arXiv:2301.00522v3 [math.RT] 5 Mar 2023

秩 2 对称双曲 Kac–Moody 李代数关于 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数的不可约模分解：这些子代数是主 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数的推广

TSURUSAKI Hisanori*

摘要

双曲 Kac-Moody 李代数存在主 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。对于秩 2 对称双曲 Kac-Moody 李代数，先前的一篇论文构造了某些 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。这些子代数是主 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数的推广。我们证明，秩 2 对称双曲 Kac-Moody 李代数本身在这些 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数的作用下可分解为不可约模。此外，我们对该分解的不可约分量进行分类。特别地，我们得到了酉主系列和补充系列的重数。

1 引言

有限维单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 中的幂零轨道，是通过内自同构作用于 $\mathfrak{g}_0$ 中的幂零元 x 而得到的轨道。在[Dyn57], 中，这些轨道由带权 Dynkin 图分类。根据 Jacobson-Morozov 定理，对于 $\mathfrak{g}_0$中的幂零元 x ，我们可以构造一个以 x 为正幂零元的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组（[CM93，定理 3.3.1]）。

这使得对 $\mathfrak{g}_0$ 的幂零轨道进行分类，等价于在内自同构作用下对 $\mathfrak{g}_0$ 中的 $\mathfrak{sl}_2$ -三元组进行分类。在有限维单李代数的幂零轨道中，作为代数簇维数最大的轨道称为主幂零轨道。相应地，我们可以构造一个与紧致对合相容的主 $SO(3)$子代数（[Kos59]）。

Kac–Moody 李代数是有限维单李代数的推广。它们分为三种类型：有限型、仿射型和不定型。有限型 Kac–Moody 李代数是有限维单李代数。在不定型 Kac-Moody 李代数中，有一类

*东京大学数理科学研究科，htsu- rusaki1929@gmail.com

称为双曲 Kac-Moody 李代数。双曲 Kac-Moody 李代数是一种不定型 Kac-Moody 李代数，其 Dynkin图的任意真子图均为有限型或仿射型。特别是，双曲卡茨-穆迪李代数被认为与弦理论(E_{10}Vis])有关。

类比上述理论，在 [NO01]，中为双曲 Kac-Moody 李代数构造了其主 SO(1,2) 子代数。注意， [GOW02] 表明，可以为某些非双曲的不定 Kac-Moody 李代数构造主 SO(1,2) 子代数。

对应于这个主 SO(1, 2) 子代数，我们可以在双曲 Kac-Moody 李代数中构造一个主 $\mathfrak{sl}_2$-子代数。在 [Tsu]，关于秩 2 对称双曲 Kac–Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 的研究中，得到了以下结果。设 $R_{\mathfrak{g}}$ 为由正实根向量张成的空间。我们考虑其幂零正元属于 $R_{\mathfrak{g}}$ 的 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。由此可以构造某些 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。这些子代数是主 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数的推广。

本文中，对于在 [Tsu]，中构造的秩为 2 的对称双曲型 Kac-Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数，我们证明 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用下分解为不可约的 $\mathfrak{sl}_2$- 模。

下面我们将进一步详细说明。设 $\mathfrak{s}$ 是在 [Tsu] 中构造的一个 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。设 H、X、Y 是一个 $\mathfrak{sl}_2$ 三元组，并假设 $\mathfrak{s}$ 由 H、X、Y 张成。设 e_i、f_i、h_i、（$i = 0$, ..., $n-1$）是 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley 生成元。设 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 是由 h_i 的元素张成的 $\mathbb{R}$-空间。根据 [Kac90，定理 2.2]， $\mathfrak{g}$ 有一个取值于 $\mathbb{C}$ 的非退化不变对称双线性形式（$\cdot \mid \cdot$），称为标准形式。一个称为紧致对合的反线性自同构 ω_0，由下式确定：

$$\begin{aligned} \omega_0(e_i) &= -f_i, \\ \omega_0(f_i) &= -e_i \qquad (i = 0, \ldots, n-1), \\ \omega_0(h) &= -h \qquad (h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

根据 [Kac90，第 2.7]，节，我们可以在 $\mathfrak{g}$ 上确定一个非退化厄米形式（$\cdot \mid \cdot$），使得（$x \mid y$）$_0 = -$（ω_0（x）$\mid y$）。

若满足以下条件，则称 $\mathfrak{s}$-模 $V \subset \mathfrak{g}$ 为可酉化的。

(1) $(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 V 上是正定的。

(2) 对于 v_1、$v_2 \in V$ 和 $s \in \mathfrak{s}$，满足以下条件。

$$([s, v_1], v_2)_0 = -(v_1, [\omega_0(s), v_2])_0.$$

定理 1.1（定理 4.5）。 $\mathfrak{g}$ 可分解为不可约 $\mathfrak{s}$-模的直和，其中 $\mathfrak{s}$ 本身是一个直和项。除 $\mathfrak{s}$ 外，所有这些模都是可酉化的。

此外，我们还对这一分解中出现的最高权模、最低权模，以及既非最高权模也非最低权模的模的数量进行分类。我们将根 $s\alpha_1 + t\alpha_2$ 视为xy平面上的一个点(s, t)，并在 §5 中定义 xy平面上的区域 $L, -L$。若根 α 满足$\alpha(H) \in (0, 2)$，则 $\alpha \in L$。若根 α 满足 $\alpha(H) \in (-2, 0)$，则 $\alpha \in -L$。

定理 1.2（定理 7.1）。我们考虑 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{s}$ 的作用下的不可约分解。

(1) 设 M 是 $\mathfrak{g}$ 分解中的一个不可约分量，它包含 L 中某个实根的根空间。那么，M 是酉主系列表示或互补系列表示。(2)（参见 [Tsu，命题 7.3]）存在一个酉主系列表示，其中在 $\mathfrak{h}$ 中包含一个一维空间。(3) $\mathfrak{g}$ 分解为上述 (1) 和 (2) 中描述的 $\mathfrak{s}$-子模、$\mathfrak{s}$ 本身、不可约最低权模以及不可约最高权模的直和。

我们还讨论了如何计算不可约最高权模或最低权模的重数（§7）。此外，我们将既非最高权模也非最低权模的不可约分量分类为酉主系列表示或互补系列表示。

定理 1.3（定理 8.12）。我们考察既非最高权模也非最低权模、且包含由定理 7.1 得到的 L 中实根对应的根向量的不可约分量。除引理 8.5、引理 8.9 和引理 8.11 中所述的情形外，这些不可约分量都是互补系列表示。对于例外情形，这些不可约分量是酉主系列表示。

2 Kac-Moody 李代数的一般理论

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的可对称化 Kac-Moody 李代数。设 A 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵，且 A 是一个 $n \times n$ 矩阵。设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数。设 e_i、f_i、h_i、（$i = 0$，...，$n-1$）是 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley 生成元。设 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 是 h_i 的 $\mathbb{R}$-张成空间。

根据 [Kac90，定理 2.2]，$\mathfrak{g}$ 具有一个取值于 $\mathbb{C}$ 的非退化不变对称双线性形式 $(\cdot \mid \cdot)$，称为标准形式。

$\mathfrak{g}$ 的反线性自同构 ω_0（称为紧致对合）由下式确定：

$$\begin{aligned} \omega_0(e_i) &= -f_i, \\ \omega_0(f_i) &= -e_i \qquad (i = 0, \ldots, n-1), \\ \omega_0(h) &= -h \qquad (h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

根据 [Kac90，§2.7]，，我们可以在 $\mathfrak{g}$ 上确定一个非退化厄米形式 $(\cdot \mid \cdot)_0$，使得 $(x \mid y)_0 = -(\omega_0(x) \mid y)$。

记 $\mathfrak{n}^+$ 为由 e_i 生成的 $\mathfrak{g}$ 的子代数，记 $\mathfrak{n}^-$ 为由 f_i 生成的 $\mathfrak{g}$ 的子代数。

我们可以构造一个由三个非零元素 $J^+ \in \mathfrak{n}^+$、$J^- \in \mathfrak{n}^-$、$J_3 \in \mathfrak{h}$ 张成的 $\mathfrak{g}$ 三维子代数。J^+、J^- 和 J_3 满足

$$[J_3, J^{\pm}] = \pm J^{\pm},$$

$$[J^+, J^-] = -J_3.$$

这个子代数称为 $\mathfrak{g}$ 的 $SO(1, 2)$ 子代数。

如果表示空间 V 具有厄米内积（$\cdot, \cdot$），且满足以下两个条件，则称 $SO(1, 2)$ 子代数的表示是酉的。

(1) J^+ 和 J^- 的作用互为伴随，且 J_3 的作用是自伴的。也就是说，对于 x, $y \in V$，有

$$([J^+, x], y) = (x, [J^-, y]),$$
$$([J_3, x], y) = (x, [J_3, y]).$$

(2) 厄米内积（$\cdot, \cdot$）是正定的。

考察 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}$的 $SO(1, 2)$ 子代数的伴随作用时，根据[Tsu 的引理 3.1、引理 3.2], ，可知满足条件 (1) 的伴随作用是酉的，这与 $J^- = -\omega_0(J^+)$ 等价。在 [NO01], 中，研究了双曲 Kac-Moody 李代数的非主 $SO(1, 2)$ 子代数。主 $SO(1, 2)$ 子代数满足 $J^- = -\omega_0(J^+)$。

当 $X \in \mathfrak{n}^+$、$Y \in \mathfrak{n}^-$、$H \in \mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中满足以下条件的三个非零元素时

$$[H, X] = 2X,$$
$$[H, Y] = -2Y,$$
$$[X, Y] = H,$$

这三个元素称为 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。由这些元素张成的 $\mathfrak{g}$-子代数称为 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。$SO(1, 2)$ 子代数和 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数可以通过

$$J^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} X,$$
$$J^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} Y,$$
$$J_3 = \frac{1}{2} H.$$

将 $SO(1,2)$ 子代数中的条件 $J^- = -\omega_0(J^+)$ 转化为 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数中的 $Y = \omega_0(X)$。在下文中，我们考虑满足 $Y = \omega_0(X)$ 的 $\mathfrak{sl}_2$ 子代数。

与紧致对合相容的二阶双曲对称李代数的 3　$\mathfrak{sl}_2$-三元组

设 a 是满足 $a \geq 3$ 的整数，并设 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的双曲 Kac-Moody 李代数，使得 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix}.$$

设 α_0、α_1 为 $\mathfrak{g}$ 的单根。设 $\{F_n\}$ 为由 $F_0 = 0$、$F_1 = 1$、$F_{k+2} = aF_{k+1} - F_k$ 确定的数列。

引理 3.1（[KM95，命题 4.4]）。$\mathfrak{g}$ 的实正根具有如下形式：

$$\alpha = F_{k+1}\alpha_0 + F_k\alpha_1$$

or

$$\beta = F_k\alpha_0 + F_{k+1}\alpha_1.$$

我们将这些根区分为 α 型和 β 型，并将属于每个根的根向量也区分为 α 型和 β 型（参见 [Tsu，§4]）。

设 X 是由实正根向量张成的空间中的一个元素。那么 X 可写为：

$$X = \sum_k c_k E_k, \qquad (k \in \{0, \ldots, n_X - 1\}, c_k \in \mathbb{C}, c_k \neq 0, E_k \in \mathfrak{g}_{\beta_k}, E_k \neq 0)$$

其中 β_k（$k \in \{0, \ldots, n_X - 1\}$）是互不相同的实根，且 n_X 是正整数。

我们称这为 n_X X的长度。则有如下结论。

引理 3.2（[Tsu，定理 5.8]）。设 X 是由实正根向量张成的空间中的一个元素。

(1) 当 X 的长度为 1 或大于 3 时，X、$Y = \omega_0(X)$ $H = [X, Y]$不构成 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。(2) 假设 X 的长度为 2，且 E_0、E_1 是不同类型的实正根向量（即 α型和 β型）。那么，取适当的 c_0、$c_1 \in \mathbb{C}$、$X = c_0E_0 + c_1E_1$、$Y = \omega_0(X)$，则 $H = [X, Y]$构成 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。特别地，可以选择 c_0、c_1 使得 c_0、$c_1 \in \mathbb{R}$。

引理 3.3（[Tsu，定理 6.4]）。取引理 3.2（2）中的 $\langle H, X, Y\rangle$。设 $X = c_0E_0 + c_1E_1$，其中 E_0 为 α 型，E_1 为 β型。由引理 3.1，利用整数 $i, j \geq 0$，可写成 $E_0 \in \mathfrak{g}_{F_{i+1}\alpha_0 + F_i\alpha_1}$，$E_1 \in \mathfrak{g}_{F_j\alpha_0 + F_{j+1}\alpha_1}$。当且仅当 $i = j - 1, j, j + 1$，H 为主导。

4 将 $\mathfrak{g}$ 分解为 $\mathfrak{sl}_2$ 模

在本节中，我们考虑 $\mathfrak{g}$ 的一个 $\mathfrak{sl}_2$-子代数 $\mathfrak{s} = \langle H, X, Y \rangle$，它满足以下条件。

(1) $H \in \mathfrak{h}$ 和 H 是主导的。

(2) X 属于由正根向量张成的空间。

(3) $Y = \omega_0(X)$。

我们证明，在 $\mathfrak{s}$ 的作用下， $\mathfrak{g}$ 可分解为不可约模。若 $V \subset \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{s}$-模，则称其可酉化，当且仅当满足以下条件 .

(1) V 上的 $(\cdot \mid \cdot)_0$ 是正定的。

(2) 对于 v_1、 $v_2 \in V$和 $s \in \mathfrak{s}$，满足以下条件。

$$([s, v_1], v_2)_0 = -(v_1, [\omega_0(s), v_2])_0.$$

根据 [Kac90, §2.7], , 条件 (2) 自动满足。因此，$(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 V 上正定，当且仅当 V 可酉化。

首先，我们令

$$U = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{s}\ (x \mid y)_0 = 0\}.$$

U 在 $\mathfrak{s}$的作用下封闭，并且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus U$。

引理 4.1. $(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 U上正定。

证明。根据 [Kac90, Theorem 11.7], , $(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 $\mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$上正定。$(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的符号为 (1, 1)。设 $\mathfrak{h}_\mathfrak{s}$ 为由 H 张成的空间。由于 $\mathfrak{s}$ 本身不可酉化，当我们写作 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}'$时，$(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 $\mathfrak{s}$上并非正定。因此，$(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 $\mathfrak{h}'$上正定。由于 $U = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$，$(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 U上正定。 □

引理4.2. 设 V 是 U 的一个在 H 的作用下封闭的子空间。设 $V^\perp$ 是 U 中相对于厄米形式 $(\cdot \mid \cdot)_0$ 与 V 正交的子空间。则 $U = V \oplus V^\perp$。

证明. 我们考虑 U 关于 H 的特征子空间分解。设 U_λ 是对应于 λ 的特征子空间，并记

$$U = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} U_\lambda.$$

由于 H 是 $(\cdot \mid \cdot)_0$上的厄米算子，当 $\lambda \neq \mu$时， U_λ 与 U_μ 关于该内积正交。由于 H 是主导的， U_λ 是有限维的。对于每个 λ， V 也继承了 U的特征子空间分解。

设 V_λ 是 V 关于 λ的一个特征子空间，且 V 可以写成若干个 V_λ的直和。令

$$V'_\lambda = \{v \in V_\lambda \mid \forall x \in V_\lambda \ (v \mid x)_0 = 0\},$$

and

$$V' = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V'_\lambda.$$

V_λ 是有限维的。由引理 4.1，$(\cdot \mid \cdot)_0$ 在 U上是正定的。因此，我们有 $U_\lambda = V_\lambda \oplus V'_\lambda$。所以，我们有 $U = V \oplus V'$ 和 $V' = V^\perp$。 □

下面我们证明， U 在 $\mathfrak{s}$的作用下可以分解为不可约模。

引理 4.3. U 的任意非零 $\mathfrak{sl}_2$-子模 V 都包含一个不可约子模。

证明. 按照 H的作用，对 U 作特征子空间分解。 V 也按此分解分解为特征子空间，并且V的每个特征子空间都是有限维的。我们将 H 视为 V 上的线性变换，并取 H 在 V上的某个特征值 λ。令 $U(\mathfrak{sl}_2)$为 $\mathfrak{sl}_2$的包络代数。考虑 $U(\mathfrak{sl}_2)$的卡西米尔元 C，它保持 V_λ不变。由于 V_λ 是有限维的，因此存在 C的一个特征向量。记此向量为 v。考虑由 v生成的$\mathfrak{sl}_2$-子模，它包含一个不可约子模。

□

定理 4.4。（参见 [Kob94，定理 1.2]） U 可以分解为不可约 $\mathfrak{s}$-模的直和，并且所有这些模都可酉化。

证明。我们考虑 U 的一组不可约子模，这些子模关于 $(\cdot \mid \cdot)_0$彼此正交。令 T 为该集合。我们按包含关系对 T 中的元素排序。于是 T 非空且归纳有序。因此，根据佐恩引理， T 有一个极大元。取 T 的一个极大元，并记为 $\mathcal{M}$。考虑属于 $\mathcal{M}$的所有子模的直和。令 M 表示这个和。假设 $U \neq M$，我们将导出矛盾。由于 M 是 U 的一个子空间，且在 H的作用下封闭，根据引理4.2，有 $U = M \oplus M^\perp$。由于 $M^\perp$ 是 U的非零$\mathfrak{sl}_2$子模，根据引理4.3， $M^\perp$包含一个不可约子模。记此子模为 W。我们有 $\mathcal{M} \cup \{W\} \in T$，这与 $\mathcal{M}$的极大性矛盾。因此，我们有 $U = M$，且 U 可以分解为不可约子模的直和。结合引理4.1，我们还可以看出这些模的可酉化性。

□

定理 4.5. $\mathfrak{g}$ 可分解为不可约 $\mathfrak{s}$-模的直和，其中包含其自身 $\mathfrak{s}$。除 $\mathfrak{s}$ 外，所有这些模都可酉化。 □

5 $\mathfrak{sl}_2$ 中的模

接下来，我们考察将 $\mathfrak{g}$ 分解为不可约 $\mathfrak{s}$-模时会出现哪些模。特别是，我们考察酉主系列表示或互补系列表示的数量。

对于李代数 $\mathfrak{a}$，令 $U(\mathfrak{a})$ 为 $\mathfrak{a}$ 的包络代数。令V 为一个不可约 $\mathfrak{s}$-模，且它是 $\mathfrak{g}$的一个不可约分量。 $U(\mathfrak{s})$ 的卡西米尔元 C 在 V 上的作用为常数乘法。令 μ 为此常数。根据 HT92 第二章推论 1.1， H 在 V 上的特征值为 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 时，存在某个区间 $I \subset \mathbb{Z}$，且 V 可表示为一维特征子空间的直和，使得 H 的特征值为 $\lambda_k = \lambda_0 + 2k (k \in I)$。根据 HT92 第二章定理 1.1， H 在V上的特征值为 λ 时，对于整数 k，定义 $s_1(k)$ 为

$$s_1(k) = \frac{8\mu - (\lambda + 2k - 1)^2 + 1}{4}. \tag{A}$$

取 V 关于特征值$\lambda + 2k$的特征子空间中的一个元素 v_k。于是有 $X(Yv_k) = s_1(k)v_k$。如果不存在满足 $s_1(k) = 0$ 的 $k \in \mathbb{Z}$，那么 V 是一个既非最高权模也非最低权模的不可约模。如果存在满足 $s_1(k) = 0$ 的 $k \in \mathbb{Z}$，那么 V 是最高权模或最低权模。

令 $\mathcal{W}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群。根据引理 3.2，我们可以将 H、X、Y 在 $\mathfrak{s}$ 中写成如下形式。

$$\begin{aligned}
X &= c_0 w_0(e_p) + c_1 w_1(e_q) \qquad (c_0, c_1 \in \mathbb{R}, w_0, w_1 \in \mathcal{W}, (p, q) \in \{(0,1), (0,0), (1,1)\}),\\
Y &= -c_0 w_0(f_p) - c_1 w_1(f_q),\\
H &= -c_0 w_0(h_p) - c_1 w_1(h_q).
\end{aligned}$$

设 $k_{\mathfrak{s}}$、$l_{\mathfrak{s}}$、$m_{\mathfrak{s}}$、$n_{\mathfrak{s}}$ 为实数，满足 $c_0 w_0(e_p) \in \mathfrak{g}_{k_{\mathfrak{s}}\alpha_0 + l_{\mathfrak{s}}\alpha_1}$、$c_1 w_1(e_q) \in \mathfrak{g}_{m_{\mathfrak{s}}\alpha_0 + n_{\mathfrak{s}}\alpha_1}$。由引理 3.3，我们可以用整数 i、$j \geq 0$ 将 $k_{\mathfrak{s}} = F_{i+1}$、$l_{\mathfrak{s}} = F_i$、$m_{\mathfrak{s}} = F_j$、$n_{\mathfrak{s}} = F_{j+1}$ 写出，并且还有 $i \in \{j-1, j, j+1\}$。

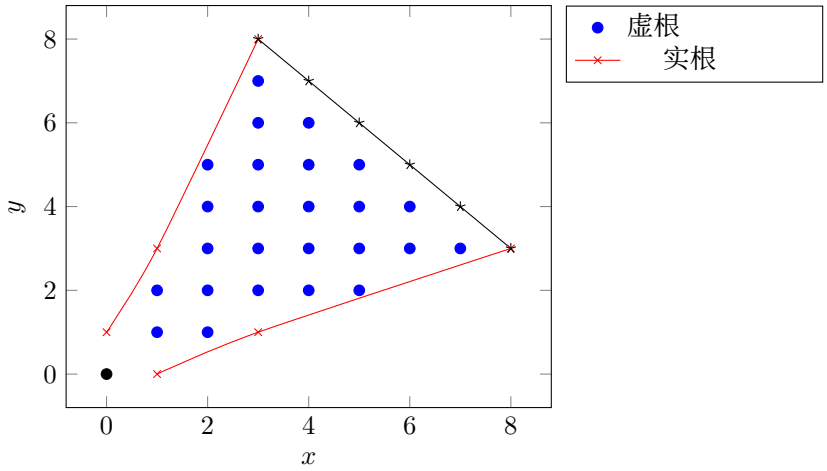
取根向量 $E \in \mathfrak{g}_{s\alpha_0 + t\alpha_1}$，其中 s、$t \in \mathbb{Z}$，我们想要确定在 $\mathfrak{s}$ 的作用下，E 会生成三种模中的哪一种。

我们在 xy 平面中如下定义 L。L 是一个满足 $x \geq 0$、$y \geq 0$、$(x, y) \neq (0, 0)$、$x^2 - axy + y^2 \leq 1$ 以及以下条件的区域。

$$\begin{aligned}
x < k_{\mathfrak{s}} = F_{i+1}, &\qquad (\text{when } i = j-1)\\
x + y < k_{\mathfrak{s}} + l_{\mathfrak{s}} = F_i + F_{i+1}, &\qquad (\text{when } i = j)\\
y < l_{\mathfrak{s}} = F_i. &\qquad (\text{when } i = j+1)
\end{aligned}$$

若取满足 $s, t \in \mathbb{Z}$ 的根 $s\alpha_0 + t\alpha_1$，则由 [KM95，推论 4.3]，可知，xy-平面上由 (s, t) 表示的点位于双曲线 $x^2 - axy + y^2 = 1$ 的内部或边界上。令 h_C 为该双曲线。令 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为满足 $HE = \lambda E$ 的值。我们有 $\lambda = (s\alpha_0 + t\alpha_1)(H)$。$\lambda \in (0, 2)$ 当且仅当 $(s, t) \in L$。下文中，我们将根 $s\alpha_0 + t\alpha_1$ 视为 xy-平面上的点 (s, t)。

图 1： L、 $a = 3$、 $X = c_0r_0r_1(e_0) + c_1r_1r_0(e_1)$中的虚根和实根



引理 5.1。我们考虑 xy 平面上的双曲线 h_C 。 h_C 由 $x^2 - axy + y^2 = 1$ 表示。设 l_b 为由函数 $y = -x + b$ 表示的一条直线，其中 $b \geq 0$为某个实数。 h_C 与l_b有两个交点。设 p_1 和 p_2 为这两个点。设 d_b 为 p_1 与 p_2之间的距离。 d_b 关于 $b \geq 0$严格单调递增。当 l_b 为由 $y = b$ 或 $x = b$表示的直线时，同样的结果也成立。

证明。首先，考虑 l_b 由 $y = -x + b$ 表示的情形。计算 p_1, p_2 的 y-坐标，得到

$$y = \frac{(a+2)b \pm \sqrt{(a+2)(a-2)b^2 + 4(a+2)}}{2(a+2)}.$$

因此，我们有

$$d_b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{(a+2)(a-2)b^2 + 4(a+2)}}{a+2}.$$

这个 d_b 关于 $b \geq 0$严格单调递增。

接下来，我们考虑 l_b 由 $y = b$表示的情形。计算 p_1 的 x 坐标， p_2 得到

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{(a^2-4)b^2 + 4}}{2}.$$

因此，我们有

$$d_b = \sqrt{(a^2-4)b^2 + 4}.$$

关于 $b \geq 0$， 该 d_b 严格单调递增。当 l_b 是由 $x = b$表示的一条直线时，也给出了相同的论证。 □

令 R 为 h_C 和 h_C 本身的内部。对于 s、$t \in \mathbb{Z}$，(s,t) 是根，当且仅当 $(s,t) \in R$。

引理 5.2. 若 $(x,y) \in L \cup -L$，则 $(x+k_s-m_s, y+l_s-n_s)$ 和 $(x-k_s+m_s, y-l_s+n_s)$ 都不是根。

证明。首先假设 $(x,y) \in L$。点 (k_s,l_s) 和 (m_s,n_s) 位于双曲线 h_C 上。令 l_1 为连接这两个点的直线。取某个实数 $b>0$，当 $i=j$ 时，l_1 表示为 $y=-x+b$；当 $i=j-1$ 时，表示为 $y=b$；当 $i=j+1$ 时，表示为 $x=b$。令 l_2 为一条平行于 l_1 且经过点 (x,y) 的直线。取某个实数 $0<b'<b$，当 $i=j$ 时，l_2 表示为 $y=-x+b'$；当 $i=j-1$ 时，表示为 $y=b'$；当 $i=j+1$ 时，表示为 $x=b'$。令 p_{11}, p_{12} 为 h_C 和 l_1 的交点。令 d_1 为 p_{11} 与 p_{12} 之间的距离。令 p_{21}, p_{22} 为 h_C 和 l_2 的交点。令 d_2 为 p_{21} 与 p_{22} 之间的距离。由引理 5.1，得 $d_1 > d_2$。点 (k_s,l_s) 与 (m_s,n_s) 之间的距离为 d_1。点 (x,y) 与 $(x+k_s-m_s, y+l_s-n_s)$ 之间的距离也为 d_1。这两个点位于 l_2 上。l_2 位于双曲线内部的部分长度为 $d_2 < d_1$。由于 (x,y) 位于 h_C 内部，$(x+k_s-m_s, y+l_s-n_s)$ 位于双曲线外部。因此，$(x+k_s-m_s, y+l_s-n_s)$ 不在 R 中。对 $(x-k_s+m_s, y-l_s+n_s)$ 作同样的论证可知，它不在 R 中。由对称性，$(x,y) \in -L$ 的情形也得证。

□

引理 5.3。对于与该根对应的点 $(s,t) \in L$，我们考虑根向量 $E \in \mathfrak{g}_{s\alpha_0+t\alpha_1}$。那么 $[X,[Y,E]] \in \mathfrak{g}_{s\alpha_0+t\alpha_1}$。

证明。我们有 $X = c_0 w_0(e_p) + c_1 w_1(e_q)$ $Y = -c_0 w_0(f_p) - c_1 w_1(f_q)$。此外，我们有 $c_0 w_0(e_p) \in \mathfrak{g}_{k_s\alpha_0+l_s\alpha_1}$，$c_1 w_1(e_q) \in \mathfrak{g}_{m_s\alpha_0+n_s\alpha_1}$。于是我们得到

$$[X,[Y,E]] \in \mathfrak{g}_{s\alpha_0+t\alpha_1} + \mathfrak{g}_{(s-k_s+m_s)\alpha_0+(t-l_s+n_s)\alpha_1} + \mathfrak{g}_{(s-m_s+k_s)\alpha_0+(t-n_s+l_s)\alpha_1}.$$

由于 (s,t) 是一个根，根据引理 5.2，$(s-k_s+m_s, t-l_s+n_s)$ 和 $(s-m_s+k_s, t-n_s+l_s)$ 都不是根。因此，我们有 $\mathfrak{g}_{(s-k_s+m_s)\alpha_0+(t-l_s+n_s)\alpha_1} + \mathfrak{g}_{(s-m_s+k_s)\alpha_0+(t-n_s+l_s)\alpha_1} = 0$，并且 $[X,[Y,E]] \in \mathfrak{g}_{s\alpha_0+t\alpha_1}$。 □

我们考虑（ ）的卡西米尔元

C U $\mathfrak{s}$ $C = \frac{1}{8}H^2 - \frac{1}{4}H +$。我们可以写成 。

$\frac{1}{2}XY$

引理 5.4. 考虑相对于 L 中一个根的根空间。C 在该根空间上作为自同态作用。该作用可对角化。

证明. 根据引理 5.3，C 在根空间上作为自同态作用。由于 $\mathfrak{g}$ 作为一个 $\mathfrak{s}$-模是完全可约的，因此它在根空间上的作用可对角化。

□

引理 5.5. 对于与该根对应的点 $(s,t) \in L$，我们可以取根向量 $E \in \mathfrak{g}_{s\alpha_0+t\alpha_1}$，使得 E 是卡西米尔元C的特征向量，并且 E 生成一个不可约的 $\mathfrak{s}$-模。

证明。由引理 5.4，我们得到该引理。 □

由引理 5.5，如果我们按照 $\mathfrak{s}$ 的作用对 $\mathfrak{g}$ 进行分解，那么该分解与 L 中根的根空间分解相容。

我们考察 $\mathfrak{g}$ 的分解中出现了多少个酉主系列或互补系列表示。由于酉主系列或互补系列表示的特征值集合为 $\{\lambda+2k \mid k\in\mathbb{Z}\}$（对某个 λ），因此这样的模必须包含一个特征子空间，其特征值位于 $[0,2)$。因此，我们考虑 H 的根向量，使得 H 的特征值 λ 满足 $\lambda\in[0,2)$。

若 $\lambda=0$，即 $s=t=0$，由于 $\mathfrak{h}$ 的维数为 2，因此 V 有两个含有 0 特征子空间的不可约分量（参见 Tsu，第 7] 节）。其中一个就是 $\mathfrak{sl}_2$ 本身，我们考察另一个模。卡西米尔元 C 在此模上的作用为某个常数倍（记为 μ 倍）。若 k 满足 $s_1(k)=0$，则得到 $8\mu+1=(2k-1)^2$。根据 Tsu 的命题 7. 3],， $\mu<-1$ 的左边小于 0。因此， $s_1(k)=0$ 没有整数解，而这是一个既非最高权模也非最低权模的不可约模。特别地，此模是一个酉主系列表示。

下面我们考虑 $\lambda\in(0,2)$ 的情形。在这种情况下，(s,t) 是 L 中的一个根。我们计算 $[X,[Y,E]]$。由于 $Y=-c_0w_0(f_p)-c_1w_1(f_q)$，因此有

$$[Y,E]=[-c_0w_0(f_p),E]+[-c_1w_1(f_q),E].$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned}[-c_0w_0(f_p),E]&\in\mathfrak{g}_{(s-k_{\mathfrak{s}})\alpha_0+(t-l_{\mathfrak{s}})\alpha_1},\\ [-c_1w_1(f_q),E]&\in\mathfrak{g}_{(s-m_{\mathfrak{s}})\alpha_0+(t-n_{\mathfrak{s}})\alpha_1}.\end{aligned}$$

如果 $[-c_0w_0(f_p)\ E]$ 和 $[-c_1w_1(f_q)\ E]$ 不为 0，那么它们对应的 H 的特征值必须落在 $(-2,0)$ 区间内。我们考虑 H 的特征值落在 $(-2,0)$ 内的根向量。由于 $R=-R$，相对于这些根向量的根为 $-L$。根据引理 5.2，如果取两个点，使它们的差为 $(k_{\mathfrak{s}}-m_{\mathfrak{s}},l_{\mathfrak{s}}-n_{\mathfrak{s}})$，且其中一个是 $-L$ 中的根，那么另一个就不是根。现在有 $((s-m_{\mathfrak{s}})-(s-k_{\mathfrak{s}}),(t-n_{\mathfrak{s}})-(t-l_{\mathfrak{s}}))=(k_{\mathfrak{s}}-m_{\mathfrak{s}},l_{\mathfrak{s}}-n_{\mathfrak{s}})$。因此，我们知道 $[-c_0w_0(f_p)\ E]$、$[-c_1w_1(f_q)\ E]$ 中至少有一个为零。

当这两个都为 0 时，我们有 $[Y,E]=0$，并且根据 $C=\frac{1}{8}H^2-\frac{1}{4}H+\frac{1}{2}XY$ 这一事实，可以写成 $8\mu=\lambda^2-2\lambda$。

当 $[-c_0w_0(f_p)\ E]\neq0$，即 $(s-k_{\mathfrak{s}},t-l_{\mathfrak{s}})\in R$ 时，我们有

$$\begin{aligned}[X,[Y,E]]&=[c_0w_0(e_p),[-c_0w_0(f_p),E]]\\ &=[E,[-c_0w_0(f_p),c_0w_0(e_p)]]+[-c_0w_0(f_p),[c_0w_0(e_p),E]].\end{aligned}$$

我们将 $p_{\mathfrak{s}}\in\mathbb{C}$ 定义为 $[-c_0w_0(f_p)\ [c_0w_0(e_p)\ E]]=p_{\mathfrak{s}}E$，于是有

$$[X,[Y,E]]=[E,c_0^2w_0(h_p)]+p_{\mathfrak{s}}E.$$

当 $p_{\mathfrak{s}}=0$ 时，我们有

$$[X,[Y,E]]=-[c_0^2w_0(h_p),E].$$

因此，在这种情况下，若令 $-[c_0^2 w_0(h_p)\ E] = k_0 E$，则有 $8\mu = \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0$。

当 $[c_0 w_0(e_p)\ E] = 0$，即 $(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \notin R$ 时，我们有 $p_{\mathfrak{s}} = 0$。

综上所述，我们按 $\mathfrak{s}$ 对 $\mathfrak{g}$ 作不可约分解。令 $s\alpha_0 + t\alpha_1$ 为 L 中的一个根。令 $E \in \mathfrak{g}_{s\alpha_0 + t\alpha_1}$ 满足 E 生成 $\mathfrak{g}$ 的一个不可约分量。令 C 为 $U(\mathfrak{s})$ 的卡西米尔元，并令 μ 为满足 $CE = \mu E$ 的一个复数。令 k_0 和 $p_{\mathfrak{s}}$ 为满足以下条件的复数

$$\begin{aligned}[-c_0^2 w_0(h_p), E] &= k_0 E,\\ [-c_0 w_0(f_p), [c_0 w_0(e_p), E]] &= p_{\mathfrak{s}} E.\end{aligned}$$

若 $(s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \notin R$，则有

$$8\mu = \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda & ((s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \notin R), \\ \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0 & ((s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \notin R), \\ \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0 + p_{\mathfrak{s}} & ((s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \in R). \end{cases}$$

若 $(s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \notin R$，且不一定有 $(s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \notin R$，则有

$$8\mu = \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda & ((s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \notin R), \\ \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0 & ((s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + m_{\mathfrak{s}}, t + n_{\mathfrak{s}}) \notin R), \\ \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0 + p_{\mathfrak{s}} & ((s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + m_{\mathfrak{s}}, t + n_{\mathfrak{s}}) \in R). \end{cases}$$

求解

$$s_1(k) = \frac{8\mu - (\lambda + 2k - 1)^2 + 1}{4} = 0$$

关于 $\mathbb{R}$ 上的 k，我们得到

$$k = \begin{cases} 0, 1 - \lambda & ((s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \notin R \text{ and } (s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \notin R), \\ \dfrac{1 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4k_0}}{2} & \begin{pmatrix} (s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \notin R \\ \text{or} \\ (s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + m_{\mathfrak{s}}, t + n_{\mathfrak{s}}) \notin R \end{pmatrix}, \\ \dfrac{1 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4k_0 + p_{\mathfrak{s}}}}{2} & \begin{pmatrix} (s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \in R \\ \text{or} \\ (s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \in R \text{ and } (s + m_{\mathfrak{s}}, t + n_{\mathfrak{s}}) \in R \end{pmatrix}. \end{cases}$$

当 $(s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \notin R$ 且 $(s - m_{\mathfrak{s}}, t - n_{\mathfrak{s}}) \notin R$ 时，由于 $(s, t) \in L$，我们有 $1 - \lambda \in (-1, 1)$。因此，我们知道 $s_1(k) = 0$ 的唯一整数解是 0。在这种情况下，E 属于一个不可约最低权模。

6 按根分类

基于上一节，我们对 L 中的根 (s, t) 进行分类。根的类型定义如下。

(1) 当 $(s-k_s, t-l_s) \notin R$ 且 $(s-m_s, t-n_s) \notin R$ 时，我们称 (s,t) 为 A 型。

(2) 当 $\left\{ \begin{array}{l} (s-k_s, t-l_s) \in R \text{ 且 } (s+k_s, t+l_s) \notin R, \text{ 或 } s-m_s(t-n_s, \in R)\, s+m_s \text{ 且 } (t+n_s, \notin R \end{array} \right\}$ 时，我们称 (s,t) 为 B 型。

(3) 当 $\left\{ \begin{array}{l} (s-k_s, t-l_s) \in R \text{ 且 } (s+k_s, t+l_s) \in R, \text{ 或 } s-m_s(t-n_s, \in R)\, s+m_s \text{ 且 } (t+n_s, \in R \end{array} \right\}$ 时，我们称 (s,t) 为 C 型。

所有根均属于上述类型之一。对于 $x, y \in \mathbb{R}$，我们令 $f(x,y) = x^2 - axy + y^2$。根据 [KM95，推论 4.3]，，对于 $s, t \in \mathbb{Z}$，$(s,t) \neq (0,0)$，当且仅当 $f(s,t) = 1$ 时，(s,t) 是实根；当且仅当 $f(s,t) < 1$ 时，(s,t) 是虚根。

引理 6.1. 对于 $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$，若存在 $w \in \mathcal{W}$ 使得 $(x', y') = w(x,y)$，则 $f(x', y') = f(x,y)$。

证明. 只需检验 $w = r_0$ 的情形和 $w = r_1$ 的情形。由对称性，只需检验 $w = r_0$ 的情形。在此情形下，由于 $x' = ay - x$ 和 $y' = y$，我们有

$$\begin{aligned} f(x', y') &= f(ay - x, y) \\ &= (ay - x)^2 - ay(ay - x) + y^2 \\ &= x^2 - axy + y^2 \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

□

首先，我们知道关于实根的以下结果。

引理 6.2. 若 (s,t) 是 L 和 $s > t$ 中的实根，则 $f(s - k_s, t - l_s) \leq 0$。此外，若 (s,t) 是 L 和 $s < t$ 中的实根，则 $f(s - m_s, t - n_s) \leq 0$。

证明。由对称性，只需证明当 $s > t$ 时 $f(s - k_s, t - l_s) \leq 0$。我们可以写成 $s = F_{c+1}$, $t = F_c$，其中 $c \geq 0$ 为整数。由于 $k_s = F_{i+1}$ 和 $l_s = F_i$，我们有 $c < i$。令 $d_{ic} = i - c$。根据引理 6.1，对 $(s - k_s, t - l_s)$ 作用 r_0 和 r_1，可知

$$\begin{aligned} f(s - k_s, t - l_s) &= f(F_{c+1} - F_{i+1}, F_c - F_i) \\ &= f(r_0(F_{c+1} - F_{i+1}, F_c - F_i)) \\ &= f(F_{c-1} - F_{i-1}, F_c - F_i) \\ &= f(r_1(F_{c-1} - F_{i-1}, F_c - F_i)) \\ &= f(F_{c-1} - F_{i-1}, F_{c-2} - F_{i-2}) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} f(F_1 - F_{d_{ic}+1}, F_0 - F_{d_{ic}}) & \text{(when } c \text{ is even)} \\ f(F_0 - F_{d_{ic}}, F_1 - F_{d_{ic}+1}) & \text{(when } c \text{ is odd)} \end{cases}$$
$$= f(F_1 - F_{d_{ic}+1}, F_0 - F_{d_{ic}}).$$

由于 $F_1 = 1$, $F_0 = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} f(s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) &= f(1 - F_{d_{ic}+1}, -F_{d_{ic}}) \\ &= 2 - aF_{d_{ic}} + 2F_{d_{ic}-1} \\ &< 2 - 2(F_{d_{ic}} - F_{d_{ic}-1}) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

引理 6.3. 若 (s,t) 是 L 中的实根, 则 (s,t) 属于 B 型。

证明。首先我们证明 (s,t) 不属于 A 型。由 (s,t) 是实根这一事实以及对称性, 我们可以写成 $s = F_{c+1}$, $t = F_c$, 其中 $c \geq 0$ 是整数。由 $k_{\mathfrak{s}} = F_{i+1}$, $l_{\mathfrak{s}} = F_i$, 我们得到 $c < i$。根据引理 6.2, $f(s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \leq 0$。因此, $(s - k_{\mathfrak{s}}, t - l_{\mathfrak{s}}) \in R$, 所以我们知道 (s,t) 不属于 A 型。

接下来, 我们证明 (s,t) 属于 B 型。为此, 我们需要证明 $(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \notin R$。我们证明 $f(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) > 1$。令 $d_{ic} = i - c$。根据引理 6.1, 通过对 $(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}})$ 作用 r_0 和 r_1, 我们得到

$$\begin{aligned} f(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) &= f(F_{c+1} + F_{i+1}, F_c + F_i) \\ &= f(r_0(F_{c+1} + F_{i+1}, F_c + F_i)) \\ &= f(F_{c-1} + F_{i-1}, F_c + F_i) \\ &= f(r_1(F_{c-1} + F_{i-1}, F_c + F_i)) \\ &= f(F_{c-1} + F_{i-1}, F_{c-2} + F_{i-2}) \\ &= \cdots \\ &= \begin{cases} f(F_1 + F_{d_{ic}+1}, F_0 + F_{d_{ic}}) & \text{(when } c \text{ is even)} \\ f(F_0 + F_{d_{ic}}, F_1 + F_{d_{ic}+1}) & \text{(when } c \text{ is odd)} \end{cases} \\ &= f(F_1 + F_{d_{ic}+1}, F_0 + F_{d_{ic}}) \\ &= f(1 + F_{d_{ic}+1}, F_{d_{ic}}) \\ &= 2 + aF_{d_{ic}} - 2F_{d_{ic}-1} \\ &> 2 + 2(F_{d_{ic}} - F_{d_{ic}-1}) \\ &> 4. \end{aligned}$$

这表明 (s,t) 属于 B 型。 □

我们也对 L 中的虚根进行了分类。

引理 6.4. 若 (s,t)、(s',t') $(s,t,s',t' \geq 0)$ 是虚根, 则 $(s+s', t+t')$ 也是虚根。

证明. 由于 $f(s,t) \le 0$，对于任意 $r \in \mathbb{R}$，我们有 $f(rs,rt) = r^2 f(s,t) \le 0$。这表明连接原点与 (s,t) 的直线位于双曲线 $x^2 - axy + y^2 = 1$ 的渐近线之内。同理，连接原点与 (s',t') 的直线也位于渐近线之内。

由于 $(s+s', t+t')$ 是 $(2s, 2t)$ 和 $(2s', 2t')$ 的中点，因此该点也位于渐近线内。所以，$(s+s', t+t')$ 是一个虚根。 □

引理 6.5. 设 $(u,v) \in L$ $(u > v)$ 是一个实根，且满足 $(u\alpha_0 + v\alpha_1)(H) \neq 0$。令 $(s, t) = (k_{\mathfrak{s}} - u, l_{\mathfrak{s}} - v)$。则 (s,t) 是 L 中的一个 C 型虚根。类似地，设 $(u', v') \in L$ $(u' < v')$ 是一个实根，且满足 $(u'\alpha_0 + v'\alpha_1)(H) \neq 0$。令 $(s', t') = (m_{\mathfrak{s}} - u', n_{\mathfrak{s}} - v')$。则 $(s', t') \in L$，且 (s', t') 是 C 型虚根。L 中的其他虚根属于 A 型。

证明。由引理 6.2，$f(-s,-t) = f(s,t) \le 0$。这表明 (s,t) 是一个虚根。我们还看到，H 对于 (s,t) 的特征值属于范围 $(0, 2)$。因此，$(s,t) \in L$ 得证。

我们证明 (s,t) 属于 C 型。为此，我们证明 $f(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \le 1$。利用 $c \in \mathbb{Z}$，可将 (u,v) 写为 $= (F_{c+1}, F_c)$。结合 $s + k_{\mathfrak{s}} = 2k_{\mathfrak{s}} - u$、$t + l_{\mathfrak{s}} = 2l_{\mathfrak{s}} - v$，我们得到

$$f(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) = f(2F_{i+1} - F_{c+1}, 2F_i - F_c).$$

设 $d_{ic} = i - c > 0$。由引理 6.1，令 r_0, r_1 作用于 $(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}})$，$i - c = \lambda \ge 1$，可得

$$\begin{aligned}
f(2F_{i+1} - F_{c+1}, 2F_i - F_c) &= f(r_0(2F_{i+1} - F_{c+1}, 2F_i - F_c)) \\
&= f(2F_{i-1} - F_{c-1}, 2F_i - F_c) \\
&= f(r_1(2F_{i-1} - F_{c-1}, 2F_i - F_c)) \\
&= f(2F_{i-1} - F_{c-1}, 2F_{i-2} - F_{c-2}) \\
&= \cdots \\
&= \begin{cases} f(2F_{d_{ic}+1} - F_1, 2F_{d_{ic}} - F_0) & (\text{when } c \text{ is even}) \\ f(2F_{d_{ic}} - F_0, 2F_{d_{ic}+1} - F_1) & (\text{when } c \text{ is odd}) \end{cases} \\
&= f(2F_{d_{ic}+1} - F_1, 2F_{d_{ic}} - F_0) \\
&= f(2F_{d_{ic}+1} - 1, 2F_{d_{ic}}) \\
&= -2aF_{d_{ic}} + 4F_{d_{ic}-1} + 5 \\
&< -6F_{d_{ic}} + 4F_{d_{ic}-1} + 5 \\
&= (-4F_{d_{ic}} + 4F_{d_{ic}-1}) + (-2F_{d_{ic}} + 5) \\
&< -4 - 2F_{d_{ic}} + 5 \\
&\le -1.
\end{aligned}$$

这表明 $f(s + k_{\mathfrak{s}}, t + l_{\mathfrak{s}}) \le -1$，并且 (s,t) 是 C 型。由对称性可知，(s', t') 也属于 L，并且是 C 型的虚根。

最后，我们证明 L 中的其他虚根均为 A 型。设 $(s'', t'') \in L$ 是这样的一个虚根。我们证明 $(s'' - m_{\mathfrak{s}}, t'' - n_{\mathfrak{s}}) \notin R$ 且 $(s'' - k_{\mathfrak{s}}, t'' - l_{\mathfrak{s}}) \notin$

R。若 $(s''-m_{\mathfrak{s}},t''-n_{\mathfrak{s}})\in R$ 或 $(s''-k_{\mathfrak{s}},t''-l_{\mathfrak{s}})\in R$，则 $(s''-m_{\mathfrak{s}},t''-n_{\mathfrak{s}})\in -L$ 或 $(s''-k_{\mathfrak{s}},t''-l_{\mathfrak{s}})\in -L$。由于 $(s''-m_{\mathfrak{s}},t''-n_{\mathfrak{s}})-(s''-k_{\mathfrak{s}},t''-l_{\mathfrak{s}})=(k_{\mathfrak{s}}-m_{\mathfrak{s}},l_{\mathfrak{s}}-n_{\mathfrak{s}})$，根据引理 5.2，我们知道 $(s''-m_{\mathfrak{s}},t''-n_{\mathfrak{s}})\notin R$ 或 $(s''-k_{\mathfrak{s}},t''-l_{\mathfrak{s}})\notin R$。

由对称性，只需考虑 $(s''-m_{\mathfrak{s}},t''-n_{\mathfrak{s}})\notin R$。在此假设下，$(s''-k_{\mathfrak{s}},t''-l_{\mathfrak{s}})$ 是虚根或不是根。若 $(s''-k_{\mathfrak{s}},t''-l_{\mathfrak{s}})$ 是虚根，则由 R 的对称性可知，$(k_{\mathfrak{s}}-s'',l_{\mathfrak{s}}-t'')$ 也是虚根。我们考虑 $(k_{\mathfrak{s}},l_{\mathfrak{s}})=(s'',t'')+(k_{\mathfrak{s}}-s'',l_{\mathfrak{s}}-t'')$。左边是实根，右边是虚根之和，这与引理 6.4 矛盾。因此，$(s''-k_{\mathfrak{s}},t''-l_{\mathfrak{s}})$ 不是根，且 (s'',t'') 是 A 型。

□

本节内容可概括如下。

定理 6.6。(1) L 中的实根为 B 型。

(2) 考虑一个可以写成 $(k_{\mathfrak{s}}-s,l_{\mathfrak{s}}-t)$ 或 $(m_{\mathfrak{s}}-s,n_{\mathfrak{s}}-t)$ 的虚根，其中 (s,t) 是实根。这样的虚根为 C 型。

(3) 其他虚根均为 A 型。 □

现在我们总结经过 A 型和 C 型的不可约 $\mathfrak{s}$-模。对于经过 A 型的 $\mathfrak{s}$-模，我们有如下结论。

引理 6.7。L 中含有一个对应于 A 型根的根向量的不可约 $\mathfrak{s}$-模，是一个最低权模，其中该根向量是最低权元素。

证明。由于对于 A 型根 (s,t)，有 $(s-k_{\mathfrak{s}},t-l_{\mathfrak{s}})\notin R$ 且 $(s-m_{\mathfrak{s}},t-n_{\mathfrak{s}})\notin R$，我们知道，对 A 型根向量作用 Y 将得到 0。这证明了该引理。

□

引理 6.8. 设 M 是一个不可约 $\mathfrak{s}$ 模，其中包含一个相对于 L 中某个 C 型根的根向量（设为 v）。那么，条件 (1) 或 (2) 必有一个成立。

(1) M 是一个最低权模，且 v 是一个最低元。

(2) M 包含一个相对于 $-L$ 中某个实根的实根向量。

证明. C 型根 (s,t) 可以用某个实根 (s_r,t_r) 表示，其中 $(k_{\mathfrak{s}}-s_r,l_{\mathfrak{s}}-t_r)$ 或 $(m_{\mathfrak{s}}-s_r,n_{\mathfrak{s}}-t_r)$。因此，当 Y 作用于 C 型根向量 E 时，它要么变为零，要么变为实根向量。若 E 在 Y 的作用下变为 0，则 E 生成一个不可约最低权模。若 E 变为实根向量，则该向量对应的实根属于 $-L$，于是本引理得证。

□

我们还通过定理 6.6 对 $-L$ 的根进行 A、B、C 型区分。因此，如果存在一个酉主系列或互补系列表示经过 $L,-L$ 中的 C 型根向量，那么它也会

经过 $-L, L$ 中的 B 型根向量。因此，我们只需对包含 B 型根空间的模进行分类。

图 2： $a = 3,\ X = c_0 r_0(e_1) + c_1 r_1(e_0)$

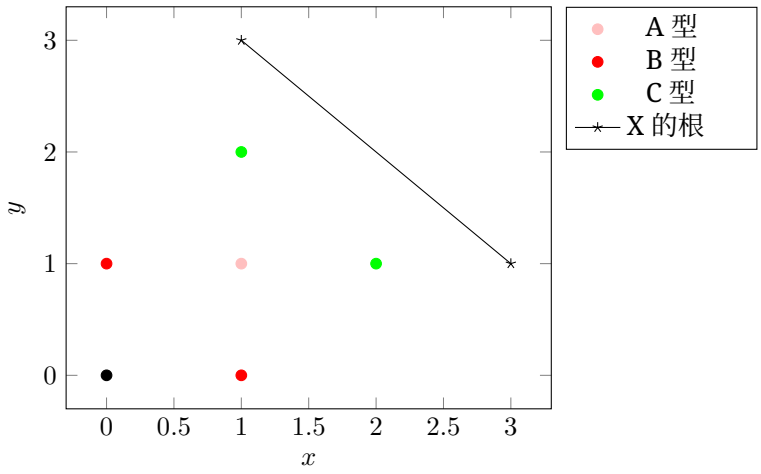
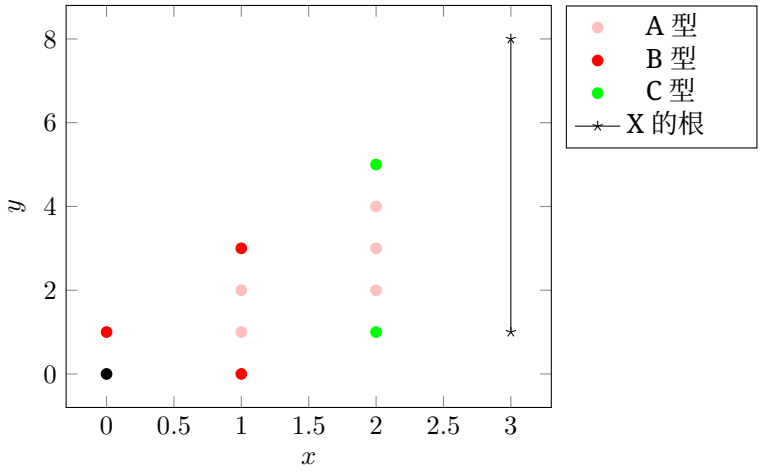


图 3： $a = 3,\ X = c_0 r_0(e_1) + c_1 r_1 r_0(e_1)$



7 含有关于一个 B 型根的根空间的不可约模

我们考虑由 $\mathfrak{s}$ 对 $\mathfrak{g}$ 的不可约分解，并考虑一个包含 B 型根空间的不可约分量 M。实

根空间的重数为 1。我们可以取 $0<\lambda<2$，使得 $\{\lambda+2k' \mid k'\in\mathbb{Z}\}$ 是 H 在 M 中的特征值集合。我们考虑 M 的 H 特征子空间，使其特征值为 λ。假设该特征子空间为 $\mathfrak{g}_{s\alpha_0+t\alpha_1}$，使得 $(s,t)\in L$，且 (s,t) 是实根。我们考虑 k，使得 $s_1(k)=0$ 属于 §5 中的 (A)。我们证明它不是整数。

设 e_0,e_1,f_0,f_1,h_0 和 h_1 为 Chevalley 生成元。取一些 $c_0,c_1\in\mathbb{R}$, $w_0,w_1\in\mathcal{W}$，以及 $(p,q)\in\{(0,1),(0,0),(1,1)\}$，令 $X=c_0w_0(e_p)+c_1w_1(e_q)$。假设 $s>t$。取关于根 $s\alpha_0+t\alpha_1$的根向量 E。定义 λ 为 $HE=\lambda E$，并定义 k_0 为 $[-c_0^2w_0(h_p)\ E]=k_0E$。因此，$s_1(k)=0$蕴含

$$k=\frac{1-\lambda\pm\sqrt{(\lambda-1)^2+4k_0}}{2}.$$

我们设

$$k_+=\frac{1-\lambda+\sqrt{(\lambda-1)^2+4k_0}}{2},$$
$$k_-=\frac{1-\lambda-\sqrt{(\lambda-1)^2+4k_0}}{2}$$

并证明 $k_\pm\notin\mathbb{R}$ 或 $0<k_\pm<1$。

由引理 3.3，我们可以写成 $c_0w_0(e_p)\in\mathfrak{g}_{F_{i+1}\alpha_0+F_i\alpha_1}$, $(s,t)=(F_{i'+1},F_{i'})$，使得 $0\le i'<i$。关于 k，F_k 严格递增。由于 $F_{k+2}=aF_{k+1}-F_k$ 和 $a\ge3$，我们有 $F_k>2F_{k-1}$。由于

$$\lambda=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{F_{i'+1}}{F_{i+1}}\qquad(\text{when } i=j-1)\\ \dfrac{F_{i'+1}+F_{i'}}{F_{i+1}+F_i}\qquad(\text{when } i=j)\\ \dfrac{F_{i'}}{F_i}\qquad(\text{when } i=j+1)\end{array}\right\},$$

我们有 $0<\lambda<1$。当 $(\lambda-1)^2+4k_0<0$ 或 $(\lambda-1)^2+4k_0\notin\mathbb{R}$ 时，$k_\pm$ 是虚数。因此，我们可以假设 $(\lambda-1)^2+4k_0\ge0$。由 $0<\lambda<1$ 可清楚看出，$k_+>0$ 且 $k_-<1$。要证明 $k_+<1$，我们需要证明

$$1-\lambda+\sqrt{(\lambda-1)^2+4k_0}<2.$$

我们很容易证明它可归结为 $k_0<\lambda$。此外，要证明 $k_->0$，我们需要证明

$$1-\lambda-\sqrt{(\lambda-1)^2+4k_0}>0.$$

我们可以很容易地证明，它归结为 $k_0<0$。总之，我们只需证明 $k_0<0$。

首先，考虑 $(s,t) = (1,0)$ 的情形，即 $E \in \mathfrak{g}_{\alpha_0}$。由于

$$\begin{aligned} k_0 E &= [-c_0^2 r_0 r_1 r_0 \dots r_{1-p}(h_p), E] \\ &= [-c_0^2 (F_{i+1} h_0 + F_i h_1), E] \\ &= -c_0^2 (2F_{i+1} - aF_i) E \\ &= -c_0^2 (F_{i+1} + F_{i-1}) E, \end{aligned}$$

我们有 $k_0 < 0$。当 $(s,t) = (0,1)$ 时，通过将 i 替换为 j、将 p 替换为 q，并作相同的论证，可以证明 $k_0 < 0$。

若 (s,t) 是一般情形且 $s > t$，我们可以写成 $(s,t) = (F_{i'+1}, F_{i'})$。令 p' 为 0 或 1，则可以写成 $E = r_0 r_1 r_0 \dots r_{1-p'}(e_{p'})$。由此，我们得到

$$\begin{aligned} [-c_0^2 w_0(h_p), E] &= -c_0^2 [r_0 r_1 r_0 \dots r_{1-p}(h_p), r_0 r_1 r_0 \dots r_{1-p'}(e_{p'})] \\ &= -c_0^2 r_0 r_1 r_0 \dots r_{1-p'} [r_{p'} r_{1-p'} r_{p'} \dots r_{1-p}(h_p), e_{p'}]. \end{aligned}$$

当用 $i - i'$ 替换 i 时，我们考虑 k_0 和 c_0，并将它们改写为 k_0' 和 c_0'。考虑 $(s,t) = (1,0)$ 或 $(0,1)$ 的情形，我们有 $[r_{p'} r_{1-p'} r_{p'} \dots r_{1-p}(h_p)\ e_{p'}] = -\frac{k_0'}{c_0'} e_{p'}$。也就是说，$k_0 = \frac{c_0^2}{c_0'^2} k_0'$。由于 $k_0' < 0$，我们有 $k_0 < 0$。当 $s < t$ 时，同样可以证明 $k_0 < 0$。

由上述结果可知，$k_0 < 0$ 在任何情况下都成立，即 k 不是整数。由此可得以下结论。

定理 7.1. 考虑$\mathfrak{s}$的作用下 $\mathfrak{g}$ 的不可约分解。

(1) 设 M 是 $\mathfrak{g}$的分解中的一个不可约分量，其中包含对应于某个 B 型根 $s\alpha_0 + t\alpha_1$的根空间。那么，M 是酉主系列表示或互补系列表示。(2)（参见 [Tsu，命题 7.3]）存在一个酉主系列表示，其中在 $\mathfrak{h}$中包含一个一维空间。
(3) $\mathfrak{g}$ 分解为上述 (1) 和 (2) 中所述的 $\mathfrak{s}$-子模、$\mathfrak{s}$ 自身、不可约最低权模和不可约最高权模的直和。

□

根据 [KM95，§3]，，可以计算 $\mathfrak{g}$ 中每个根的重数。利用这一点，可以确定有多少个模满足以下条件：这些模是最高权模或最低权模，并且对于最高根或最低根对应的根向量，H 的特征值为某个特定值。

首先，包含 L 和 $-L$ 中根空间的模可由前面的内容得出。在不属于 L的正根空间中，取 H 中特征值最小的那些，并将其放在一起考察。设 λ_H 为它们的特征值，d_H 为它们的维数。假设有 p_H 个包含特征值为 λ_H 的空间且同时包含已得到根空间的模。那么，以特征值为 λ_H 的根作为最低根的最低权模有 $d_H - p_H$ 个。将 λ_H替换为 H 中的下一个最小特征值，并进行相同的计算，即可归纳地得到模的重数。负根空间也可通过相同的计算进行分类。

8 酉主系列表示与互补系列表示

在本节中，我们考察一个既不是最高权模也不是最低权模、且包含关于 B 型根的根向量的模（记为 M）。我们计算该模是酉主系列表示还是互补系列表示。首先，我们陈述以下引理。

引理8.1. 若 $8\mu \leq -1$，则 M 是酉主系列表示。若 $8\mu > -1$，则 M 是互补系列表示。

证明. 根据 [HT92, §II 1.2], M与 $U(\nu^+, \nu^-)$ 同构。 $U(\nu^+, \nu^-)$ 是一个$\mathfrak{sl}_2$-模，其特征向量 $\{v_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 构成线性空间的一组基，其中 H ，使得

$$\begin{aligned} Hv_n &= (\nu^+ - \nu^- + 2j)v_n \qquad (n \in \mathbb{Z}), \\ Xv_n &= (\nu^+ + n)v_{n+1}, \\ Yv_n &= (\nu^- - n)v_{n-1}, \\ 8\mu &= (\nu^+ + \nu^- - 1)^2 - 1. \end{aligned}$$

根据 [HT92, §III 定理 1.1.3],，若 $\nu^+ + \overline{\nu^-} = 1$，则 $U(\nu^+, \nu^-)$ 是酉主系列表示。当 $8\mu \leq -1$ 时，根据

$$\begin{aligned} \lambda &= \nu^+ - \nu^- \in \mathbb{R}, \\ 8\mu &= (\nu^+ + \nu^- - 1)^2 - 1 < -1, \end{aligned}$$

利用 $b \in \mathbb{R}$，我们可以写成

$$\begin{aligned} \nu^+ - \nu^- &= \lambda, \\ \nu^+ + \nu^- &= 1 + bi. \qquad (i = \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} \nu^+ + \overline{\nu^-} &= \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{b}{2}i + \frac{-\lambda + 1}{2} - \frac{b}{2}i \\ &= 1. \end{aligned}$$

因此， M 是一个酉主系列表示。

考虑 $8\mu > -1$ 的情形。根据 [HT92，第 III 节定理 1.1。3], 若$\nu^{\pm} \in \mathbb{R}$，且 $\nu^- - 1$ 和 $-\nu^+$ 都包含在区间 $(l-1, l)$ 内，其中有某个 $l \in \mathbb{Z}$，那么 $U(\nu^+, \nu^-)$ 是一个互补系列表示。根据$8\mu > -1$，我们有

$$\begin{aligned} \nu^+ + \nu^- &= 1 \pm \sqrt{8\mu + 1}, \\ \nu^+ - \nu^- &= \lambda. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$-\nu^+, \nu^- - 1 = \frac{-\lambda - 1 \pm \sqrt{8\mu + 1}}{2}.$$

我们证明它们属于 $(-1, 0)$。

我们先证明 $0 < \lambda < 1$。设 n, m 为整数，且满足 $n > m \geq 0$。我们可以写成

$$\lambda = \frac{2(F_{m+1} + F_m)}{F_{n+1} + F_n}.$$

显然， $\lambda > 0$。由 $a \geq 3$，对于整数 $z \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} F_{z+2} &= aF_{z+1} - F_z \\ &> (a-1)F_{z+1} \\ &\geq 2F_{z+1}. \end{aligned}$$

因此我们有

$$\frac{F_{m+1} + F_m}{F_{n+1} + F_n} < \frac{1}{2}.$$

因此，我们有 $\lambda < 1$。我们证明

$$-1 < \frac{-\lambda - 1 + \sqrt{8\mu + 1}}{2}.$$

由 $\lambda < 1$，我们有 $-1 < \frac{-\lambda - 1}{2}$。因此，这个不等式得证。接下来我们证明

$$\frac{-\lambda - 1 + \sqrt{8\mu + 1}}{2} < 0.$$

我们有 $8\mu = \lambda(\lambda - 2) + 4k_0$。根据 $0 < \lambda < 1$，我们有 $\lambda(\lambda - 2) < 0$。此外，由于 $k_0 < 0$，我们有 $8\mu < 0$。因此，我们有 $\sqrt{8\mu + 1} < 1$。再次利用 $0 < \lambda$，我们知道

$$\frac{-\lambda - 1 + \sqrt{8\mu + 1}}{2} < 0.$$

For

$$\frac{-\lambda - 1 - \sqrt{8\mu + 1}}{2} < 0,$$

这由 $\lambda > 0$ 显然可知。最后，我们证明

$$-1 < \frac{-\lambda - 1 - \sqrt{8\mu + 1}}{2}.$$

由 $k_0 < 0$ 和 $8\mu = \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0$，可得 $\lambda^2 - 2\lambda > 8\mu$。由此及 $\lambda < 1$，可得 $1 - \lambda > \sqrt{8\mu + 1}$，将其变形可得

$$-1 < \frac{-\lambda - 1 - \sqrt{8\mu + 1}}{2}.$$

由上可知，$\frac{-\lambda-1\pm\sqrt{8\mu+1}}{2}$ 均属于 (−1,0)。因此，M 是一个互补级数表示。

□

接下来，我们要确定 M 何时属于互补级数。首先，考虑 $i = j$的情况。我们有

$$\text{(B1)} \qquad \begin{aligned} 8\mu &= \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0, \\ \lambda &= \frac{2(F_{n+1} + F_n)}{F_{i+1} + F_i}, \\ k_0 &= \frac{-2(2F_{i+1-n} - aF_{i-n})}{a(F_i^2 + F_{i+1}^2) - 4F_iF_{i+1} - 2}, \end{aligned}$$

其中，n 是满足 $i > n \geq 0$的整数。也就是说，8μ 由 i、n和 a确定。我们证明，除有限多个例外外，8μ 大于 -1 。

引理 8.2. 假设 $i = j$。若根据 (B1) 将 8μ 视为 n 的函数，则8μ 关于 n单调递减。

证明. λ 关于 n单调递增。由于 $8\mu = \lambda$(λ−2)+$4k_0$且 $0 < \lambda < 1$，我们知道 λ(λ−2)关于n单调递减。由于 $\{F_k\}$ 关于 k单调递增，$4k_0$ 关于 n单调递减。因此，8μ 关于 n单调递减。

□

为了证明除了有限个例外，8μ 大于 -1，我们需要考察 n何时较大。

引理 8.3. 假设 $i = j$、$n = i - 1$。若根据 (B1) 将 8μ 视为 i 的函数，则 8μ 关于 i 单调递增。

证明. 首先，我们将 $\{F_i\}$ 明确写出如下。$x^2 - ax + 1 = 0$ 的实数解为 $x = \frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$。由于 $\alpha = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$、$\beta = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，我们可以写成

$$F_i = \frac{\beta^i - \alpha^i}{\beta - \alpha}.$$

由 $n = i - 1$，我们有

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2(F_i + F_{i-1})}{F_{i+1} + F_i}, \\ k_0 &= \frac{-2a}{a(F_i^2 + F_{i+1}^2) - 4F_iF_{i+1} - 2}. \end{aligned}$$

设 t 为一个实变量。我们定义函数 Λ_1 和 K_{01} 如下。

$$\Lambda_1(t) = \frac{2(\beta^t - \alpha^t + \beta^{t-1} - \alpha^{t-1})}{\beta^{t+1} - \alpha^{t+1} + \beta^t - \alpha^t},$$

$$\begin{aligned} K_{01}(t) &= \frac{-2a(\beta-\alpha)^2}{a((\beta^t-\alpha^t)^2 + (\beta^{t+1}-\alpha^{t+1})^2) - 4(\beta^t-\alpha^t)(\beta^{t+1}-\alpha^{t+1}) - 2(\beta-\alpha)^2} \\ &= \frac{-2a}{\beta^{2t+1} + \alpha^{2t+1} - 2}. \end{aligned}$$

我们有 $\lambda = \Lambda_1(i)$ 和 $k_0 = K_{01}(i)$。利用这些函数，我们可以如下计算。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Lambda_1 &= \frac{4\log\beta(a+2)(\beta-\alpha)}{(\beta^{t+1} - \alpha^{t+1} + \beta^t - \alpha^t)^2} \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^2 - 2\Lambda_1) &= \frac{8\log\beta(a+2)(\beta-\alpha)\left((1-a)\beta^t - (1-a)\alpha^t + 3\beta^{t-1} - 3\alpha^{t-1}\right)}{(\beta^{t+1} - \alpha^{t+1} + \beta^t - \alpha^t)^3} \\ \frac{d}{dt}K_{01} &= \frac{4a\log\beta(\beta^{2t+1} - \alpha^{2t+1})}{(\beta^{2t+1} + \alpha^{2t+1} - 2)^2} \end{aligned}$$

消去分母后，我们可以如下计算。

$$\begin{aligned} &\frac{(\beta^{t+1} - \alpha^{t+1} + \beta^t - \alpha^t)^3(\beta^{2t+1} + \alpha^{2t+1} - 2)^2}{8(a+2)\log\beta} \cdot \frac{d}{dt}(\Lambda_1^2 - 2\Lambda_1 + 4K_{01}) \\ &= (a+1)(\beta^{5t+3} + \alpha^{5t+3}) + (2a+3)(\beta^{5t+2} + \alpha^{5t+2}) \\ &+ (a-1)(\beta^{5t+1} + \alpha^{5t+1}) - 3(\beta^{5t} + \alpha^{5t}) \\ &- 3(\beta^{3t+4} + \alpha^{3t+4}) + (a-1)(\beta^{3t+3} + \alpha^{3t+3}) \\ &- (2a+1)(\beta^{3t+2} + \alpha^{3t+2}) - (7a+11)(\beta^{3t+1} + \alpha^{3t+1}) \\ &+ (-4a+4)(\beta^{3t} + \alpha^{3t}) + 12(\beta^{3t-1} + \alpha^{3t-1}) \\ &+ 12(\beta^{t+3} + \alpha^{t+3}) + (-4a+4)(\beta^{t+2} + \alpha^{t+2}) \\ &- (2a+6)(\beta^{t+1} + \alpha^{t+1}) + (8a+32)(\beta^t + \alpha^t) \\ &- (12a+6)(\beta^{t-1} + \alpha^{t-1}). \end{aligned}$$

左边的系数为正。利用 $\beta^t + \alpha^t$ 单调递增以及 $a \geq 3$ 这一事实，我们可以计算得出右边也为正。这表明 $8\mu = (\Lambda_1^2 - 2\Lambda_1 + 4K_{01})(i)$ 关于 i 单调递增。

□

由引理 8.3，我们考虑 $i = 1$, $n = 0$ 的情形。

引理 8.4。我们假设 $i = j = 1$ 和 $n = 0$。若根据 (B1) 将 8μ 视为 a 的函数，则 8μ 关于 a 单调递增。

证明。在此假设下，我们有

$$8\mu = \frac{-4a^2}{a^3 - 3a - 2}.$$

将其视为实变量 a 的函数求导，由 $a \geq 3$ 可知， 8μ 关于 a 单调递增。

□

引理 8.5。当 $i = j$ 时，我们考虑 $\mathfrak{g}$ 上的 $\mathfrak{s}$-模，它们既不是最高权模也不是最低权模，并且包含由定理 7.1 得到的、关于 B 型根的根向量。除以下三种类型外，这些模都是互补系列表示。对于这些例外情形，这些模是酉主系列表示。

$$(a, i, n) = (4, 1, 0), (3, 1, 0), (3, 2, 1)$$

证明。我们使用引理 8.6、引理 8.3 和引理 8.4。

首先，当 $a = 5$、 $i = 1$、 $n = 0$ 时，我们有 $8\mu > -1$。因此，当 $a \geq 5$ 时，对于任意 i、 n， a、 i、 n 对应的模是互补系列表示。

接下来，当 $a = 4$、 $i = 1$、 $n = 0$ 时，我们有 $8\mu = -1.28 < -1$。因此，对应的模是酉主系列表示。另一方面，当 $a = 4$、 $i = 2$、 $n = 1$ 时，我们有 $8\mu > -1$。因此，当 $a = 4$ 时， a、 i、 n 对应的模是互补系列表示，但 $i = 1$、 $n = 0$ 时除外。

最后，当 $a = 3$, $8\mu < -1$ when $i = 1, 2$ 和 $n = i - 1$ 时，在这四种情况下，该模都是酉主系列表示。当 $n = i - 2$ or $i = 3$ 时，我们有 $8\mu > -1$。因此，我们知道在其他情况下，该模是互补系列表示。

综上所述，除三种例外情况外，既不包含关于 B 型根的根向量的最高权模，也不包含该根向量的最低权模，是互补系列表示。

□

接下来，我们考虑 $i = j - 1$ 的情形。在这种情况下，我们有

$$\begin{aligned} 8\mu &= \lambda^2 - 2\lambda + 4k_0, \\ \lambda &= \frac{2F_{n+1}}{F_{i+1}}, \\ k_0 &= \frac{-2(2F_{i+1-n} - aF_{i-n})}{a(F_i^2 + F_{i+1}^2) - 4F_iF_{i+1} - 2}, \end{aligned} \tag{B2}$$

其中 n 是满足 $0 \leq n < i$ 的整数。与 $i = j$ 一样， 8μ 由 i、 n 和 a 确定。类似于引理 8.2，我们有如下引理。

引理 8.6。假设 $i = j - 1$。若根据 (B2) 将 8μ 视为 n 的函数，则 8μ 关于 n 单调递减。

□

我们考察当$n = i - 1$时， 8μ 是否关于 i 单调递增。

引理 8.7. 假设 $i = j-1$、 $n = i-1$。若根据 (B2) 将 8μ 视为 i 的函数，则 8μ 关于 i 单调递增。

证明。在这种情况下，我们有

$$\lambda = \frac{2F_i}{F_{i+1}},$$

$$k_0 = \frac{-2a}{a(F_i^2 + F_{i+1}^2) - 4F_iF_{i+1} - 2}.$$

设 t 为一个实变量。我们将函数 Λ_2 和 K_{02} 定义如下。

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(t) &= \frac{2(\beta^t - \alpha^t)}{\beta^{t+1} - \alpha^{t+1}}, \\
K_{02}(t) &= \frac{-2a(\beta-\alpha)^2}{a((\beta^t-\alpha^t)^2 + (\beta^{t+1}-\alpha^{t+1})^2) - 4(\beta^t-\alpha^t)(\beta^{t+1}-\alpha^{t+1}) - 2(\beta-\alpha)^2} \\
&= \frac{-2a}{\beta^{2t+1} + \alpha^{2t+1} - 2}.
\end{aligned}$$

我们有 $\lambda = \Lambda_2(i)$ 和 $k_0 = K_{02}(i)$。利用这些函数，可以按如下方式计算。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda_2 &= \frac{4\log\beta(\beta-\alpha)}{(\beta^{t+1}-\alpha^{t+1})^2} \\
\frac{d}{dt}(\Lambda_2^2 - 2\Lambda_2) &= \frac{8\log\beta(\beta-\alpha)\left(2\beta^t - 2\alpha^t - \beta^{t+1} + \alpha^{t+1}\right)}{(\beta^{t+1}-\alpha^{t+1})^3} \\
\frac{d}{dt}K_{02} &= \frac{4a\log\beta(\beta^{2t+1} - \alpha^{2t+1})}{(\beta^{2t+1} + \alpha^{2t+1} - 2)^2}
\end{aligned}$$

通分后，可以按如下方式计算。

$$\begin{aligned}
&\frac{(\beta^{t+1}-\alpha^{t+1})^3(\beta^{2t+1}+\alpha^{2t+1}-2)^2}{8\log\beta} \cdot \frac{d}{dt}(\Lambda_2^2 - 2\Lambda_2 + 4K_{02}) \\
&= (2a-1)(\beta^{5t+4} + \alpha^{5t+4}) + 2(\beta^{5t+3} + \alpha^{5t+3}) \\
&+ (\beta^{5t+2} + \alpha^{5t+2}) - 2(\beta^{5t+1} + \alpha^{5t+1}) \\
&+ 2(\beta^{3t+3} + \alpha^{3t+3}) - (6a+7)(\beta^{3t+2} + \alpha^{3t+2}) \\
&- 2(\beta^{3t+1} + \alpha^{3t+1}) + 7(\beta^{3t} + \alpha^{3t}) \\
&- (2a-2)(\beta^{t+2} + \alpha^{t+2}) + 8(\beta^{t+1} + \alpha^{t+1}) \\
&+ (6a-2)(\beta^t + \alpha^t) - 8(\beta^{t-1} + \alpha^{t-1}).
\end{aligned}$$

左边的系数为正。利用 $\beta^t + \alpha^t$ 单调递增这一事实以及 $a \geq 3$，可以计算得出右边也为正。这表明 $8\mu = (\Lambda_2^2 - 2\Lambda_2 + 4K_{02})(i)$ 关于 i 单调递增。

□

引理 8.8。假设 $i = 1$、$j = 2$ 和 $n = 0$。若根据 (B2) 将 8μ 视为 a 的函数，则 8μ 关于 a 单调递增。

证明。在此假设下，我们有

$$8\mu = \frac{-4(a^4 + a^3 - 3a^2 + a + 2)}{a^5 - 3a^3 - 2a^2}.$$

将其视为实变量 a 的函数进行求导，由 $a \geq 3$ 可知，8μ 关于 a 单调递增。

□

引理 8.9. 当 $i=j-1$ 时，我们考虑包含关于 B 型根的根向量的 $\mathfrak{s}$-模，它们既不是通过定理 7.1 得到的最高权模，也不是最低权模。这些模是互补系列表示，但以下 4 种类型除外。对于这些例外情形，这些模是酉主系列表示。

$$(a,i,n)=(5,1,0),(4,1,0),(3,1,0),(3,2,1)$$

证明。我们使用引理 8.6、引理 8.7 和引理 8.8。首先，当 a =6, $i=0, n=0$, $8\mu > -1$ 时。因此，当 $a \geq 6$ 时， a,i,n 对应的模是互补系列表示。

当 $a=5$ 时，如果 (a,i,n) =(5, 0, 0)，那么 $8\mu \leq -1$ 和这些模是酉主系列表示，其余的是互补系列表示。

当 $a=4$ 时，如果 (a,i,n) =(4, 0, 0)，那么这些模是酉主系列表示，其余的是互补系列表示。

当 $a=3$ 时，如果 (a,i,n) =(3, 1, 0)、(3, 2, 1)，那么这些模是酉主系列表示，其余的是互补系列表示。

由此可得到4个酉主系列表示，其余的全都是互补系列表示。

□

最后，我们考虑 $i=j+1$的情形。在这种情况下，我们有

$$\text{(B3)}\qquad \begin{aligned} 8\mu &= \lambda^2-2\lambda+4k_0,\\ \lambda &= \frac{2F_n}{F_i},\\ k_0 &= \frac{-2(2F_{i+1-n}-aF_{i-n})}{a(F_i^2+F_{i+1}^2)-4F_iF_{i+1}-2}, \end{aligned}$$

其中 n 为满足 $0 \leq n < i$的整数。与 $i=j$一样， 8μ 由i、 n 和 a确定。类似于引理 8.2，我们有以下引理。

引理 8.10。假设 $i=j+1$。如果根据（B3）将 8μ 视为 n 的函数，则 8μ 关于 n单调递减。 □

下面我们考虑 $n=i+1$ 的情况。在这种情况下， 8μ 关于 i 不是单调递增的。令 t 为实变量。我们定义函数 Λ_3 和 K_{03} 如下。

$$\begin{aligned} \Lambda_3(t) &= \frac{2(\beta^{t-1}-\alpha^{t-1})}{\beta^t-\alpha^t},\\ K_{03}(t) &= \frac{-2a(\beta-\alpha)^2}{a((\beta^t-\alpha^t)^2+(\beta^{t+1}-\alpha^{t+1})^2)-4(\beta^t-\alpha^t)(\beta^{t+1}-\alpha^{t+1})-2(\beta-\alpha)^2}\\ &= \frac{-2a}{\beta^{2t+1}+\alpha^{2t+1}-2}. \end{aligned}$$

我们有 $\lambda = \Lambda_3(i)$ 和 $k_0 = K_{03}(i)$。 Λ_3 关于 t 单调递增。我们有 $\Lambda_3(1) = 0$，并且

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda_3(t) = \frac{2}{\beta} = \frac{4}{a + \sqrt{a^2 - 4}}.$$

由于 $F_{i+1} > 2F_i$，我们有 $0 < \Lambda_3 < 1$。因此， $\Lambda_3^2 - 2\Lambda_3$ 单调递减。$(\Lambda_3^2 - 2\Lambda)(1) = 0$ 和

$$\lim_{t\to\infty} (\Lambda_3^2 - 2\Lambda_3)(t) = \frac{4 - 4\beta}{\beta^2}.$$

考虑到当 $a = 3$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\Lambda_3^2 - 2\Lambda_3(t) &> \frac{4}{\beta^2} - \frac{4}{\beta} \\ &= \frac{-4 - 4\sqrt{5}}{7 + 3\sqrt{5}} = -0.9442719\cdots.\end{aligned}$$

K_{03} 关于 t 单调递增。$K_{03}(1) = \frac{-8a}{a^3-3a-2}$，且 $\lim_{t\to\infty} K_{03}(t) = 0$。当 t 足够大且 $K_{03}(t)$ 大于 -0.01 时，我们有 $(\Lambda_3^2 - 2\Lambda_3 + K_{03})(t) > -1$。因此，当 i 足够大时，我们有 $8\mu > -1$。满足 k_0 小于 -0.01 的 (a, i, n) 只有有限个。计算所有这些情形后，我们得到以下引理。

引理8.11。当 $i = j + 1$ 时，我们考虑由定理 7.1 得到的、包含关于 B 型根的根向量的 $\mathfrak{s}$-模；这些模既不是最高权模，也不是最低权模。除以下两种类型外，这些模都是互补系列表示。对于这两种例外情形，这些模是酉主系列表示。

$$(a, i, n) = (3, 1, 0), (3, 2, 1)$$

□

定理 8.12。我们考虑由定理 7.1 的 (1) 得到的模。这些模既不是最高权模，也不是最低权模，并且包含与 B 型根相关的根向量。除引理 8.5、引理 8.9 和引理 8.11 列出的情形外，这些模都是互补系列表示。对于例外情形，这些模是酉主系列表示。

证明。可由引理 8.5、引理 8.9 和引理 8.11 得出。 □

致谢

谨向我的导师 Hisayosi Matu- moto 教授致以谢意，感谢他给予我的悉心指导。

参考文献

[CM93] D. H. Collingwood、W. M. McGovern, 《半单李代数中的幂零轨道》, Van Nostrand Reinhold, 1993[Dyn57] E. Dynkin, 《单李代数的半单子代数》, 《美国数学会译丛: 第二辑》, 第 6 卷, 1957 年, 第 111–245 页[GOW02] M. R. Gaberdiel 等, 《一类洛伦兹型卡茨-穆迪代数》, 《核物理B》, 第 645 卷, 2002 年, 第 403–437 页[Kac90] V. G. Kac, 《无限维李代数》第 3 版, 剑桥大学出版社, 1990[KM95] S-J. Kang、D. J. Melville, 《秩 2 对称双曲 Kac–Moody 李代数》, 《名古屋数学杂志》, 第 140 卷, 1995 年, 第 41–75 页[Kob94] T. Kobayashi, 《相对于约化子群的 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$限制的离散可分解性及其应用》, 《数学发明》, 第 117 卷, 1994 年, 第 181–205 页[Kos59] B. Kostant, 《主三维子群与复单李群的贝蒂数》, 《美国数学杂志》, 第 81 卷, 1959 年, 第 973–1032 页[HT92] R. Howe、E. C. Tan, 《非阿贝尔调和分析》, 施普林格出版社, 1992[NO01] H. Nicolai、D. I. Olive, 《双曲 Kac-Moody 代数的主 $SO(1,2)$子代数》, 《数学物理通讯》, 第 58 卷, 2001 年, 第 141–152 页[Tsu] H. Tsurusaki, 《其幂零正元素属于由秩 2 对称双曲 Kac-Moody 李代数中实根向量张成空间的 $\mathfrak{sl}_2$ 三元组》, 《数学科学研究所刊物》, 即将出版[Vis] S. Viswanath, 《双曲 Kac-Moody 代数到 E_{10}的嵌入》, 《数学物理通讯》, 第 83 卷, 2008 年, 第 139–148 页