arXiv:2301.00517v1 [math.AG] 2 Jan 2023

对数霍奇上同调中的对应

Charles Godfrey 太平洋西北国家
实验室charles.godfrey@pnnl.gov

2023年1月3日

摘要

我们在任意特征的完美域上构造对数霍奇理论中的对应。这些对应由带对数极点的微分形式层的上同调类表示，值得注意的是，它们在簇的笛卡尔积上具有对数零点。从一个角度看，这推广了 Chatzistamatiou 和 Rülling 的工作，他们在任意特征的完美域上发展了（非对数）霍奇对应；从另一个角度看，我们通过放宽所考虑对应的有限性和严格性条件，对 Binda、Park 和 Østvær 关于对数霍奇对应的较新工作作出了部分推广。

1 引言

一般来说，两个代数簇之间的对应X和Y定义在域k上的一个循环或上同调类，位于它们的乘积$X\times Y$上。对这类对象的研究（至少）可追溯至 Lefschetz[Lef53], ，它们在关于代数循环的著名猜想中占据重要地位（例如参见 [Voi14]），也与 Voevodsky 的动机理论密切相关（例如参见 [MVW06]）。

在许多代数几何研究领域中，研究者已经普遍采用由以下对象构成的偶(X,Δ_X)：一个簇 X 以及其上的一个除子 Δ_X，其中 X。这些领域包括簇的模空间（其中偶推广了[DM69]中的带标记点的曲线）、双有理几何（其中偶自然出现，例如作为奇点强消解的结果 [KM98]），以及对数几何（在这种情形下，允许对除子作大幅推广 Δ_X [Ogu18]）。自然会想到，在偶这一范畴中是否存在对应的类似物；为此人们已作出一些努力，例如发展对数动机范畴 [BPØ20]。

本文聚焦于偶对 (X,Δ_X) 的对数霍奇上同调对应，其中 X 是完美域 k 上的光滑（但不一定是真）簇，且 Δ_X 是 X 上的简单正规交叉除子。这些上同调群可以描述为

$$H^*(X,\Delta_X)=\bigoplus H^q(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X)), \tag{1.1}$$

其中 $\Omega_X(\log\Delta_X)$ 是微分 1-形式层，定义在 X 上，沿 Δ_X 有对数极点，而 $\Omega^p_X(\log\Delta_X)$是其 p次外幂。此外，我们还考虑一种推广情形：此时 X 带有一个支撑族 Φ_X，并将右侧的普通上同调群（见式（1.1））替换为在 Φ_X中的带支撑的上同调，即 $H^q_{\Phi_X}(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X))$。允许支撑极大地拓展了我们结果的适用范围：例如，在既非 $Z\subset X\times Y$ 也非 X 在 Y 上为真 k，但 Z在 X 和 Y上均为真[1] 的情形下，这使我们能够构造与循环 $Z\subset X\times Y$ 相关的对应。

研究这一特定偶对上同调中的对应，有多方面的动机：

[1]这种循环自然产生的一种方式，可能是取非真簇之间双有理等价图像的闭包。

本研究是在作者于华盛顿大学数学系攻读博士期间完成的。作者部分获得了华盛顿大学数学系研究生研究奖学金的资助，也获得了美国国家科学基金会项目 DMS-1440140 的资助；该项目由数学科学研究所管理，作者在 MSRI 的「双有理几何与模空间」项目期间驻留于此。

• 类比簇的情形（即不带辅助除子／对数结构），我们猜想，乔氏循环层次上的对应更为基础，而对数霍奇上同调中的许多对应都可由乔氏对应经由循环态射得到。然而，截至本文撰写之时，关于偶或对数概形的乔氏上同调尚无完整成熟的理论（尽管这方面已取得显著进展，例如见 [Bar18；BBG22]）。相比之下，对数霍奇上同调已相当成熟，早在 [Del71] 中便已出现。

• 对应在（非对数）霍奇上同调中已得到重要应用。例如，[CR11] 利用对应证明了完美域上正特征光滑簇的结构层 $H^i(X,\mathcal{O}_X)$ 的上同调群 X 具有双有理不变性。事实上，尝试将类似策略应用于对数霍奇上同调，以获得关于上同调群相对于（某个受限类的）双有理等价 $H^i(X,\mathcal{O}_X(-\Delta_X))$ 不变性的结果，正是本工作的最初动机。最终，这一尝试未能成功，详情见附录 A。

• 近年来，人们开始关注将对数霍奇上同调视为完美域上对数概形的动机范畴上的可表函子 [BPØ20，§9]。尽管该工作也构造了一些对应，但它们仅限于那些与循环的对数霍奇上同调类相关的对应 $Z\subset X\times Y$，这些类在上是有限的 X，并且还满足额外的严格性（在对数几何意义下）条件；我们去除了这些限制。

我们构造的对应来自某些同时具有对数极点和 对数零点的霍奇类。我们的主要结果如下：

定理 1.2 (= 定理 4.1)。 一个类 $\gamma\in H^j_{P(\Phi_X,\Phi_Y)}(X\times Y,\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))$ 定义了同态

$$\mathrm{cor}(\gamma):H^q_{\Phi_X}(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X))\to H^{q+j-d_X}_{\Phi_Y}(Y,\Omega^{p+i-d_X}_Y(\log\Delta_Y))$$

由公式 $\mathrm{cor}(\gamma)(\alpha):=\mathrm{pr}_{Y*}(\mathrm{pr}_X^*(\alpha)\smile\gamma)$ 给出。此外，若 (Z,Δ_Z,Φ_Z) 是另一个带支撑的简单正规交对，且 $\delta\in H^{j'}_{P(\Phi_Y,\Phi_Z)}(Y\times Z,\Omega^{i'}_{Y\times Z}(\log\Delta_{Y\times Z})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y))$，那么

$$\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}(\delta))\in H^{j+j'-d_Y}_{P(\Phi_X,\Phi_Z)}(X\times Z,\Omega^{i+i'-d_Y}_{X\times Z}(\log\Delta_{X\times Z})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))\ and$$

$$\mathrm{cor}(\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}(\delta)))=\mathrm{cor}(\delta)\circ\mathrm{cor}(\gamma)$$

作为同态 $H^q_{\Phi_X}(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X))\to H^{q+j+j'-d_X-d_Y}_{\Phi_Z}(Z,\Omega^{p+i+i'-d_X-d_Y}_Z(\log\Delta_Z))$。

在上述内容中，$\Delta_{XY}:=\mathrm{pr}_X^*\Delta_X+\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y$是 $X\times Y$上的一个简单正规交叉除子。对于 $\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)$中微分形式的出现，有一个简单的启发式解释：在复数域上，当X和 Y 都是真时，类$\mathrm{cor}(\gamma)(\alpha):=\mathrm{pr}_{Y*}(\mathrm{pr}_X^*(\alpha)\smile\gamma)$ 可以显式地计算为如下形式的积分

$$\int_X\alpha(x)\wedge\gamma(x,y),\tag{1.3}$$

并且只有当α沿Δ_X的对数极点被形式$\gamma(x,y)$沿原像$\mathrm{pr}_X^*\Delta_X$的互补零点抵消时，这个积分才有限。

我们的证明定理 1.2 大量依赖于此前关于带支撑的霍奇上同调的研究[CR11, §2] 及其对数变体的研究 [BPØ20, §9]。 第 2 节简要总结了这些结果。关键的新技术要素是一个基变换公式，涉及笛卡尔方块中推前与拉回操作的相互作用，该公式在第 3 节中得到证明。 第 4 节包含主定理的证明。

1.1 致谢

感谢 Daniel Bragg、Yun Hao、Sarah Scherotzke、Nicolò Sibilla 和 Mattia Talpo 的宝贵交流；感谢 Lawrence Jack Barrott 就周与霍奇的对数方面进行了启发性的邮件讨论；也感谢我的导师 Sándor Kovács 与我进行了许多富有见地的讨论。此外，还要感谢 2019年春季MSRI研究生研讨班的参与者，尤其是 Giovanni Inchiostro 和组织者 FatemehRezaee，他们对本文早期工作的反馈十分有益。

2 带支撑的对数霍奇上同调的函子性

2.1 支撑

为了获得适用于簇之间对应的结果 X 和 Y，其中 X与 Y 都不是真概形，因此有必要研究带支撑的上同调，也称为局部上同调。本小节内容的主要参考来源是 [R&D，§IV]。令 X 为一个诺特概形。

定义 2.1 ([R&D，§IV], [CR11，§1。1])。 概形 Φ **上的支撑族** X 是一个非空集合Φ，由 X 的闭子集构成，并满足

- 若 $C \in \Phi$ 且 $D \subset C$ 是一个闭子集，则 $D \in \Phi$。
- 若 C， $D \in \Phi$ 则 $C \cup D \in \Phi$。

例 2.2. $\Phi =$ { 的所有闭子集构成一个支撑族。更一般地，若 $\mathcal{C}$ 是 $C \subset X$的任意闭子集集族，则存在一个包含 $\mathcal{C}$ 的最小支撑族 $\Phi(\mathcal{C})$（具体而言，$\Phi(\mathcal{C})$ 由$C_i \in \mathcal{C}$中元素的闭子集 $Z_i \subset C_i$的有限并 $\bigcup_i Z_i$构成）。取 $\Phi = \Phi(\{X\})$即可恢复前一个例子。一个更有趣的例子是，对于某个固定的 $p \in \mathbb{N}$，$\Phi =$ {为闭集的情形 $Z \subseteq X \mid \dim Z \leq p$}。

X 上的支撑族与 X 上点的某些特化闭子集集族之间存在密切关系；我们也可以考虑支撑族层——更多细节请参阅 [R&D，§IV。1]。

若 $f : X \to Y$ 是诺特概形之间的态射，且 Ψ 是 Y上的支撑族，则$\{f^{-1}(Z) \mid Z \in \Psi\}$是 X 的一个闭子集族，并且对并封闭，但一般来说不对取闭子集封闭。

定义 2.3。 $f^{-1}(\Psi)$是X 上包含 $\{f^{-1}(Z) \mid Z \in \Psi$的最小支撑族 }.

设 Φ 是 X上的一个支撑族。记号/术语 $f|_\Phi$ **是真态射** 表示对于每个 $C \in \Phi$， $f|_C$ 都是真态射。若 $f|_\Phi$ 是真态射，则对于每个 $C \in \Phi$， $f(C) \subset Y$ 都是闭的，并且实际上

$$f(\Phi) = \{f(C) \subset Y \mid C \in \Phi\} \tag{2.4}$$

是 Y上的一个支撑族。这里的关键在于，若 $D \subset f(C)$ 是闭的，则 $f^{-1}(D) \cap C \in \Phi$和 $D = f(f^{-1}(D) \cap C)$。

定义 2.5。 带支撑的概形 (X, Φ_X) 是一个概形 X，并配有 X上的一个支撑族Φ_X 。

定义 2.6。 带支撑概形之间的**推前态射** $f : (X, \Phi_X) \to (Y, \Phi_Y)$ 是底层概形之间的态射 $f : X \to Y$，满足$f|_{\Phi_X}$ 是真态射且 $f(\Phi_X) \subset \Phi_Y$。**拉回态射** $f : X \to Y$ 是一个态射 $f : X \to Y$，满足 $f^{-1}(\Phi_Y) \subset \Phi_X$。

这些态射构成两个不同的范畴，它们的对象集均为带支撑的概形 (X, Φ_X)，分别以推前态射和拉回态射为态射（验证很简单；例如，推前态射的复合仍是推前态射，因为真态射的复合仍是真态射）。带支撑的概形为描述

局部上同调的函子性提供了自然的背景。设 $\mathscr{F}$ 是带支撑的概形 (X,Φ_X)上的阿贝尔群层。[2]

定义 2.7. 带支撑的截面层 $\mathscr{F}$，记作 $\underline{\Gamma}_\Phi(\mathscr{F})$，定义为

$$\underline{\Gamma}_\Phi(\mathscr{F})(U)=\{\sigma\in\mathscr{F}(U)\mid \operatorname{supp}\sigma\in\Phi_X|_U\} \tag{2.8}$$

对每个开集 $U\subset X$（此处 $\Phi_X|_U$ 是 $\iota^{-1}\Phi_X$ 的简写，其中 $\iota: U\to X$ 是包含映射）。更明确地说：对于局部截面 $\sigma\in\mathscr{F}(U)$，$\sigma\in\underline{\Gamma}_\Phi(\mathscr{F})(U)$ 表示 $\operatorname{supp}\sigma=C\cap U$，其中$C\subset\Phi_X$是一个闭集。

函子 $\underline{\Gamma}_\Phi$ 是一个正合函子的右伴随，例如，$\mathbf{Ab}_\Phi(X)\subset\mathbf{Ab}(X)$ 是 X 上支撑包含于 Φ的阿贝尔层子范畴的包含映射；因此，$\underline{\Gamma}_\Phi$ 是左正合的，并保持内射对象。在 $\Phi=\Phi(Z)$对某个闭集 $Z\subset X$的情形下，证明见 [Stacks，Tag 0A39，Tag 0G6Y，Tag 0G7F]——一般情形则可通过将 $\underline{\Gamma}_\Phi$ 写成滤过余极限得到：

$$\underline{\Gamma}_\Phi=\operatorname{colim}_{Z\in\Phi}\underline{\Gamma}_Z.$$

$\underline{\Gamma}_\Phi$ 的右导出函子记作 $R\underline{\Gamma}_\Phi$。在 X 上取整体截面，得到 $\mathscr{F}$的**带支撑的截面**：
$\Gamma_\Phi(\mathscr{F}):=\Gamma_X(\underline{\Gamma}_\Phi(\mathscr{F}))$ 这也是左正合的，其导出函子（的上同调）给出 Φ上的**带支撑的上同调**：
$H^i_\Phi(X,\mathscr{F}):=R^i\Gamma_\Phi(\mathscr{F})$。

命题 2.9。带支撑的上同调具有以下函子性：(i) 若 $f:(X,\Phi_X)\to(Y,\Phi_Y)$ 是带支撑的概形之间的拉回态射，$\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$ 分别是 X，Y 上的阿贝尔群层，并且

$$\varphi:\mathscr{G}\to f_*\mathscr{F}\ \textit{is a morphism of sheaves,} \tag{2.10}$$

则存在一个自然态射 $R\underline{\Gamma}_\Phi\mathscr{G}\to Rf_*R\underline{\Gamma}_\Phi\mathscr{F}$。类似地，若 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是拟凝聚的，则存在自然态射 $R\underline{\Gamma}_\Phi\mathscr{G}\to Rf_*R\underline{\Gamma}_\Phi\mathscr{F}$。

(ii) 若 $f:(X,\Phi_X)\to(Y,\Phi_Y)$ 是一个推前态射，$\mathscr{F},\mathscr{G}$ 是 X,上的阿贝尔群层，Y 分别，并且

$$\psi:Rf_*\mathscr{F}\to\mathscr{G}\ \textit{is a morphism in the derived category of}\ X, \tag{2.11}$$

则存在一个自然态射 $Rf_*R\underline{\Gamma}_\Phi(\mathscr{F})\to R\underline{\Gamma}_\Phi\mathscr{G}$。

命题的两部分均可由 [Stacks, Tag 0G78]；(i) 在 [CR11, §2 中有详细讨论。1] 而 (ii) 可从 [CR11, §2 中推得。2] (尽管似乎并未明确陈述)。另请参见 [BPØ20, Constructions 9.4.2, 9.5。3]

2.2 带对数极点的微分形式

设 k 是一个完美域。

定义 2.12. 一个 **带支撑的简单正规交对** (X,Δ_X,Φ_X)之上 k是一个光滑概形 X，它在 k 上分离且为有限型，并带有支撑族 Φ_X，以及一个约化有效除子 Δ_X，其定义在 X 上，使得 $\operatorname{supp}\Delta_X$ 具有简单正规交性质；具体而言，对于任意点 $x\in X$，存在正则参数 z_1、…、$z_c\in\mathcal{O}_{X,x}$，使得 $\operatorname{supp}\Delta_X=V(z_1\cdot z_2\cdots z_r)$ 在 x 的某个扎里斯基邻域上成立。[3]带支撑的简单正规交对 **的内部** U_X 是 (X,Δ_X,Φ_X)

$$U_X:=X\setminus\operatorname{supp}\Delta_X \tag{2.13}$$

U_X 在 X 中的包含映射记为 $\iota_X:U_X\to X$。

[2]简而言之，$\mathscr{F}$ 是 X上的阿贝尔群层。[3]这等价于更一般的定义 [BPØ20，定义 7.2。1] 当基底概形为 $\operatorname{Spec}k$时的情形，而这正是我们需要的。

这里， $\operatorname{supp}\Delta_X$ 表示 Δ_X 的**支撑**（若 $\Delta_X=\sum_i a_iD_i$，其中 D_i 是素除子，则$\operatorname{supp}\Delta_X=\cup_i D_i$）。类似地，令 $j_X:\operatorname{supp}\Delta_X\to X$ 表示显然的包含映射。

定义 2.14 (参见 [CR11，定义 1.1。4])。一个 **拉回态射** $f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$ **支撑的简单正规交叉对**是一个 $f:X\to Y$ 带支撑的底层概形之间的拉回态射，满足 $f^{-1}(\operatorname{supp}\Delta_Y)\subset\operatorname{supp}\Delta_X$；等价地，$f$ 限制为一个态射 $f|_{U_X}:U_X\to U_Y$。一个 **推前态射** $f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$ **支撑的简单正规交叉对**是一个带支撑的底层概形之间的推前态射，满足 $f^*\Delta_Y=\Delta_X$。

注意，如果 $f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$ 是一个推前态射，那么 $U_X=f^{-1}(U_Y)$，因此例如，如果 $f:X\to Y$ 是真态射，那么诱导映射 $U_X\to U_Y$ 也是真态射。

约定 2.15 (比较 [CR11，第 1.1 页。5])。带支撑的简单正规交叉对之间的态射 $f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$ 是平坦、真、浸入等，当且仅当相应的底层概形态射 $f:X\to Y$ 具有相同性质。

带支撑的简单正规交叉对构成的图表

$$\begin{array}{ccc}(X',\Delta_{X'},\Phi_{X'}) & \xrightarrow{g'} & (X,\Delta_X,\Phi_X)\\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ (Y',\Delta_{Y'},\Phi_{Y'}) & \xrightarrow[g]{} & (Y,\Delta_Y,\Phi_Y)\end{array}\tag{2.16}$$

是**笛卡尔** 的，当且仅当相应的底层概形图表

$$\begin{array}{ccc}X' & \xrightarrow{g'} & X\\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle f}\\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y\end{array}\tag{2.17}$$

是笛卡尔的。[4]

这些术语意在表明，推（分别为拉）态射会在对数霍奇上同调上诱导推前（分别为拉回）映射，下面将对此加以说明。

若 (X,Δ_X) 是一个简单正规交叉对，或者更一般地说，是一个有限型正规分离概形 X 上 k 连同一列有效 Cartier 除子 D_1，…，$D_N\subseteq X$ 其和为 $\Delta_X=\sum_i D_i$，那么它带有一个带对数极点的微分形式 $\Omega_X(\log\Delta_X)$层。在 (X,Δ_X,Φ_X)为简单正规交叉的情形下，此层及其性质见 [EV92，§2]。关于$\Omega_X(\log\Delta_X)$ 在更一般的对数概形情形下的定义与处理，请参见 [Ogu18，§IV]。

在下面的一些计算中，以下具体的局部描述会非常有用。设 $z_1,z_2,\dots,z_n$ 是点 $x\in X$ 处的局部坐标，且在 x 的一个邻域内有 $\operatorname{supp}\Delta_X=V(z_1z_2\cdots z_r)$。回顾一下，由于 X 光滑，微分 $dz_1,dz_2,\dots,dz_n$ 在 x 的一个邻域内自由生成 Ω_X。

引理 2.18 (例如参见 [EV92, §2])。截面 $\frac{dz_1}{z_1},\dots,\frac{dz_r}{z_r},dz_{r+1},\dots,dz_n$ 自由生成 $\Omega_X(\log\Delta_X)$在 x 的一个邻域内。

给定 $\Omega_X(\log\Delta_X)$，我们可以构造外幂

$$\Omega_X^p(\log\Delta_X):=\bigwedge^p\Omega_X(\log\Delta_X),\tag{2.19}$$

并结合引理 2.18 与（2.19）可得到 $\Omega_X^p(\log\Delta_X)$的具体局部描述；特别是，我们看到 $\Omega_X^{\dim X}(\log\Delta_X)=\omega_X(\Delta_X)$。

[4]如果我们接受对数几何的红色药丸，那么似乎只要求诱导映射 $U_X\to U_Y$ 的内部满足平坦性、适当性、笛卡尔性等条件，就几乎更合理了。然而，在下面的一些证明中，我们确实使用了给定定义中更强的限制。

定义 2.20. 带支撑的对数霍奇上同调的带支撑对数光滑对(X,Δ_X,Φ_X)定义为

$$H^d(X,\Delta_X,\Phi_X)=\bigoplus_{p+q=d} H^q_\Phi(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X)) \tag{2.21}$$

这里H^q_Φ表示关于支撑族Φ_X的局部上同调。对于连通的X，我们定义$H_d(X,\Delta_X,\Phi_X):=H^{2\dim X-d}(X,\Delta_X,\Phi_X)$；一般情形下，令$H_d(X,\Delta_X,\Phi_X)=\bigoplus_i H_d(X_i,\Delta_{X_i},\Phi_{X_i})$，其中$X_i$是$X$的连通分支。

设$f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$是带支撑的简单正规交叉对之间的拉回态射。

引理 2.22 ([Ogu18，命题 2.3。1] + (2.19))。映射f诱导出一个层态射

$$\begin{aligned} &f^*\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)\xrightarrow{df^\vee}\Omega^p_X(\log\Delta_X)\ \textit{adjoint to a morphism}\\ &f^*\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)\xrightarrow{df^\vee}\Omega^p_X(\log\Delta_X)\ \textit{for all } p. \end{aligned} \tag{2.23}$$

该引理的核心内容是，当我们拉回σ上的对数微分形式(Y,Δ_Y)时，它不会产生沿≥ 1的Δ_X阶极点。将前一个引理与命题2.9结合可得：

命题 2.24 ([BPØ20, §9.1-2], 另见 [CR11, §2.1])。对于每个拉回态射$f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$，都有函子性态射

$$R\underline{\Gamma}_\Phi\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)\to Rf_*R\underline{\Gamma}_\Phi\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)\ \textit{for all } p \tag{2.25}$$

特别地，对于每个p，q都有函子性同态

$$f^*:H^q_\Phi(Y,\Omega^p_Y(\log\Delta_Y))\to H^q_\Phi(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X)) \tag{2.26}$$

因此（对$p+q=d$求和）有函子性同态

$$f^*:H^d(X,\Delta_X,\Phi_X)\to H^d(Y,\Delta_Y,\Phi_Y) \tag{2.27}$$

由推前态射$f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$诱导的映射$f_*:H_d(X,\Delta_X,\Phi_X)\to H_d(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$可以通过结合永田紧化与 Grothendieck 对偶得到。

引理 2.28 ([BPØ20, §9.5], 另见 [CR11, §2.3])。设$f:(X,\Delta_X,\Phi_X)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$是一个具有支撑的等维对数光滑对之间的推前态射，且满足如下条件。于是令$c=\dim Y-\dim X$，对于每个p都有凝聚层复形之间的函子性态射

$$Rf_*R\underline{\Gamma}_{\Phi_X}(\Omega^p_X(\log\Delta_X))\to R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y}\Omega^{p+c}_Y(\log\Delta_Y)[c] \tag{2.29}$$

在上同调上诱导映射

$$f_*:H^q_{\Phi_X}(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X))\to H^{q+c}_{\Phi_Y}(Y,\Omega^{p+c}_Y(\log\Delta_Y)) \tag{2.30}$$

对于所有q。

由于这些推前映射会用于下文的计算，我们先对它们作一番说明。开始之前，先简述一下我们当前设定下的对偶性：由于我们只在$\operatorname{Spec}k$上工作，因此可以使用相容的规范化对偶化复形——也就是说，若$\pi:Z\to\operatorname{Spec}k$是一个分离有限型$k$-概形，则$\pi^!\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}k}$是一个对偶化复形 Stacks，标签 0E2S，标签 0FVU]。我们将反复利用对偶化与微分形式之间的关系：由引理2.18可知，楔积给出一个完美配对

$$\Omega^p_X(\log\Delta_X)(-\Delta_X)\otimes\Omega^{\dim X-p}_X(\log\Delta_X)\to\omega_X \tag{2.31}$$

（另见 [Har77，推论 III.7。13]），因此 $\Omega_X^{\dim X-p}(\log \Delta_X) \simeq R\mathcal{H}om_X(\Omega_X^p(\log \Delta_X)(-\Delta_X), \omega_X)$。这里的导出层 Hom $R\mathcal{H}om_X$ 与通常的层 Hom 一致，因为 $\Omega_X^p(\log \Delta_X)(-\Delta_X)$ 是局部自由的。另一方面，的对偶化函子 X 为 $R\mathcal{H}om_X(\Omega_X^p(\log \Delta_X)(-\Delta_X), \omega_X[\dim X])$，其中$\omega_X = \Omega_X^{\dim X}$。由此可见，若使用移位后的版本 $\Omega_X^p(\log \Delta_X)(-\Delta_X)[p]$，涉及微分形式层的格罗滕迪克对偶计算会更加对称且更易预测；例如，此时我们有恒等式

$$\Omega_X^{\dim X-p}(\log \Delta_X)[\dim X - p] \simeq R\mathcal{H}om_X(\Omega_X^p(\log \Delta_X)(-\Delta_X)[p], \omega_X[\dim X])$$

现在，我们需要将 $f : X \to Y$紧化。

定理 2.32 ([Nag63, §4 定理 2], [Con07, 定理 4.1])。设 S 是一个拟紧拟分离概形，并设 $X \to S$ 是一个有限型分离态射。那么存在一个S-概形的稠密开浸入 $X \hookrightarrow \bar{X}$ 使得 $\bar{X}$ 是真态射。

利用 定理 2.32 我们得到概形态射

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{\iota} & \bar{X} \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ & & Y \end{array} \tag{2.33}$$

其中 $\iota : X \to \bar{X}$ 是一个稠密开浸入，而 $\bar{f} : \bar{X} \to Y$ 是 真态射。注意，$\bar{X}$ 不一定在 k上光滑；并且在缺乏奇点消解[5] 的情况下，甚至没有办法使 $\bar{X}$光滑。这意味着我们无法期望将 $\bar{X}$提升为一个简单正规交叉对 $(\bar{X}, \Delta_{\bar{X}})$。然而，我们仍然有一个除子 $\Delta_{\bar{X}} := \bar{f}^*\Delta_y$ 在 $\bar{X}$上。克服这些困难的一种方法，是为可能奇异的 $\bar{X}$ 赋予一个对数结构，在某种意义上与 $\Delta_{\bar{X}}$相关联，其在 X 上的限制与由简单正规交叉除子自然定义的对数结构一致Δ_X。

形式上，我们使用 $\bar{X}$ 沿态射 $\bar{f} : \bar{X} \to Y$从 (Y, Δ_Y) [Ogu18,§III.1.6-7] 拉回的对数结构。由于 $(Y, \Delta_Y = \sum_{i=1}^N D_i^Y)$ 是一个简单正规交叉对，其相应的对数结构是 Deligne-Faltings [Ogu18, §III.1.7]，并且可以用理想层包含映射序列$\mathcal{O}_Y(-D_i^Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y$来编码。于是，$\bar{X}$ 上的拉回对数结构可以用理想层包含映射序列

$$\bar{f}^{-1}\mathcal{O}_Y(-D_i^Y) \cdot \mathcal{O}_{\bar{X}} = \mathcal{O}_{\bar{X}}(-\bar{f}^*D_i^Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}.$$

引理 2.28 中的推前态射是利用 p 上的对数微分形式层 $\bar{X}$ 相对于 k 的定义的，具体如 [Ogu18, §IV.1, V.2] 所述——我们将其记为[6] $\Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})$。我们需要的基本性质如下：

- $\Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})$ 是 X 上的相干层，并带有一个函子性态射

$$\Omega_Y^p(\log \Delta_Y) \to \overline{f}_* \Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}}).$$

  相干性可由以下方式得到：首先，(Y, Δ_Y) 上的对数结构是相干的（[Ogu18，§III.1。9]），因此其拉回到$\bar{X}$ 上的对数结构也是相干的（例如参见 [Ogu18，定义 III.1.1.5，注 III.1.1。6]）。接着，[Ogu18，推论 IV.1.2。8] 表明 $\Omega^1_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})$ 是一个相干层，因此其 p-次外幂也是相干层。所需的函子性态射可由 [Ogu18，命题 IV.1.2。15]得到。

[5]在撰写本文时，这适用于以下情形 $\operatorname{char} k = p > 0$ 以及 $\dim X > 3$。[6]这是一种记号滥用，因为据我们所知，这个层的构造与上文针对简单正规交叉对所描述的构造并不相同引理2.18，然而，使用 [Ogu18] 的记号似乎不适合我们的目的，因为我们希望强调这些并不是普通微分形式 $\Omega^p_{\overline{X}}$，

• 存在一个自然同构 $\Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})|_X \simeq \Omega^p_X(\Delta_X)$。这可通过注意到 (X, Δ_X) 和 $\bar{X}$ 上的对数结构都是 $(Y, \Delta_Y)^{\bar{}}$上的对数结构分别沿 f 和 f 拉回得到的（对于 (X, Δ_X)，这由定义 2.14可知；而对于后者，这是我们定义 $\bar{X}$上的对数结构的方式）。因此，考察式 (2.33)，我们发现 $\bar{X}$ 上的对数结构限制为 (X, Δ_X)上的对数结构。

因此，特别地，$\Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})$ 是将 $\Omega^p_X(\Delta_X)$ 延拓到可能非 snc 的对数概形 $\bar{X}$上的函子性相干延拓。从对数微分开始

$$d \operatorname{pr}_Y^\vee : \Omega^p_Y(\log \Delta_Y)[p] \to R\overline{f}_* \Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})[p],$$

将其与 $-\Delta_Y$ 作扭曲并使用投影公式，可得到一个态射（注意：此处我们用到了$^{\bar{}}$的假设，即 $f^*\Delta_Y = \Delta_X$ 和$f^*\Delta_Y = \Delta_{\bar{X}}$）

$$\Omega^p_Y(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[p] \to R\overline{f}_* \Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})(-\Delta_{\overline{X}})[p] \tag{2.34}$$

对其应用 Grothendieck 对偶:

定理 2.35 （Grothendieck 对偶性，[R&D，推论 VII.3。4],[Con00，定理 3.4。4]）。设 $f : X \to Y$ 是有限维诺特概形之间的一个真态射，并假设 Y 存在对偶化复形（例如，X 和 Y 可以是 k 上的有限型概形）。那么，对于任意一对对象 $\mathcal{F}^\bullet \in D^-_{qc}(X)$和$\mathcal{G}^\bullet \in D^+_c(Y)$，存在一个自然同构

$$Rf_* R\underline{Hom}_X(\mathcal{F}^\bullet, f^!\mathcal{G}^\bullet) \simeq R\underline{Hom}_Y(Rf_*\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \; in \; D^b_c(Y)$$

结合定理 2.35与式 (2.34)得到一个态射

$$\begin{array}{c} R\overline{f}_* R\mathcal{H}om_{\overline{X}}(\Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})(-\Delta_{\overline{X}})[p], \omega^\bullet_{\overline{X}}) = R\mathcal{H}om_Y(R\overline{f}_* \Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})(-\Delta_{\overline{X}})[p], \omega_Y[\dim Y]) \\ \downarrow \\ R\mathcal{H}om_Y(\Omega^p_Y(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega_Y[\dim Y]) \end{array} \tag{2.36}$$

其中等式来自定理 2.35，而竖直映射由（2.34）诱导。添加支撑后得到一个态射

$$\begin{array}{c} Rf_* R\underline{\Gamma}_{\Phi_X} R\mathcal{H}om_X(\Omega^p_X(\log \Delta_X)(-\Delta_X)[p], \omega_X[\dim X]) = R\overline{f}_* R\underline{\Gamma}_{\Phi_X} R\mathcal{H}om_{\overline{X}}(\Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})(-\Delta_{\overline{X}})[p], \omega^\bullet_{\overline{X}}) \\ \downarrow \\ R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y} R\mathcal{H}om_Y(\Omega^p_Y(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega_Y[\dim Y]) \end{array} \tag{2.37}$$

其中等式由局部上同调的切除性质、对偶化函子与限制的相容性以及自然同构 $\Omega^p_{\overline{X}}(\log \Delta_{\overline{X}})|_X \simeq \Omega^p_X(\Delta_X)$得到。利用（2.31）我们得到

$$\Omega^{\dim X - p}_X(\log \Delta_X) \simeq \mathcal{H}om_X(\Omega^p_X(\log \Delta_X)(-\Delta_X), \omega_X) = R\mathcal{H}om_X(\Omega^p_X(\log \Delta_X)(-\Delta_X), \omega_X)$$

其中最后一个等式利用了 $\Omega^p_X(\log \Delta_X)(-\Delta_X)$ 是局部自由的事实。在Y 上进行类似计算，将（2.37）变为:

$$Rf_* R\underline{\Gamma}_{\Phi_X} \Omega^{\dim X - p}_X(\log \Delta_X)[\dim X - p] \to R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y} \Omega^{\dim Y - p}_Y(\log \Delta_Y)[\dim Y - p]$$

并像这样重新编号 $p \leftrightarrow \dim X - p$ 即可得到引理 2.28。

3 基变换公式

引理 3.1 （参见[CR11，命题 2.3。7]）。 设

$$\begin{array}{ccc} (X',\Delta_{X'},\Phi_{X'}) & \xrightarrow{g'} & (X,\Delta_X,\Phi_X) \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & \square & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (Y',\Delta_{Y'},\Phi_{Y'}) & \xrightarrow{g} & (Y,\Delta_Y,\Phi_Y) \end{array} \tag{3.2}$$

为支撑上的等维简单正规交叉对构成的笛卡尔图，其中 f， f' （分别是）推进（分别是拉回）态射，且 g 或者是平坦的，或者是与 f 横截的闭浸入。于是

$$g^*f_* = f'_*g'^* : H^*(X,\Delta_X,\Phi_X) \to H^*(Y',\Delta_{Y'},\Phi_{Y'}).$$

我们将紧密遵循 Chatzistamatiou 和 Rülling 的论证来证明这一点，[CR11，命题 2.3。7] 并在若干处归约到其中已证明的结论。在证明中，我们将使用 定义 2.3 的一个略微变体。

定义 3.3。 若 $f : X \to Y$ 是诺特概形之间的一个态射，且令 Φ_Y 为 Y 上的一个支撑族，则

$$f_*^{-1}(\Phi_Y) := \{Z \subseteq X \mid f|_Z \text{ is proper and } f(Z) \in \Phi_Y\}$$

引理 3.4。 只需在以下情形下证明 引理 *3.1* ： f 或者是(i)形如 $\mathrm{pr}_Y : (X\times Y, \mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y, \mathrm{pr}_{Y*}^{-1}(\Phi_Y)) \to (Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$ 的投影态射，或者是(ii)闭浸入。

注记 3.5。 此引理实质上用到了 函子性 部分，即 引理 2.28。

证明。 我们可以将（3.2）分解为一系列笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} (X',\Delta_{X'},\Phi_{X'}) & \xrightarrow{g'} & (X,\Delta_X,\Phi_X) \\ \downarrow{\scriptstyle h'} & (2) & \downarrow{\scriptstyle h} \\ (X\times Y',\mathrm{pr}_{Y'}^*\Delta_Y,\mathrm{pr}_{Y'*}^{-1}(\Phi'_Y)) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times g} & (X\times Y,\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y,\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}(\Phi_Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{Y'}} & (1) & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_Y} \\ (Y',\Delta_{Y'},\Phi_{Y'}) & \xrightarrow{g} & (Y,\Delta_Y,\Phi_Y) \end{array} \tag{3.6}$$

其中 $h = \mathrm{id}\times f$ 是 f 和 $h' = g'\times f'$的图态射。若 g 是平坦态射，或是与 f 横截的闭浸入，那么（由基变换） $\mathrm{id}\times g$ 是平坦态射，或是与 h 横截的闭浸入。

此处 [CR11，命题 2.3。7] 尚未涵盖的唯一新特征是除子的出现，我们只需注意到 $\Delta_X = f^*\Delta_X = h^*\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y$，同样 $\Delta_{X'}$，因此 pr_Y 和 h 都是 定义 2.14意义下的推前态射，左侧的竖直态射也同样如此。换言之，中间一行的支撑和除子经过了精心选取，使得所有竖直态射都是“推前”态射。 □

接下来考虑情形(i)，并指出在此情形下， g 可以是任意的（在情形(ii)中，我们将需要平坦性/横截性限制）。下文中，令 $d_X = \dim X$， $d_Y = \dim Y$，类似地，令 X'， Y'。利用定理 2.32 ，我们得到一个 $\iota : X \hookrightarrow X$ 上的紧化，k 其为位于（3.2）和（3.6）右上角的光滑、分离且有限型 k概形 X 。

由此得到（3.6）中方形图（1）的一个紧化，记作

$$\begin{array}{ccc}
(X\times Y', \mathrm{pr}_{Y'}^*\Delta_Y, \mathrm{pr}_{Y'*}^{-1}(\Phi'_Y)) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times g} & (X\times Y, \mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y, \mathrm{pr}_{Y*}^{-1}(\Phi_Y)) \\
\downarrow{\scriptstyle \iota\times\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota\times\mathrm{id}} \\
(\overline{X}\times Y', \overline{\mathrm{pr}}_{Y'}^*\Delta_Y, \overline{\mathrm{pr}}_{Y'*}^{-1}(\Phi'_Y)) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times g} & (\overline{X}\times Y, \overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Delta_Y, \overline{\mathrm{pr}}_{Y*}^{-1}(\Phi_Y)) \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{pr}}_{Y'}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{pr}}_Y} \\
(Y', \Delta_{Y'}, \Phi_{Y'}) & \xrightarrow{\quad g \quad} & (Y, \Delta_Y, \Phi_Y)
\end{array} \tag{3.7}$$

根据引理 2.28后面的描述，我们知道

$$\mathrm{pr}_{Y*} : H^*(X\times Y, \mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y, \mathrm{pr}_{Y*}^{-1}(\Phi_Y)) \to H^*(Y, \Delta_Y, \Phi_Y)$$

源自一个态射

$$R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}R\mathcal{H}om_{\overline{X}\times Y}(\Omega^p_{\overline{X}\times Y}(\log \mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)[p], \omega^\bullet_{\overline{X}\times Y}) \to \Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)[d_Y-p] \tag{3.8}$$

它由 pr_Y 的对数微分的 Grothendieck 对偶得到（此处及下文中，类似的陈述对 $\mathrm{pr}_{Y'}$ 也成立）。根据 Chatzistamatiou-Rülling 的一个观察，该映射可分解为

$$\begin{aligned}
&R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}R\mathcal{H}om_{\overline{X}\times Y}(\Omega^p_{\overline{X}\times Y}(\log \overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Delta_Y)(-\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Delta_Y)[p], \omega^\bullet_{\overline{X}\times Y}) \\
&\to R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}R\mathcal{H}om_{\overline{X}\times Y}(L\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega^\bullet_{\overline{X}\times Y}) \\
&\xrightarrow[\text{adjunction}]{\simeq} R\mathcal{H}om_Y(\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}\omega^\bullet_{\overline{X}\times Y}) \\
&\xrightarrow[\text{trace}]{} R\mathcal{H}om_Y(\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega_Y[d_Y]) \\
&\xrightarrow{\simeq} \Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)[d_Y-p]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中伴随同构为[R&D，命题 II.5。10], 而标记为 trace 的映射由 Grothendieck 示性类诱导 $R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}\omega^\bullet_{\overline{X}\times Y} \to \omega_Y[d_Y]$。如果确实如此，即 X 是光滑的，那么通常的“盒积”分解

$$\omega^\bullet_{\overline{X}\times Y} \simeq \omega_{\overline{X}}[d_X] \boxtimes \omega_Y[d_Y] := \mathrm{pr}_{\overline{X}}^*\omega_{\overline{X}}[d_X] \otimes \overline{\mathrm{pr}}_{Y*}\omega_Y[d_Y]$$

结合完美配对（2.31）以及 $\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[p]$ 的局部自由性，便可得到一个识别

$$R\mathcal{H}om_{\overline{X}\times Y}(L\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega^\bullet_{\overline{X}\times Y}) \simeq \mathrm{pr}_{\overline{X}}^*\omega_{\overline{X}}[d_X] \otimes \overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)[d_Y-p] \tag{3.10}$$

事实上，更仔细地进行这一论证，在光滑轨迹 $X\times Y$ 上完成上述计算并使用切除，可知 $H^*(X\times Y, \mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y, \mathrm{pr}_{Y*}^{-1}(\Phi_Y)) \to H^*(Y, \Delta_Y, \Phi_Y)$ 总是经由直和项 $H^*_{\Phi_X}(X\times Y, \mathrm{pr}_{\overline{X}}^*\omega_{\overline{X}} \otimes \overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y))$ 分解。

下一个引理表明，即使尚不确定 X 是否光滑，式（3.8）仍可经由某种类似于 $R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}(\mathrm{pr}_{\overline{X}}^*\omega_{\overline{X}}[d_X] \otimes \overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)[d_Y-p])$ 的对象分解，前提是将 $\mathrm{pr}_{\overline{X}}^*\omega_{\overline{X}}[d_X]$ 替换为 $\overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y$。

引理 3.11 （参见 [CR11，引理 2.2。16]）。对于每个 p 都有一个自然映射

$$\gamma : \overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y \otimes \overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p] \to R\mathcal{H}om_{\overline{X}\times Y}(\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega^p_Y(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega^\bullet_{\overline{X}\times Y})$$

使得 γ 到 $X \times Y$ 的限制与该同构一致

$$\mathrm{pr}_X^* \omega_X[d_X] \otimes \mathrm{pr}_Y^* \Omega_Y^{d_Y - p}(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y - p] \xrightarrow{\simeq} R\mathcal{H}om_{X\times Y}(L\,\mathrm{pr}_Y^* \Omega_Y^p(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega_{X\times Y}^\bullet)$$

并且复合映射

$$\begin{aligned} & R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}(\mathrm{pr}_X^* \omega_X[d_X] \otimes \mathrm{pr}_Y^* \Omega_Y^{d_Y - p}(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y - p]) \\ & \xrightarrow{R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}(\gamma)} R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*} R\mathcal{H}om_{X\times Y}(\mathrm{pr}_Y^* \Omega_Y^p(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega_{X\times Y}^\bullet) \\ & \xrightarrow[adjunction]{\simeq} R\mathcal{H}om_{X\times Y}(\Omega_Y^p(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}\omega_{X\times Y}^\bullet) \\ & \xrightarrow{trace} R\mathcal{H}om_{X\times Y}(\Omega_Y^p(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[p], \omega_Y[d_Y]) \simeq \Omega_Y^{d_Y - p}(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y - p] \end{aligned} \tag{3.12}$$

与复合映射一致

$$\begin{aligned} & R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}(\overline{\mathrm{pr}}_Y^! \mathcal{O}_Y \otimes \overline{\mathrm{pr}}_Y^* \Omega_Y^{d_Y - p}(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y - p]) \\ & \xrightarrow[form.]{proj.} R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}(\overline{\mathrm{pr}}_Y^! \mathcal{O}_Y) \otimes \overline{\mathrm{pr}}_Y^* \Omega_Y^{d_Y - p}(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y - p] \\ & \xrightarrow{\mathrm{tr}\otimes \mathrm{id}} \Omega_Y^{d_Y - p}(\log \Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y - p] \end{aligned} \tag{3.13}$$

根据对偶化复形的基变换（[Stacks，标签 0BZX，标签 0E2S]）应用于该笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} \times Y & \longrightarrow & \overline{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\, k \end{array}$$

（请注意，这是一个非常温和的情形：$\overline{X} \to \mathrm{Spec}\, k$ 是平坦且真的，而 $Y \to \mathrm{Spec}\, k$ 是光滑的）我们看到 $\overline{\mathrm{pr}}_Y^! \mathcal{O}_Y \simeq \mathrm{pr}_{\overline{X}}^* \omega_{\overline{X}}^\bullet$。这使映射 γ 看起来更像（3.10）。

证明。按照[CR11，引理 2.2。16] 我们从态射开始

$$e : \overline{\mathrm{pr}}_Y^! \mathcal{O}_Y \otimes^L L\overline{\mathrm{pr}}_Y^* \omega_Y^\bullet \to \overline{\mathrm{pr}}_Y^! \omega_Y^\bullet =: \omega_{\overline{X}\times Y}^\bullet$$

在 [Con00，第 4.3 页。12], 如其中所述，与

$$\mathrm{pr}_X^* \omega_X[d_X] \otimes \mathrm{pr}_Y^* \omega_Y[d_Y] \xrightarrow{\simeq} \omega_{X\times Y}[d_X + d_Y]$$

在轨迹 $X \times Y$，[7] 并且具有如下性质

$$\begin{array}{ccc} R\overline{pr}_{Y*}(\overline{\mathrm{pr}}_Y^! \mathcal{O}_Y \otimes^L L\overline{\mathrm{pr}}_Y^* \omega_Y^\bullet) & \xrightarrow{R\overline{pr}_{Y*}e} & R\overline{pr}_{Y*}\omega_{\overline{X}\times Y}^\bullet \\ \downarrow \text{proj. form} & & \downarrow \text{tr} \\ R\overline{pr}_{Y*}\overline{\mathrm{pr}}_Y^! \mathcal{O}_Y \otimes^L \omega_Y^\bullet & \xrightarrow{\mathrm{tr}\otimes \mathrm{id}} & \omega_Y^\bullet \end{array}$$

[7]参见 Conrad 的评论：“容易验证，在光滑情形下，e_f 与 (3.3.21) 一致，并且与 f 中的复合相容（使用 (4.3.6)）。”

与 [Con00，定理 4.4。1]。接着，我们将 γ 定义为如下复合

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y \otimes^L L\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p]\\
&\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes^L(2.31)} \overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y \otimes^L L\overline{\mathrm{pr}}_Y^* R\mathcal{H}om_Y(\Omega_Y^p(\log\Delta_Y)[p],\omega_Y^\bullet)\\
&\xrightarrow[\text{of } L\overline{\mathrm{pr}}_Y^*,\otimes^L]{\text{functoriality}} R\mathcal{H}om_{\overline{X}\times Y}(L\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^p(\log\Delta_Y)[p],\overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y\otimes^L\omega_Y^\bullet)\\
&\xrightarrow[e]{\text{induced by}} R\mathcal{H}om_{\overline{X}\times Y}(L\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^p(\log\Delta_Y)[p],\omega_{\overline{X}\times Y}^\bullet)
\end{aligned}\tag{3.14}$$

注意，由于 L和 $\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)$ 均为局部自由的，因此可以省略其中的“$\Omega_Y^p(\log\Delta_Y)$”。所述相容性的验证与 [CR11，引理 2.2 中的相同。16]。 □

备注 3.15。我们似乎也可以采用 [Con00，第 4.3 页中的更一般版本。12]

$$e' : \overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y \otimes^L L\overline{\mathrm{pr}}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p] \to \overline{\mathrm{pr}}_Y^!\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p]$$

连同描述

$$\overline{\mathrm{pr}}_Y^!\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p] = D_{\overline{X}\times Y}(L\overline{\mathrm{pr}}_Y^* D_Y(\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p]))$$

其中 $D_Y(-) = R\mathcal{H}om(-,\omega_Y^\bullet)$，对于 $D_{\overline{X}\times Y}$ 也类似。

利用这个修改后的 γ，我们得到图 [CR11，第 732 页引理 2.3 中的修改版本，4]，即（3.16），见 图 1）。为了使该图更易读，我们采用一些缩写：所有函子均为导出的，我们使用形如 $D_Y(-) = R\mathcal{H}om_Y(-,\omega_Y^\bullet)$ 的对偶化函子，并令$d = d_X + d_Y$。 引理 3.11 表明，涉及 γ 的三角形是交换的，而（3.9）则给出了图中其余部分的交换性。该图的作用在于，按照定义，从左上角出发并沿着路径 $\to\downarrow$ 即可得到霍奇上同调上的推前

$$\mathrm{pr}_{Y*}\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}\Omega_{X\times Y}^{d-p}(\log\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)[d-p] \to \underline{\Gamma}_{\Phi_Y}\Omega_{\times Y}^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p]$$

但接下来 $\downarrow\to$ 给出了一个复合映射，其相对于 (3.7) 的性质更容易分析。具体而言，我们有 Y' 上的图示 (3.16)，事实上还有一个从 (3.16) 到 g_* 上对应图示的映射 Y'，因此根据前面的讨论，只需证明 图 1 中的 (3.17) 交换。

利用切除以及 引理 3.11，我们可以将 (3.17) 的顶行改写为

$$\begin{aligned}
&R\,\mathrm{pr}_{Y*}R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}\Omega_{X\times Y}^{d-p}(\log\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)[d-p]\\
&\xrightarrow{\text{project}} R\,\mathrm{pr}_{Y*}R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}(\mathrm{pr}_X^*\omega_X[d_X]\otimes\mathrm{pr}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p])\\
&\xrightarrow[\text{form.}]{\text{proj.}} R\,\mathrm{pr}_{Y*}R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}(\mathrm{pr}_X^*\omega_X[d_X])\otimes\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p]\\
&\xrightarrow{\mathrm{tr}\otimes\mathrm{id}} R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y}\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p]
\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中第一个映射由一个投影诱导

$$\Omega_{X\times Y}^{d-p}(\log\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)[d-p] \to \mathrm{pr}_X^*\omega_X[d_X]\otimes\mathrm{pr}_Y^*\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p]$$

该投影来自 $\Omega_{X\times Y}^{d-p}(\log\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)$ 的 Künneth 型分解；第二个映射是投影公式，最后一个映射则由如下复合定义的带支集的迹映射诱导

$$\begin{aligned}
&R\,\mathrm{pr}_{Y*}R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}(\mathrm{pr}_X^*\omega_X[d_X]) \xrightarrow{\text{excision}} R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}R\underline{\Gamma}_{\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}(\overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y)\\
&\xrightarrow{\text{Proposition 2.9}} R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y}R\overline{\mathrm{pr}}_{Y*}(\overline{\mathrm{pr}}_Y^!\mathcal{O}_Y)\xrightarrow{\mathrm{tr}} R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y}\mathcal{O}_Y
\end{aligned}\tag{3.19}$$

$-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)[p])$

(3.16)

$\mathrm{og}\,\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y - p]$

$-\Delta_Y)[d_Y - p]$

(3.17)

$[-\Delta_{Y'})[d_Y - p]$

rived)

这里的第二个映射来自命题 2.9的函子性，因为存在一个包含映射$\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\,\Phi_Y \subseteq \mathrm{pr}_Y^{-1}\,\Phi_Y$。分解（3.18）映射为（3.17）底行的一个类似分解，而标准函子性性质（例如（3.18）第二个映射中出现的投影公式的函子性）无法保证的唯一交换性是

$$\begin{array}{ccc} R\,\mathrm{pr}_{Y*}\,R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}(\mathrm{pr}_X^*\,\omega_X[d_X]) \otimes \Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p] & \xrightarrow{\mathrm{tr}\otimes\mathrm{id}} & R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y}\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rg_*(R\,\mathrm{pr}_{Y'*}\,R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y'*}^{-1}\Phi_{Y'}}(\mathrm{pr}_X^*\,\omega_X[d_X]) \otimes \Omega_{Y'}^{d_Y-p}(\log\Delta_{Y'})(-\Delta_{Y'})[d_Y-p]) & \xrightarrow{\mathrm{tr}'\otimes\mathrm{id}} & Rg_*(R\underline{\Gamma}_{\Phi_{Y'}}\Omega_{Y'}^{d_Y-p}(\log\Delta_{Y'})(-\Delta_{Y'})[d_Y-p]) \end{array} \tag{3.20}$$

但对（3.20）的底行再应用一次投影公式，我们看到（3.20）是通过张量化微分而得到的

$$\Omega_Y^{d_Y-p}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_Y-p] \to Rg_*\Omega_{Y'}^{d_Y-p}(\log\Delta_{Y'})(-\Delta_{Y'})[d_Y-p]$$

with

$$\begin{array}{ccc} R\,\mathrm{pr}_{Y*}\,R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y*}^{-1}\Phi_Y}(\mathrm{pr}_X^*\,\omega_X[d_X]) & \xrightarrow{\mathrm{tr}\otimes\mathrm{id}} & R\underline{\Gamma}_{\Phi_Y}\mathcal{O}_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rg_*(R\,\mathrm{pr}_{Y'*}\,R\underline{\Gamma}_{\mathrm{pr}_{Y'*}^{-1}\Phi_{Y'}}(\mathrm{pr}_X^*\,\omega_X[d_X])) & \xrightarrow{\mathrm{tr}'\otimes\mathrm{id}} & Rg_*(R\underline{\Gamma}_{\Phi_{Y'}}\mathcal{O}_{Y'}) \end{array} \tag{3.21}$$

而（3.21）的交换性在 [CR11，引理 2.3 中得到了证明。4]。至此我们已经证明了 d:

引理 3.22。引理 *3.1*在（*i*）情形下成立，见引理 *3.4*。

剩下需要处理的是（ii）情形，见引理 3.4；为此我们使用下面的引理。**引理 3.23** （与 [CR11，推论 2.222]比较）。考虑一个纯维简单正规交叉对的图表

$$\begin{array}{ccc} (X',\Delta_{X'}) & \xrightarrow{g'} & (X,\Delta_X) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota'} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ (Y',\Delta_{Y'}) & \xrightarrow{g} & (Y,\Delta_Y) \end{array} \tag{3.24}$$

其中 ι,ι' 是推送闭浸入，且 $\dim Y-\dim X=\dim Y'-\dim X'=:c$。那么，对于所有$q$，图表

$$\begin{array}{ccc} \iota_*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q] & \xrightarrow{dg'^\vee} & Rg_*\iota'_*\Omega_{X'}^q(\log\Delta_{X'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_Y^{q+c}(\log\Delta_Y)[q+c] & \xrightarrow{dg^\vee} & Rg_*\Omega_{Y'}^{q+c}(\log\Delta_{Y'})[q+c] \end{array} \tag{3.25}$$

是可交换的，其中水平映射由对数微分诱导，左侧垂直映射是以下复合

$$\begin{aligned} &\iota_*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q] \xrightarrow{\simeq} \iota_*R\mathcal{H}om(\Omega_X^{d_X-q}(\log\Delta_X)(-\Delta_X)[d_X-q],\omega_X^\bullet) \\ &\xrightarrow{duality} R\mathcal{H}om(\iota_*\Omega_X^{d_X-q}(\log\Delta_X)(-\Delta_X)[d_X-q],\omega_Y^\bullet) \\ &\xrightarrow{d\iota^\vee} R\mathcal{H}om(\Omega_Y^{d_X-q}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)[d_X-q],\omega_Y^\bullet) \\ &\xrightarrow{\simeq} \Omega_Y^{q+c}(\log\Delta_Y)[q+c] \end{aligned} \tag{3.26}$$

且右侧的竖直箭头是 Y'上类似复合映射的 Rg_*。

注意，如果 g 是平坦映射，或是与……横截的闭浸入，则余维假设成立。 ι.

证明。虽然看起来可以按照 [CR11，推论 2.2。22] 中的证明逐步进行，但我们改为如下将问题归约到该处已证明的情形：首先，注意到存在一个显然的映射，从以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} U_{X'} & \longrightarrow & U_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_{Y'} & \longrightarrow & U_Y \end{array} \tag{3.27}$$

从内部到（3.24）。注意到（3.25）将映射到由（3.27）得到的类似图，复合映射（3.26）至少与扎里斯基局部化相容，并且（3.27）的情形可由 [CR11，推论 2.2。22], 覆盖，因此只需证明自然映射

$$h^0R\mathcal{H}om_Y(\iota_*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q], Rg_*\Omega_{Y'}^{q+c}(\log\Delta_{Y'})[q+c]) \to h^0R\mathcal{H}om_{U_Y}(\iota_*\Omega_{U_X}^q[q], Rg_*\Omega_{U_{Y'}}^{q+c}[q+c]) \tag{3.28}$$

是单射。这可以在点 $x \in X \subseteq Y$ 处扎里斯基局部地验证，因此我们可以假设 $X \subseteq Y$ 是一个全局完全交，比如由 t_1、…、$t_c \in \mathcal{O}_Y$ 定义。在这种情况下，t_i 定义了一个 Koszul 分解 $\mathcal{K}^\bullet(t_i) \to \mathcal{O}_X$，并且由于 $X' = Y' \times_Y X = V(t_1 \circ g, \cdots t_c \circ g)$ 根据假设是余维为 c 的光滑对象，$t_i \circ g$ 必须也是一个正则序列，因此

$$L^i g^* \mathcal{O}_X = h^{-i} g^* \mathcal{K}^\bullet(t_i) = \begin{cases} \mathcal{O}_{X'}, & i = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

换言之，$Lg^*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X'}$。现在利用 $\Omega_X^q(\log\Delta_X)$ 在 X' 上局部自由这一事实，我们得出

$$Lg^*\iota_*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q] = g^*\iota_*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q] = \iota'_*g'^*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q]$$

接下来，对两边应用导出伴随，得到（3.28）中的交换图

$$\begin{array}{ccc} R\mathcal{H}om_Y(\iota_*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q], Rg_*\Omega_{Y'}^{q+c}(\log\Delta_{Y'})[q+c]) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om_{U_Y}(\iota_*\Omega_{U_X}^q[q], Rg_*\Omega_{U_{Y'}}^{q+c}[q+c]) \\ \| & & \| \\ Rg_*R\mathcal{H}om_{Y'}(Lg^*\iota_*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log\Delta_{Y'})[q+c]) & \to & Rg_*R\mathcal{H}om_{U_{Y'}}(Lg^*\iota_*\Omega_{U_X}^q[q], \Omega_{U_{Y'}}^{q+c}[q+c]) \\ \| & & \| \\ Rg_*R\mathcal{H}om_{Y'}(\iota'_*g'^*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log\Delta_{Y'})[q+c]) & \longrightarrow & Rg_*R\mathcal{H}om_{U_{Y'}}(\iota'_*g'^*\Omega_{U_X}^q[q], \Omega_{U_{Y'}}^{q+c}[q+c]) \end{array} \tag{3.29}$$

进一步缩小到 Zariski 局部，我们可以假设 $\Omega_X^q(\log\Delta_X)$ 是自由的，例如由 dx_1、…、dx_n 生成；在这种情况下

$$\begin{aligned} &R\mathcal{H}om_{Y'}(\iota'_*g'^*\Omega_X^q(\log\Delta_X)[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log\Delta_{Y'})[q+c]) \\ &= (\prod_i R\mathcal{H}om_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}dx_i[q], \mathcal{O}_{Y'}[q+c])) \otimes \Omega_{Y'}^{q+c}(\log\Delta_{Y'}) \end{aligned} \tag{3.30}$$

并由 Grothendieck 的基本局部同构 [Con00，§2。5]

$$R\mathcal{H}om_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}[q], \mathcal{O}_{Y'}[q+c])) \simeq \mathcal{E}xt^c_{Y'}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_{Y'}) \simeq \det(\mathcal{I}_{X'}/\mathcal{I}_{X'})^\vee \tag{3.31}$$

（后两者是支撑于次数 0 的层）。特别地，这是上的可逆层 X'，因此式（3.30）左侧是 X' 上的局部自由层（支撑于次数 0）。回想 X' 是光滑的，因而特别是既约的；又由于 $U_{Y'} \cap X'$ 是一个稠密开集（这是

假设 $X' \to Y'$ 是一个拉回映射的一部分），自然映射

$$\begin{aligned} & h^0 R\mathcal{H}om_{Y'}(\iota'_* g'^* \Omega_X^q(\log \Delta_X)[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log \Delta_{Y'})[q+c]) \\ & \to h^0 R\mathcal{H}om_{Y'}(\iota'_* g'^* \Omega_X^q(\log \Delta_X)[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log \Delta_{Y'})[q+c])|_{U_{Y'}} \\ & \simeq h^0 R\mathcal{H}om_{U_{Y'}}(\iota'_* g'^* \Omega_X^q(\log \Delta_X)|_{U_{Y'}}[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log \Delta_{Y'})|_{U_{Y'}}[q+c]) \end{aligned} \tag{3.32}$$

是单射；在第三行中，我们对 $\mathcal{E}xt$ 应用了局部化。现在，利用 g_* 的左正合性可得到一个单射

$$\begin{aligned} & h^0 Rg_* R\mathcal{H}om_{Y'}(\iota'_* g'^* \Omega_X^q(\log \Delta_X)[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log \Delta_{Y'})[q+c]) \\ & \to h^0 Rg_* R\mathcal{H}om_{U_{Y'}}(\iota'_* g'^* \Omega_X^q(\log \Delta_X)|_{U_{Y'}}[q], \Omega_{Y'}^{q+c}(\log \Delta_{Y'})|_{U_{Y'}}[q+c]) \end{aligned} \tag{3.33}$$

为了完成证明，我们使用（3.29）将 映射 （3.33）与（3.28）等同。 □

推论 3.34。 引理 *3.1* 在 *(ii)* 情形下的 引理 *3.4*成立。

证明。 对（3.25）应用带支撑的上同调即可得到此结论。 □

至此，我们完成了 引理 3.1 的证明。

推论 3.35 （投影公式，参见 [CR11，命题 1.1。16]）。 设 $f : X \to Y$ 是一个光滑概形之间的映射，且存在两种不同的增强，将其提升为带支撑的光滑概形之间的映射，

$$(X, \Delta_X, \Phi_X) \to (Y, \Delta_Y, f(\Phi_X)) \textit{ pushing and } (X, f^*(\Delta'_Y), f^{-1}(\Phi_Y)) \to (Y, \Delta'_Y, \Phi_Y) \textit{ pulling}$$

此外，假设 $\Delta_X + f^*(\Delta'_Y)$ 和 $\Delta_Y + \Delta'_Y$ 是（既约）简单正规交叉除子。那么

$$(X, \Delta_X + f^*(\Delta'_Y), \Phi_X \cap f^{-1}(\Phi_Y)) \to (Y, \Delta_Y + \Delta'_Y, f(\Phi_X) \cap \Phi_Y)$$

也是一个推前映射，并且

$$f_*(\beta \smile f^*\alpha) = f_*\beta \smile \alpha \in H^*(Y, \Delta_Y + \Delta'_Y, f(\Phi_X) \cap \Phi_Y)$$

对于任意 $\alpha \in H^*(Y, \Delta'_Y, \Phi_Y)$ 和 $\beta \in (X, \Delta_X, \Phi_X)$，其中 $\smile$ 是沿用 *[CR11, §1.1.4, 2.4]*中类似的方式定义的对数霍奇上同调上的杯积

证明。 这是 引理 3.1 的形式推论，可以按照 [CR11, 命题 1.1.16]的证明推导。再次，我们使用通过如下图像的分解

$$\begin{array}{ccc} (X, \Delta_X + f^*(\Delta'_Y), \Phi_X \cap f^{-1}(\Phi_Y)) & \xrightarrow{f} & (Y, \Delta_Y + \Delta'_Y, f(\Phi_X) \cap \Phi_Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X} & & \\ (X \times X, \mathrm{pr}_1^* \Delta_X + \mathrm{pr}_2^* f^*(\Delta'_Y), \Phi_X \times f^{-1}(\Phi_Y)) & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Y \times \mathrm{id}_Y} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_X \times f} & & \\ (X \times Y, \mathrm{pr}_1^* \Delta_X + \mathrm{pr}_2^* \Delta'_Y, \Phi_X \times \Phi_Y) & \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_Y} & (Y \times Y, \mathrm{pr}_1^* \Delta_Y + \mathrm{pr}_2^* \Delta'_Y, f(\Phi_X) \times \Phi_Y) \end{array} \tag{3.36}$$

这里 $f \times \mathrm{id}_Y$ 底部是一个推前态射（因为 $f|_{\Phi_X}$ 是真且 $f^*\Delta_Y = \Delta_X$），右侧的竖直映射 $\mathrm{id}_Y \times \mathrm{id}_Y$ 是一个与 $f \times \mathrm{id}_Y$ 横截的闭浸入，因为外层矩形是笛卡尔的，且 X 是余维正确的光滑态射。这意味着我们可以应用引理 3.1；该引理加上用沿对角线的拉回来定义杯积，便得到所需的恒等式。 □

4 对应

给定带有支撑族 (X,Δ_X,Φ_X) 和 (Y,Δ_Y,Φ_Y) 的简单正规交叉对，其维数分别为 d_X 和 d_Y，如[CR11, §13] 所示，我们可以在 $P(\Phi_X,\Phi_Y)$ 上定义一个支撑族 $X\times Y$ 如下：

$$P(\Phi_X,\Phi_Y) := \{\text{closed subsets } Z\subseteq X\times Y \mid \mathrm{pr}_Y|_Z \text{ is proper and for all } W\in\Phi_X,\\ \mathrm{pr}_Y(\mathrm{pr}_X^{-1}(W)\cap Z)\in\Phi_Y\}$$

（定义 2.1 的条件很容易验证）。为方便起见，我们记作 $\Delta_{X\times Y} := \mathrm{pr}_X^*\Delta_X + \mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y$。

定理 4.1。一个类 $\gamma\in H^j_{P(\Phi_X,\Phi_Y)}(X\times Y,\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))$ 定义了同态

$$\mathrm{cor}(\gamma): H^q_{\Phi_X}(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X))\to H^{q+j-d_X}_{\Phi_Y}(Y,\Omega^{p+i-d_X}_Y(\log\Delta_Y))$$

由公式 $\mathrm{cor}(\gamma)(\alpha) := \mathrm{pr}_{Y*}(\mathrm{pr}_X^*(\alpha)\smile\gamma)$给出。此外，如果 (Z,Δ_Z,Φ_Z) 是另一个带支撑的简单正规交叉对，且 $\delta\in H^{j'}_{P(\Phi_Y,\Phi_Z)}(Y\times Z,\Omega^{i'}_{Y\times Z}(\log\Delta_{Y\times Z})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y))$，那么

$$\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}(\delta))\in H^{j+j'-d_Y}_{P(\Phi_X,\Phi_Z)}(X\times Z,\Omega^{i+i'-d_Y}_{X\times Z}(\log\Delta_{X\times Z})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)) \text{ and}$$

$$\mathrm{cor}(\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}(\delta))) = \mathrm{cor}(\delta)\circ\mathrm{cor}(\gamma)$$

作为同态，有 $H^q_{\Phi_X}(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X))\to H^{q+j+j'-d_X-d_Y}_{\Phi_Z}(Z,\Omega^{p+i+i'-d_X-d_Y}_Z(\log\Delta_Z))$。

注记 4.2。这些层 $\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)$ 是层 $\Omega^i_X(A,B)$中的特例，见 [DI87, §4。2]。

这种同时涉及对数极点和“对数零点”的对应，似乎至少在晶体上同调中早已有所讨论，例如 Mieda 的研究 [Mie09a; Mie09b]。不过，我未能在文献中找到 定理 4.1 的任何已发表证明。

证明。我们作两点观察：首先，利用 引理 2.18 可得自然的楔积配对

$$\Omega^p_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})\otimes\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)\xrightarrow{\wedge}\Omega^{p+i}_{X\times Y}(\log\Delta_Y)$$

其次，基本上根据 $P(\Phi_X,\Phi_Y)$ 的定义，张量积 $\Omega^p_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})\otimes\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)$ 上的上同调 Künneth 态射可以提升为带支撑的态射，如下所示

$$H^q_{\mathrm{pr}_X^{-1}(\Phi_X)}(X\times Y,\Omega^p_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y}))\otimes H^j_{P(\Phi_X,\Phi_Y)}(X\times Y,\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))\\ \to H^{p+j}_\Psi(X\times Y,\Omega^p_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})\otimes\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))$$

其中 $\Psi := \mathrm{pr}_{Y*}^{-1}(\Phi_Z)$（参见 [CR11, §1.3.7, 命题 1.3。10]）。结合这两个观察结果可得一个配对

$$H^q_{\mathrm{pr}_X^{-1}(\Phi_X)}(X\times Y,\Omega^p_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y}))\otimes H^j_{P(\Phi_X,\Phi_Y)}(X\times Y,\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))\\ \xrightarrow{\smile} H^{p+j}_\Psi(X\times Y,\Omega^{p+i}_{X\times Y}(\log\Delta_Y))$$

现在注意到 $\mathrm{pr}_X:(X\times Y,\Delta_{X\times Y},\mathrm{pr}_X^{-1}(\Phi_X))\to(X,\Delta_X,\Phi_X)$ 是一个拉回态射，因此由 命题 2.24可得一个诱导映射 $\mathrm{pr}_X^*: H^q_{\Phi_X}(X,\Omega^p_X(\log\Delta_X))\to H^q_{\mathrm{pr}_X^{-1}(\Phi_X)}(X\times Y,\Omega^p_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y}))$。另一方面，由于 $\mathrm{pr}_Y:(X\times Y,\Delta_Y,\Psi)\to(Y,\Delta_Y,\Phi_Y)$ 是一个推前态射，引理 2.28 给出

一个态射 $\mathrm{pr}_{Y*}: H_{\Psi}^{p+j}(X\times Y,\Omega_{X\times Y}^{p+i}(\log\Delta_Y))\to H_{\Phi_Y}^{q+j-d_X}(Y,\Omega_Y^{p+i-d_X}(\log\Delta_Y))$。复合后，我们得到所需的同态

$$\begin{aligned}H_{\Phi_X}^{q}(X,\Omega_X^p(\log\Delta_X))&\xrightarrow{\mathrm{pr}_X^*}H^q_{\mathrm{pr}_X^{-1}(\Phi_X)}(X\times Y,\Omega^p_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y}))\\&\xrightarrow{\smile\gamma}H_{\Psi}^{p+j}(X\times Y,\Omega_{X\times Y}^{p+i}(\log\Delta_Y))\\&\xrightarrow{\mathrm{pr}_{Y*}}H_{\Phi_Y}^{q+j-d_X}(Y,\Omega_Y^{p+i-d_X}(\log\Delta_Y))\end{aligned}$$

对于引理中“此外”的部分，我们再次从某个楔积配对开始，这次是在 $X\times Y\times Z$ 上：

$$\begin{aligned}&\Omega^i_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)\otimes\Omega^{i'}_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\Delta_{Y\times Z})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)\\&\xrightarrow{\wedge}\Omega^{i+i'}_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Z}\Delta_{X\times Z})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)\end{aligned}\tag{4.3}$$

若 $V\in P(\Phi_X,\Phi_Y)$，$W\in P(\Phi_Y,\Phi_Z)$ 那么展开定义（类似的结论可参见 [CR11，§1.3.7，命题 1.3。10]）可得：

- $\mathrm{pr}_{X\times Z}|_{\mathrm{pr}_{X\times Y}^{-1}(V)\cap\mathrm{pr}_{Y\times Z}^{-1}(W)}$ 是真且
- $\mathrm{pr}_{X\times Z}(\mathrm{pr}_{X\times Y}^{-1}(V)\cap\mathrm{pr}_{Y\times Z}^{-1}(W))\in P(\Phi_X,\Phi_Z)$

因此，与等式 (4.3) 左边相关的上同调上的 Künneth 态射可以通过加入支撑而增强为如下形式

$$\begin{aligned}&H^j_{\mathrm{pr}_{X\times Y}^{-1}(P(\Phi_X,\Phi_Y))}(X\times Y\times Z,\Omega^i_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))\\&\otimes H^{j'}_{\mathrm{pr}_{Y\times Z}^{-1}(P(\Phi_Y,\Phi_Z))}(X\times Y\times Z,\Omega^{i'}_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\Delta_{Y\times Z})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y))\\&\to H^{j+j'}_{\Sigma}(X\times Y\times Z,\Omega^i_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)\otimes\Omega^{i'}_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\Delta_{Y\times Z})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y))\end{aligned}$$

其中 $\Sigma:=\mathrm{pr}^{-1}_{X\times Z*}(P(\Phi_X,\Phi_Z))$。

由于 $\mathrm{pr}_{X\times Y}:(X\times Y\times Z,\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y},\mathrm{pr}^{-1}_{X\times Y}(P(\Phi_X,\Phi_Y)))\to(X\times Y,\Delta_{X\times Y},P(\Phi_X,\Phi_Y))$ 是一个拉回态射，命题 2.24 给出了一个诱导态射

$$\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})\to Rf_*\Omega^i_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y});$$

对 $-\Delta_{X\times Y}$ 进行扭曲并应用投影公式，得到一个态射

$$\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\Delta_{X\times Y})\to Rf_*\big(\Omega^i_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y})\big)$$

然后沿 $P(\Phi_X,\Phi_Y)$ 取带支撑的上同调，并利用命题 2.9 得到一个修-正的拉回映射

$$\begin{aligned}&H^j_{P(\Phi_X,\Phi_Y)}(X\times Y,\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\Delta_{X\times Y}))\\&\to H^j_{\mathrm{pr}_{X\times Y}^{-1}(P(\Phi_X,\Phi_Y))}(X\times Y\times Z,\Omega^i_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))\end{aligned}\tag{4.4}$$

类似的论证给出一个修正的拉回

$$\begin{aligned}&H^{j'}_{P(\Phi_Y,\Phi_Z)}(Y\times Z,\Omega^{i'}_{Y\times Z}(\log\Delta_{Y\times Z})(-\Delta_{Y\times Z}))\\&\to H^{j'}_{\mathrm{pr}_{Y\times Z}^{-1}(P(\Phi_Y,\Phi_Z))}(X\times Y\times Z,\Omega^{i'}_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\Delta_{Y\times Z})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_Y))\end{aligned}\tag{4.5}$$

另一方面，$\mathrm{pr}_{X\times Z}:(X\times Y\times Z,\mathrm{pr}^*_{X\times Z}\Delta_{X\times Y},\Sigma)\to(X\times Z,\Delta_{X\times Z},P(\Phi_X,\Phi_Z))$ 是一个推前态射，因此根据引理 2.28 诱导出态射

$$R\mathrm{pr}_{X\times Z*}R\underline{\Gamma}_{\Sigma}(\Omega^{\dim X\times Y\times Z-k}_{X\times Y\times Z}(\log\mathrm{pr}^*_{X\times Z}\Delta_{X\times Y}))\to R\underline{\Gamma}_{P(\Phi_X,\Phi_Z)}\Omega^{\dim X\times Z-k}_{X\times Z}(\log\Delta_{X\times Z})[-\dim Z]$$

对所有 k；对两边作 $-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X$ 扭曲并应用投影公式后，得到

$$\begin{aligned} &R\mathrm{pr}_{X\times Z*}R\underline{\Gamma}_{\Sigma}(\Omega^{\dim X\times Y\times Z-k}_{X\times Y\times Z}(\log \mathrm{pr}^*_{X\times Z}\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)) \\ &\to R\underline{\Gamma}_{P(\Phi_X,\Phi_Z)}\Omega^{\dim X\times Z-k}_{X\times Z}(\log\Delta_{X\times Z})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)[-\dim Z] \end{aligned} \tag{4.6}$$

现在令定 $k=\dim X\times Y\times Z-i-i'$，由此诱导的带支撑上同调的态射 re

$$\begin{aligned} &H_{\Sigma}^{j+j'}(X\times Y\times Z,\Omega^{i+i'}_{X\times Y\times Z}(\log \mathrm{pr}^*_{X\times Z}\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)) \\ &\to H^{j+j'-\dim Z}_{P(\Phi_X,\Phi_Z)}(X\times Z,\Omega^{i+i'-\dim Z}_{X\times Z}(\log\Delta_{X\times Z})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

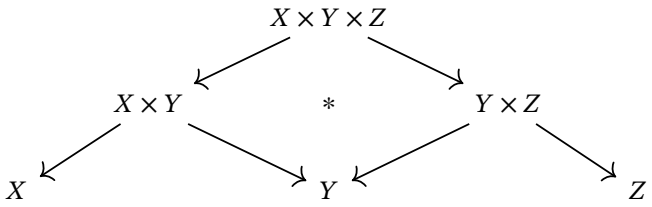
结合上述各项，我们得到一个双线性配对

$$\begin{aligned} &H^{j}_{P(\Phi_X,\Phi_Y)}(X\times Y,\Omega^{i}_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\Delta_{X\times Y}))\otimes H^{j'}_{P(\Phi_Y,\Phi_Z)}(Y\times Z,\Omega^{i'}_{Y\times Z}(\log\Delta_{Y\times Z})(-\Delta_{Y\times Z})) \\ &\to H^{j+j'-\dim Z}_{P(\Phi_X,\Phi_Z)}(X\times Z,\Omega^{i+i'-\dim Z}_{X\times Z}(\log\Delta_{X\times Z})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X)) \end{aligned}$$

将$\gamma\otimes\delta\longmapsto \mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}(\delta))$映至。尚待证明的是

$$\mathrm{cor}(\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}(\delta)))=\mathrm{cor}(\delta)\circ\mathrm{cor}(\gamma)$$

为此，我们将反复使用引理 3.1。考虑光滑概形的图



其中所有态射都是投影。将其扩展以包含支撑有多种方法；这里我们加入上文定义在 $X\times Y$ 上的支撑族 Ψ。那么在笛卡尔图 $(*)$中，$\mathrm{pr}_Y:(X\times Y,\Psi)\to(Y,\Phi_Y)$ 和 $\mathrm{pr}_{Y\times Z}:(X\times Y\times Z,\mathrm{pr}^{-1}_{X\times Y}\Psi)\to(Y\times Z,\mathrm{pr}_Y^{-1}\Phi_Y)$ 是推前态射，而$\mathrm{pr}_{X\times Y}$ 和pr_Y 是拉回态射。同时，我们还有一个拉回态射 $\mathrm{pr}_{X\times Z}:(X\times Y\times Z,\mathrm{pr}^{-1}_{X\times Z}(P(\Phi_Y,\Phi_Z)))\to(Y\times Z,P(\Phi_Y,\Phi_Z))$。为使下文表述准确，在可能产生歧义时，我们将使用诸如 $\mathrm{pr}_X^{X\times Y}$ 的记号表示投影$X\times Y\to X$，用 $\mathrm{pr}_X^{X\times Y\times Z}$ 表示投影 $X\times Y\times Z\to X$，等等。

首先应用推论 3.35 于 $\mathrm{pr}_{X\times Z}$，我们看到

$$\mathrm{pr}_{Y\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\mathrm{pr}_X^{X\times Y*}\alpha\smile\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\delta)=\mathrm{pr}_{Y\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\mathrm{pr}_X^{X\times Y*}\alpha\smile\gamma))\smile\delta$$

然后应用 引理 3.1 于 $(*)$ 可得

$$\mathrm{pr}_{Y\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\mathrm{pr}_X^{X\times Y*}\alpha\smile\gamma))=\mathrm{pr}_Y^{Y\times Z*}(\mathrm{pr}_{Y*}^{X\times Y}(\mathrm{pr}_X^{X\times Y*}\alpha\smile\gamma))=\mathrm{pr}_Y^{Y\times Z*}\,\mathrm{cor}(\gamma)(\alpha)$$

从而

$$\mathrm{pr}_{Y\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Y}(\mathrm{pr}_X^{X\times Y*}\alpha\smile\gamma)\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\delta)=\mathrm{pr}_Y^{Y\times Z*}\,\mathrm{cor}(\gamma)(\alpha)\smile\delta$$

应用 $\mathrm{pr}_{Z*}^{Y\times Z}$ 我们得出

$$\mathrm{cor}\,\delta(\mathrm{cor}\,\gamma)(\alpha))=\mathrm{pr}_{Z*}^{X\times Y\times Z}(\mathrm{pr}_X^{X\times Y\times Z*}\alpha\smile\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\gamma\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\delta) \tag{4.8}$$

最后，我们将右侧改写为

$$\mathrm{pr}_{Z*}^{X\times Z}\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}^*_{X\times Z}\mathrm{pr}_X^{X\times Z*}\alpha\smile\mathrm{pr}^*_{X\times Y}\gamma\smile\mathrm{pr}^*_{Y\times Z}\delta)$$

并应用 推论 3.35 于 $\mathrm{pr}_{X\times Z}$（其中推前态射为 $(X\times Y\times Z,\Sigma)\to(X\times Z,P(\Phi_X,\Phi_Z))$，拉回态射为 $(X\times Y\times Z,\mathrm{pr}_X^{X\times Y\times Z-1}(\Phi_X))\to(X\times Z,\mathrm{pr}_X^{X\times Z-1}(\Phi_X))$），从而得到

$$\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}_{X\times Z}^*\mathrm{pr}_X^{X\times Z*}\alpha\smile\mathrm{pr}_{X\times Y}^*\gamma\smile\mathrm{pr}_{Y\times Z}^*\delta)=\mathrm{pr}_X^{X\times Z*}\alpha\smile\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}_{X\times Y}^*\gamma\smile\mathrm{pr}_{Y\times Z}^*\delta)$$

将 $\mathrm{pr}_{Z*}^{X\times Z}$ 应用于两边可得，(4.8) 的右侧为 $\mathrm{cor}(\mathrm{pr}_{X\times Z*}(\mathrm{pr}_{X\times Y}^*\gamma\smile\mathrm{pr}_{Y\times Z}^*\delta)(\alpha)$，如所求。 □

注记 4.9. 对于这类对应，还有一种 Grothendieck-Serre 对偶方法，其中类 $\gamma\in H^j_{P(\Phi_X,\Phi_Y)}(X\times Y,\Omega^i_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y))$ 定义了同态

$$H^q(X,\Omega_X^p(\log\Delta_X)(-\Delta_X))\to H^{q+j-d_X}(Y,\Omega_Y^{p+i-d_X}(\log\Delta_Y)(-\Delta_Y)).$$

这一构造在形式上类似。

参考文献

[Bar18] Lawrence Jack Barrott.《对数 Chow 理论》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1810.03746（2018）。[BBG22] Christian Böhning、Hans-Christian Graf von Bothmer 和 Michel van Garrel。《预对数 Chow 环与退化》。载于：《巴勒莫数学会会刊》系列 2（2022），第 1–34 页。[BPØ20] Federico Binda、Doosung Park 和 Paul Arne Østvær。《域上的对数动机的三角范畴》。载于：arXiv:2004.*12298 [*math*]*（2020 年 4 月）。arXiv：2004.12298 [math].[Con00] Brian Conrad。《格罗滕迪克对偶与基变换》。第 1750 卷。数学讲义。施普林格出版社，柏林，2000 年，第 vi+296 页。ISBN：3-540-41134-8。DOI：10.1007/b75857。网址：https://doi.org/10.1007/b75857。[Con07] Brian Conrad。《德利涅关于永田紧化的笔记》。载于：J. Ramanujan Math. Soc. 22.3（2007），第 205–257 页。ISSN：0970-1249。[CR11] Andre Chatzistamatiou 和 Kay Rülling。《正特征下结构层的高阶直接像》。载于：代数与数论 5.6（2011），第 693–775 页。ISSN：1937-0652。DOI：10.2140/ant.2011.5.693。网址：https://doi.org/10.2140/ant.2011.

[CR15] Andre Chatzistamatiou 和 Kay Rülling。“结构层的高阶直接像消失”。载于：《组合数学》151.11 (2015)，第 2131–2144 页。ISSN：0010-437X。DOI：10.1112/S0010437X15007435。网址：https://doi.org/10.1112/S0010437X

[Del71] 皮埃尔·德利涅。《霍奇理论 II》。载于：高等科学研究所数学出版物40 (1971)，第 5–57 页。ISSN：0073-8301。网址：http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1971__40__5

[DI87] Pierre Deligne 和 Luc Illusie。《模 p^2 的提升与 de Rham 复形的分解》。载于：《数学发明》89.2（1987），第 247–270 页。issn：0020- 9910。doi：10.1007/BF01389078。url：https://doi.org/10.1007/BF01389078。[DM69] P. Deligne 和 D. Mumford。《给定属数的曲线空间的不可约性》。载于：高等科学研究所数学出版物 36（1969），第 75–109 页。issn：0073-8301。url：http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1969__36__75_0。[EV92] Hélène Esnault 和 Eckart Viehweg。《消失定理讲义》。第 20 卷。德国数学家联合会研讨班。巴塞尔：Birkhäuser 出版社，1992 年，第 vi+164 页。isbn：3-7643-2822-3。doi：10.1007/978-3-0348-8600-0。url：https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8600-0。

[God22] Charles Godfrey。《snc 理想层的高阶直接像》。2022 年。doi：10.48550/ARXIV.2207.01142。url：https://arxiv.org/abs/2207.01142。[Har77] Robin Hartshorne。《代数几何》。数学研究生教材，第 52 号。施普林格出版社，纽约-海德堡，1977 年，第 xvi+496 页。isbn：0-387-90244- 9。[Hir64] Heisuke Hironaka。《特征零域上代数簇的奇点消解 I、II》。载于：《数学年刊》（第 2 辑）79（1964）第 109–203 页；同刊（第 2 辑）79（1964），第 205–326 页。issn：0003-486X。doi：10.2307/1970547。url：https://doi.org/10.2307

[KM98] János Kollár 和 Shigefumi Mori。 代数簇的双有理几何。第 134 卷。剑桥数学专著。C. H. Clemens 和 A. Corti 协助编写，译自 1998 年日文原版。剑桥大学出版社，剑桥，1998 年，第 viii+254。ISBN：0-521-63277-3。 DOI： 10.1017/CBO9780511662560。URL：https://doi.org/10.1017/CBO9780511662560。[Kol13] János Kollár。 极小模型纲领的奇点。第 200 卷。剑桥数学专著。Sándor Kovács 协助编写。剑桥大学出版社，剑桥，2013 年，第 x+370。ISBN：978-1-107-03534-8。 DOI： 10.1017/CBO9781139547895.[Kov20] Sándor J. Kovács.《有理奇点》。载于：arXiv:1703.*02269 [*math*]* （2020 年 7 月）。arXiv: 1703.02269 [math].[KX16] János Kollár 和 Chenyang Xu。《Calabi-Yau 对的对偶复形》。载于：Invent. Math. 205.3（2016），第 527–557 页。ISSN：0020-9910。DOI：10.1007/s00222-015-0640-6。网址：https://doi.org/10.1007/s00222-015-0640-6。[Lef53] Solomon Lefschetz。《代数几何》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1953 年，第 ix+233.[Mie09a] Yoichi Mieda。《循环类、Lefschetz 示性数公式与 p 进上同调的整性》。英文。载于：《2007 年代数数论及相关主题》，RIMS Kôkyûroku Bessatsu B12（2009 年）。网址：https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu

[Mie09b] Yoichi Mieda.《积分对数晶体上同调与代数对应》。英文。载于：《木崎代数几何研讨会论文集》（2009）。网址：https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/pdf/kinosaki2009.pdf。[MVW06] Carlo Mazza、Vladimir Voevodsky 和 Charles Weibel。《动机上同调讲义》。第 2 卷。克莱数学专著。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯；克莱数学研究所，马萨诸塞州剑桥，2006年，第 xiv+216 页。ISBN：978-0-8218-3847-1 0-8218-3847-4。[Nag63] Masayoshi Nagata.《抽象簇嵌入完备簇问题的推广》。载于：《京都大学数学杂志》3（1963年），第 89–102 页。ISSN：0023-608X。DOI：10.1215/kjm/1250524859。网址：https://doi.org/10.1215/kjm/1250524859。[Ogu18] Arthur Ogus.《对数代数几何讲义》。第 178 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2018年，第 xviii+539 页。ISBN：978-1-107-18773-3。DOI：10.1017/9781316941614。网址：https://doi.org/10.1017/9781316941614。

[R&D] Robin Hartshorne.剩余与对偶。关于 A. Grothendieck 工作的研讨班讲义，讲授于哈佛大学1963/64年。附录由 P. Deligne 撰写。数学讲义第 20 号。施普林格出版社，柏林—纽约，1966年，第 vii+423 页。

[Stacks] Stacks 项目作者。 *Stacks* 项目。2021年。 网址： https://stacks.math.columbia.edu。

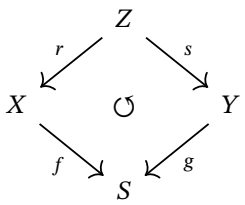
[Voi14] Claire Voisin。 周环、对角线分解与族的拓扑。普林斯顿大学出版社，2014年。 ISBN: 9780691160511。网址： http://www.jstor.org/stab （访问于2022年12月29日）。

A 构造节俭双有理等价基本类的尝试

如第1节所述，这项工作的灵感来自 Chatzistamatiou- Rülling 的以下重要定理：

定理 A.1 ([CR11，定理 3.2。8] (另见 [CR15，定理 1。1], [Kov20，定理 1。6]))。 设 k 是一个完美域，且 S 是一个概形。假设 X 和 Y 是两个分离的有限型 k-概形，且

(i) 在 k 上光滑，并且(ii) 在 上适当双有理，即存在一个交换图



(A.2)

其中 r 和 s 是适当双有理态射。
设 $n = \dim X = \dim Y = \dim Z$。那么，存在层的同构

$$R^i f_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} R^i g_* \mathcal{O}_Y \text{ and } R^i f_* \omega_X \xrightarrow{\sim} R^i g_* \omega_Y \text{ for all } i, \tag{A.3}$$

例如，这一结果意味着，若 S 是完美域 k 上的一个簇，且存在**有理消解**，即一个奇点消解 $f : X \to S$ 满足 $Rf_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$，那么任何其他消解 $g : Y \to S$ 都满足 $Rg_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_S$，因此也是有理的。在特征零的情形下，这曾是 Hironaka 奇点消解定理的一个推论[Hir64]；而在正特征下，这个问题直到2011年才得到解决。

原始证明见 [CR11，定理 3.2。8] 该证明使用了一个 cl : $CH^*(X) \to H^*(X, \Omega_X^*)$从 Chow 上同调到霍奇上同调的循环态射，并最终将其应用于一个 $Z \subset X \times Y$ 由真双有理等价得到的循环。该循环态射满足两个关键性质：第一，它与对应相容：这里的 Chow 对应是同态

$$CH^*(X) \to CH^*(Y) \text{ of the form } \alpha \longmapsto \mathrm{pr}_{Y*}(\mathrm{pr}_X^* \alpha \smile \gamma) \text{ for some } \gamma \in CH^*(X \times Y)$$

其中， $\smile$ 是通过相交循环诱导的杯积；Hodge对应以类似的方式定义。第二个关键性质是与滤过的相容性

$$CH^n(X \times Y) = F^0 CH^n(X \times Y) \supseteq F^1 CH^n(X \times Y) \supseteq \cdots \supseteq F^{\dim Y} CH^n(X \times Y) \supseteq 0$$

其中， $F^c CH^n(X \times Y)$ 是由满足条件 $\operatorname{codim}(\mathrm{pr}_Y Z \subseteq Y) \geq c$ 的循环 $Z \subseteq X \times Y$ 生成的子群，并且

$$H^n(X \times Y, \Omega^m_{X \times Y}) = F^0 H^n(X \times Y, \Omega^m_{X \times Y}) \supseteq F^1 CH^*(X \times Y) \supseteq \cdots \supseteq F^{\dim Y} H^n(X \times Y, \Omega^m_{X \times Y}) \supseteq 0$$

其中，$F^cH^n(X\times Y,\Omega^m_{X\times Y})$是来自 Künneth 分解的映射
$H^n(X\times Y,\oplus^m_{j=c}\Omega^{m-j}_X\boxtimes\Omega^j_Y)\to H^n(X\times Y,\Omega^m_{X\times Y})$ 的像。

自然会想到，能否应用类似的方法来证明定理 A.1 关于偶的一个类似结论，它可能如下所述：猜想 A.7 。为了陈述这一类似结论，我们还需要给出几个定义。本附录余下部分中，我们固定在一个完美域 k上工作。

定义 A.4 （ [Kol13，定义 1 的略微简化版本。5]）。称**对** (X,Δ_X) 上的 k 为

- 一个既约、等维且 S_2 的 X 概形 k，其为有限型并具有对偶化复形，连同
- 一个 $\mathbb{Q}$-魏尔除子 $\Delta_X=\sum_i a_iD_i$，定义在 X 上，且 D_i 的任何不可约分支 Δ_X 都不包含于 $\mathrm{Sing}(X)$ 中。

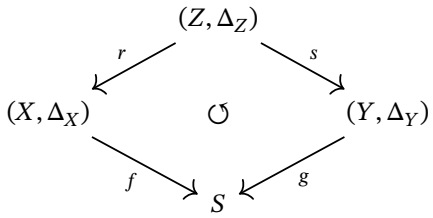
定义 A.5。简单正规交叉对 $(X,\Delta_X=\sum_i D_i)$ 的一个层是某个交 $D_J=\cap_{j\in J}D_j$的一个连通（等价地，不可约）分支。

对于任意的对 (X,Δ_X)，存在最大的开集 $U\subseteq X$，使得 $(U,\Delta_X|_U)$ 是一个简单正规交叉对；我们将所得的简单正规交叉对称为 $\mathrm{snc}(X,\Delta_X):=(U,\Delta_X|_U)$。

定义 A.6 （比较 [Kol13，定义 2.79-2。80], [KX16，§1，定义 10] 之前的讨论）。 设$(S,\Delta_S=\sum_i D_i)$ 为一个对，并假设 Δ_S既约且有效。一个分离的有限型双有理态射 $f:X\to S$ 关于 Δ_S 是节俭的，当且仅当

(i) f 在 $\mathrm{snc}(S,\Delta_S)$ 的每个层的泛点处都是同构，并且(ii) 令 $\tilde{D}_i=f_*^{-1}D_i$ 为 $i=1$、...、N 中除子 D_i的严格变换，并令$\Delta_X:=\sum_i\tilde{D}_i$，则态射 f 在 $\mathrm{snc}(X,\Delta_X)$的每个层的泛点处都是同构。

猜想 A.7. 设 k 是一个完美域， S 是一个概形， (X,Δ_X) 和 (Y,Δ_Y) 是定义在 k 上的简单正规交叉对。假设 (X,Δ_X) 和 (Y,Δ_Y) 在 S 上适当双有理，即存在一个交换图



(A.8)

其中 r、 s 是真双有理态射，并假设 $\Delta_Z=r_*^{-1}\Delta_X=s_*^{-1}\Delta_Y$。若 r 和 s 是节俭的，则存在拟同构

$$Rf_*\mathcal{O}_X(-\Delta_X)\simeq Rg_*\mathcal{O}_Y(-\Delta_Y)\ and\ Rf_*\omega_X(\Delta_X)\simeq Rg_*\omega_Y(\Delta_Y). \tag{A.9}$$

紧随 [CR11] 的思路，我们可以先将霍奇上同调中出现的通常微分层 Ω_X替换为带对数极点的微分层 $\Omega_X(\log\Delta_X)$，并尝试采用类似的策略：从一个表示节俭真双有理等价的循环 $Z\subset X\times Y$出发，构造对数霍奇上同调中的对应，并分析其性质。

归根结底，即便是第 4 节 中的对应，似乎也不足以处理节俭适当双有理等价，正如我们将在下文附录A.1 中所展示的。我们遇到的问题很简单：考察 $\mathrm{cl}(Z)$ 子簇的霍奇类 $Z\subseteq X$的构造方法，其中 Z 和 X是光滑射影簇（见 [Har77，例 III.7。4]），我们发现 $\mathrm{cl}(Z)$ 最终源自迹线性泛函 $\mathrm{tr}:H^{\dim Z}(Z,\omega_Z)\to k$，或者从塞尔对偶的角度看，源自元素 $1\in H^0(Z,\mathcal{O}_Z)$。由于第 4 节中引入了对数极点和零点，若试图遵循这一构造方法，就会经过

形如 $H^{\dim Z}(Z,\omega_Z(D))$ 的上同调群，或对偶地，形如 $H^0(Z,\mathcal{O}_Z(-D))$ 的上同调群，其中 D 是 Z 上的一个（在相关情形中通常非零的）有效 Cartier 除子，因此根本无从得到“1”。

除了上一段所述的困难之外，在尝试提出 Chatzistamatiou-Rülling 循环态射论证的对数变体时，我们还受到一个事实的阻碍：对数 Chow 理论仍处于起步阶段。作者不清楚 Fulton 的 CH^* 是否存在可用于构造具备所有所需性质的对数循环态射的对数变体。对这一问题作进一步研究，或许会是一个有趣的未来研究课题。

尽管存在上述挑战，仍可通过完全不同的方法证明一个几乎与猜想 A.7完全相同的结果 [God22]。[8]

A.1 从节俭的双有理等价获得对数霍奇对应的障碍

设 (X,Δ_X)，(Y,Δ_Y) 是简单正规交叉对，并进一步假设 X，Y 连通且为真。设 $Z\subseteq X\times Y$ 是一个余维为 c 的光滑闭子簇。在这种情况下，$\mathrm{cl}(Z)\in H^c(X\times Y,\Omega^c_{X\times Y})$ 的基本类（暂时没有对数极点）仅用塞尔对偶即可描述如下（参见[Har77，例 III.7。4]）。复合映射

$$H^{\dim Z}(X\times Y,\Omega^{\dim Z}_{X\times Y})\to H^{\dim Z}(Z,\Omega^{\dim Z}_Z)\xrightarrow{\mathrm{tr}} k \tag{A.10}$$

（其中 tr 是塞尔对偶的迹映射）是一个元素

$$H^{\dim Z}(X\times Y,\Omega^{\dim Z}_{X\times Y})^\vee\simeq H^c(X\times Y,\Omega^c_{X\times Y}) \tag{A.11}$$

我们可以将其定义为 $\mathrm{cl}(Z)$。[9] 鉴于定理 4.1 我们或许可以修改等式 (A.10)和(A.11) 以得到 $H^c(X\times Y,\Omega^c_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))$中的一个类。我们来重点考察以下情形：

- $\mathrm{pr}_X|_Z : Z\to X$和 $\mathrm{pr}_Y|_Z : Z\to Y$ 都是节俭且双有理的，因此特别有 $c=\dim X=\dim Y=:d$ 和
- $(\mathrm{pr}_X|_Z)^{-1}_*\Delta_X=(\mathrm{pr}_Y|_Z)^{-1}_*\Delta_Y=:\Delta_Z$

为使记号简洁，设 $\pi_X:=\mathrm{pr}_X|_Z$ 和 $\pi_Y:=\mathrm{pr}_Y|_Z$。

在这种情况下，令 $\iota : Z\to X\times Y$ 为包含映射，则存在一个自然映射

$$d\iota^\vee : \Omega^d_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})\to\iota_*\Omega^d_Z(\log\Delta_{X\times Y}|_Z) \text{ and twisting by } -\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y \text{ gives a map}$$
$$\Omega^d_{X\times Y}(\log\Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)\to\iota_*\Omega^d_Z(\log\Delta_{X\times Y}|_Z)(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y|_Z)=\iota_*\Omega^d_Z(\log\Delta_{X\times Y}|_Z)(-\pi_Y^*\Delta_Y)$$

为确定 $\Omega^d_Z(\log\Delta_{X\times Y}|_Z)(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X|_Z)$，写作

$$(\pi_X)^*\Delta_X=(\pi_X)^{-1}_*\Delta_X+E_X=\Delta_Z+E_X \text{ and}$$
$$(\pi_Y)^*\Delta_Y=(\pi_Y)^{-1}_*\Delta_Y+E_Y=\Delta_Z+E_Y$$

使得 $\Delta_{X\times Y}|_Z=(\pi_X)^*\Delta_X+(\pi_Y)^*\Delta_Y=2\Delta_Z+E_X+E_Y$。虽然这些假设保证 Δ_Z 是既约的，但 E_X、E_Y 可能是非约化的——不过关于它们的重数仍有一些结论。若 $E_X=\sum_i a_X^iE_X^i$，$E_Y=\sum_i a_Y^iE_Y^i$ 其中 E_X^i、E_Y^i 均不可约，那么根据 [Har77，命题 36] (另见 [Kol13，§210]) 的推广，

$$a_X^i=\mathrm{mlt}(\pi_X(E_X^i)\subseteq\Delta_X)$$

并且由于 Δ_X 是约化有效简单正规交叉除子，如果另外记作 $\Delta_X=\sum_i D_X^i$，那么 $\mathrm{mlt}(\pi_X(E_X^i)\subseteq\Delta_X)=|\{i\mid\pi_X(E_X^i)\subseteq D_X^i\}|$。节俭性假设，即 $\pi_X(E_X^i)$ 不是

[8]该结果只是“几乎完全相同”的原因在于，在 [God22] 中，我们对基底概形提出了表面上更强的假设 S (即要求其优良且诺特)，但即使在 定理 A.1和 猜想 A.7 的情形下，也有可能将问题归约到这种情形，例如通过诺特逼近。[9]届时，验证这与其他定义一致可能并非易事，尤其是当我们需要考虑符号时；不过，接下来的内容并不需要如此深入的细节。

一个层，便意味着 $a_X^i = \mathrm{mlt}(\pi_X(E_X^i) \subseteq \Delta_X) < \mathrm{codim}(\pi_X(E_X^i) \subset X)$。由于带对数极点的微分对重数不敏感，我们有

$$\Omega_Z^d(\log \Delta_{X\times Y}|_Z) = \omega_Z(\Delta_Z + E_X^{\mathrm{red}} + E_Y^{\mathrm{red}})$$

其中 $-^{\mathrm{red}}$ 表示相应的约化有效除子。于是

$$\begin{aligned}\Omega_Z^d(\log \Delta_{X\times Y}|_Z)(-\pi_Y^*\Delta_Y) = \omega_Z(\Delta_Z + E_X^{\mathrm{red}} + E_Y^{\mathrm{red}} - \Delta_Z - E_Y)\\ \omega_Z(E_X^{\mathrm{red}} + (E_Y^{\mathrm{red}} - E_Y)) = \omega_Z(\sum_i E_X^i + \sum_i (1-a_Y^i)E_Y^i)\end{aligned}$$

由此可得一个诱导映射

$$H^d(X\times Y, \Omega_{X\times Y}^d(\log \Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_Y^*\Delta_Y)) \to H^d(Z, \omega_Z(E_X^{\mathrm{red}} + (E_Y^{\mathrm{red}} - E_Y))) \tag{A.12}$$

这里左端与 $H^d(X\times Y, \Omega_{X\times Y}^d(\log \Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))$ 对偶（Serre 对偶），因此 k-线性对偶映射 (A.12) 是一个态射

$$H^d(Z, \omega_Z(E_X^{\mathrm{red}} + (E_Y^{\mathrm{red}} - E_Y)))^\vee \to H^d(X\times Y, \Omega_{X\times Y}^d(\log \Delta_{X\times Y})(-\mathrm{pr}_X^*\Delta_X))$$

遗憾的是，[10] $H^d(Z, \omega_Z(E_X^{\mathrm{red}} + (E_Y^{\mathrm{red}} - E_Y)))$ 常常为 0。若 E_X 和 E_Y 均为约化的（下文将给出一个满足此条件的具体例子），则 $H^d(Z, \omega_Z(E_X^{\mathrm{red}} + (E_Y^{\mathrm{red}} - E_Y))) = H^d(Z, \omega_Z(E_X))$。若再假设 $E_X \neq 0$，我们便可通过一种极弱（但与特征无关）的 Kodaira 消失定理得到 $H^d(Z, \omega_Z(E_X)) = 0$：

引理 A.13。设 Z 是域 k 上的一个维数为 d的真簇，并假设 Z 正规且为 *Cohen–Macaulay*。若 $D \subset Z$ 是 Z 上的一个非零有效 *Cartier* 除子，则 $H^d(Z, \omega_Z(D)) = 0$。

证明。根据塞尔对偶 $H^d(Z, \omega_Z(D)) = H^0(Z, \mathcal{O}_Z(-D))$，它由以下经典事实而消失：“非平凡线丛及其逆不可能同时有非零整体截面。”由于我不知道具体的参考文献，这里给出一个证明：

反设存在一个非零整体截面 $\sigma \in H^0(Z, \mathcal{O}_Z(-D))$——那么复合映射

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_Z(-D) \hookrightarrow \mathcal{O}_Z, \qquad \mathcal{O}_Z \xrightarrow{\tau} \mathcal{O}_Z$$

非零。根据 [Stacks，标签 0358] $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ 是一个（正规）整环，并且由于它也是有限维 k-向量空间，因此必为 k的扩张域。但此时 $\tau \in H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ 可逆，因而是满射，所以 $\mathcal{O}_Z(-D) \hookrightarrow \mathcal{O}_Z$ 是满射，这与假设矛盾，因为余核$\mathcal{O}_D \neq 0$。 □

例 A.14。设 $X = \mathbb{P}^2$，且令 $\Delta_X \subset X$ 为一条直线。令 $p \in L$ 为一个 k-点，令 $Y = \mathrm{Bl}_p X$，并令 $\Delta_Y = \tilde{L} =$ 为 L 的严格变换。最后，令 $f : Y \to X$ 为胀起映射，并令 $Z = (f\times \mathrm{id})(Y) \subset X\times Y$。在此情形下（沿用上述所有记号），$\pi_X \circ (f\times\mathrm{id}) = f$ 且 $\pi_Y \circ (f\times\mathrm{id}) = \mathrm{id}_Y$，因此在同构 $f\times\mathrm{id} : Y \simeq Z$ 下，E_X 是 f 的例外除子（重数为 1）。另一方面，$E_Y = 0$。特别地，E_X 和 E_Y 是既约的，且 $E_X \neq 0$，因此根据上述讨论，$H^2(Z, \omega_Z(E_X)) = 0$。

[10] 至少就……的构造而言 构造 s 的对数霍奇上同调类的方法 子簇……