arXiv:2301.00525v2 [math.DG] 6 Nov 2023

吹起上的厄米特–杨–米尔斯联络

ANDREW CLARKE 和 Carl Tipler

Abstract. 我们研究沿子流形对 K¨ahler 流形进行爆破所得空间上的拉回向量丛的厄米特–杨–米尔斯联络。在关于单且半稳定向量丛的分次对象的一些技术性假设下，我们给出了一个必要且充分的数值判据，以判断拉回丛是否能在使例外除子充分微小的极化下承认一列厄米特–杨–米尔斯联络，并证明这些联络收敛于分次对象的拉回厄米特–杨–米尔斯联络。

1. Introduction

规范理论的基石之一是 Hitchin–Kobayashi 对应（[9,12, 20, 7]）。这一著名的 Narasimhan–Seshadri 定理推广断言，K¨ahler 流形上的全纯向量丛当且仅当按照 Mumford–Takemoto 的意义是多稳定的（[14, 19]，才带有厄米–爱因斯坦度量。微分几何一侧的厄米特–杨–米尔斯联络（简称 HYM 联络）源自物理学，而代数几何一侧则是来自模空间构造的稳定性概念；二者之间的相互作用已经产生了诸多应用，并成为极其丰富的灵感来源。鉴于 HYM 联络是多稳定向量丛的规范附属对象，研究它们与向量丛之间自然映射（如拉回）的关系是很自然的。本文讨论沿爆破拉回 HYM 联络的问题。尽管过去十年中，极值 K¨ahler 度量的类似问题取得了许多进展 [1, 2, 3, 18, 17, 5]，但关于爆破下 HYM 联络行为的研究相对较少 [4, 6]。本文在一些温和的假设下，解决了沿光滑中心进行爆破所得空间上的半稳定向量丛拉回问题。

设 $\pi\colon X' \to X$ 是沿子流形 $Z \subset X$对带极化 K¨ahler 流形 $(X, [\omega])$ 进行爆破所得的流形，且 $E' = \pi^* E$ 是全纯向量丛$E \to X$的拉回。对于 $0 < \varepsilon \ll 1$, $L_\varepsilon := \pi^*[\omega] - \varepsilon c_1(Z')$ 在 X'上定义了一个极化，其中我们将例外除子记为 $Z' = \pi^{-1}(Z)$。要使 E' 关于 $\omega_\varepsilon \in c_1(L_\varepsilon)$ 存在 HYM 联络，还存在一些障碍，其中 $0 < \varepsilon \ll 1$。特别地， E 应当是单的，并且关于 $[\omega]$半稳定。在后一种情况下， E 具有一个由半稳定层构成的 Jordan–Hölder 过滤，其分次对象 $\mathrm{Gr}(E)$ 为多稳定分次对象（定义见第 2.2 节）。此外，另一个障碍来自 E 中由 $\mathrm{Gr}(E)$ 导出的子层。尽管这些层与 E具有相同的斜率，但它们在 X' 上的拉回可能会使 E'不稳定。我们的主要结果断言，在对 $\mathrm{Gr}(E)$ 及 Z的维数作出一些技术性假设的条件下，这些实际上是 E' 具有 HYM 联络的唯一障碍。更确切地说，

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53C07，次要分类：53C55、14J60。

从现在起直至本文结束，我们假设 $Z \subset X$ 满足

$$\operatorname{codim}(Z) \geq 3.$$

回顾一下，若半稳定全纯向量丛 $E \to (X, [\omega])$ 的分次对象 $\mathrm{Gr}(E)$ 是局部自由的，则称其足够光滑。我们进一步假设，具有局部自由子层的 Jordan–H¨older 过滤

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_\ell = E$$

是唯一的。对于 $1 \leq i \leq \ell$，记 $\mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i) = \frac{c_1(\pi^*\mathcal{F}_i) \cdot L_\varepsilon^{n-1}}{\text{秩}(\mathcal{F}_i)}$ 为 $\pi^*\mathcal{F}_i$ 在 (X', L_ε) 上的斜率。在下文中，提及 E 上的 HYM 联络 A（或 $\mathrm{Gr}(E)$ 上的联络，或 π^*E）时，我们默认假设 $A^{0,1}$ 与 E（或 $\mathrm{Gr}(E)$，或π^*E）的全纯联络或 Dolbeault 算子规范等价。

定理 1.1. 设 $E \to X$ 是 $(X, [\omega])$ 上一个足够光滑的半稳定全纯向量丛。假设 $\mathrm{Gr}(E)$ 的稳定分量两两不同构，且 E 存在唯一的由局部自由子层构成的 Jordan–Holder 过滤。则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及一列 HYM 联络 $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)}$，定义在 π^*E 上且相对于 $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)}$，当且仅当

$$\forall\, i \in [\![1, \ell-1]\!],\ \mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i) \underset{\varepsilon \to 0}{<} \mu_{L_\varepsilon}(E). \tag{1.1}$$

在这种情况下，若 A 表示关于 ω 的 $\mathrm{Gr}(E)$ 上的 HYM联络，则可选取 $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)}$，使其在任意 Sobolev范数下均满足 $A_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \pi^*A$ 。

表达式 $\mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}) \overset{<}{\underset{\varepsilon \to 0}{}} \mu_{L_\varepsilon}(E)$ 表示：$\mu_{L_\varepsilon}(E) - \mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F})$ 的ε-展开中的首个非零项严格为正。定理 1.1 的结论可以改述如下。若 $\overline{\partial}_{\mathrm{Gr}(E)}$（分别为 $\overline{\partial}_E$）表示 $\mathrm{Gr}(E)$（分别为 E）的 Dolbeault 算子，且 h 是关于 ω 的 $\mathrm{Gr}(E)$ 上的厄米–爱因斯坦度量，则存在定义在 X' 上的规范变换 $(f_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$，使得 $(f_\varepsilon^*\pi^*\overline{\partial}_E, \pi^*h)$ 的 Chern 联络关于 $(\omega_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ 为 HYM，并且在任意 Sobolev范数下收敛到 $(\pi^*\overline{\partial}_{\mathrm{Gr}(E)}, \pi^*h)$ 的 Chern 联络。

注1.2。 E 的简单性由对 $\mathrm{Gr}(E)$ 所作的假设所蕴含（见[16, 引理 34]）。半稳定性和条件（1.1）也是从定理 1.1 得到联络（A_ε）所必需的。对 $\mathrm{Gr}(E)$ 的另外三个假设则是技术性的。假设 $\mathrm{Gr}(E)$ 局部自由，便可以将 E 视为 $\mathrm{Gr}(E)$ 的光滑复形变形，并在同一个底层复向量丛上处理各种联络。不过，我们提醒读者，若去掉这一假设，条件（1.1）可能不足以确保 π^*E 在（X', L_ε）上的半稳定性（参见 [15, 定理 1.10]）另一方面，关于 $\mathrm{Gr}(E)$ 的分量两两不同构的假设纯属技术性要求，它确保其自同构群（将在微扰理论中提供障碍）是阿贝尔群。最后，Jordan–Hölder 过滤的唯一性使得从 $\mathrm{Gr}(E)$ 到E的扩张矩阵具有一种特殊形式：对角线以上的项非零。利用这一点，可以按 $\mathrm{Gr}(E)$ 中稳定分量的数量归纳构造近似解。

现在我们列出定理 1.1的一些推论。首先是稳定情形：

推论 1.3. 设 $E \to X$ 是 $(X, [\omega])$ 上的稳定全纯向量丛，且 A 是关于 ω 的 E 上的 HYM 联络。那么，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和一列 HYM 联络 $(A_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ 定义在 π^*E 上，且关于 $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$，使得 $A_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \pi^*A$ 在任意 Sobolev范数下成立。

对于半稳定情形，条件 (1.1) 可归结为有限次交积计算。一个有趣的特点来自 $\mu_{L_\varepsilon}(E)$ 展开式中的第二项。它等于 E 在Z上的限制的斜率的相反数。以下公式在 [15, 第 4 节 1], 中得到证明，其中 $m = \dim(Z)$:

$$\mu_{L_\varepsilon}(E) = \mu_L(E) - \binom{n-1}{m-1}\mu_{L_{|Z}}(E_{|Z})\varepsilon^{n-m} + O(\varepsilon^{n-m+1}). \tag{1.2}$$

于是有:

推论 1.4. 设 $E \to X$ 是 $(X, [\omega])$ 上一个足够光滑的半稳定全纯向量丛。假设 Gr(E) 的稳定分量两两不同构，且由局部自由子层构成的 Jordan–Hölder 过滤唯一。记 A 为 Gr(E) 上关于 ω 的一个 HYM联络。若

$$\forall\, i \in [\![1, \ell-1]\!],\ \mu_{L_{|Z}}(E_{|Z}) < \mu_{L_{|Z}}((\mathcal{F}_i)_{|Z}), \tag{1.3}$$

那么，存在 $\varepsilon_0 > 0$，以及 π^*E 上关于 $(\omega_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ 的一列 HYM 联络 $(A_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$，它们在任意 Sobolev范数下都收敛到 π^*A。

条件（1.3）在 [15, 第4节5] 中通过具体例子进行了检验，以便通过爆破产生切层的稳定扰动，而我们的结果则提供了有关相应联络及其渐近行为的信息。注意，根据 Mehta–Ramanathan定理，若 [13], 是 $[\omega] = c_1$（L）是整的，且 Z是线性系 $|L^k|$中的除子的一个一般交 $E_{|Z}$，那么只要 E 是半稳定的，$E_{|Z}$ 就 E 是半稳定的。此时，条件（1.3）无法满足，而且条件（1.1）成立的可能性似乎也不大。因此，对这类子簇进行吹胀往往会破坏半稳定向量丛的稳定性。

一般而言，我们预计，在条件（1.1）下，利用纯粹的代数方法获得足够光滑的拉回向量丛的稳定性并不会太困难。然而，我们强调，Hitchin–Kobayashi 对应并未提供有关相应 HYM 联络渐近行为的任何信息，而这正是定理 1.1的主要内容。尽管如此，我们仍陈述以下推论，它将 [15, 定理 1。10] 推广到了非等变情形:

推论 1.5. 设 $E \to X$ 是定义在 $(X, [\omega])$ 上的足够光滑半稳定全纯向量丛。假设 Gr(E) 的稳定分量两两不同构，并且具有局部自由子层的 Jordan–Hölder 过滤是唯一的。那么，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\pi^*E \to (X', L_\varepsilon)$ 是

(i) 稳定，当且仅当对所有 $i \in [\![1, \ell-1]\!]$, $\mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i) \underset{\varepsilon\to 0}{<} \mu_{L_\varepsilon}(E)$; (ii) 半稳定，当且仅当对所有 $i \in [\![1, \ell-1]\!]$, $\mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i) \underset{\varepsilon\to 0}{\leq} \mu_{L_\varepsilon}(E)$, (iii) 否则不稳定。

最后，我们简要评述以往的相关工作。定理 1.1 推广了 [4, 6] 的结果；该文研究了沿点对 HYM 联络进行爆破的情形。本文则考虑沿任意光滑子簇进行爆破的情形，并且涵盖

半稳定情形。由于分次对象的自同构会妨碍线性理论，这种情形在技术上更为复杂。尽管 [6]采用了与解决类似问题（即在爆破上构造极值 K¨ahler 度量）的各种方法相似的粘合构造， [2, 3, 18, 17, 5]，但我们方法的一项关键特点是直接应用定量隐函数定理，并紧密遵循 [16]所发展的方法。主要的新技术内容位于第 3节，我们在其中精确研究了相关线性算子与爆破解析几何之间的关系。第 4 节和5节中的其余论证则较为标准，遵循 Sektnan 与第二作者的工作 [16]。

概要：在第2节中，我们回顾 HYM 联络与稳定性的基础知识。随后在第3 节中，我们分析爆破上的线性理论。基于此，我们在第4 节中说明如何构造 HYM 方程的近似解。本节及其后的章节均基于 [16]中的处理。接着，我们在第5 节中将这些近似解扰动为实际解，从而完成定理1.1的证明。推论将在第5.3节中讨论。

致谢：作者曾受邀访问 LMBA 和哥德堡大学；他们谨向这两所热情接待的机构致谢，感谢其提供了富有启发性的工作环境。本项目的构想源于与 Lars Martin Sektnan 的讨论，感谢他分享自己的想法与见解。AC 部分获得以下资助：BRIDGES ANR–FAPESP ANR-21-CE40-0017 和 Projeto CAPES - PrInt UFRJ 88887.311615/2018-00。CT 部分获得以下资助：MARGE ANR-21-CE40-0011 和 BRIDGES ANR–FAPESP ANR-21-CE40-0017。

2. Preliminaries

在第 2.1 节和 2.2 节中，我们介绍 HYM 联络和斜率稳定性的概念，以及一些一般性结果，并请读者参阅 [10] 和 [8]。从第 3 节开始，我们将讨论专门应用于爆破的情形。特别是在第 3.2节中，我们给出了爆破上 HYM 方程的线性化的各种渐近表达式。这些结果将在第 5节中使用。

2.1. 厄米–杨–米尔斯方程。设 $E \to X$ 是紧致 K¨ahler 流形上的全纯向量丛 X。若关于带有 K¨ahler 形式 ω 的 K¨ahler 度量，一个定义在 E 上的 Hermitian 度量是 Hermite–Einstein 的，则相应 Chern 联络的曲率$F_h \in \Omega^2(X, \operatorname{End} E)$ 满足

$$\Lambda_\omega (iF_h) = c \operatorname{Id}_E \tag{2.1}$$

对于某个实常数 c。等价地，设 h 是定义在 E的底层光滑复向量丛上的某个 Hermitian 度量，则 (E, h) 上的厄米联络 A 称为 Hermite–Yang–Mills 联络，当且仅当它满足

$$\begin{cases} F_A^{0,2} &= 0, \\ \Lambda_\omega (iF_A) &= c \operatorname{Id}_E . \end{cases}$$

该系统的第一个方程表明， A 的 (0,1) 部分决定了 E上的全纯结构；而第二个方程表明， h 相对于这一结构是厄米–爱因斯坦的

全纯结构。我们将尝试在复规范群轨道中寻找厄米特–杨–米尔斯联络，现定义如下。复规范群为

$$\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E)=\Gamma\left(\mathrm{GL}\left(E,\mathbb{C}\right)\right).$$

我们注意到，酉规范变换的集合保持度量不变 h 因此，考虑元素的纤维逐点极分解 $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E)$，我们考察厄米自同态丛 $\mathrm{End}_H(E,h)$ 以及集合

$$\mathcal{G}^{\mathbb{C}}(E,h):=\mathcal{G}^{\mathbb{C}}(E)\cap\Gamma(\mathrm{End}_H(E,h))=\{e^s\ :\ s\in\Gamma(\mathrm{End}_H(E,h))\}.$$

如果 ∂ 是定义 E上的全纯结构的 Dolbeault 算子，那么 $f\circ\bar\partial\circ f^{-1}$ 在 E 上定义了一个双全纯复结构。令 $d_A=\partial_A+\bar\partial_A$ 为 (E,h) 关于原复结构的 Chern 联络（即$\bar\partial_A=\bar\partial$）。那么 A^f 关于 $f\circ\bar\partial\circ f^{-1}$ 的 h 的 Chern 联络为

$$d_{A^f}=(f^*)^{-1}\circ\partial_A\circ(f^*)+f\circ\bar\partial\circ f^{-1}.$$

求解厄米–杨–米尔斯方程等价于求解

$$\Psi(s)=c\,\mathrm{Id}_E$$

其中

$$\begin{array}{rccc}\Psi:&\Gamma(\mathrm{End}_H(E,h))&\longrightarrow&\Gamma(\mathrm{End}_H(E,h)),\\&s&\longmapsto&i\Lambda_\omega(F_{A^{\exp(s)}}),\end{array}$$

并且，$\Gamma(\mathrm{End}_H(E,h))$ 是 $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}(E,h)$ 在单位元处的切空间。对于 E上的联络 A，拉普拉斯算子 Δ_A 为

$$\Delta_A=i\Lambda_\omega\left(\bar\partial_A\partial_A-\partial_A\bar\partial_A\right). \tag{2.2}$$

若 $A_{\mathrm{End}\,E}$表示由 A在 End E上诱导的联络，则：

引理 2.1. 若 A是 $(E,\overline{\partial},h)$ 的 Chern 联络，则 Ψ在单位元处的微分为

$$d\Psi_{\mathrm{Id}_E}=\Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}}.$$

此外，若假设 A 是厄米特–杨–米尔斯联络，则 $\Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}}$作用于 $\Gamma(\mathrm{End}(E))$ 上的核由空间 $\mathrm{Aut}(E)$（$(E,\overline{\partial})$ 的自同构群）的李代数 $\mathfrak{aut}(E)$ 给出。

关于核的最后一个结论可由 Kähler 恒等式和 秋月–中野恒等式推出，它们蕴含 $\Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}}=\partial_A^*\partial_A+\partial_A^*\partial_A$；当 A 是厄米特–杨–米尔斯联络时，这两个项相等。由于算子 $\Delta_{A_{\mathrm{End}\,E}}$ 是椭圆型且自伴的，$\mathfrak{aut}(E)$ 将作为厄米特–杨–米尔斯联络扰动线性理论中的余核出现。

2.2. 斜率稳定性。我们回顾斜率稳定性的一些基本事实，该概念由 [14, 19], 引入，并请感兴趣的读者参阅 [8]，以了解详细论述。此处记 $L:=[\omega]$ 为 n 维 Kähler 流形 X的极化。

定义 2.2. 对于 X 上的 $\mathcal{E}$，斜率 $\mu_L(\mathcal{E})\in\mathbb{Q}$（相对于 L）由交数公式给出

$$\mu_L(\mathcal{E})=\frac{\deg_L(\mathcal{E})}{\mathrm{rank}(\mathcal{E})}, \tag{2.3}$$

其中，rank($\mathcal{E}$) 表示 $\mathcal{E}$ 的秩，而 $\deg_L(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E}) \cdot L^{n-1}$ 表示其次数。于是，若对于 $\mathcal{E}$ 的任意相干子层 $\mathcal{F}$，满足 $0 < \text{rank}(\mathcal{F}) < \text{rank}(\mathcal{E})$，则称 $\mathcal{E}$ 关于L 是斜率半稳定（分别为斜率稳定）的

$$\mu_L(\mathcal{F}) \leq \mu_L(\mathcal{E}) \text{ (resp. } \mu_L(\mathcal{F}) < \mu_L(\mathcal{E})).$$

相同斜率的斜率稳定层的直和称为斜率多稳定。

本文中，我们通常省略“斜率”一词，直接称层的稳定性，其中极化是默认的。我们将按照惯例，把全纯向量丛 E 与其截面层等同，因此也会讨论向量丛的斜率稳定性概念。在这种情况下，斜率稳定性通过 Hitchin–Kobayashi 对应与微分几何自然关联：

定理 2.3 ([9, 12, 20, 7])。 存在一个厄米–爱因斯坦度量定义在 E 上，且相对于 ω 当且仅当 E 相对于 L是多稳定

我们主要关注半稳定向量丛。无挠层 $\mathcal{E}$ 的 Jordan–H ¨older 滤过是由相干饱和子层构成的滤过：

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_\ell = \mathcal{E}, \tag{2.4}$$

使得相应的商层，

$$\mathcal{G}_i = \frac{\mathcal{F}_i}{\mathcal{F}_{i-1}}, \tag{2.5}$$

对于 $i = 1$、.....、 ℓ，均关于斜率 $\mu_L(\mathcal{G}_i) = \mu_L(\mathcal{E})$ 稳定。特别地，该滤子的分次对象

$$\text{Gr}(\mathcal{E}) := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{G}_i \tag{2.6}$$

是多稳定的。由 [8, 第 1], 节可得以下标准的存在性与唯一性结果：

命题 2.4。任意半稳定的相干无挠层 $\mathcal{E}$ 在 (X, L) 上都具有 Jordan–H ¨older 滤子，并且此类滤子的分次对象 Gr($\mathcal{E}$)** 的双对偶在同构意义下唯一。

当 E 是局部自由且半稳定时，若 Gr(E) 是局部自由的，则称其足够光滑。在这种情况下，我们将 $\mathfrak{E}_{[\omega]}$ 记为由 Gr(E) 的若干稳定分量通过连续扩张构成的 E 的全纯子丛集合。等价地， $\mathfrak{E}_{[\omega]}$ 是 E 的全纯子丛集合，这些子丛出现在 E的 Jordan–Hölder 滤子中。最后，我们回顾一下，稳定性的一个必要条件是简单性，即 Aut(E) $= \mathbb{C}^* \cdot \text{Id}_E$。

3. Geometry of the blow-up

现在我们考虑 $Z \subset X$ 一个余维数为$r = n - m \geq 2$ 的 m维复子流形以及爆破映射

$$\pi : \text{Bl}_Z(X) \to X.$$

我们将 $X' = \text{Bl}_Z(X)$ 记为膨胀流形，将 $Z' = \pi^{-1}(Z)$ 记为例外除子。我们记

$$L_\varepsilon := \pi^* L - \varepsilon[Z']$$

X' 上的一个极化，其中 $0 < \varepsilon \ll 1$。设 $E \to X$ 为一个全纯向量丛，并将其拉回丛记为 $E' = \pi^* E$。对于任意全纯子丛$F \subset E$，交数 $\mu_{L_\varepsilon}(\pi^* E) - \mu_{L_\varepsilon}(\pi^* F)$ 可按 ε 展开，其首项为 $\mu_L(E) - \mu_L(F)$。因此，根据定理 2.3 中的 Hitchin–Kobayashi 对应， E 在 (X, L) 上半稳定，是其拉回丛 E' 能够关于 L_ε 中的 K¨ahler 度量对所有 $0 < \varepsilon \ll 1$ 存在 HYM 联络的必要条件。另一个必要条件是 E' 的简单性；根据 Hartogs定理，这等价于 E 的简单性。于是，检验 E' 稳定性的自然候选对象，是 $\mathfrak{E}_{[\omega]}$ 中元素的拉回，而条件（1.1）显然是 E' 在我们所考虑的极化下稳定、从而存在 HYM 联络的必要条件。因此，我们假设 E 是单的、半稳定的，并满足（1.1）。现在我们回到爆破的微分几何。

3.1. 截面空间上的分解。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{\iota} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\iota_0} & X \end{array}$$

其中， ι_0 和 ι 表示包含映射，而竖直箭头由投影映射 π给出。于是我们在截面上得到一个拉回映射

$$\pi^* : \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) \longrightarrow \Gamma(X', \mathrm{End}(\pi^* E))$$

以及一个限制映射：

$$\iota^* : \Gamma(X', \mathrm{End}(\pi^* E)) \longrightarrow \Gamma(Z', \mathrm{End}(\iota^* \pi^* E)).$$

我们的目标是将这些映射纳入一个短正合序列，从而最终分解空间 $\Gamma(X', \mathrm{End}(\pi^* E))$。若 $N_Z = TX_{|Z}/TZ$表示 Z在X中的法丛，则 $Z' \simeq \mathbb{P}(N_Z)$，并且我们可以固定一个 $(1,1)$-形式 $\lambda \in c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_Z)}(1))$，使其在 $\mathbb{P}(N_Z) \to Z$的纤维上限制为 Kähler 度量。我们还固定 X上的一个 Kähler 形式 $\omega \in c_1(L)$，并考虑其在 Z上的限制。于是我们得到一个 Kähler $\mathbb{CP}^{r-1}$-纤维化：

$$\pi : (Z', \lambda) \longrightarrow (Z, \omega).$$

通过 [16, 第 2 节3], 中所述的沿纤维平均，我们得到一个分裂

$$\Gamma(Z', \mathrm{End}(\iota^* \pi^* E)) = \pi^*(\Gamma(Z, \mathrm{End}(\iota_0^* E))) \oplus \Gamma_0(Z', \mathrm{End}(\iota^* \pi^* E)). \tag{3.1}$$

为简化记号，我们将省略 ι^* 和 π^*。利用第二个因子上的投影

$$p_0 : \Gamma(Z', \mathrm{End}(E)) \to \Gamma_0(Z', \mathrm{End}(E))$$

在（3.1）中，我们推导出一个短正合序列：

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) \xrightarrow{\pi^*} \Gamma(X', \mathrm{End}(E)) \xrightarrow{p_0 \circ \iota^*} \Gamma_0(Z', \mathrm{End}(E)) \longrightarrow 0.$$

实际上，我们可以通过一个线性延拓算子将这个序列分裂

$$\iota_* : \Gamma_0(Z', \mathrm{End}(E)) \longrightarrow \Gamma(X', \mathrm{End}(E))$$

使得

$$p_0 \circ \iota^* \circ \iota_* = \mathrm{Id}.$$

这可以通过使用鼓包函数和标准的单位分解论证来完成。结果得到一个同构：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X', \mathrm{End}(E)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) \oplus \Gamma_0(Z', \mathrm{End}(E)) \\ s & \longmapsto & (s - \iota_* \circ p_0 \circ \iota^* s \ , \ p_0 \circ \iota^* s), \end{array} \tag{3.2}$$

其逆映射为 $(s_X, s_Z) \mapsto (\pi^* s_X + \iota_* s_Z)$。这将规范变换的李代数分解开来，并将用于识别线性化的 ε-展开中来自 X 和来自 Z' 的贡献，相关内容将在下一节描述。此后，虽不拘泥于记号，我们将把空间 $\Gamma(X, \mathrm{End}(E))$ 和 $\Gamma_0(Z', \mathrm{End}(E))$ 视为 $\Gamma(X', \mathrm{End}(\pi^* E))$ 的子空间，并将 $s = s_X + s_Z$ 记作元素 $s \in \Gamma(X', \mathrm{End}(E))$ 的分解。

3.2. 拉普拉斯算子的分解。 我们将 λ 延拓为一个定义在，上的闭 (1,1)-形式 X'，如 [21, 第 3 节所述。3] 并考虑一族 K¨ahler 度量，定义在X'上：

$$\omega_\varepsilon = \pi^* \omega + \varepsilon \lambda \in c_1(L_\varepsilon), \ 0 < \varepsilon \ll 1.$$

令 A 为 E 上的厄米联络，将其拉回到 X'，并扩张至丛 $\mathrm{End}(\pi^* E)$。现在我们将研究拉普拉斯算子

$$\Delta_\varepsilon s = i \Lambda_\varepsilon (\bar{\partial}_A \partial_A - \partial_A \bar{\partial}_A) s$$

在 $s = s_X + s_Z \in \Gamma(X', \mathrm{End}(E))$ 的各个分量上的作用，其中 Λ_ε 是度量 ω_ε 对应的 Lefschetz算子。为此，我们需要在 Z' 上引入一个算子。

定义 3.1. 垂直拉普拉斯算子，记作

$$\Delta_{\mathcal{V}} : \Gamma_0 \left(Z', \mathrm{End}(E) \right) \to \Gamma_0 \left(Z', \mathrm{End}(E) \right),$$

是算子

$$\Delta_{\mathcal{V}} = i \Lambda_{\mathcal{V}} \big(\partial_F \bar{\partial}_F - \bar{\partial}_F \partial_F \big),$$

其中

$$\Lambda_{\mathcal{V}} : \Omega^{1,1} \left(Z', \mathrm{End}(E) \right) \to \Gamma_0 \left(Z', \mathrm{End}(E) \right)$$

是定义在 π 的每个纤维 $F_z = \pi^{-1}(z)$ 上的垂直收缩算子： $Z' \to Z$，其定义为

$$(\Lambda_{\mathcal{V}} \alpha)_{|F_z} \lambda_{|F_z}^{r-1} = (r-1) \alpha_{|F_z} \wedge \lambda_{|F_z}^{r-2}$$

¯且其中 $d_F = \partial_F + \partial_F$ 是 π 的纤维上的平坦联络： $Z' \to Z$。

[11] 下面的引理依赖于 [16, ，且已在引理 4.6] 中指出。

引理 3.2. 垂直拉普拉斯算子

$$\Delta_{\mathcal{V}} : \Gamma_0 \left(Z', \mathrm{End}(E) \right) \to \Gamma_0 \left(Z', \mathrm{End}(E) \right)$$

是一个可逆线性映射。

在以下论述中，形如 $O(\varepsilon^j)$ 的表达式应理解为逐点成立。关于这些表达式相对于各种索博列夫空间范数的收敛性，将在第 5 节讨论。

引理 3.3. 如果 $s_Z = \iota_* \sigma_Z$ 对于 $\sigma_Z \in \Gamma(Z', \mathrm{End}(E))$，则

$$(p_0 \circ \iota^*) \Delta_\varepsilon (\iota_* \sigma_Z) = \varepsilon^{-1} \Delta_{\mathcal{V}} \sigma_Z + \mathcal{O}(1).$$

证明。我们引入由 D 给出的算子

$$Ds_Z = i(\bar{\partial}_A\partial_A - \partial_A\bar{\partial}_A)s_Z.$$

拉普拉斯算子 Δ_ε 在 X' 上满足:

$$\Delta_\varepsilon s_Z\,\omega_\varepsilon^n = nDs_Z \wedge \omega_\varepsilon^{n-1},$$

或者等价地

$$\Delta_\varepsilon s_Z = \frac{n\ Ds_Z \wedge (\omega+\varepsilon\lambda)^{n-1}}{(\omega+\varepsilon\lambda)^n}.$$

注意， ω 是 X上的 K¨ahler 形式，但在 X' 上沿子流形 Z'的纤维方向退化。于是 $(i^*\omega)^{m+1} = 0 \in \Omega^{2(m+1)}(Z')$，且在$x \in Z' \subseteq X'$处， $\omega^{m+2} = 0$。接着，展开 $(\omega+\varepsilon\lambda)^{n-1}$ 和 $(\omega+\varepsilon\lambda)^n$ 可得

$$\iota^*\Delta_\varepsilon s_Z = (n-m-1)\varepsilon^{-1}\frac{Ds_Z \wedge \omega^{m+1} \wedge \lambda^{n-m-2}}{\omega^{m+1}\wedge\lambda^{n-m-1}} + \mathcal{O}(1).$$

¯限制到 Z'上时， A 的联络 1-形式消失，因此 $\iota^*Ds_Z = i\partial\partial\sigma_Z$作用于 σ_Z的系数函数。另一方面，通过考虑 $x \in Z'$处一个方便的标准正交标架，我们看到 $\iota^*\Delta_\varepsilon\iota_*\sigma_Z = \varepsilon^{-1}\Delta_\mathcal{V}\sigma_Z + \mathcal{O}(1)$。□

在下一个引理中，我们将 $\Delta_\varepsilon s_Z = （\Delta_\varepsilon s_Z）_X + （\Delta_\varepsilon s_Z）_Z$ 表示按照（3.2）进行的分解。

引理 3.4. 对于 $s_Z = \iota_*\sigma_Z$，其中 $\sigma_Z \in \Gamma（Z'，\mathrm{End}（E））$，有

$$(\Delta_\varepsilon s_Z)_X = \mathcal{O}(1).$$

证明。根据定义，$\Delta_\varepsilon s_Z（_X = \pi^*\phi）$对于某个 $\phi \in \Gamma（X，\mathrm{End}（E））$成立。由于我们还有

$$(\Delta_\varepsilon s_Z)_X \quad = \quad (\mathrm{Id} - \iota_*(p_0\circ\iota^*))\Lambda_\varepsilon Ds_Z,$$

我们推得，截面 ϕ 是 $\pi_*（\mathrm{Id}-\iota_*（p_0\circ\iota^*））\Lambda_\varepsilon Ds_Z$在 $Z \subseteq X$上的连续延拓。在 $X'\setminus Z'$ 上，我们有

$$\Lambda_\varepsilon Ds_Z \quad = \quad n\frac{Ds_Z\wedge(\omega^{n-1}+\mathcal{O}(\varepsilon))}{\omega^n+\mathcal{O}(\varepsilon)} = \mathcal{O}(1).$$

由于 $\pi_*（\mathrm{Id} - \iota_*（p_0\circ\iota^*））$是 $\mathcal{O}（1）$，结论得证。 □

由前面两个引理，在分解

$$s = s_X + s_Z,$$

$\Delta_\varepsilon s_Z$ 也以关于ε的高阶项形式属于子空间 $\Gamma_0(Z', \mathrm{End}(E)) \subseteq \Gamma(X', \mathrm{End}(E))$。对于 $s_X \in \Gamma(X, \mathrm{End}(E))$,

$$\Delta_\varepsilon s_X = (\Delta_\varepsilon s_X)_X + (\Delta_\varepsilon s_X)_Z$$

其中 $(\Delta_\varepsilon s_X)_Z = \iota_*(p_0\circ\iota^*)\Delta_\varepsilon s_X$。我们首先考虑 $\iota^*\Delta_\varepsilon s_X$。

引理 3.5。对于 $s_X = \pi^*\sigma_X \in \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) \subseteq \Gamma(X',\mathrm{End}(E))$,

$$\iota^*\Delta_\varepsilon s_X = (m+1)\frac{Ds_X\wedge\omega^m\wedge\lambda^{n-m-1}}{\omega^{m+1}\wedge\lambda^{n-m-1}} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

证明。首先， $s_X = \pi^*\sigma_X$，且联络 A 是从 X拉回的，因此 Ds_X对于到 X 的投影以及在 Z'中的点处的 $Ds\wedge\omega^{m+1} = 0$ 而言是基本的。其次，我们注意到，在 Z'的邻域内， $\omega^{m+1}\wedge\lambda^{n-m-1}$是 X'上的体积形式。于是，结论与前一个引理类似地得出。□

对于最后一项（$\Delta_\varepsilon s_X$）$_X$，我们引入 Δ_X A在 End(E) 上的拉普拉斯算子 $\to$（X， ω）：

$$\begin{array}{rccc} \Delta_X: & \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) & \to & \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) \\ & \sigma & \mapsto & i\Lambda_\omega(\bar\partial_A\partial_A - \partial_A\bar\partial_A)\sigma. \end{array}$$

引理 3.6. 对于 $s_X = \pi^*\sigma_X \in \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) \subseteq \Gamma(X', \mathrm{End}(E))$,

$$(\Delta_\varepsilon s_X)_X = \pi^*(\Delta_X\sigma_X) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

证明。存在 $\phi \in \Gamma(X, \mathrm{End}(E))$，使得 $(\Delta_\varepsilon s_X)_X = \pi^*\phi$。元素 ϕ可视为 $(\Delta_\varepsilon\pi^*\sigma_X)_X$ 在 ε中的渐近展开的最低阶项。然而，在 $x \in X' \setminus Z'$ 处，我们有：

$$\Delta_\varepsilon\pi^*\sigma_X = n\frac{D\pi^*\sigma_X \wedge (\omega+\varepsilon\lambda)^{n-1}}{(\omega+\varepsilon\lambda)^n} = n\pi^*\frac{D\sigma_X\wedge\omega^{n-1}}{\omega^n} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

因此我们看到，$(\Delta_\varepsilon\pi^*\sigma_X)_X$展开式中的最低阶项为 $\Delta_X\sigma_X$。 □

概括以上计算，相对于分解 $s = s_X + s_Z$ 由 (3.2) 所给出，算子 Δ_ε 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \Delta_X & 0 \\ \mathcal{L} & \varepsilon^{-1}\Delta_\mathcal{V} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

加上高阶项，其中 $\mathcal{L}$为某个二阶算子。

4. The approximate solutions

本节的目标是为 HYM 方程构造近似解。与上一节一样，在第 5 节之前，形如 $\mathcal{O}(\varepsilon^j)$ 的表达式均应理解为逐点成立。从现在起，方法和证明都将紧密遵循 [16]。我们只概述大多数步骤；在出现重大差异时提供细节，其余情况则精确引用 [16] 。请注意，在我们的工作中，参数 ε 扮演了 k^{-1} 在 [16], 中的角色；在分解 $\Gamma(X', \mathrm{End}\ E) = \Gamma(X, \mathrm{End}\ E) \oplus \Gamma_0(Z', \mathrm{End}\, E)$ 中，空间 $\Gamma(X, \mathrm{End}\ E)$（相应地，$\Gamma_0(Z', \mathrm{End}\, E)$）扮演了 $\Gamma(B, \mathrm{End}(E))$（相应地， $\Gamma_0(X, \mathrm{End}\ E)$）在 [16] 中的角色。

4.1. 固定复变形参数。我们从 (X, L) 上一个半稳定且足够光滑的全纯向量丛 E 出发，其中 $L = [\omega]$。记 $\mathrm{Gr}(E) = \bigoplus_{i=1}^\ell \mathcal{G}_i$ 为其对应的多稳定分次对象，其稳定分量为 $\mathcal{G}_i$。我们还假设 Gr(E) 的稳定商两两不同构，并且具有局部自由商的 Jordan–Hölder 过滤是唯一的。现在说明这些假设在技术上的含义。首先，根据 [16, 引理 5.8],E 是单的。自同构群 G:= Aut(Gr(E)) 是一个约化李群，其李代数为 $\mathfrak{g} := \mathfrak{aut}(\mathrm{Gr}(E))$，紧实形式为 $K \subset G$，其中 $\mathfrak{k}$:= Lie(K)。我们有

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i,j} H^0(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j).$$

由于这些 $\mathcal{G}_i$'s 都是稳定的且彼此不同构，我们推 deduce that

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^\ell \mathbb{C}\cdot\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i},$$

特别地， $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的。对我们而言，其要点在于， $\mathfrak{k}$ 中会阻碍线性理论的元素，都位于由分解 $\mathrm{Gr}(E) = \oplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{G}_i$ 所诱导的矩阵块分解的对角线上。令 $\overline{\partial}_0$ 为 $\mathrm{Gr}(E)$ 的 Dolbeault 算子。 $\overline{\partial}_E$ 上的 Dolbeault 算子为

$$\overline{\partial}_E = \overline{\partial}_0 + \gamma$$

其中 $\gamma \in \Omega^{0,1}(X, \mathrm{Gr}(E)^* \otimes \mathrm{Gr}(E))$ 可以写成

$$\gamma = \sum_{i<j} \gamma_{ij}$$

对于（可能为零的） $\gamma_{ij} \in \Omega^{0,1}(X, \mathcal{G}_j^* \otimes \mathcal{G}_i)$。根据 Jordan–H¨older 过滤的唯一性假设，我们可以推得这些项$\gamma_{i,\ i+1}$对于 $1 \le i \le \ell - 1$均非零，见[16, 引理 5。4]。这使我们能够在构造近似解时，针对 ℓ稳定分量的数量进行归纳。

我们构造 $\pi^* E \to (X', \omega_\varepsilon)$ 上 HYM 联络的出发点，是在 $\mathrm{Gr}(E)$ 上取一个乘积厄米–爱因斯坦度量 $h = h_1 \oplus \ldots \oplus h_\ell$（可由多稳定性固定一个），以及其在 $(\mathrm{Gr}(E)\ \overline{\partial}_0)$ 上对应的 HYM 联络 A_0 ，其收缩后的曲率形式为

$$\Lambda_\omega i F_{A_0} = c_0 \cdot \mathrm{Id}\,.$$

接着引入 L^2 投影

(4.1)

$$\begin{array}{rccl} \Pi_{i\mathfrak{k}}: & \Gamma(X, \mathrm{End}_H(E,h)) & \to & i\mathfrak{k} \\ & s & \mapsto & \dfrac{1}{\mathrm{Vol}(\omega)} \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{\mathrm{rank}(\mathcal{G}_i)} \Big(\int_X \mathrm{trace}_{\mathcal{G}_i}(s)\, \omega^n \Big)\ \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_i} \end{array}$$

以及由此诱导的正交分解 :

$$\Gamma(X, \mathrm{End}_H(E,h)) = i\mathfrak{k} \oplus \Gamma_{i\mathfrak{k}^\perp}(X, \mathrm{End}_H(E,h))$$

关于配对

$$(s_1, s_2) \mapsto \int_X \mathrm{trace}(s_1 \cdot s_2)\, \omega^n.$$

记 $\Delta_{\mathrm{Gr}(E),0}$ 为 $(\overline{\partial}_0, h)$ 的 Chern 联络相对于 ω的拉普拉斯算子，由引理 2.1 和自伴性可得

引理 4.1。以下算子可逆:

$$\Delta_{\mathrm{Gr}(E),0} : \Gamma_{i\mathfrak{k}^\perp}(X, \mathrm{End}_H(E,h)) \to \Gamma_{i\mathfrak{k}^\perp}(X, \mathrm{End}_H(E,h)).$$

现在我们将利用 G 的规范作用，使复形变形参数 γ 与度量变分参数 ε 相匹配。我们通过施加以下条件来固定规范:

$$\overline{\partial}_0^* \gamma = 0, \tag{4.2}$$

其中，伴随算子是相对于 K¨ahler 结构 ω 定义的。元素

$$g := g_1 \,\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_1} + \ldots, + g_\ell \,\mathrm{Id}_{\mathcal{G}_\ell} \in G,$$

对于 $g_i,\ \in (\mathbb{C}^*)^\ell$，作用于 $\overline{\partial}_E$，并按以下方式生成同构的全纯向量丛:

$$g \cdot \overline{\partial}_E = \overline{\partial}_0 + \sum_{i<j} g_i g_j^{-1} \gamma_{ij}. \tag{4.3}$$

从现在起，我们假设对于 $1 \leq i \leq \ell - 1$,

$$\mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i) \underset{\varepsilon \to 0}{<} \mu_{L_\varepsilon}(E).$$

我们将 q_i 定义为对于每个 $i \in [\![1, \ell - 1]\!]$, $\mathcal{F}_i$ 的偏差阶；也就是说，它是满足以下条件的阶数 $q_i \in \mathbb{N}$：对于某个常数$\nu_i > 0$, $\mu_{L_\varepsilon}(E) - \mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i) = \nu_i \varepsilon^{q_i} + \mathcal{O}(\varepsilon^{q_i+1})$。$E$ 的偏差阶 q 定义为 $q = \max(q_i)_{1 \leq i \leq \ell-1}$。现在定义$\underline{m} = (m_i)_{1 \leq i \leq \ell-1}$，其中对于所有 i, m_i 满足[1]

$$2m_i = q_i.$$

接着，我们通过[2]定义 $\mathrm{g}_{\underline{v},\ \underline{m}} \in G$

$$\mathrm{g}_{\underline{v},\underline{m}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_1} + v_1 \varepsilon^{-m_1} \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_2} + v_1 v_2 \varepsilon^{-m_1 - m_2} \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_3} + \ldots + (\Pi_{i=1}^{\ell-1} v_i) \varepsilon^{-m_1 - \ldots - m_{\ell-1}} \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_\ell},$$

其中常数 $\underline{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq \ell-1} \in (\mathbb{R}^*)^{\ell-1}$ 稍后确定。记

$$\gamma_\varepsilon := \mathrm{g}_{\underline{v},\underline{m}} \cdot \gamma. \tag{4.4}$$

于是，对于任意 $\underline{v}$，算子 $\overline{\partial}_E$和 $\overline{\partial}_\varepsilon = \overline{\partial}_0 + \gamma_\varepsilon$规范等价。我们用 A_ε表示 $(\pi^* E, \pi^* (\overline{\partial}_\varepsilon)\ \pi^* h)$ 上的 Chern 联络（为简化记号，从现在起省略π^*）。我们将考虑投影到 $\mathfrak{g}$的各个分量。对于 $\psi \in \mathfrak{g}$和 $s = s_X + s_Z \in \Gamma(X', \mathrm{End}(E)) = \Gamma(X, \mathrm{End}(E)) \oplus \Gamma_0(Z', \mathrm{End}(E))$，我们用 $\Pi_{\langle \psi \rangle}(s)$ 表示将 s_X 投影到由 ψ 张成的子空间上的正交投影（如方程（4.1）所示）。然后，完全仿照 [16, 命题 5.25], ，结合 Chern-Weil 理论以及常数 ν_i 均严格为正且 γ_i、$i+1$ 均非零这一事实，可得：

命题 4.2. 存在 $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_{\ell-1}) \in (\mathbb{R}^*)^{\ell-1}$ 和一个正常数$\mathcal{C}$，使得对所有 $j \in [\![1, \ell - 1]\!]$,

$$\Pi_{\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j} \rangle} \Lambda_{\omega_\varepsilon} (iF_{A_\varepsilon}) = \mathcal{C}\, \mu_{L_\varepsilon}(E)\, \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j} + O(\varepsilon^{q_j + \frac{1}{2}}).$$

下文中，我们假设常数 $\underline{v}$ 固定为满足命题4.2结论的取值。下一步是对任意阶数 $p \geq q$构造 $f_\varepsilon \cdot A_\varepsilon$ 的规范扰动 A_ε，使其满足

$$\Lambda_{\omega_\varepsilon} (iF_{f_\varepsilon \cdot A_\varepsilon}) = \mathcal{C}\, \mu_{L_\varepsilon}(E)\, \mathrm{Id}_E + O(\varepsilon^p).$$

4.2. 归纳过程与近似解。为了构造任意所需阶数的近似解，我们将通过形如 $\exp(\varepsilon^i s_i)$ 的规范变换对联络A_ε 进行迭代扰动，并利用相关拉普拉斯算子的性质。我们用 Δ_ε （分别用 $\Delta_{\mathrm{Gr}(E),\ \varepsilon}$）表示相对于 ω_ε 的 A_ε （分别是 $(\pi^* \overline{\partial}_0, \pi^* h)$ 的 Chern 联络）的拉普拉斯算子。我们还定义

$$\Delta_X := \Delta_{\mathrm{Gr}(E),0}$$

$(\overline{\partial}_0, h)$ 在 X 上的拉普拉斯算子，以及 $\mathcal{L}$ 与矩阵表达式 (3.3) 中的 $(\overline{\partial}_0, h)$ 相关的二阶算子。

[1]该公式与 [16], 不同；在这里 $2m_i + 1 = q_i$，对 Λ_ε进行收缩时，不会得到额外的 ε项（这与在 [16] 中收缩基本项时的情况相同）[2]请注意，我们对规范作用的约定与[16], 中的约定相反，这也解释了此处 ε 出现负幂的原因。

命题 4.3. 在上述假设下，存在如下展开式

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_{\mathrm{Gr}(E),\varepsilon} + O(\varepsilon), \tag{4.5}$$

且对于 $s_X + s_Z \in \Gamma(X, \mathrm{End}\, E) \oplus \Gamma_0(Z', \mathrm{End}\ E)$,

$$\Delta_{\mathrm{Gr}(E),\varepsilon}(s_X + \varepsilon s_Z) = \Delta_X(s_X) + \mathcal{L}(s_X) + \Delta_{\mathcal{V}}(s_Z) + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{4.6}$$

同样的展开式也适用于 $\pi^*E \to X'$ 上由复结构 $f_\varepsilon \cdot \pi^*(\overline{\partial}_0 + \gamma_\varepsilon)$ 诱导的 Chern 联络，前提是 $f_\varepsilon = \mathrm{Id}_E + s_\varepsilon$ 对某个 $s_\varepsilon \in \Gamma(X', \mathrm{End}\, \pi^*E)$ 成立，且其 X 分量 $s_{X,\varepsilon}$ 满足 $s_{X,\varepsilon} = O(\varepsilon)$，而其 Z' 分量 $s_{Z,\varepsilon}$ 满足 $s_{Z,\varepsilon} = O(\varepsilon^2)$。

证明。 为证明（4.5），我们使用复结构变化所诱导的曲率变化公式 $\overline{\partial}_0 \mapsto \overline{\partial}_0 + \gamma_\varepsilon$：

$$F_{A_\varepsilon} = F_A + d_{A_0}(\gamma_\varepsilon - \gamma_\varepsilon^*) + (\gamma_\varepsilon - \gamma_\varepsilon^*) \wedge (\gamma_\varepsilon - \gamma_\varepsilon^*). \tag{4.7}$$

与 ω_ε 收缩后，得到

$$\Lambda_\varepsilon(iF_{A_\varepsilon}) = \Lambda_\varepsilon(iF_{A_0}) + \Lambda_\varepsilon\left(\partial_0\gamma_\varepsilon - \overline{\partial}_0\gamma_\varepsilon^*\right) - 2\Lambda_\varepsilon\left(\gamma_\varepsilon \wedge \gamma_\varepsilon^*\right).$$

现在，根据 $g_{\underline{v},\ \underline{m}}$ 的选取以及方程（4.4）中 γ_ε 的定义，我们可知

$$\gamma_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^{\min(m_i)}).$$

根据定义，$m_i = \frac{q_i}{2}$。由公式（1.2），对所有 $i \in [\![1, \ell-1]\!]$，我们有 $q_i \geq n-m$，并且由于我们正在吹胀一个子流形，必有 $m \leq n-2$。于是，$q_i \geq 2$，从而 $m_i \geq 1$ 对所有 i。于是，

$$\gamma_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

由此得到

$$\Lambda_\varepsilon(iF_{A_\varepsilon}) = \Lambda_\varepsilon(iF_{A_0}) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

注意，$\left(\partial_0\gamma_\varepsilon - \overline{\partial}_0\gamma_\varepsilon^*\right) - 2\left(\gamma_\varepsilon \wedge \gamma_\varepsilon^*\right)$中的所有项都是拉回项。仿照第3.2节的论证可知，这个估计对一阶变分仍然成立，由此得到

$$\Delta_\varepsilon = \Delta_{\mathrm{Gr}(E),\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

（4.6）的证明直接由第3.2节中的各个引理推出。最后，我们考虑引理陈述中所述的在规范变换 f_ε 下的扰动后的联络。对于这样的联络，展开式（4.5）显然仍然成立$^{-}$ $^{-}$，因为 $f_\varepsilon = \mathrm{Id}_E + \mathcal{O}(\varepsilon)$。于是，$X$部分 $\partial_{A_\varepsilon}\partial_{A_\varepsilon} - \partial_{A_\varepsilon}\partial_{A_\varepsilon}$的变化阶为 ε，而其 Z'部分的变化阶为 ε^2，这足以抵消限制到 ε^{-1}并进行缩并时产生的 Z' 项，正如引理3.3的证明所示。证明至此结束。□

在构造近似 HYM 联络时，我们将使用 Δ_X 和 $\Delta_{\mathcal{V}}$ 的映射性质。这将使我们能够将所有误差项消去，模去 $\Delta_X = \Delta_{\mathrm{Gr}(E),\ 0}$ 的余核中的元素，而该余核就是 $\mathfrak{g}$。根据 Chern-Weil 理论，这些剩余项将由 $\mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i)$ 的展开式控制；论证中的关键在于，消去其他误差后，这些项保持不变。下面的引理说明了这一点。

引理 4.4. 设 $s \in \Gamma(\mathrm{End}(\mathcal{G}_i))$ 且 $j \in [\![1, \ell]\!]$。则

$$\Pi_{\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j} \rangle} \Delta_\varepsilon(s) = \mathcal{O}(\varepsilon^{q_j})$$

and

$$\Pi_{\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j} \rangle} \Lambda_\varepsilon \left((\partial_\varepsilon s - \bar{\partial}_\varepsilon s) \wedge (\partial_\varepsilon s - \bar{\partial}_\varepsilon s) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^{q_j}).$$

设 $\sigma \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_i))$，其中 $i < p$，且 $j \in [\![1, \ell]\!]$。那么

$$\Pi_{\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j} \rangle} \Delta_\varepsilon(\varepsilon^{m_i + \ldots + m_{p-1}+1} \sigma) = \mathcal{O}(\varepsilon^{q_j+1}).$$

and

$$\Pi_{\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j} \rangle} \Lambda_\varepsilon \left(\varepsilon^{2(m_i + \ldots + m_{p-1}+1)} \left((\partial_\varepsilon \sigma - \bar{\partial}_\varepsilon \sigma) \wedge (\partial_\varepsilon \sigma - \bar{\partial}_\varepsilon \sigma) \right) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^{q_j+1}),$$

$p < i$ 也类似。

证明。注意，我们只需考虑分裂（$\Gamma(X, \mathrm{End}\, E)$ 中截面的分量（3.2），因为我们只关心投影到 $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j}$ 上。然后，证明过程与[16, 引理 5.20 和引理 5.21]完全相同。□

接下来唯一需要消除的误差是 $\mathfrak{g}$ 中的误差。这里我们将用到以下引理，其证明是对 [16, 引理 5.23] 证明的直接改写。

引理 4.5。对于所有 $j \in [\![1, \ell - 1]\!]$，存在一个负常数 $a_{j,\ j+1}$ 使得

$$\Pi_{\mathfrak{g}} \Delta_\varepsilon(\mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j}) = a_{j,j+1} \varepsilon^{q_j} \mathrm{Id}_{j,j+1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{q_j+1}), \tag{4.8}$$

其中，对 (p, l)，$\in [\![1, \ell]\!]^2$:

$$\mathrm{Id}_{pl} = \frac{1}{\mathrm{rank}\, \mathcal{G}_p} \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_p} - \frac{1}{\mathrm{rank}\, \mathcal{G}_l} \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_l}.$$

注意，与命题4.3一样，引理 4.4 和 4.5 的结论对于形如 $f_\varepsilon \cdot A_\varepsilon$ for $f_\varepsilon = \mathrm{Id}_E + s_{\varepsilon,X} + s_{\varepsilon,Z}$ with $s_{\varepsilon,X} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ and $s_{\varepsilon,Z} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的扰动后的联络也成立。现在我们可以证明本节的主要命题了。

命题 4.6. 设 $p \geq q$。那么，存在规范变换 $f_\varepsilon^p = \mathrm{Id}_E + s_{\varepsilon,X}^p + s_{\varepsilon,Z}^p$ with $s_{\varepsilon,X}^p = \mathcal{O}(\varepsilon)$ and $s_{\varepsilon,Z}^p = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$，以及常数 c_ε^p，使得对所有 $0 < \varepsilon \ll 1$，都有

$$\Lambda_\varepsilon \left(F_{f_\varepsilon^p \cdot A_\varepsilon} \right) = c_\varepsilon^p \mathrm{Id}_E + \mathcal{O}(\varepsilon^p).$$

证明。证明思路沿用[16, 第 5.2 节和第 5.3 节。2], 因此我们将参照相关章节，仅概述论证过程。我们可以将 ε 右侧的每一项展开为以下恒等式：

$$\Lambda_\varepsilon(iF_{A_\varepsilon}) = \Lambda_\varepsilon(iF_{A_0}) + \Lambda_\varepsilon \left(\partial_0 \gamma_\varepsilon - \overline{\partial}_0 \gamma_\varepsilon^* \right) - 2\Lambda_\varepsilon \left(\gamma_\varepsilon \wedge \gamma_\varepsilon^* \right).$$

由于 A_0 是 Hermitian-Yang-Mills，我们有

$$\Lambda_\varepsilon(iF_{A_0}) = c\, \mathrm{Id}_E + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

根据规范固定条件 $\overline{\partial}_0 \gamma = \Lambda_0 \partial_0 \gamma^* = 0$，以下非对角项的元素为

$$(\Lambda_\varepsilon \left(\partial_0 \gamma_\varepsilon - \overline{\partial}_0 \gamma_\varepsilon^* \right))_{ip} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m_i + \ldots + m_{p-1}+1}),$$

而其余各项将贡献于更高阶。根据 [16, 命题 4.9 和第 5 节，2], 我们首先进行归纳扰动 A_ε，以消除所有存在于 $\Gamma_{i\mathfrak{k}^\perp}(X, \mathrm{End}_H(E, h)) \oplus \Gamma_0(Z', \mathrm{End}_H(E, h))$ 中的误差。这可以通过

考虑 $\exp(\varepsilon^i(s_X+\varepsilon s_Z)\cdot A_\varepsilon)$ 的扰动得以实现，这归功于命题 4.3，以及引理 3.2 和 4.1。剩下的是存在于 $i\mathfrak{k}$ 中的误差。根据引理 4.4，并由公式

$$\Lambda F_{f\cdot A}=\Lambda F_A+\Delta_A(f)+\Lambda\left((\partial_A f-\overline{\partial}_A f)\wedge(\partial_A f-\overline{\partial}_A f)\right),$$

先前的扰动不会影响任何$\mathcal{F}_j$ 收缩曲率的投影。根据命题 4.2，由此可得一个联络，其收缩曲率对所有 $j\in[\![1,\ell-1]\!]$，

$$\Lambda_{\omega_\varepsilon}(iF_{A_\varepsilon})=\mathcal{C}\,\mu_{L_\varepsilon}(E)\,\mathrm{Id}_{\mathcal{F}_j}+O(\varepsilon^{q_j+\frac{1}{2}}).$$

证明的最后部分通过对 ℓ Gr(E的稳定分量个数进行归纳来完成。如 [16, 第 5.3 节2], 中所述，利用引理 4.5，我们可以消除 $\mathfrak{g}$ 超过 q_j阶的误差；再对 ℓ进行归纳，最终得到所需结果。□

5. The perturbation argument

我们沿用上一节的记号。现在证明定理 1.1及其推论。我们同样紧密遵循 [16]。第一步是求出 Δ_ε的逆算子范数上界。鉴于我们所讨论的几何设置有所不同，这里需要调整 [16] 中的论证。随后，基于这一上界和近似解的构造，我们将在第 5.2 节使用定量版本的隐函数定理。

对于 X' 上的黎曼度量 g，令 $L^2_d(g)$ 表示关于度量 g 的二阶索伯列夫空间 $W^{d,2}(X',g)$，其导数为 d。若 g 是 K¨ahler 且其 K¨ahler 形式为 η，则我们可以用 $L^2_d(\eta)$ 代替 $L^2_d(g)$。当 $d=0$ 时，我们省略下标。对于与 π^*E 或 $\mathrm{End}\,\pi^*E$ 相关的索伯列夫空间，我们在丛上使用度量 h （以及它在 $\mathrm{End}\,\pi^*E$ 上诱导的度量）。

5.1. 线性化估计。本节的主要目标是证明：

命题 5.1. 存在 $C>0$，使得对于所有 $s\in\Gamma(X',\mathrm{End}\,E)$，若其迹相对于 ω_ε 平均值为零，则有：

$$\|\Delta_\varepsilon(s)\|_{L^2_d(\omega_\varepsilon)}\geq C\varepsilon^q\|s\|_{L^2_{d+2}(\omega_\varepsilon)}. \tag{5.1}$$

同样的估计也适用于命题 4.6 中构造的扰动后联络的拉普拉斯算子。

这将分步骤完成。我们首先处理单个稳定分量$\mathcal{G}:=\mathcal{G}_i\subset$Gr($E$)的情形。

引理 5.2. 存在 $C>0$，使得对于所有与 $\mathrm{Id}_\mathcal{G}$ $L^2(\omega_\varepsilon)$-正交的 $s\in\Gamma(X',\mathrm{End}\,\mathcal{G})$,

$$\|\Delta_\varepsilon(s)\|_{L^2_d(\omega_\varepsilon)}\geq C\varepsilon\|s\|_{L^2_{d+2}(\omega_\varepsilon)}. \tag{5.2}$$

引理 5.2 的证明需要比较 L^2-范数在 X'、 X 和Z'上的不同取值。我们将在以下引理中汇总这些比较结果。

引理 5.3. 存在正常数 C 和 C' ，它们与 ε 无关，使得对于任意 $\sigma\in\Gamma(X,\mathrm{End}\,\mathcal{G})$（或 $\sigma\in\Omega^1(X,\mathrm{End}\,\mathcal{G})$），我们有

$$C\|\pi^*\sigma\|_{L^2(X',\omega_\varepsilon)}\leq\|\sigma\|_{L^2(X,\omega)}\leq C'\|\pi^*\sigma\|_{L^2(X',\omega_\varepsilon)}. \tag{5.3}$$

证明。结论由以下事实得出：2-形式 ω_ε 属于一个有界族（$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$），并且拉回的截面在$\pi$ 的纤维上为常数： $Z' \to Z$。□

引理 5.4. 存在正常数 C 和 C'，它们与 ε 无关，使得对于任意 $\sigma \in \Gamma_0(Z', \operatorname{End}\mathcal{G})$（或 $\sigma \in \Omega^1(Z', \operatorname{End}\mathcal{G})$），均有

$$C\|\iota_*\sigma\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)} \leq \|\sigma\|^2_{L^2(Z',\omega_\varepsilon)} \leq C'\|\iota_*\sigma\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)}. \tag{5.4}$$

证明。可以先在局部处理，再通过拼接论证完成。我们可以固定$W \subset X'$ 一个满足 $Z' \subset W$的开集，并且使得 $\iota_*\sigma$ 在远离 W的地方为零。于是，

$$\|\iota_*\sigma\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)} = \int_W \|\iota_*\sigma\|^2_\varepsilon \, \omega_\varepsilon^n.$$

我们还可以将 W 作有限开覆盖，覆盖集为形如 $U \simeq B(0,1) \times V$的集合 U，其中这些集合 $V \subset Z'$ 覆盖 Z'，并且 $\iota_*\sigma$ 在局部可表示为$\rho\cdot\sigma$，其中 ρ 是定义在 $B(0,1)$ 上的鼓包函数。于是，根据 ε 取值于一个紧族这一事实，以及对于任意 $v \in V$，定义在 $B(0,1) \times \{v\}$ 上的度量 $(\omega_\varepsilon(b,v))_{b\in B(0,1)}$ 彼此有界，应用富比尼定理可得如下界：

$$C\int_U \|\iota_*\sigma\|^2_\varepsilon \, \omega_\varepsilon^n \leq \int_V \|\sigma\|^2_\varepsilon \, \omega_\varepsilon^{n-1} \leq C'\int_U \|\iota_*\sigma\|^2_\varepsilon \, \omega_\varepsilon^n.$$

于是，通过一个拼接论证即可得到所需结果。 □

引理 5.5. 存在一个正的常数 C，与 ε 无关，使得对于任意的 $s_X \in \Gamma(X, \operatorname{End}\mathcal{G})$ 和 $s_Z \in \Gamma_0(Z', \operatorname{End}\mathcal{G})$，我们有

$$|\langle s_X, s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)}| \leq C\varepsilon^3 ||s_X||_{L^2(\omega_\varepsilon)} \, ||s_Z||_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

证明。我们沿用引理 5.4 证明中的记号。注意，由于 W 在 W之外为零，因此我们可以将讨论限制在开集 s_Z 上。于是，局部地，我们估计

$$\int_U \operatorname{trace}(s_X \cdot s_Z)\, \omega_\varepsilon^n.$$

取坐标 $(b, f, v) \in B(0,1) \times F \times V_Z$，使得 $U \simeq B(0,1) \times F \times V_Z$，其中这次 F 表示 π 的纤维： $Z' \to Z$， $V_Z \subset Z$ 是 Z 中的一个开集，而 $B(0,1)$ 表示正规坐标。我们可以假设 s_X 与 $f \in F$ 无关：

$$s_X = s_X(b, v)$$

并且 s_Z 具有如下形式

$$s_Z = \rho(b) s_Z(f, w)$$

其中 ρ 是用于构造延拓算子的某个截断函数。然后，利用 Fubini 定理计算：

$$\begin{aligned}\int_U \operatorname{trace}(s_X \cdot s_Z)\, \omega_\varepsilon^n &= \int_{B\times F\times V_Z} \rho(b) \operatorname{trace}(s_X(b,w)\cdot s_Z(f,w))\, \omega_\varepsilon^n \\ &= \int_{B\times V_Z} \rho(b) \int_F \operatorname{trace}(s_X(b,w)\cdot s_Z(f,w))\, \omega_\varepsilon^n.\end{aligned}$$

但在 ε 的更高阶项中，

$$\int_F \operatorname{trace}(s_X(b,w)\cdot s_Z(f,w))\, \omega_\varepsilon^n =$$

$$\varepsilon^{n-m-1}\omega^{m+1} \int_F \operatorname{trace}(s_X(b,w)\cdot s_Z(f,w))\, \lambda^{n-m-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n-m})$$

并且由于 s_Z 关于 λ^{n-m-1} 的平均值为零，我们得到

$$\int_F \operatorname{trace}(s_X(b,w)\cdot s_Z(f,w))\omega_\varepsilon^n = \mathcal{O}(\varepsilon^{n-m}),$$

其为 $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$，其中 $\operatorname{codim}(Z) = n-m \geq 3$。由柯西-施瓦茨不等式可得结果，其中常数 C 取决于 ω、λ 和 ε_0。□

引理 5.2 的证明。证明中使用的正常数 C、C'、C_i 在不同步骤中可能会变化。我们沿用 [16, 第 4 节2]中的策略。得到此估计的关键在于引理 [16, 4.12]，的类比，其余论证则与 [16, 第 4 节2]中的相同。因此，我们的目标是得到以下 Poincar´e 型不等式：存在 $C>0$，使得对于任意 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，以及所有与 $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$ $L^2(\omega_\varepsilon)$-正交的 $s\in\Gamma(X', \operatorname{End}\mathcal{G})$，均有：

$$\|d_{A_\varepsilon}(s)\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)} \geq C\varepsilon\|s\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

由于 $A_\varepsilon = A_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$，实际上只需为 A_0 得到这个 Poincar´e 不等式：

$$\|d_{A_0}(s)\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)} \geq C\varepsilon\|s\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

接下来我们分三步证明这一点。首先考虑 $s\in\Gamma(X, \operatorname{End}\mathcal{G})$ 的截面，然后考虑 $s\in\Gamma_0(Z', \operatorname{End}\mathcal{G})$ 的截面，最后考虑这类截面的和。

步骤 1：对于 $\sigma\in\Gamma(X, \operatorname{End}\ \mathcal{G})$ 和 $s=\pi^*\sigma\in\Gamma(X', \operatorname{End}\mathcal{G})$，令

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\operatorname{rank}\mathcal{G}}\frac{1}{\operatorname{vol}(X,\omega)}\int_X \operatorname{trace}(\sigma)\,\omega^n,\\ \alpha' &= \frac{1}{\operatorname{rank}\mathcal{G}}\frac{1}{\operatorname{vol}(X',\omega_\varepsilon)}\int_{X'} \operatorname{trace}(s)\,\omega_\varepsilon^n.\end{aligned}$$

那么，s 与 X' 上的 Id 正交，当且仅当 $\alpha'=0$。此外，

$$\alpha'-\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)\int_X \operatorname{trace}(\sigma)\,\omega^n.$$

那么，注意到 $d_{A_0}\sigma = d_{A_0}(\sigma-\alpha\,\mathrm{Id})$，因为 Id 是平行的，我们有

$$\begin{aligned}\|d_{A_0}(\pi^*\sigma)\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)} &\geq C_1\|\pi^*d_{A_0}\sigma\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)},\\ &\geq C_2\|d_{A_0}\sigma\|^2_{L^2(X,\omega)},\\ &\geq C_3\|\sigma-\alpha\,\mathrm{Id}\,\|^2_{L^2(X,\omega)},\\ &\geq C_4\|\sigma\|^2_{L^2(X,\omega)},\\ &\geq C_5\|s\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)},\end{aligned}$$

其中，第二个和第五个不等式由引理 5.3 得出，第三个不等式由 (X,ω) 上针对 A_0 的 Poincar´e 不等式得出，而第四个不等式成立是因为 α 是 $\mathcal{O}(\varepsilon\|\sigma\|_{L^2(\omega)})$。

步骤 2：接下来我们考虑 $s=\iota_*\sigma\in\Gamma_0(Z', \operatorname{End}\mathcal{G})$。这次我们令 α'' 为由 $L^2(Z',\omega_\varepsilon)$-正交投影将 σ 投影到 Id_E 上所得到的常数：

$$\alpha'' = \frac{1}{\operatorname{rank}\mathcal{G}\operatorname{vol}(Z',\omega_\varepsilon)}\int_{Z'} \operatorname{trace}(\sigma)\,\omega_\varepsilon^{n-1}.$$

一般而言，对于给定的 $\sigma\in\Gamma(Z', \operatorname{End}\mathcal{G})$，相对于 ε，$\alpha''=\mathcal{O}(1)$。然而，根据子空间 $\Gamma_0(Z', \operatorname{End}\ \mathcal{G})$ 的定义，$\subset\Gamma(Z', \operatorname{End}\ \mathcal{G})$，因为 $\sigma\in\Gamma_0(Z', \operatorname{End}\mathcal{G})$ 在 π 的所有纤维上都与恒等算子正交：$Z'\to Z$，类似的论证

引理 5.5，使用相同的坐标系 $(b, f, v) \in B(0,1) \times F \times V_Z$，可得 $\alpha'' = \mathcal{O}(\varepsilon \|\sigma\|_{L^2(Z',\omega_\varepsilon)})$。于是我们可以找到正正常数 C_i，使得

$$\begin{aligned} \|d_{A_0}(\iota_*\sigma)\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)} &\geq C_1 \|\iota_*(d_{A_0}\sigma)\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)} \\ &\geq C_2 \|d_{A_0}\sigma\|^2_{L^2(Z',\omega_\varepsilon)} \\ &\geq \varepsilon\, C_3 \|\sigma - \alpha''\mathrm{Id}\|^2_{L^2(Z',\omega_\varepsilon)} \\ &\geq \varepsilon\, C_4 \|\sigma\|^2_{L^2(Z',\omega_\varepsilon)}, \\ &\geq \varepsilon\, C_5 \|\iota_*\sigma\|^2_{L^2(X',\omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

此时，第一个不等式由算子的构造得出 ι_*，第二个和最后一个不等式来自引理 5.4，第三个不等式则由相应的 [16, 引理 4.12], 得出，第四个不等式则基于如下事实：$\alpha'' = \mathcal{O}(\varepsilon \|\sigma\|_{L^2(Z',\ \omega_\varepsilon)})$。

步骤 3：现在我们需要为截面 $s = s_X + s_Z$ 得到类似的估计。不过请注意，(3.2) 的分裂并非关于 $L^2(\omega_\varepsilon)$ 内积正交。剩下的任务是估计

$$\langle d_{A_0} s_X, d_{A_0} s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} = \langle \Delta_{A_0,\varepsilon}(s_X), s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} = \langle s_X, \Delta_{A_0,\varepsilon}(s_Z)\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)},$$

对于 $\Delta_{A_0,\ \varepsilon}$ 关于 A_0 的拉普拉斯算子 ω_ε。我们使用第 Δ_ε 3.2 节中的展开式。根据引理 3.5、引理 3.6 和公式 (3.3)：

$$\langle \Delta_{A_0,\varepsilon}(s_X), s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} = \langle \Delta_X s_X, s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \langle \mathcal{L}(s_X), s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

于是，根据引理 5.5，

$$|\langle \Delta_X s_X, s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)}| \leq C_1\, \varepsilon^3 ||\Delta_X s_X||_{L^2(\omega_\varepsilon)} ||s_Z||_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

令 $s_X = \pi^*\sigma$，并应用引理 5.3，结合 Δ_X 的格林算子的连续性，可得

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_X s_X, s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)}| &\leq C_2\, \varepsilon^3 ||\Delta_X \sigma||_{L^2(\omega)} ||s_Z||_{L^2(\omega_\varepsilon)}, \\ &\leq C_3\, \varepsilon^3 ||\sigma||_{L^2(\omega)} ||s_Z||_{L^2(\omega_\varepsilon)}, \\ &\leq C_4\, \varepsilon^3 ||s_X||_{L^2(\omega_\varepsilon)} ||s_Z||_{L^2(\omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

这里我们再次处理了 $L^2(X,\ \omega)$-投影到 $\mathrm{Id}_\mathcal{G}$ 上，如步骤 1 中所做的那样。对于项 $\langle \mathcal{L}(s_X)\ s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)}$，我们使用局部坐标 $(b,\ f,\ v) \in B \times F \times V_Z$，如引理 5.5 的证明中那样。于是，$\mathcal{L}$ 的表达式可在局部写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_X) &= \iota_* \circ p_0 \circ \iota^* \left((m+1) \frac{D s_X \wedge \omega^m \wedge \lambda^{n-m-1}}{\omega^{m+1} \wedge \lambda^{n-m-1}} \right) \\ &= (m+1) \frac{D_b s_X \wedge \omega^m \wedge \lambda^{n-m-1}}{\omega^{m+1} \wedge \lambda^{n-m-1}} \end{aligned}$$

其中，D_b 表示沿 $B(0,1)$ 方向的导数。接下来我们计算项 $\langle \mathcal{L}(s_X)\, s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)}$ 在 U 上的局部贡献：

$$\int_U \mathrm{trace}(\mathcal{L}(s_X) \cdot s_Z)\, \omega_\varepsilon^n = \int_{B\times F\times V_Z} \rho(b)\, \mathrm{trace}(\mathcal{L}(s_X(b,w)) \cdot s_Z(f,w))\, \omega_\varepsilon^n,$$

并利用富比尼定理、斯托克斯定理和分部积分，ε 中的相关高阶项为

$$\int_U D_b(\rho(b))\, \mathrm{trace}(s_X \cdot s_Z) \omega_\varepsilon^n,$$

其为 $\mathcal{O}(\varepsilon^3\,||s_X||_{L^2(\omega_\varepsilon)}\,||s_Z||_{L^2(\omega_\varepsilon)})$，证明方法与引理 5.5类似。汇总这些估计可知，混合项满足

$$\langle d_{A_0}s_X, d_{A_0}s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} = \langle \Delta_{A_0,\varepsilon}(s_X), s_Z\rangle_{L^2(\omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^3\,||s_X||_{L^2(\omega_\varepsilon)}\,||s_Z||_{L^2(\omega_\varepsilon)}),$$

并结合步骤 1 和 2，再次使用引理 5.5 ，即可得到

$$\|d_{A_0}(s_X+s_Z)\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)} \geq C\varepsilon\|s_X+s_Z\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

然后，由这个 Poincar´e 不等式´，如 [16, 第 4 节2],所示，使用与 [16, 命题 413] 中类似的统一 Schauder 估计即可得出结果。后一个估计可通过拼接局部 Schauder 估计得到（如 [16,引理 414] 中所示）；这些局部估计在例外除子之外很容易导出，而在例外除子上的点附近，则可通过调整 [16, 引理 4 的证明14]，并使用与引理 5.5 中类似的局部坐标得到。□

确定了这个界之后，我们就可以处理一般情形。

命题 *5.1* 的证明。 估计式（5.1）的证明可完全仿照 [16, 命题 527], ，依据 [16, 引理 5.28、引理 529]。首先，为了得到关于 $\mathfrak{g}^\perp$ 中元素的估计，需要使用线性化的完整展开式:

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon &= \Delta_{\mathrm{Gr}(E),\varepsilon}\\ &+ i\Lambda_\varepsilon\left(\overline{\partial}_0([\gamma_\varepsilon^*,\cdot]) - [\gamma_\varepsilon^*,\overline{\partial}_0\cdot]\right)\\ &+ i\Lambda_\varepsilon\left(\partial_0([\gamma_\varepsilon,\cdot]) - [\gamma_\varepsilon,\partial_0\cdot]\right)\\ &+ i\Lambda_\varepsilon([\gamma_\varepsilon,[\gamma_\varepsilon^*,\cdot]] - [\gamma_\varepsilon^*,[\gamma_\varepsilon,\cdot]]).\end{aligned} \tag{5.5}$$

由于 γ_ε 是一个拉回项，仿照第 3.2节的论证，我们看到，算子 X 和Z' 在分裂（ $\Lambda_\varepsilon\left(\partial_0([\gamma_\varepsilon,\cdot])\right.$ 中的贡献3.2）与 γ_ε同阶。正如之前所论证的，根据 g_u的选取、m 以及方程（ γ_ε 4.4）中 的定义，我们得到

$$(\gamma_\varepsilon)_{ip} = \mathcal{O}(\varepsilon^{m_i}).$$

现在， $m_i = \frac{q_i}{2} \geq \sout{\text{余维数}(Z)}\ 2$ 由公式（1.2）可知。对（5.5）中的其他项作类似论证可知，来自 $\Delta_\varepsilon - \Delta_{\mathrm{Gr}(E),\,\varepsilon}$ 的贡献阶数都至少为 $\varepsilon^{\frac{\mathrm{codim}(Z)}{2}}$ ，并将由引理 5.2中的估计吸收，因为我们假设余维数$(Z) \geq 3$。仿照引理 [16, 5.28], 的论证，我们得到如下界:

$$\|\Delta_\varepsilon(s)\|_{L^2_d(\omega_\varepsilon)} \geq C\varepsilon\|s\|_{L^2_{d+2}(\omega_\varepsilon)},$$

对于 $s \in \mathfrak{g}^\perp$。由此， $\mathfrak{g}$ 中截面的估计证明，或截面和的估计证明，均可仿照 [16, 引理 5.29 的证明以及命题 5.27] 的证明进行。最后，扰动后的联络的结果可仿照 [16, 命题 5.30] 得出。□

5.2. 扰动至解。 为完成定理1.1的证明，我们参见[16, 第 4.2 节和第 5.4 节。2]。这依赖于隐函数定理的一个定量版本，并将其应用于算子

$$\begin{aligned}\Psi_{p,\varepsilon}:\quad L^2_{d+2}(X',\omega_\varepsilon)\times\mathbb{R} &\to L^2_d(X',\omega_\varepsilon)\\ (s,\alpha) &\mapsto i\Lambda_{\omega_\varepsilon}(F_{\exp(s)\cdot f_\varepsilon^p\cdot A_\varepsilon}) - \alpha\,\mathrm{Id}_E,\end{aligned}$$

其中 $f_\varepsilon^p\cdot A_\varepsilon$ 是命题4.6 中构造的联络。命题4.6 是 [16, 命题4.9和第 5.3 节的对应命题。2] 该节中构造了Ψ_p 的$\varepsilon = 0$ 近似解，而命题5.1 则对应于 [16, 命题5.27和5.30] ，并给出了所需的 Ψ_p 的ε线性化估计，其中 p

在近似解处足够大。然后，利用 [16, 定理 4.10], 中陈述的隐函数定理，可以得出 Ψ_p 的$_\varepsilon$ 零点存在，其中 p 足够大，且 ε 足够小，从而完成定理1.1的证明。

5.3. 推论的证明。 现在我们来讨论引言中陈述的各个推论。首先，推论1.3 是定理 1.1 的直接应用，其中 $E = \mathrm{Gr}(E)$ 是一个单独的稳定分量。推论 1.4 也可直接由公式（1.2）推出。剩下要证明的是推论1.5。唯一尚待研究的情形是，对于所有 $i \in [\![1, \ell - 1]\!]$, $\mu_{L_\varepsilon}(\mathcal{F}_i) \leq \mu_{L_\varepsilon}(E)$，至少有一个$_{\varepsilon\to 0}$等号成立。此情形的处理方法与 [16, 推论 52], 的证明完全相同，见[16,第 5 节5]。

References

[1] Claudio Arezzo 和 Frank Pacard。《爆破与常标量曲率 K
¨ 196 2 179 228, 2006 1 ähler 流形的消奇异化》。《 *Acta Math.*》， （）：–。
[2] Claudio Arezzo 和 Frank Pacard。《常标量曲率 Kähler 流形的爆破》。II。《 *Ann. of Math. (2)*》，
¨ 170 2 685 738, 2009 1, 4 （）：–。Claudio Arezzo、Frank Pacard 和 Michael Singer。
[3] 《爆破上的极值度量》。《 *Duke Math.* 》，
J. 157 1 1
（）：– 51, 2011 1, 4。Nicholas P. Buchdahl。《爆破与规范场》。《 *Pacific J. Math.*》，
[4] 196 1 69 111, 2000 1, 3 （）：–。Rudhaı
[5] ´ Dervan 和 Lars Martin Sektnan。《爆破上的极值 Kähler 度量》。ArXiv 预印本 arXiv:2110.13579，2021。1，4[6] Rudha
¨ ´ *J.* ı Dervan 和 Lars Martin
Geom. Anal. 31 1 516 542, 2021 1, 3, 4
Sektnan。《爆破上的厄米特–杨–米尔斯联络》。， （）：–。[7] S. K.
Donaldson。《无穷行列式、稳定丛与曲率》。《 *Duke Math. J.*》，54 1 231 247，1987（）：–。
1, 6
[8] Daniel Huybrechts 和 Manfred Lehn。《 *The geometry of moduli spaces of sheaves*》。剑桥
数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，
2010 4, 5, 6 。Shoshichi Kobayashi。
[9] 《向量丛的曲率与稳定性》。《
Proc. Japan Acad. Ser. A 》， （）：–
Math. Sci. 58 4 158
162, 1982 1, 6 。Shoshichi Kobayashi。《 *Differential geometry of complex vector bundles*》。
[10] 普林斯顿经典文库。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州， [2014]。1987年版重印 [MR 0909698] 4 。
[11] Kunihiko Kodaira 和 D. C. Spencer。《复解析结构的变形。III：复结构的稳定性定理》。《 *Ann. Math. (2)*》，
71 43 76, 1960 8 ：–。Martin Lubke。《
[12] ¨ Einstein-Hermitian 向量丛的稳定性》。《 *Manuscripta Math.*》，42(2- 3 245 257, 1983 1, 6 ）：–。V. B. Mehta 和
[13] A. Ramanathan。《稳定层的限制与基本群表示》。《 *Invent. Math.*》，
77 1 163 172, 1984 3 （）：–。David Mumford。《射影结构的射影不变量及其
[14] 应用》。载于《 *Proc.* 》，页码–。
Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962) 526 530
Inst. Mittag-Leffler，Djursholm，1963。1，5[15] Achim Napame 和 Carl Tipler。《环面层、稳定性与纤维化》。ArXiv 预印本 arXiv:2210.04587，2022。2，3[16] Lars Martin Sektnan 和 Carl Tipler。《拉回丛上的厄米特–杨–米尔斯联络》。即将发表于 Calculus of Variations and PDEs，arXiv:2006.06453，2020。2，4，7，8，10，11，12，14，15，17，18，19，20[17] Reza Seyyedali 和 G ´ ´ *J.*
Differential Geom. 114 1 171 192, 2020 1, 4
abor Szekelyhidi。《沿子流形爆破上的极值度量》。， （）：–。[18] ´ ´ ¨
Gabor Szekelyhidi。《极值 Kähler 流形的爆破 II》。《 *Invent. Math.*》，200 977，2015 3 925 1，4（）：–。[19] Fu
mio Takemoto。《代数曲面上的稳定向量丛》。《 *Nagoya Math. J.*》，47 48，1972 29：–。1，5

[20] K. Uhlenbeck 和 S.-T. Yau。关于稳定向量丛中厄米特-杨-米尔斯联络的存在性。第39卷，S257–S293页。1986年。数学科学前沿： 1985 1985 1, 6 （纽约，）。Claire Voisin。
[21] *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*，第 76 *Cambridge* 卷，*Studies in Advanced Mathematics* 出自。剑桥大学出版社，剑桥，英文版，2007年。由 Leila Schneps 从法文译出。，
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Av. Athos da Silveira Ramos 149 Rio de Janeiro RJ 21941-909 Brazil , ,, ,, ,
Email address: andrew@im.ufrj.brCarl Tipler, Univ Brest, UMR CNRS 6205, Laboratoire de Mathématiques de Bre-tagne Atlantique, France*Email address*: Carl.Tipler@univ-brest.fr