k$。$R^i{}_k$ 的迹称为里奇曲率，$Ric:=R^i{}_i$。以喷射张量 $T=T_idx^i$ 为例，T 关于 Berwald 联络的水平导数和垂直导数为

$$T_{i;j}=\delta_jT_i-T_rG^r_{ij},\qquad T_{i.j}=\dot\partial_jT_i,\qquad(\delta_i:=\partial_i-G^r_i\dot\partial_r,\ G^k_{ir}:=\dot\partial_r\dot\partial_iG^k)).$$

若 $Ric_{;0} := Ric_{;r}y^r = 0$，则称喷射为弱里奇常数。若 $R^i{}_k$ 由 $R^i{}_k = R\delta^i_k - \tau_k y^i$ 给出，且满足（[11]），则称喷射 G 具有常曲率。

$$\tau_{i;k} = 0 \ (\ \Leftrightarrow\ R = \tau_k = 0,\ or\ R_{;i} = 0 (R \neq 0)).$$

根据定义，常曲率喷射显然是弱里奇常数的。对于两个逐点射影相关的喷射 G 和 $\bar{G}^i = G^i + Py^i$，它们的里奇曲率 $\bar{Ric}, Ric$ 满足如下关系：

$$\bar{Ric} = Ric - (n-1)(P_{;0} - P^2). \tag{16}$$

我们考虑由式 (1) 给出的射影平坦喷射流形 (G M)，即

$$G^i = \widetilde{G}^i + Py^i,$$

其中，G 是 M 上的局部闵可夫斯基喷射（G 的局部测地线为直线）。若 G 是弱里奇常数的，则可确定沿测地线的射影因子 P，如定理 1.1 所示。

定理 1.1 的证明：由 (16) 和 $\widetilde{G}^i = G^i - Py^i$，G 的里奇曲率 Ric 为

$$Ric = -(n-1)(P^2 + P_{;0}).$$

因此，$Ric_{;0} = 0$ 等价于 $P_{;0;0} + 2PP_{;0} = 0$。于是，沿着 G 的一条测地线 $x = x(s)$，有

$$P''(s) + 2P(s)P'(s) = 0.$$

其解由式 (2) 中的三种情形之一给出。此外，若 G 是完备的，显然式 (3) 可由式 (2) 推出。证毕。

若式 (1) 中的喷射 G 是弱里奇常数 $Ric_{;0} = 0$，则应用式 (2) 和 (10)，可得到以下命题。

命题 3.1 设式 (1) 中的喷射 G 为弱里奇常数（特别是具有常曲率）。对于任意测地线 σ，设 s 和 t 分别为 σ 关于 G 和 $\bar{G}$ 的测地线参数。则 $s = s(t)$ 由以下情形之一给出：

$$s = at, (a > 0); \qquad s = b\ln(1+at), (ab > 0); \tag{17}$$

$$s = \frac{bt}{1+at}, (a \neq 0, b > 0); \qquad s = c\big[\arctan(at+b) - \arctan b\big], (ac > 0); \tag{18}$$

$$s = c\ln\frac{1+bt}{1+at}\big((b-a)c > 0,\ ab \neq 0\big), \tag{19}$$

其中 a、b、c 为常数；此外，在式 (19) 中还要求 $s'(t) > 0$（见注 3.2）。

证明：根据 (10)，我们需要求解以下带初始条件的常微分方程：

$$\frac{s''(t)}{s'(t)} = 2P(s)s'(t), \quad (s(0) = 0,\ s'(t) > 0),$$

对其积分可得

$$s'(t) = ae^{2\int P(s)ds}, \quad \int e^{-2\int P(s)ds}ds = at + b, \tag{20}$$

其中 a、b 是两个常数。现在，根据定理 1.1 中的公式 (2)，可得 $P(s)$，因此将 $P(s)$ 代入 (20)，即可得到 $s = s(t)$。

若 $P(s) = 0$，则由 (20) 得到 $s = at + b$。由于 $s(0) = 0$，$s'(t) > 0$，于是得到 $s = at\,(a > 0)$，这给出了 (17) 中的第一个公式。

若 $P(s) = c \neq 0$ 为常数，则由 (20) 得到 (17) 中的第二个公式，其中 $ab > 0$。若 $P(s)$ 由 (2) 中的第一个公式给出，则由 (20) 得到

$$s = -\kappa + \frac{1}{at + b},$$

利用 $s(0) = 0$，$s'(t) > 0$，可将其改写为 (18) 中第一个公式的形式 .

若 $P(s)$ 由 (2) 中的第二个公式给出（$c \neq 0$），则由 (20) 得到

$$s = -\frac{\kappa - \arctan(at + b)}{c},$$

利用 $s(0) = 0$，$s'(t) > 0$，可将其改写为 (18) 中的第二个公式。

若 $P(s)$ 由 (2) 中的第三个公式给出（$c\kappa \neq 0$），则由 (20) 得到

$$s = \frac{1}{2c} \ln \big(\frac{1}{at + b} - \frac{1}{\kappa}\big)$$

通过 $s(0) = 0, s'(t) > 0$，可将其改写为公式 (19)。 Q.E.D.

在 (19) 中，由 $s'(t) > 0$，我们对常数参数 a, b, c 有进一步的限制，如下述注记所示。

注 3.2 在 (19) 中，设 t 定义在极大区间 (κ_1, κ_2) 上，且满足 $\kappa_1 < 0 < \kappa_2$。由 $s'(t) > 0$，容易得出以下情形:

$$a > 0,\ b > 0: \begin{cases} t \in (\kappa_1, \kappa_2) \subset (-\frac{1}{a}, +\infty), & (b < a) \\ t \in (\kappa_1, \kappa_2) \subset (-\frac{1}{b}, +\infty), & (b > a), \end{cases}$$

$$a < 0,\ b < 0: \begin{cases} t \in (\kappa_1, \kappa_2) \subset (-\infty, -\frac{1}{a}), & (b > a) \\ t \in (\kappa_1, \kappa_2) \subset (-\infty, -\frac{1}{b}), & (b < a), \end{cases}$$

$$a > 0,\ b < 0:\ t \in (\kappa_1, \kappa_2) \subset (-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}),$$

$$a < 0,\ b > 0:\ t \in (\kappa_1, \kappa_2) \subset (-\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}).$$

由命题 3.1 和注 3.2，可直接得到以下推论。

推论 3.3 若命题 3.1（$P \neq 0$）中的喷射 G 是完备的，则 $s = s(t)$ 由以下两种情形之一给出:

$$s = b \ln(1 + at),\ (ab > 0), \tag{21}$$

$$s = c \ln \frac{1 + bt}{1 + at},\ \big((b - a)c > 0,\ ab < 0\big), \tag{22}$$

其中，在 (21) 和 (22) 中，我们分别有

$$t \in (-\infty, -\frac{1}{a}) \ \text{ if } a < 0, \text{ and } t \in (-\frac{1}{a}, +\infty) \ \text{ if } a > 0;$$

$$t \in (-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}) \ \text{ if } a > 0, b < 0, \text{ and } t \in (-\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}) \ \text{ if } a < 0, b > 0.$$

下面，我们给出一些射影平坦喷射，以验证上述关于射影因子和测地线参数的结果。

例3.4 考虑例2.1中的喷射 G。直接计算可得，G 是弱里奇常数或具有常曲率，当且仅当 $c = 0, 1, 1/2$。设 $x = x(t) = vt + u$ 是 G 的一条测地线（作为点集），且 G 中的测地线参数 s 由 (13) 给出。由 (10) 和 (13) 可得 $P = cF$ 为

$$P(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\kappa}, & (c = \frac{1}{2}) \\ \frac{c}{2c-1} \cdot \frac{1}{s-\kappa}, & (c \neq \frac{1}{2}). \end{cases} \tag{23}$$

由 (23) 可知，$P(s)$ 属于 (2) 中的某种形式，当且仅当 $c = 0, 1, 1/2$。同时，$s = s(t)$ 由命题 3.1 给出，当且仅当 $c = 1, 1/2, 1$；在这种情况下，$s = s(t)$ 具有 (17) 和 (18) 中第一个公式所示的相应形式。

例3.5 设 G 为例 2.2 中的喷射，且 $c = 1/2$。G 是完备的，并且具有常曲率。由 (15) 可得

$$s = \kappa \ln \frac{1 + tF(u, -v)}{1 - tF(u, v)}, \tag{24}$$

其中 $\kappa > 0$ 是常数。在这种情况下，$s = s(t)$ 具有 (22) 的形式，并且将 (24) 代入 (10)，容易验证 $P(s)$ 具有 (2) 中第三个公式的形式。

例3.6 设 G 为定义在 R^n 上的喷射，其定义如下：

$$G^i := Py^i, \quad P := -\frac{\langle x, y\rangle}{1 + |x|^2}.$$

G 是可度量化的，并且具有常曲率。设 $x = x(t) = vt + u$ 是 G 的一条测地线（作为点集），由 (9)，G 的测地线参数 s 满足

$$\frac{s''(t)}{s'(t)} = -\frac{2(|v|^2 t + \langle u, v\rangle)}{1 + |u|^2 + 2\langle u, v\rangle t + |v|^2 t^2}.$$

求解常微分方程，得到

$$s = s(t) = \kappa_1 + \kappa_2 \arctan \frac{|v|^2 t + \langle u, v\rangle}{\sqrt{(1 + |u|^2)|v|^2 - \langle u, v\rangle^2}},$$

其中 κ_1、κ_2 是常数。显然，如果 $s(0) = 0$，则 $s = s(t)$ 具有 (18) 中第二个公式的形式；将上述$s = s(t)$ 代入 (10)，可得 $P(s)$ 具有 (2) 中第二个公式的形式。

4 从测地线构造喷射

给定流形上的一族曲线 $\mathcal{G}$，如果 $\mathcal{G}$ 可以构成流形 M 上某个喷射 G 的测地线，那么如何求出 G （至少在局部范围内）？喷射会导出一个（局部）半喷射，而两个逐点射影相关喷射会导出同一个半喷射（参见 [9]）。半喷射也可以视为一种特殊的参数化曲线族，它构成一个路径空间。

本节将从一个路径空间出发，介绍几种基于路径空间及其参数化构造喷射的方法。我们称之为构造喷射的测地线方法。

与喷射类似，流形 M 上的路径空间 $\mathcal{G}$ 通常定义在 $TM \setminus \{0\}$ 的锥形区域 $\mathcal{C}$ 上（见定义 4.1），若 $\mathcal{C} \neq TM \setminus \{0\}$，则称 $\mathcal{G}$ 为奇异。

定义 4.1 设 $\mathcal{G}$ 为流形 M上的一族以 C^∞ 为参数的曲线（称为路径），其中该流形为 n 维。若 $\mathcal{G}$ 或（M，$\mathcal{G}$）在 TM 的锥形区域 $\mathcal{C}$ 上满足

(i) 对于 $y \in \mathcal{C}_x$，存在一条曲线 $\sigma:(-\epsilon,\epsilon) \to M$ 属于 $\mathcal{G}$，且 $\sigma'(0) = y$；(ii) 对于任意满足 $\sigma'(0) = \tau'(0)$ 的 σ、τ，σ 和 τ 在 0 的某个小区间内重合；(iii) 若曲线 σ 属于 $\mathcal{G}$，则对于任意常数 $\lambda > 0$ 和 t_o，曲线 η 也属于 $\mathcal{G}$，其中 η 定义为 $\eta(t) := \sigma(\lambda t + t_o)$。

定义 4.1 在正则情形下的等价版本称为 [9] (P_{52})。

例 4.2 考虑 R^2 上形如 $\mathcal{G}$ 的曲线族 $x = x(s)$ 的一个集合 $\mathcal{G}$。

$$x(s) = \sigma(s; x_o, y_o), \qquad \big(x(0) = x_o = (a,b),\ \ x'(0) = y_o = (u,v)\big),$$
$$\sigma(s; x_o, y_o) := (a,b) + (u,v)s - (0,1)\big(\frac{1}{3}u^3s^3 + au^2s^2\big),$$

其中 a、b、u、v 是任意参数。可以直接验证，$\mathcal{G}$ 是 R^2 上的路径空间，因为定义 4.1 (i) (ii) 自动成立，而定义 4.1 (iii) 则由以下条件推出。

$$\sigma(\lambda s + s_o; x_o, y_o) = \sigma(s; \hat{x}_o, \hat{y}_o),$$

其中我们定义

$$x_o = (a,b), \quad y_o = (u,v), \quad \hat{x}_o = (\hat{a},\hat{b}), \quad \hat{y}_o = (\hat{u},\hat{v}),$$
$$\hat{a} := a + us_o, \qquad \hat{b} := b + vs_o - \frac{1}{3}u^2(3a + us_o)(s_o)^2,$$
$$\hat{u} := \lambda u, \qquad \hat{v} := \lambda v - \lambda u^2 s_o(2a + us_o).$$

对于路径空间 $\mathcal{G}$，我们有不同的方式对 $\mathcal{G}$ 中在参数变量和一些常数参数下的路径进行参数化（见定理 1.2 和引理4.3）。例 4.2 满足下面引理 4.3 中的 (25) 和 (26)，其中

$$f(s; x_o, y_o) := -(0,1)\big(\frac{1}{3}u^3s^3 + au^2s^2\big), \ \ x_o = (a,b),\ y_o = (u,v).$$

引理 4.3 一个 n 维路径空间（M，$\mathcal{G}$）可局部表示为如下曲线族 $x = x(s)$，其中 x_o、$y_o \in R^n$ 为任意常数参数:

$$x(s) = \sigma(s; x_o, y_o) = x_o + y_o s + f(s; x_o, y_o), \tag{25}$$

其中 f 是满足 $f(0; x_o, y_o) = f'(0; x_o, y_o) = 0$ 的光滑函数，并且

$$f(s; \hat{x}_o, \hat{y}_o) = f(\lambda s + s_o; x_o, y_o) - f(s_o; x_o, y_o) - \lambda f'(s_o; x_o, y_o)s, \tag{26}$$
$$\big(\hat{x}_o := x_o + y_o s_o + f(s_o; x_o, y_o), \ \ \hat{y}_o := \lambda y_o + \lambda f'(s_o; x_o, y_o)\big).$$

显然，喷射的测地线集合自然构成一个路径空间。Shen 在下面的引理（[9]）中证明了逆命题。为方便起见，我们也给出证明。

引理 4.4 路径空间 $\mathcal{G}$ 诱导出一个喷射 G，其测地线集合为 $\mathcal{G}$。

证明：设 $(\mathcal{G}, M)$ 是锥形区域 $\mathcal{C}$ 上的路径空间。对于给定的 $y \in \mathcal{C}_x$，由定义 4.1 (i)，存在一条曲线 $\sigma:(-\epsilon,\epsilon) \to M$ in $\mathcal{G}$ with $\sigma(0) = x, \sigma'(0) = y$。定义

$$G^i(y) := -\frac{1}{2}\frac{d^2\sigma}{ds^2}(0),$$

根据定义 4.1 (ii)，它与 σ 的选取无关。我们将验证 G 是一个喷射。对于任意常数 $\lambda > 0$, 令 $\eta(s) := \sigma(\lambda s) \in \mathcal{G}$ （见定义 4.1 (iii)）。于是有

$$G^i(\lambda y) = -\frac{1}{2}\frac{d^2\eta}{ds^2}(0) = -\frac{1}{2}\lambda^2\frac{d^2\sigma}{ds^2}(0) = \lambda^2 G^i(y),$$

这意味着 G^i 是二次正齐次的。此外，对于任意 $\eta : (a, b) \to M$ 属于 $\mathcal{G}$，以及任意固定的 $t \in (a, b)$，定义 $\gamma(s) := \eta(s + t)$。于是我们有

$$\eta'(t) = \gamma'(0), \quad \eta''(t) = \gamma''(0).$$

因此，根据 G^i的定义，我们得到

$$G^i\big(\eta'(t)\big) = G^i\big(\gamma'(0)\big) = -\frac{1}{2}\frac{d^2\gamma^i}{ds^2}(0) = -\frac{1}{2}\frac{d^2\eta^i}{ds^2}(t),$$

这意味着 η 满足以下常微分方程:

$$\frac{d^2\eta^i}{ds^2} + 2G^i\big(\frac{d\eta}{ds}\big) = 0.$$

因此，G 是一个喷射，且 G 的测地线集合与 $\mathcal{G}$重合。 Q.E.D.

在引理 4.4 中，通过对参数变量作不同选择，它（局部地）诱导出 G 的一个射影类 $Proj$(G), 其中每个元素都与 G 射影等价。

给定一个路径空间 $\mathcal{G}$，由引理 4.4 可知，它诱导出一个喷射 G。接着，G 定义了一个半喷射 $\hat{}\mathcal{G}$ （参见 [9]: P_{37}），而 G 的测地线与 $\mathcal{G}$ 的测地线密切相关（参见 [9]: 引理 3.1.1）。因此，在 $\mathcal{G}$中，任意路径都可以局部表示为

$$x^a = x^a(x^1; u, v), \quad (u, v \in R^{n-1},\ 2 \le a \le n),$$

其中 u、v 是自由常数参数。因此，在雅可比行列式不为零的情况下，n 维路径空间中的所有路径仅依赖于 2($n-1$) 个自由常数参数，即:

$$\det\begin{pmatrix} \partial x^a/\partial u & \partial x^a/\partial v \\ \partial y^a/\partial u & \partial y^a/\partial v \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \big(y^a := \frac{dx^a}{dx^1}\big).$$

由此，我们得到定理 1.2，即基于路径空间的参数方程构造喷射。

若将 (4) 写成如下形式

$$x(t) = \sigma(\lambda t + \mu, u, v), \tag{27}$$

其中 λ、μ 是常数，那么对于 $2n$ 个常数参数 λ、μ、u、v，该曲线族满足定义 4.1 (i)(ii)(iii)。例如，例 4.2 中的二维路径空间可以写成如下曲线族:

$$x(s) = \tau(\lambda s + \mu; b_o, v_o) = (0, b_o) + (1, v_o)(\lambda s + \mu) - \frac{1}{3}(0, 1)(\lambda s + \mu)^3,$$
$$\big(\lambda := u,\ \mu := a,\ v_o := \frac{v}{u} + a^2,\ b_o = b - av_o + \frac{1}{3}a^3\big).$$

根据定理 1.2，如果 $\mathcal{A}$ 维流形上的一族曲线定义了一个路径空间，那么 $\mathcal{A}$ 只依赖于 2($n-1$) 个自由常数参数。例如，在 R^n 中，当 $n \ge 3$ 时，所有半径固定的圆都不能定义路径空间，因为此时这些圆依赖于多于 2($n-1$) 个自由常数参数。

现在我们介绍一种构造喷射 G 的方法：将路径空间视为 G 的测地线，并由此确定 G。这类似于 Okubo 从作为指标曲面的超曲面构造 Finlser度量的方法。我们可以从式 (25) 或 (4) 给出的一族曲线出发，确定相应的喷射。

方法（I）：对于由（25）给出的满足（26）的曲线族，实际上我们可以减少一个常数参数，因为（25）可以写成（若 $y_o^1 \neq 0$）

$$x(t) = \sigma(t; x_o, \bar{y}_o) = x_o + \bar{y}_o t + f(t; x_o, \bar{y}_o),$$
$$\big(t := y_o^1 s,\ \bar{y}_o^a := y_o^a / y_o^1,\ \bar{y}_o := (\bar{y}_o^a)\big).$$

设路径空间由（25）确定，并令

$$x = x_o + y_o s + f(s; x_o, y_o), \quad y(= \frac{dx}{ds}) = y_o + f'(s; x_o, y_o)), \tag{28}$$

$$G^i := -\frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{2}f''(s; x_o, y_o)). \tag{29}$$

然后，通过在（29）中利用（28）消去 x_o、y_o、s，即可由（29）得到一个喷射 G，其中 s 是喷射 G 的测地线参数。

方法（II）：设曲线族由参数方程（4）给出，其中含有 2 个（$n-1$）自由常数参数 u、v。这种情况下构造喷射更为方便。引入一个辅助参数 $c > 0$，令

$$x = \sigma(cs; u, v), \quad y = \frac{dx}{ds} = c\frac{d\sigma}{d\hat{s}}(cs; u, v), \quad \hat{s} := cs. \tag{30}$$

理论上，我们可以由（30）将 c、s、u、v 表示为 x、y 的函数。然后将它们代入以下表达式

$$G^i := -\frac{1}{2}\frac{d^2x^i}{ds^2} = c^2\frac{d^2\sigma^i}{d\hat{s}^2}(cs; u, v), \tag{31}$$

我们得到由（31）给出的喷射 G，其中 s 是喷射 G 的测地线参数 .

现在，在下面的例4.5–4.8中，我们使用方法（I）或方法（II），通过消去相应的参数，说明如何从给定的路径空间构造喷射。

例4.5 考虑 $\mathcal{G}$ 上的一族曲线:

$$x(s) = (a, b, c) + (u, v, w)s - (0, 1, 0)h(s),$$
$$\big(h(s) := -\frac{1}{3}(u^3 + w^3)s^3 - (au^2 + cw^2)s^2\big),$$

其中，a、b、c、u、v、w为常数参数。$\mathcal{G}$是一个路径空间。由（28）可得

$$x^1 = a + us, \quad x^3 = c + ws, \quad y^1 = u, \quad y^3 = w. \tag{32}$$

由式 (29)，诱导的喷射 G 为

$$G^1 = -\frac{1}{2}\frac{d^2x^1}{ds^2} = 0, \qquad G^3 = -\frac{1}{2}\frac{d^2x^3}{ds^2} = 0,$$
$$\begin{aligned} G^2 &= -\frac{1}{2}\frac{d^2x^2}{ds^2} = (u^3 + w^3)s + (au^2 + cw^2) \\ &= (u^3 + w^3)s + \big[(x^1 - us)u^2 + (x^3 - ws)w^2\big] \quad \big(by\ (32)\big) \\ &= x^1u^2 + x^3w^2 = x^1(y^1)^2 + x^3(y^3)^2 \quad \big(by\ (32)\big). \end{aligned}$$

G 的黎曼曲率为零，因此它是可度量化的（芬斯勒喷射）（*[11]*）。

例4.6 设 $\mathcal{G}$ 为 R^2上半径固定为 r 的所有圆的集合。我们将 $\mathcal{G}$参数化为

$$x^1(s) = a + r\cos s, \quad x^2(s) = b + r\sin s,$$

其中 a、b 为任意常数参数。 $\mathcal{G}$ 仅依赖于两个自由常数参数。根据定理 1.2， $\mathcal{G}$ 定义了 R^2 上的一个喷射 G，其中 s 是 G 的测地线参数。下面给出该喷射。引入辅助参数 $c > 0$，由式 (30) 可得

$$x^1 = a + r\cos cs, \quad x^2 = b + r\sin cs, \quad y^1 = -cr\sin cs, \quad y^2 = cr\cos cs. \tag{33}$$

然后将式 (33) 的后两个公式代入式 (31)，得到喷射 G，其表达式为

$$G^1 = -c^2 r\cos cs = -\frac{1}{r}y^2\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2},$$
$$G^2 = -c^2 r\sin cs = \frac{1}{r}y^1\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}.$$

这个圆喷射最早出现在 *[9]* （P_{49}）中，即使在局部也不可度量化（*[11]*）。

例4.7 考虑正半平面 R^2_+ 上的半圆族 $\mathcal{G}$，其圆心位于 x^1轴上，半径任意。注意， $\mathcal{G}$ 在平行于 x^2轴的方向上是奇异的。我们可以将 $\mathcal{G}$ 参数化为

$$x^1 = a + b\cos s, \quad x^2 = b\sin s, \quad (x^2 > 0,\ b \geq 0),$$

其中 a、b 为任意常数参数。 $\mathcal{G}$ 仅依赖于两个自由常数参数。根据定理 1.2， $\mathcal{G}$ 定义了R^2_+ 上的一个喷射 G，其中 s 是 G 的测地线参数。引入辅助参数 $c > 0$，由式 (30) 得

$$x^1 = a + b\cos cs, \quad x^2 = b\sin cs, \quad y^1 = -bc\sin cs, \quad y^2 = bc\cos cs. \tag{34}$$

同理，通过从 (34) 中消去 (31) 里的参数 a, b, c, s，可得以 s 为测地线参数的喷射 G:

$$G^1 = -\frac{y^1 y^2}{2x^2}, \quad G^2 = \frac{(y^1)^2}{2x^2}. \tag{35}$$

喷射 G 在 R^2_+ 上正则（任何平行于 x^2 轴的直线都是 G 的测地线）。G 具有各向同性曲率，并且根据 *[2, 11]* 中的方法，它在局部不可度量化。

例4.8 设 B^n 为 R^n 中的单位球， $\mathcal{G}$ 为 B^n 中所有垂直于边界 $S^{n-1} = \partial B^n$ 的圆弧。设 s 为由欧几里得度量诱导的圆弧弧长参数。由 $\mathcal{G}$ 诱导、以 s 为 G 的测地线参数的喷射 G 是什么（参见 *[9]* 中的例4.1.4）？ 我们将证明 G 可表示为

$$G^i = \frac{\langle x, y\rangle y^i - |y|^2 x^i}{1 - |x|^2}, \tag{36}$$

它不能由 *[11]* 度量化。现在，对于任意给定的 p、$q \in S^{n-1}$，在 $\mathcal{G}$ 中存在一段圆弧 γ，其中 γ 在 p 处垂直于 S^{n-1}， q。设 C 为满足 $\gamma \subset C$ 的圆。 C 的圆心和半径分别为

$$\tau(p+q), \quad |p - \tau(p+q)|, \quad (\tau := (1+pq)^{-1}),$$

其中， pq 是 p、q 的欧几里得内积。则 γ 可由方程参数化

$$x(s) = x(s;p,q) = [p-\tau(p+q)]\cos s + |p-\tau(p+q)|p\sin s + \tau(p+q). \tag{37}$$

由于式 (37) 中只有 2$(n-1)$ 个自由常数参数，根据定理 1.2，形式为 (37) 的曲线族定义了一个路径空间。现在，根据 (30) 和 (31)，我们可以由 (37) 给出喷射 G，其中 s 是 G 的测地线参数。引入辅助参数 $c>0$，根据 (30)，令

$$x = [p-\tau(p+q)]\cos cs + |p-\tau(p+q)|p\sin cs + \tau(p+q), \tag{38}$$

$$y = -c[p-\tau(p+q)]\sin cs + c|p-\tau(p+q)|p\cos cs. \tag{39}$$

根据 (31)，我们有

$$2G^i := c^2\big\{[p-\tau(p+q)]^i\cos cs + |p-\tau(p+q)|p^i\sin cs\big\}. \tag{40}$$

经过直接而冗长的计算，我们可以从 (38) 和 (39) 中消去 (40) 里的参数 p、q、c、s（细节从略）。最后，喷射 G 由 (36) 给出。

5 射影完备喷射

对于给定的喷射 G，如果我们知道 G 的所有测地线的一般解，那么在采用另一参数作为测地线参数时，就可以确定一个与 G 射影相关的喷射。现在假设 G 的测地线的一般解在局部由下式给出

$$x = \sigma(t) = \sigma(t;u,v), \qquad \big(u,v\in R^{n-1}\big), \tag{41}$$

其中 t 是 G 的测地线参数，u、v 是自由常数参数。有时，为了消去参数，也可以令 $u=\sigma(0)$ $v=\sigma'(0)$。将变量从 t 变换为 s，其中

$$t = t(s) = t(s;u,v), \quad \frac{dt}{ds} > 0. \tag{42}$$

取辅助参数 $c>0$，令

$$x = \sigma(t(cs);u,v), \qquad y = \frac{dx}{ds} = c\frac{d\sigma}{dt}\frac{dt}{ds}, \tag{43}$$

其中，dt/ds作为 s的函数，在 cs处取值。此外，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{ds^2} &= c^2\frac{d^2\sigma^i}{dt^2}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 + c^2\frac{d\sigma^i}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\\ &= -2G^i(x,\frac{d\sigma}{dt})c^2\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 + c^2\frac{d\sigma^i}{dt}\frac{d}{dt}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)\frac{dt}{ds}\\ &= -2G^i(x,y) + c\frac{d}{dt}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)y^i.\end{aligned} \tag{44}$$

根据（43）将 c、t 表示为 x、y的形式，再将 c、t 代入（44），得到一个喷射$\bar{}$G，其表达式为

$$\bar{G}^i = G^i - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)cy^i = G^i + Py^i, \tag{45}$$

$$\Big(P = P(x,y) := -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)c\Big),$$

$\bar{}$其中 s 是 G 的测地线参数。

引理 5.1 假设喷射 G 的测地线通解由式 (41) 给出。令 s 为另一个参数，它与 t 的关系由式 (42) 给出。那么，与 G 射影等价的喷射 G（其测地线参数为 s）由式 (45) 给出，其中 c、t 由式 (43) 确定。

在某些条件下，喷射可以是射影（正向/负向）完备的，这由定理 1.3 说明。现在我们给出定理 1.3 的证明。

定理 1.3 的证明：设 G 是流形 M 上的一个喷射。对于任意测地线$x = x(t)$，假设 t 属于由 (5) 给出的极大区间 I。

如果 $I = (a, +\infty)$ 或 $I = (-\infty, b)$，我们分别作变量替换，将 t 变为 s：

$$s = \ln(1 - \frac{t}{a}), \quad or \quad s = -\ln(1 - \frac{t}{b}), \tag{46}$$

这两种替换都得到 $s(0) = 0, s'(t) > 0$，以及满足 $s \in (-\infty, +\infty)$ 的 s 的极大区间。如果 $I = (a, b)$，则按 (46) 作变量替换，随后分别得到

$$s \in \big(-\infty, \ln(1 - \frac{b}{a})\big), \quad or \quad s \in \big(-\ln(1 - \frac{a}{b}), +\infty\big).$$

如果 $I = (a, b)$，则作变量替换，将 t 变为 s：

$$s = \ln \frac{1 - t/a}{1 - t/b}, \quad or \quad s = \tan\big[\frac{\pi}{b-a}(t - \frac{a+b}{2})\big] + \tan\big(\frac{b+a}{b-a}\frac{\pi}{2}\big), \tag{47}$$

这两种替换都得到 $s(0) = 0, s'(t) > 0$，以及满足 $s \in (-\infty, +\infty)$ 的 s 的极大区间。因此，通过替换 (46) 或 (47)，我们得到一个与 G 射影等价的（正向/负向）完备喷射。证毕。Q.E.D.

作为定理 1.3 的一个应用，我们给出以下例 5.2–5.4，以展示如何构造与给定喷射射影等价的（正向/负向）完备喷射。

例 5.2 设 F 是强凸域 $\Omega \subset R^n$ 上的芬克度量。Ω 上的闵可夫斯基喷射 $\mathrm{G} = 0$ 的测地线由下式给出

$$x(t) = vt + u, \quad \big(-\frac{1}{F(u, -v)} < t < \frac{1}{F(u, v)}\big),$$

其中 u、$v \in R^n$ 是任意常向量。由 (46)，令 $t = t(s)$ 为

$$s = -\ln\big[1 - tF(u, v)\big]. \tag{48}$$

以 s 为测地线参数，我们得到一个射影平坦且正向完备的喷射$\bar{\mathrm{G}}$，后文将证明它是由 F 诱导的芬斯勒喷射，即

$$\bar{G}^i = \frac{1}{2} F y^i. \tag{49}$$

事实上，由 (2) 和 (11) 可得

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{F(u, v)} - t = \frac{1}{F(vt + u, v)}. \tag{50}$$

于是由 (43) 得到

$$x = vt + u, \quad y = cv\frac{dt}{ds}. \tag{51}$$

由 (51) 和 (50) 可清楚看出

$$F(x,y)=cF(vt+u,v)\frac{dt}{ds}=c. \tag{52}$$

因此，由（45）、（50）和（52）可知，喷射 G 由（49）给出。

例5.3 在例5.2中，由（47）可得，将 $t=t(s)$ 设为

$$s=\ln\frac{1+tF(u,-v)}{1-tF(u,v)}. \tag{53}$$

令 s 为测地线参数，我们得到一个射影平坦且完备的喷射 G，下面将证明它是由克莱因度量 $\bar{F}(x,y):=\big[F(x,y)+F(x,-y)\big]/2$ 诱导的芬斯勒喷射，即

$$\bar{G}^i(x,y)=\frac{1}{2}\big[F(x,y)-F(x,-y)\big]y^i. \tag{54}$$

首先，由（53）可得

$$\frac{dt}{ds}=\frac{\big[1-tF(u,v)\big]\big[1+tF(u,-v)\big]}{F(u,v)+F(u,-v)}, \tag{55}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)=\frac{F(u,-v)-F(u,v)-2tF(u,v)F(u,-v)}{F(u,v)+F(u,-v)}. \tag{56}$$

其次，由（43）可得

$$x=vt+u,\quad y=cv\frac{dt}{ds},$$

由此可得

$$F(x,y)=F(vt+u,v)c\frac{dt}{ds},\qquad F(x,-y)=F(vt+u,-v)c\frac{dt}{ds}. \tag{57}$$

将 (11)、(14) 和 (55) 代入 (57)，得到

$$c=F(x,y)+F(x,-y),\quad t=\frac{F(x,y)F(u,-v)-F(x,-y)F(u,v)}{F(u,v)F(u,-v)[F(x,y)+F(x,-y)]}. \tag{58}$$

最后，由 (58) 和 (56)，根据 (45) 可知，喷射 $\bar{\mathrm{G}}$ 由 (54) 给出。

例5.4 对于例5.2中的喷射 G，我们将采用一种不同于例5.3的方法使 G 完备；实际上，这是利用 (46) 使由芬克度量 F 诱导的芬斯勒喷射完备。对于 G 的一条测地线 $x(t)=vt+u$，令

$$s=\ln\Big[1-\frac{\ln(1-tF(u,v))}{a}\Big],\quad a:=\ln\Big[1+\frac{F(u,v)}{F(u,-v)}\Big].$$

与例5.3中的计算类似，我们得到如下射影平坦且完备的喷射 G:

$$\bar{G}^i(y)=G_F^i(y)+\frac{1}{2}\frac{F(y)}{\ln\frac{F(-y)}{F(y)+F(-y)}}y^i,\quad \Big(G_F^i(y):=\frac{1}{2}F(y)y^i\Big).$$

$\bar{\mathrm{G}}$ 具有数量曲率，实际上，我们可以使用 *[2]*中的方法验证 G 不可度量化。

例 5.5 对于例4.7中所示的 R^2_+ 上的半圆族 $\mathcal{G}$ ，我们可以将它们参数化为以下形式

$$x^1 = u - v\sin t, \quad x^2 = v\cos t, \quad (x^2 > 0,\ v \geq 0), \tag{59}$$

其中， u, v 为任意常数参数。我们在例4.7中证明，由 $\mathcal{G}$ 确定的喷射G由式(35)给出，即

$$G^1 = -\frac{y^1 y^2}{2x^2}, \quad G^2 = \frac{(y^1)^2}{2x^2}. \tag{60}$$

我们可以使G在锥形区域 $\mathcal{C}$ 上射影完备，其中从 $TR^2_+ \setminus \{0\}$中删去了方向(0,1)。由于对于(59)中的任意 u, v， $-\pi/2 < t < \pi/2$，由(47)可令

$$s = \tan t.$$

于是由(45)可得一个与G射影等价的完备喷射 $\bar{}$G，其射影因子 P 由下式给出

$$P = c\Big[-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\frac{dt}{ds}\big)\Big]_{t=cs} = c\big[\cos t \sin t\big]_{t=cs} = \frac{c^2 s}{1 + c^2 s^2}. \tag{61}$$

现在由(43)可得

$$x^1 = u - \frac{vcs}{\sqrt{1 + c^2 s^2}}, \qquad x^2 = \frac{v}{\sqrt{1 + c^2 s^2}},$$
$$y^1 = \frac{-vc}{(1 + c^2 s^2)^{3/2}}, \qquad y^2 = \frac{-bc^2 s}{(1 + c^2 s^2)^{3/2}},$$

由此可得

$$s = -\frac{x^2 y^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2}, \qquad c = -\frac{(y^1)^2 + (y^2)^2}{x^2 y^1}.$$

将上面的 s, c 代入(61)，得到 $P = -y^2/x^2$。因此，喷射 $\bar{}$G由下式给出 y

$$\bar{G}^1 = G^1 + Py^1 = -\frac{3y^1 y^2}{2x^2}, \quad \bar{G}^2 = G^2 + Py^2 = \frac{(y^1)^2 - 2(y^2)^2}{2x^2}.$$

$\bar{}$G 在锥形区域 $\mathcal{C}$ 上是完备的，但沿方向 (0, 1) 不完备。我们不知道式（60）中的喷射 G 是否能在 $TR^2 \setminus \{0\}$上射影完备。此外， $\bar{}$G 具有各向同性曲率，且根据 *[2, 11]*中的方法，它在局部不可度量化。

参考文献

[1] R. Bryant, 《常曲率芬斯勒 2-球面的测地线可逆性》, 《受 S. S. Chern 启发》, 95-111, 南开数学丛书, 第 11 卷, World Sci. Publ., 新泽西州哈肯萨克, 2006。[2] I. Bucataru 和 Z. Muzsnay, 芬斯勒可度量化各向同性喷射与希尔伯特第四问题, 《澳大利亚数学会杂志》97 (2014), 27-47。[3] S. G. Elgendi 和 Z. Muzsnay, 喷射的全纯不变射影变形的可度量化性, 《加拿大数学通报》, 2020。

[4] L. Huang 和 X. Mo，通过导航问题研究芬斯勒度量的测地线，《美国数学会会刊》139 (8) (2011)，3015-3024。[5] Y. Li、X. Mo 和 Y. Yu，具有数量曲率的喷射的逆问题，《国际数学杂志》30(6)，2019。[6] B. Li 和 Z. Shen，各向同性曲率喷射，《国际数学杂志》，2019。[7] C. Robles，常曲率兰德斯空间中的测地线，《美国数学会汇刊》359 (2007)，1633-1651。[8] Z. Shen：黎曼-芬斯勒几何中的射影相关爱因斯坦度量，《数学年刊》320(2001)，625-647。[9] Z. Shen：喷射与芬斯勒空间的微分几何，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，2001。[10] G. Yang，射影喷射几何中的若干类喷射，《微分几何及其应用》29 (2011)，606-614。[11] G. Yang，关于数量曲率喷射及其可度量化性，《几何分析杂志》，2022（即将出版）。[12] G. Yang，哈梅尔-芬克函数模型上的喷射，预印本。

Guojun Yang 四川大学数学
系 中国四川成都 610064
yangguojun@scu.edu.cn