arXiv:2301.00536v2 [math.PR] 6 Feb 2023

..L_p-可解性与由乘性时空白噪声驱动的随机时间分数阶 Burgers 方程的 Hölder 正则性

BEOM-SEOK HAN

ABSTRACT. 我们证明了由乘性时空白噪声驱动的随机时间分数阶 Burgers 方程的 L_p-可解性:

$$\partial_t^\alpha u = a^{ij}u_{x^ix^j} + b^i u_{x^i} + cu + \bar{b}^i u u_{x^i} + \partial_t^\beta \int_0^t \sigma(u)dW_t,\ t>0;\ u(0,\cdot)=u_0,$$

其中 $\alpha \in (0,1)$, $\beta < 3\alpha/4 + 1/2$, 且 $d < 4 - 2(2\beta-1)_+/\alpha$。算子 ∂_t^α和∂_t^β 分别为阶数为 α 和 β的 Caputo 分数阶导数。过程 W_t是一个取值于 $L_2(\mathbb{R}^d)$的柱状维纳过程，系数 a^{ij}、b^i、c和 $\sigma(u)$均为随机的。

除了证明解的存在性与唯一性外，我们还给出了该解的 H¨older 正则性。例如，对于任意常数 $T<\infty$、充分小的 $\varepsilon>0$以及几乎必然成立的 $\omega\in\Omega$，我们有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|u(\omega,\cdot,x)|_{C^{\left[\frac{\alpha}{2}\left(\left(2-(2\beta-1)_+/\alpha-d/2\right)\wedge 1\right)+\frac{(2\beta-1)_-}{2}\right]\wedge 1-\varepsilon}([0,T])} < \infty$$

and

$$\sup_{t\le T}|u(\omega,t,\cdot)|_{C^{\left(2-(2\beta-1)_+/\alpha-d/2\right)\wedge 1-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)} < \infty.$$

解在时间上的 H¨older 正则性会在 $\beta=1/2$ 处改变。此外，若 $\beta\ge 1/2$，则解在时间上的 H¨older 正则性是其空间正则性的 $\alpha/2$ 倍。

1. INTRODUCTION

本文研究由时空白噪声驱动的随机时间分数阶 Burgers 方程（STFBEs）解的存在性、唯一性、 L_p-正则性以及最大 H¨older 正则性。我们考虑

$$\partial_t^\alpha u = Lu + \bar{b}^i u u_{x^i} + \partial_t^\beta \int_0^t \sigma(u)dW_t, \quad (\omega,t,x)\in\Omega\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^d; \quad u(0,\cdot)=u_0, \quad (1.1)$$

其中 $\alpha\in(0,1)$、$\beta < \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}$ 和 $d < 4 - 2\frac{(2\beta-1)_+}{\alpha}$。算子 ∂_t^α和 ∂_t^β是阶数分别为 α 和 β的Caputo分数阶导数，而算子 L是如下定义的二阶随机微分算子:

$$(Lu)(\omega,t,x) = a^{ij}(\omega,t,x)u_{x^ix^j} + b^i(\omega,t,x)u_{x^i} + c(\omega,t,x)u.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35R11, 26A33, 60H15, 35R60.*Key words and phrases.* 随机偏微分方程、时间分数阶导数、随机 Burgers 方程、时间分数阶 Burgers 方程、时空白噪声、H¨older 正则性。本文得到韩国国家研究基金会（NRF）由韩国政府（MSIT）资助的项目（编号: NRF-2021R1C1C2007792）以及由教育部（MOE，韩国）和韩国国家研究基金会（NRF）资助的 BK21 卓越研究型大学培育计划（FOUR）的支持。

随机系数 a^{ij}、 b^i 和 c 是可预测、可微（或连续）且有界的函数。扩散系数 $\sigma(u) = \sigma(\omega, t, x, u)$ 是一个可预测且可测的函数，满足增长条件，并且关于 u满足利普希茨连续性。关于 a^{ij}、 b^i、 c 和 σ 的详细条件见假设 3.1 和 3.3。随机测度 dW_t 由一个取值于 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 的柱状维纳过程 W_t诱导。

当 $\alpha = \beta = 1$ 出现在方程 (1.1) 中时，该方程被称为如下形式的随机 Burgers 方程（SBE）：

$$\partial_t u = Lu + \bar{b} u u_x + \sigma(u)\dot{W}, \quad (\omega, t, x) \in \Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R}; \quad u(0, \cdot) = u_0, \tag{1.2}$$

其中， W 是时空白噪声。关于方程 (1.2) 已开展了大量研究，但我们仅向读者推荐参考文献 [13, 14, 29]。在 [13], 中，作者证明了单位区间 (0, 1) 上包括 (1.2) 类型方程在内的半线性方程的解的唯一性、存在性和连续性。此外，当在 $\sigma(u)$ 上施加 L_2 有界条件时， $\mathbb{R}$ 上的解也具有相同的性质，这一点在 [14] 中得到了证明。在 [29], 中，作者研究了具有 $L = \Delta$ 和 $b = -1$ 的方程 (1.2) 的随机场解的 Hölder 正则性和矩估计。

相比之下，带有 Caputo 分数阶导数的（确定性）偏微分方程已被应用于许多领域，例如电化学过程 [5, 19], 、介电极化 [33], 、黏弹性材料 [32], 、生物学 [31], 和物理学 [11, 18]。特别地，具有 $\alpha \in$ (0,1) 和 $\sigma(u) = 0$ 的方程 (1.1) 被称为时间分数阶 Burgers 方程（TFBE），它描述了波在黏性介质中的传播（[1, 2]）。事实上，已有多项关于 TFBE 数值分析的研究（见[3, 9, 10, 20, 30]）。从数学角度来看，探究是否能够证明 STFBE (1.1) 的解的唯一性和存在性，并进一步获得该解的 Hölder 正则性，是合理的。据我们所知， [36] 是唯一回答这一问题的研究。 [36] 的作者证明了有界区域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ 上时间和空间均带有分数阶导数的随机双曲方程的温和解的存在性、唯一性和正则性。

本文证明了整个空间定义域 $\mathbb{R}^d$ 上，带有随机二阶微分算子 L 的方程 (1.1) 的强解的唯一性、存在性和正则性。此外，我们还得到了该解在时间和空间上的 Hölder 正则性。具体而言，若 $u(\omega, t, x)$ 表示方程 (1.1) 的解，则对任意有界停时 $\tau \le T$ 和充分小的常数 $\varepsilon > 0$，几乎处处有：

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u(\omega, \cdot, x)|_{C^{\left[\frac{\alpha}{2}((2-(2\beta-1)_+/\alpha - d/2)\wedge 1) + \frac{(2\beta-1)_-}{2}\right]\wedge 1-\varepsilon}([0,\tau])} &< \infty, \\ \sup_{t \le \tau} |u(\omega, t, \cdot)|_{C^{(2-(2\beta-1)_+/\alpha - d/2)\wedge 1-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)} &< \infty. \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中， $a_+ = (|a| + a)/2$、 $a_- = (|a| - a)/2$和 $C^\gamma(\mathcal{D})$是 Hölder 空间。注意到，解关于时间的 Hölder 正则性行为会从 $\beta = 1/2$发生变化。例如，当 $\beta \ge 1/2$时，解关于时间的 Hölder 正则性是空间正则性的 $\alpha/2$ 倍。此外，当令 α、 $\beta \uparrow 1$时，我们可以恢复随机双曲方程的 Hölder 正则性结果。这些结果与时空白噪声驱动的随机热方程的众所周知结果一致（例如， [26, 注 8.7] 或 [16,推论 3.1]）。相比之下，当 $\beta < 1/2$时，时间方向的 Hölder 正则性会获得额外的正则性，最多可增加 $1/2 - \beta$。（注3.11）

下面给出一些关于证明的注释。主定理（定理 3.5）的证明策略基于 [16]。然而，由于无法确定伊藤公式和最大值原理是否适用于随机时间分数阶 Burgers 方程（1.1），因此存在一些差异。

因此，证明按以下步骤进行。如 [16], 中一样，我们着重证明每个（较大的） $p>2$中 L_p 解的唯一性和存在性，而主要难点在于证明解的存在性。因此，我们考虑方程 (1.1) 的截断形式，以获得局部解。随后，我们通过拼接局部解构造一个全局解候选 u （引理 4.3 和注 4.4）。为了证明该候选 u 是全局解，需要对 u 建立一致的 L_p 界；因此，我们将局部解分为两部分：噪声主导部分和非线性主导部分。为了估计噪声主导部分，我们利用扩散系数 $\sigma(u)$的 L_p 界（引理 4.5）。相比之下，为了控制非线性主导部分（引理 4.8），我们采用一个类似于链式法则的不等式（引理 4.6），以及一种包含 Caputo 分数阶导数的 Gr¨onwall 不等式（定理 4.7 ）。

为了获得方程 (1.1) 的解的最大 H¨older 正则性，我们需要两个要素：解空间 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 的 H¨older 嵌入定理（定理 2.16），以及解在 p 中的唯一性（定理 3.9）。事实上，当解的 L_p 存在性与唯一性得到保证时，利用解空间的 H¨older 嵌入定理（定理 2.16 和定理 3.5 ），即可得到解在每个（较大的） $p>2$ 中的 H¨older 正则性。选取较大的 p，解的 H¨older 正则性就会更高；因此，我们必须尽可能选取较大的 p 。所以，由于 p 会变化，我们需要解在 p 中的唯一性。

本文安排如下。第 2 节介绍时空白噪声、分数阶微积分和随机巴拿赫空间的定义及性质。此外，我们给出解空间 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 的 H¨older 嵌入定理。第 3 节陈述本文的主要结果，并提出一些评述。主要结果的证明见第 4 节。接着，第 5 节证明解空间 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 的 H¨older 嵌入定理。

我们以介绍本文所使用的符号结束本节。集合$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示自然数集和实数集。集合 $\mathbb{R}^d$ 表示由点 $x=(x^1,\dots,x^d)$组成的 d维欧几里得空间，其中 $x^i\in\mathbb{R}$。本文始终对 i、j、 $k\in\mathbb{N}$采用爱因斯坦求和约定。我们用：$=$表示定义。对于实值函数 f，我们作如下设置：

$$f_+:=\frac{|f|+f}{2}\quad\text{and}\quad f_-:=\frac{|f|-f}{2}.$$

对于赋范空间 F、测度空间$(X,\mathcal{M},\mu)$以及 $p\in[1,\infty)$，空间 $L_p(X,\mathcal{M},\mu;F)$是由 F值的 $\mathcal{M}^\mu$-F可测函数组成的集合，满足

$$\|u\|_{L_p(X,\mathcal{M},\mu;F)}:=\left(\int_X\|u(x)\|_F^p\mu(dx)\right)^{1/p}<\infty.$$

$\mathcal{M}^\mu$ 是关于测度 μ的 $\mathcal{M}$ 完备化。对于 $\gamma\in(0,1]$ 和$k=0$，1，2，.....，集合 $C^{k+\gamma}(\mathbb{R}^d)$ 是由 $\mathbb{R}$值连续函数 $u=u(x)$ 构成的集合，且满足

$$|u|_{C^{\gamma+k}(\mathbb{R}^d)}:=\sup_{x\in\mathbb{R}^d,|\boldsymbol{\beta}|=k}\left|D^{\boldsymbol{\beta}}u(x)\right|+\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^d,x\neq y\\|\boldsymbol{\beta}|=k}}\frac{\left|D^{\boldsymbol{\beta}}u(x)-D^{\boldsymbol{\beta}}u(y)\right|}{|x-y|^\gamma}<\infty,$$

其中 $\boldsymbol{\beta}$是一个多重指标。类似地，对于 $\gamma \in (0,1]$和 $0 < T < \infty$，集合 $C^\gamma([0,T];\ F)$是由 F值连续函数 u 构成的集合，且满足

$$|u|_{C^\gamma([0,T];F)} := \sup_{t\in[0,T]} |u(t)|_F + \sup_{\substack{t,s\in[0,T],\\ s\neq t}} \frac{|u(t)-u(s)|_F}{|t-s|^\gamma} < \infty.$$

对于 $a,b\in\mathbb{R}$，我们定义 $a\wedge b := \min\{a,b\}$ 和 $a\vee b := \max\{a,b\}$。令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上施瓦茨函数的集合。若 N 仅依赖于 $a_1, a_2, ..., a_k$，则 $N = N(a_1, a_2, ..., a_k)$ 表示一个通用常数。常数 N 可逐行变化。对于依赖于 ω, t 和 x 的函数，省略参数 $\omega\in\Omega$。最后，对于 $x\in\mathbb{R}^d$, $\bar{x}^i := (x^1,\dots,x^{i-1},x^{i+1},\dots,x^d)$。

2. Preliminaries

本节介绍时空白噪声、分数阶微积分和随机巴拿赫空间的定义及性质。全文中，$(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 是一个配备过滤 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 的完备概率空间。令 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 表示满足通常条件的过滤。令 $\mathcal{P}$ 表示与 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 相关的可预测 σ-域。

首先，我们介绍时空白噪声 W，以便理解方程 (1.1) 中的随机部分。

定义 2.1（时空白噪声）。若广义随机场 W 是一个中心高斯随机场，且其协方差由下式给出，则称其为时空白噪声：

$$\mathbb{E}\,\dot{W}(h)\,\dot{W}(g) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} h(t,x)g(t,x)dxdt, \quad \forall h,g\in L_2((0,\infty)\times\mathbb{R}^d).$$

注 2.2。我们采用一系列 Itô 随机积分来解释方程 (1.1) 中的随机部分。更确切地说，设 $\{\eta^k:\ k\in\mathbb{N}\}$ 是 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 上的一组标准正交基。若定义

$$w_t^k := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \eta^k(x)\dot{W}(ds,dx)$$

利用沃尔什积分（见 [35]），则 $\{w_t^k : k\in\mathbb{N}\}$ 是一组相互独立的一维维纳过程。接着，若令（见 [26,第 8.3], 节和 [23,第 7] 节）

$$W_t := \sum_{k=1}^\infty \eta^k w_t^k,$$

则 W_t 是一个取值于 $L_2(\mathbb{R}^d)$ 的柱状维纳过程，并且 $dW_t = \sum_k \eta^k dw_t^k$。因此，方程 (1.1) 可改写为

$$\partial_t^\alpha u = Lu + \bar{b}^i u u_{x^i} + \partial_t^\beta \int_0^t \sigma(u)\eta^k dw_t^k, \quad (\omega,t,x)\in\Omega\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^d; \quad u(0,\cdot) = u_0.$$

接下来，我们回顾分数阶微积分的一些事实。更多信息请参阅 [6, 17, 21, 32]。

定义 2.3. 设 $\alpha > 0$，对于 $\varphi\in L_1((0,T))$，阶数为 α 的黎曼-刘维尔分数阶积分定义如下：

$$I_t^\alpha\varphi(t) := (I_t^\alpha\varphi)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds \quad \textit{for all} \quad t\in(0,T),$$

其中 $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$。

备注 2.4. 对于任意 $q \in [1,\infty]$，根据詹森不等式

$$\|I^{\alpha}\varphi\|_{L_q((0,T))} \le N(\alpha,p,T)\|\varphi\|_{L_q((0,T))}. \tag{2.1}$$

因此，对于几乎所有的 $t \le T$，$I_t^{\alpha}\varphi(t)$ 都是良定义且有限的。此外，由富比尼定理可知，对于 α、$\beta \ge 0$，有

$$I^{\alpha+\beta}\varphi(t) = I^{\alpha}I^{\beta}\varphi(t).$$

定义 2.5. 对于 $\alpha > 0$，令 $n \in \mathbb{N}$ 为一个非负整数，使得 $n-1 \le \alpha < n$。假设 $\varphi(t)$ 是定义在 $[0,T]$ 上的实值函数，且 φ 可微 $(n-1)$ 次，并且 $(\frac{d}{dt})^{n-1}\varphi$ 在 $[0,T]$ 上绝对连续。

(i) 黎曼-刘维尔分数阶导数 $D_t^{\alpha}\varphi$ 定义为

$$D_t^{\alpha}\varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\varphi(s)ds.$$

(ii) Caputo分数阶导数 $\partial_t^{\alpha}\varphi$ 定义为

$$\begin{aligned}\partial_t^{\alpha}\varphi &:= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\varphi^{(n)}(s)ds \\ &:= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\left[\varphi^{(n-1)}(s)-\varphi^{(n-1)}(0)\right]ds.\end{aligned}$$

注 2.6. (i) 对于任意 α、$\beta \ge 0$、$D_t^{\alpha}D_t^{\beta}\varphi = D_t^{\alpha+\beta}\varphi$ 以及

$$D_t^{\alpha}I_t^{\beta}\varphi = D_t^{\alpha-\beta}\varphi 1_{\alpha>\beta} + I_t^{\beta-\alpha}\varphi 1_{\alpha\le\beta}.$$

此外，若 $\alpha \in (0,1)$，$I_t^{1-\alpha}\varphi$ 绝对连续，且 $I_t^{1-\alpha}\varphi(0) = 0$，则有以下等式：

$$I_t^{\alpha}D_t^{\alpha}\varphi(t) = \varphi(t).$$

(ii) 根据分数阶导数的定义，若 $\varphi(0) = \varphi^{(1)}(0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$，则 $D_t^{\alpha}\varphi = \partial_t^{\alpha}\varphi$。

下面回顾随机巴拿赫空间的定义和性质（更多细节见 [12, 25, 26, 27]）。我们介绍解空间 $\mathcal{H}_p^{\gamma}(T)$ 以及关于 $\mathcal{H}_p^{\gamma}(T)$ 的嵌入定理。

定义 2.7. 设 $p > 1$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$。空间 $H_p^{\gamma} = H_p^{\gamma}(\mathbb{R}^d)$ 是满足以下条件的所有温和分布 u 在 $\mathbb{R}$ 上的集合：

$$\|u\|_{H_p^{\gamma}} := \left\|(1-\Delta)^{\gamma/2}u\right\|_{L_p} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}\mathcal{F}(u)(\xi)\right]\right\|_{L_p} < \infty.$$

类似地，$H_p^{\gamma}(l_2) = H_p^{\gamma}(\mathbb{R}^d; l_2)$ 是由 l_2 值函数 $g = (g^1, g^2, \cdots)$ 构成的空间，使得 t

$$\|g\|_{H_p^{\gamma}(l_2)} := \left\|\left|(1-\Delta)^{\gamma/2}g\right|_{l_2}\right\|_{L_p} = \left\|\left|\mathcal{F}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{\gamma/2}\mathcal{F}(g)(\xi)\right]\right|_{l_2}\right\|_{L_p} < \infty.$$

注 2.8. 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\gamma \in (0,\infty)$。存在定义于 $\mathbb{R}^d$ 上的非负光滑函数 $R_{\gamma}(x)$，使得对于 $u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$，

$$\left((1-\Delta)^{-\gamma/2}u\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} R_{\gamma}(y)u(x-y)dy$$

and

$$|R_{\gamma}(x)| \le NA_{\gamma,d}(x)1_{|x|\le 2} + Ne^{-|x|/2}1_{|x|\ge 2},$$

其中 $N = N(\gamma, d)$ 是一个正常数，并且

$$A_{\gamma,d}(x) = \begin{cases} |x|^{\gamma-d} + 1 + O(|x|^{\gamma-d+2}) & for \quad 0 < \gamma < d, \\ \log(2/|x|) + 1 + O(|x|^2) & for \quad \gamma = d, \\ 1 + O(|x|^{\gamma-d}) & for \quad \gamma > d. \end{cases}$$

更多细节请参见 [12,命题 1.2.5]。

我们在 H_p^γ 中引入逐点乘子空间。

定义 2.9。取 $\gamma \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in [0, 1)$，使得当 $\gamma \in \mathbb{Z}$ 时 $\alpha = 0$，且当 $|\gamma| + \alpha$ 不是整数时 $\alpha > 0$。定义

$$B^{|\gamma|+\alpha} = \begin{cases} B(\mathbb{R}) & if\, \gamma = 0, \\ C^{|\gamma|-1,1}(\mathbb{R}) & if\, \gamma \ is\ a\ nonzero\ integer, \\ C^{|\gamma|+\alpha}(\mathbb{R}) & otherwise, \end{cases}$$

$$B^{|\gamma|+\alpha}(\ell_2) = \begin{cases} B(\mathbb{R}, \ell_2) & if\, \gamma = 0, \\ C^{|\gamma|-1,1}(\mathbb{R}, \ell_2) & if\, \gamma \ is\ a\ nonzero\ integer, \\ C^{|\gamma|+\alpha}(\mathbb{R}, \ell_2) & otherwise, \end{cases}$$

其中，$B(\mathbb{R})$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的有界博雷尔函数空间，$C^{|\gamma|-1,\ 1}(\mathbb{R})$ 表示 $|\gamma| - 1$ 次连续可微函数空间，其 $(|\gamma| - 1)$ 阶导数是利普希茨连续的；$C^{|\gamma|+\alpha}$ 是实值 H ¨older 空间。空间 $B(\ell_2)$ 表示一个函数空间，其中的函数取值于 ℓ_2，而非实值函数空间。

下面我们汇总贝塞尔势空间的性质。

引理 2.10. 设 $\gamma \in \mathbb{R}$ 和 $p > 1$。

(i) 空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 H_p^γ 中稠密。(ii) 设 $\gamma - d/p = n + \nu$，其中某个 $n = 0$、1、$\cdots$和 $\nu \in (0, 1]$。那么，对任意 $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$，有

$$|D^k u|_{C(\mathbb{R}^d)} + |D^n u|_{\mathcal{C}^\nu(\mathbb{R}^d)} \le N\|u\|_{H_p^\gamma}, \tag{2.2}$$

其中 $\mathcal{C}^\nu(\mathbb{R}^d)$ 是齐格蒙德空间。

(iii) 算子 $D_i : H_p^\gamma \to H_p^{\gamma+1}$ 是有界的。此外，对任意 $u \in H_p^{\gamma+1}$，

$$\left\|D^i u\right\|_{H_p^\gamma} \le N\|u\|_{H_p^{\gamma+1}},$$

其中 $N = N(\gamma, p)$。

(iv) 对于 γ_1、$\gamma_2 \in \mathbb{R}$ 和 $u \in H_p^{\gamma_1+\gamma_2}$，有

$$\|\Delta^{\gamma_1/2} u\|_{H_p^{\gamma_2}} \le N\|u\|_{H_p^{\gamma_1+\gamma_2}},$$

其中 $N = N(\gamma_1, \gamma_2)$。

(v) 对于 $\gamma \in (0,1)$ 和 $u \in H_p^\gamma$，我们有

$$\|(1 - \Delta^\gamma)u\|_{L_p} \le N\left(\|u\|_{L_p} + \|(-\Delta)^\gamma u\|_{L_p}\right),$$

其中 $N = N(\gamma, p)$。

(vi) 对任意 μ、$\gamma \in \mathbb{R}$，算子 $(1 - \Delta)^{\mu/2} :\ H_p^\gamma \to H_p^{\gamma-\mu}$是等距映射。

(vii) 令

$$\varepsilon \in [0,1], \quad p_i \in (1,\infty), \quad \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad i=0,1,$$
$$\gamma = \varepsilon\gamma_1 + (1-\varepsilon)\gamma_0, \quad 1/p = \varepsilon/p_1 + (1-\varepsilon)/p_0.$$

于是，我们有

$$\|u\|_{H_p^\gamma} \le \|u\|^{\varepsilon}_{H_{p_1}^{\gamma_1}} \|u\|^{1-\varepsilon}_{H_{p_0}^{\gamma_0}}.$$

（viii）令 $u \in H_p^\gamma$。于是，我们有

$$\|au\|_{H_p^\gamma} \le N\|a\|_{B^{|\gamma|+\alpha}}\|u\|_{H_p^\gamma} \quad and \quad \|bu\|_{H_p^\gamma(\ell_2)} \le N\|b\|_{B^{|\gamma|+\alpha}(\ell_2)}\|u\|_{H_p^\gamma},$$

其中， $N = N(\gamma,p)$ 以及 $B^{|\gamma|+\alpha}, B^{|\gamma|+\alpha}(\ell_2)$ 已在定义 2.9 中引入。

证明。上述结果是众所周知的。对于（i）、（iii）、（vi）和（vii），分别参见 [27], 中的定理 13.3.7（i）、13.8.1、13.3.7（ii）以及习题 13.3.20。对于（ii）和（iv），参见 [34]。对于（v），参见 [12] 中的定理 1.3.6 和 1.3.8。对于（viii），请读者参见 [26,引理 5.2]。

□

定义 2.11（随机巴拿赫空间）。令 $\tau \le T$ 为有界停时， $p \ge 2$, 且 $\gamma \in \mathbb{R}$。置 $(\!(0,\tau]\!] := \{(\omega,t) : 0 < t \le \tau(\omega)\}$ 并定义

$$\mathbb{H}_p^\gamma(\tau) := L_p\left((\!(0,\tau]\!], \mathcal{P}, dP\times dt; H_p^\gamma\right),$$
$$\mathbb{H}_p^\gamma(\tau,l_2) := L_p\left((\!(0,\tau]\!], \mathcal{P}, dP\times dt; H_p^\gamma(l_2)\right),$$
$$U_p^\gamma := L_p\left(\Omega, \mathcal{F}_0, H_p^\gamma\right).$$

若对任意有界停时 τ， $u \in \mathbb{H}_p^\gamma(\tau)$ 均存在，则记为 $u \in \mathbb{H}_p^\gamma$。此外，若$\gamma = 0$，则我们用 $\mathbb{L}$ 代替 $\mathbb{H}$, $\|f\|_{\mathbb{L}_p(\tau)} := \|f\|_{\mathbb{H}_p^0(\tau)}$。每个空间的范数按自然方式定义，例如，

$$\|f\|_{\mathbb{H}_p^\gamma(\tau)} := \left(\mathbb{E}\int_0^\tau \|f(t,\cdot)\|^p_{H_p^\gamma}\,dt\right)^{1/p}.$$

引理 2.12 揭示了随机积分与分数阶积分之间的关系；当I_t^α或 D_t^α作用于随机偏微分方程的随机部分时，会用到这一关系。

引理 2.12. 设 $T < \infty$ 为常数。

(i) 设 $\alpha \ge 0$ 和 $h \in L_2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P}; l_2)$。则等式

$$I^\alpha\left(\sum_{k=1}^\infty \int_0^\cdot h^k(s)dw_s^k\right)(t) = \sum_{k=1}^\infty \left(I^\alpha\int_0^\cdot h^k(s)dw_s^k\right)(t)$$

对所有 $t \le T$几乎处处成立，且在 $L_2(\Omega\times[0,T])$ 中成立，其中等式两边的级数均依概率收敛。

(ii) 若当 $n\to\infty$ 时， $\alpha \ge 0$ 和 $h_n \to h$ 属于 $L_2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P}; l_2)$，则

$$\sum_{k=1}^\infty \left(I^\alpha\int_0^\cdot h_n^k dw_s^k\right)(t) \to \sum_{k=1}^\infty \left(I^\alpha\int_0^\cdot h^k dw_s^k\right)(t)$$

在 $[0,T]$ 上依概率一致收敛。

(iii) 若 $\alpha > 1/2$ 和 $h \in L_2(\Omega\times[0,T],\mathcal{P};\, l_2)$，则 $\left(I^\alpha \sum_{k=1}^\infty \int_0^\cdot h^k(s)dw_s^k\right)(t)$ 关于 t 可微，且

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(I^\alpha \sum_{k=1}^\infty \int_0^\cdot h^k(s)dw_s^k\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=1}^\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h^k(s)dw_s^k$$

在 Ω 上几乎处处成立 $\times[0,T]$。

证明。参见 [7] 的引理 3.1 和 3.3。 □

取一个较小的 $\kappa_0 > 0$。对于 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\beta < \alpha + 1/2$，令

$$c_0 := \frac{(2\beta-1)_+}{\alpha} + \kappa_0 1_{\beta=1/2}. \tag{2.3}$$

接下来，我们引入解空间（更多细节参见 [25] 中的定义 2.9 和 2.12）。

定义 2.13（解空间）。设 $\tau \le T$ 为一个有界停时，$\alpha \in (0,1)$，$\beta < \alpha + 1/2$，$\gamma \in \mathbb{R}$，且 $p \ge 2$。

(i) 对于 $u \in \mathbb{H}_p^\gamma(\tau)$，如果 $u_0 \in U_p^\gamma$，$f \in \mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)$，且存在 $g \in \mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(\tau, l_2)$ 使得 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$，我们记作

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = f(t,x) + \partial_t^\beta \int_0^t g^k(s,x)dw_s^k, \quad 0 < t \le \tau; \quad u(0,\cdot) = u_0$$

在分布意义下。换言之，对于任意 $\phi \in \mathcal{S}$，等式

$$(u(t,\cdot),\phi) = (u_0,\phi) + I_t^\alpha(f,\phi) + I_t^{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^\infty \int_0^t (g^k(s,\cdot),\phi)dw_s^k \tag{2.4}$$

对几乎所有 $(\omega,t) \in \Omega \times [0,\tau]$ 成立。若 $\alpha - \beta \in (-1/2, 0)$，我们将 $I_t^{\alpha-\beta}$ 视为 $\frac{\partial}{\partial t} I_t^{\alpha-\beta+1}$。$\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 中的范数定义如下：

$$\|u\|_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)} := \|u\|_{\mathbb{H}_p^\gamma(\tau)} + \|u_0\|_{U_p^{\alpha,\gamma}} + \inf_{f,g}\left\{\|f\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)} + \|g\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(\tau,l_2)}\right\}. \tag{2.5}$$

(ii) 若存在一个序列 $\tau_n \uparrow \tau$，使得对每个 n，都有 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau_n)$，则称 $u \in \mathcal{H}_{p,loc}^\gamma(\tau)$。若存在一列有界停时 $\tau_n \uparrow \tau$，使得对每个 n，都有 $u = v$ in $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau_n)$，则称 $u = v$ 属于 $\mathcal{H}_{p,loc}^\gamma(\tau)$。若 $\tau = \infty$，则省略 τ。换言之，$\mathcal{H}_{p,loc}^\gamma = \mathcal{H}_{p,loc}^\gamma(\infty)$。

注 2.14. 如果 $\alpha - \beta \ge 0$，则考虑 (2.4) 的随机部分

$$I_t^{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^\infty \int_0^t (g^k(s,\cdot),\phi)dw_s^k = \sum_{k=1}^\infty I_t^{\alpha-\beta}\int_0^t (g^k(s,\cdot),\phi)dw_s^k.$$

否则，如果 $\alpha - \beta \in (-1/2, 0)$，我们将 $I_t^{\alpha-\beta}$ 视为 $\frac{\partial}{\partial t} I_t^{\alpha-\beta+1}$。于是，根据引理 2.12 (iii)，(2.4) 的随机部分为

$$\begin{aligned} I_t^{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=1}^\infty \int_0^t (g^k(s,\cdot),\phi)dw_s^k\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(I^{\alpha-\beta+1}\sum_{k=1}^\infty \int_0^t (g^k(s,\cdot),\phi)dw_s^k\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\sum_{k=1}^\infty \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta+1}(g^k(s,\cdot),\phi)dw_s^k. \end{aligned}$$

下面，我们给出解空间 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 的性质。

定理 2.15. 设 $\tau \le T$ 是一个有界停时。

(i) 对于 $\nu \in \mathbb{R}$，映射 $(1-\Delta)^{\nu/2}: \mathcal{H}_p^{\gamma+2}(\tau) \to \mathcal{H}_p^{\gamma-\nu+2}(\tau)$ 是等距映射。(ii) 若 $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$, $\beta < \alpha + 1/2$ 和 $p \ge 2$，则 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 是一个巴拿赫空间，其范数为 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)}$。

证明。尽管 U_p^γ 的定义有所不同，但证明与 [25,定理 2.14] 相同，只需将 τ 替换为 T。

□

接下来，我们给出 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 的 Hölder 嵌入定理。定理 2.16 的证明见第 5 节。

定理 2.16. 设 $\tau \le T$ 为有界停时， $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$， $\beta < \alpha + 1/2$，且

$$p > 2 \vee \frac{1}{\alpha} \vee \frac{1}{\alpha - \beta + 1/2}. \tag{2.6}$$

假设 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$。设 α, β, μ和 ν满足

$$\frac{1}{\alpha p} < \mu < \frac{(\alpha(\nu + c_0/2) - \beta) \wedge 1/2 + 1/2}{\alpha} \quad and \quad \frac{1}{\alpha p} < \nu < 1 - \frac{c_0}{2}, \tag{2.7}$$

其中 c_0 是 (2.3) 中引入的常数。于是，对于 $u \in C^{\alpha\mu - 1/p}([0,\tau]; H_p^{\gamma-2\nu})$，几乎处处成立，且

$$\mathbb{E}\|u\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}\left([0,\tau];H_p^{\gamma-2\nu}\right)} \le N\|u\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)}, \tag{2.8}$$

其中 $N = N(\alpha, \beta, \gamma, d, p, T)$。

注 2.17. 定理 2.16 与先前的结果（[26, 定理 7.2]）一致。换言之，若在定理 2.16 中令 α, $\beta \uparrow 1$，则条件 (2.6) 和 (2.7) 以及结果 (2.8) 会趋近于 $\alpha = \beta = 1$ 情形下的相应结论。

结合引理 2.10 (ii) 和定理 2.16，我们得到解空间 $\mathcal{H}^{(2-c_0-d/2)_p \wedge 1}(\tau)$ 的 Hölder 嵌入结果，为获得解的最大 Hölder 正则性做好准备。

推论 2.18. 设 $\tau \le T$ 是一个有界停时， $\alpha \in (0,1)$， $\beta < \alpha + 1/2$，且 $0 < \gamma < (2 - c_0 - d/2) \wedge 1$，其中 c_0 在 (2.3) 中引入。假设 p 满足 (2.6)，且 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$。若 α、β、γ、ν、d 和 p 满足

$$\frac{1}{\alpha p} < \mu < \frac{(\alpha(\nu + c_0/2) - \beta) \wedge 1/2 + 1/2}{\alpha} \quad and \quad \frac{1}{\alpha p} < \nu < \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{d}{2p}\right) \wedge \left(1 - \frac{c_0}{2}\right), \tag{2.9}$$

则 $u \in C^{\alpha\mu-1/p}([0,\tau]; C^{\gamma-2\nu-d/p})$ 几乎处处成立，且

$$\mathbb{E}\|u\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}\left([0,\tau];C^{\gamma-2\nu-d/p}(\mathbb{R}^d)\right)} \le N\|u\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)},$$

其中 $N = N(\alpha, \beta, \gamma, d, p, T)$。

Proof. 证明中，我们使用引理 2.10 (ii) 和定理 2.16。于是，我们有

$$\mathbb{E}\|u\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}\left([0,\tau];C^{\gamma-2\nu-d/p}(\mathbb{R}^d)\right)} \le \mathbb{E}\|u\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}\left([0,\tau];H_p^{\gamma-2\nu}(\mathbb{R}^d)\right)} \le N\|u\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)}.$$

由此，推论得证。 □

3. Main Results

本节阐述如下方程的解的唯一性、存在性、 L_p-正则性和 H¨older 正则性:

$$\partial_t^\alpha u = Lu + \bar{b}^i u u_{x^i} + \partial_t^\beta \sum_k \int_0^t \sigma(u)\eta^k dw_s^k, \quad t > 0; \quad u(0,\cdot) = u_0, \tag{3.1}$$

其中 $Lu = a^{ij}u_{x^ix^j} + b^i u_{x^i} + cu$。系数 a^{ij}、 b^i 和 c 是 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可测的, $\bar{b}^i$ 是 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1})$-可测的, 而 a^{ij}、 b^i、 c 和 $\bar{b}^i$ （及其导数）均一致有界（见假设 3.1）。此外, 我们假设系数 $\bar{b}^i$ 与 x^i 无关。事实上, 由于 $\bar{b}^i$ 与 x^i 无关, 我们可以利用微积分基本定理来控制非线性项 $\bar{b}^i u u_{x^i}$ （见注 3.2）。此外, 扩散系数 $\sigma(u)$ 受一个 $\mathbb{L}_p$ 函数 h 控制（见假设 3.3）, 并用于获得局部解的一致 L_p 界（见注 3.4）。

在定理 3.5 中, 我们获得了 $\mathcal{H}_p^\gamma$ 中解的存在性与唯一性, 其中 $\gamma \in (0, 2 - c_0 - d/2) \wedge 1$。方程（3.1）的各个组成部分会影响解 u 的性质。例如, 如果给定 α、 β、 d 和 p, 则正则性 γ 由此确定。注 3.6、3.7 和 3.8 对这些关系作出了解释。

此外, 我们还在推论 3.10 中得到了该解的最大 H¨older 正则性。我们采用了解空间的 H¨older 嵌入定理（推论 2.18）。此外, 解的时间 H¨older 正则性的表现会随 β 的取值范围而变化。具体而言, 当 $\beta \geq 1/2$ 时, 解的空间 H¨older 正则性是时间 H¨older 正则性的 $\alpha/2$ 倍。此外, 若考虑 α, $\beta \uparrow 1$ 这一情形, 则时间和空间上的 H¨older 正则性分别趋近于 $1/4$ 和 $1/2$, 这与时空白噪声驱动的随机偏微分方程的结果一致（例如, [26, 注 8.7] 或 [16,推论 3.1]）。在 $\beta < 1/2$ 的情形下, 由于随机积分的正则性, 可得到时间 H¨older 正则性的 $1/2 - \beta$ （注3.11）。

以下是对系数的假设。

假设 3.1. (i) 系数 $a^{ij} = a^{ij}(t,x)$、 $b^i = b^i(t,x)$ 和 $c = c(t,x)$ 是$\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可测的。(ii) 系数 $\bar{b}^i(t,\bar{x}^i) = \bar{b}^i(t,x^1,\ldots,x^{i-1},x^{i+1},\ldots,x^d)$ 是 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1})$-可测的。(iii) 存在 $K > 0$ 使得

$$K^{-1}|\xi|^2 \leq a^{ij}(t,x)\xi^i\xi^j \leq K|\xi|^2 \quad \text{对所有} \quad (\omega,t,x) \in \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \ \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{3.2}$$

and

$$\sum_{i,j} \left|a^{ij}(t,\cdot)\right|_{C^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_i \left|b^i(t,\cdot)\right|_{C^2(\mathbb{R}^d)} + |c(t,\cdot)|_{C^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_i \left|\bar{b}^i(t,\cdot)\right|_{C^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq K \tag{3.3}$$

for all $(\omega,t) \in \Omega \times [0,\infty)$.

注 3.2. 为了证明全局解的存在性, 我们需要获得局部解的统一 L_p界。因此, 我们将局部解分为两部分: 噪声主导部分和非线性主导部分。在本注中, 我们考虑与 $\bar{b}^i u u_{x^i}$相关的非线性主导部分。

如果系数 $\bar{b}^i$ 与 x^i无关, 则系数 $\bar{b}^i$ 可以从x^i的积分中提出。然后, 根据 x^i的微积分基本定理, 在非线性主导部分的局部解的 L_p 估计中, 非线性项 $\bar{b}^i u u_{x^i}$ 被消去。因此,

非线性主导部分由初始数据和扩散系数 $\sigma(u)$ 控制（更多信息请参见引理 4.8）。

T为引入关于扩散系数的假设，我们可以假设 $p \geq 2$。

假设 3.3（p）。(i) 系数 $\sigma(t,x,u)$ 是 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-可测的。(ii) 存在一个常数 K，使得

$$|\sigma(t,x,u) - \sigma(t,x,v)| \leq K|u-v| \quad for\ all \quad (\omega,t,x) \in \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \quad u,v \in \mathbb{R}.$$

(iii) 存在一个 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可测函数 $h \in \mathbb{L}_p$，使得

$$|\sigma(t,x,u)| \leq |h(t,x)| \quad for\ all \quad (\omega,t,x) \in \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

注 3.4。如注 3.2 所述，我们将局部解分为两部分，非线性主导部分由初始数据 u_0 和扩散系数 $\sigma(u)$ 控制。随后，为处理噪声主导项以及包含 $\sigma(u)$ 的项，我们采用假设 3.3（p）(iii) 中引入的函数 $h(t,x)$。事实上，与扩散系数 $\sigma(u)$ 相关的项由初始数据和 h 控制，因此可得到 u 的一致 L_p 界（见引理 4.5 和 4.8）。

接下来，我们介绍主要结果。

定理 3.5. 设

$$\alpha \in (0,1), \quad \beta < \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}, \quad d < 4 - 2c_0, \quad 0 < \gamma < (2 - c_0 - d/2) \wedge 1 \tag{3.5}$$

and

$$p = 2^k \quad for\ some \quad k \in \mathbb{N} \quad and \quad p > 2 \vee \frac{1}{\alpha} \vee \frac{1}{\alpha - \beta + 1/2} \vee \frac{2 + \alpha d}{\alpha\gamma} \vee \frac{d}{1-\gamma}, \tag{3.6}$$

其中 c_0 是 (2.3) 中引入的常数。假设假设 3.1 和 3.3 (p) 成立。若 $u_0 \in U_p^\gamma$，则存在满足 (3.1) 的唯一解 $u \in \mathcal{H}_{p,\,loc}^\gamma$。此外，对于$\mu$ 和满足 (2.9) 的 ν，以及有界停时 $\tau \leq T$，我们有

$$u \in C^{\alpha\mu - 1/p}([0,\tau]; C^{\gamma - 2\nu - d/p}) \quad and \quad \|u\|_{C^{\alpha\mu-\frac{1}{p}}([0,\tau];C^{\gamma-2\nu-d/p})} < \infty \tag{3.7}$$

几乎处处。

证明。参见第 4 节中定理 3.5 的证明。 □

注 3.6. (i) 我们假设

$$\alpha \in (0,1)$$

因为采用了类似链式法则的不等式来处理局部解中占主导地位的非线性部分（见引理 4.6）。

（ii）条件

$$\beta < 3\alpha/4 + 1/2 \quad and \quad d < 4 - 2c_0$$

即使在半线性情形下，也有望获得具有 Caputo 时间分数阶导数和时空白噪声的随机偏微分方程解的唯一性与存在性。例如，参见 [23, Section 7]。此外，注意到 α 和 β 允许$d = 1$、2、3，其中 c_0 是（2.3）中引入的常数。

R评注 3.7. (i) 为了局部解的存在性与唯一性，我们施加 se

$$\gamma \in (0, 2 - c_0 - d/2). \tag{3.8}$$

启发式地，若 u 是方程（3.1）的可测、连续且有界解，则对于给定的 $T < \infty$，我们可以如下定义一个有界停时：

$$\tau_m := \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u(t,x)| \geq m \right\} \wedge T.$$

那么，解 u 在 $(0, \tau_m)$ 上满足方程（3.1）的局部化版本。换言之，

$$\partial_t^\alpha u = Lu + \frac{1}{2} \bar{b}^i \left((|u| \wedge m)^2 \right)_{x^i} + \partial_t^\beta \sum_k \int_0^t \sigma(u) \eta^k dw_s^k \tag{3.9}$$

在 $0 < t < \tau_m$ 上成立，其中 $u(0, \cdot) = u_0$。由于 (3.9) 是一个半线性方程，因此 (3.8) 必须由 [23, 定理 7.1] 满足（更多细节请参见 [23, 第 7] 节和 [25,第 5] 节）。

（ii）假设满足以下条件

$$\gamma \in (0, 1) \tag{3.10}$$

这是由于非线性项 $\bar{b}^i u u_{x^i}$ 会降低解的正则性。即使对于 SBEs（$\alpha = \beta = 1$），也需要满足 (3.10) 中的条件（更多信息请参见 [13, 14, 15, 16, 29]）。

注记 3.8. (i) 为了得到局部解，我们采用半线性方程的 L_p 理论（见 [26, 定理 5.1]）。在 L_p 估计中控制非线性项 $\bar{b}^i u u_{x^i}$ 时，必须控制 $(1 - \Delta)^{-\frac{\gamma - 1}{2}}$ 的核。因此，

$$p > \frac{d}{1 - \gamma}$$

（见引理 4.3）中施加了该条件。

(ii) 为了考虑方程（3.1）的截断版本，我们要求解取值于 $\mathbb{R}$。因此，我们假设

$$p > 2 \wedge \frac{1}{\alpha} \wedge \frac{1}{\alpha - \beta + 1/2} \wedge \frac{2 + \alpha d}{\alpha \gamma}$$

这是对 $\mathcal{H}_p^\gamma$ 应用 Hölder 嵌入定理所需的条件（见定理 2.16 和推论 2.18）。

(iii) 如注 3.6 (i) 所述，我们采用一个类似于链式法则的不等式。为了使用 (4.13) 替代 Caputo分数阶导数的链式法则，我们假设

$$p = 2^k$$

其中 $k \in \mathbb{N}$ 为某个常数。

为获得最大 H¨older 正则性，我们要求解在 p 中具有唯一性。

定理 3.9. 假设定理 3.5 的所有条件均成立。设 $u \in \mathcal{H}_{p\ ,loc}^{\gamma}$ 为定理 3.5 中引入的方程（3.1）的解。若 $q > p$, $u_0 \in U_{,q}^{\alpha\ \gamma}$，且假设 3.3（$q$）成立，则 $u \in \mathcal{H}_{q\ ,loc}^{\gamma}$。

证明。参见第 4 节中定理 3.9 的证明。 □

最后，结合定理3.5和定理3.9，我们得到解的最大 H¨older 正则性。回顾一下， c_0 是在（2.3）中引入的。

推论 3.10. 假设 α、 β、 d 和 γ 满足 (3.5)，且 $u_0 \in \cap_{p>2} U^{(2-c_0-d/2}{}_p{}^{\wedge 1}$ 和 $h \in \cap_{p>2}\mathbb{L}_p$ 满足 (3.4)。那么，对于任意有界停时 $\tau \le T$，(1.3) 几乎处处成立。

证明. 给定 (3.5) 中的 α、 β、 d 和 γ 后，我们按 (3.6) 选取 p 。对于每个 p，方程（3.1）都存在唯一解 $u_p \in \mathcal{H}^{\gamma}_{p,loc}$ 。根据定理 3.9， $u_p \in \mathcal{H}^{\gamma}_{q,loc}$ 对任意 $q \ge p$ 均成立，因此我们用 u 代替 u_p ，且 u 与 p 相互独立。因此，在 (3.7) 中令 p 足够大，即得 (1.3)。推论得证。□

注3.11. (i) 若 $1/2 \le \beta < \alpha + 1/2$，空间中的 H ¨lder 正则性是时间正则性的 $\alpha/2$ 倍。此外，考虑 $\alpha, \beta \uparrow 1$ 的情形，我们可以恢复随机双曲方程（$\alpha = \beta = 1$）的 H ¨lder 正则性结果。为方便读者，引用 [29, 命题 5.1] 或 [16, 推论 3.1]。

(ii) 若 $\beta < 1/2$，则时间中的 H ¨lder 正则性可额外提高至多 $1/2 - \beta$。这一现象是由于方程（3.1）的随机积分使噪声在时间上的 H ¨lder 正则性几乎增加 $1/2$，而 ∂_t^{β} 将噪声的正则性降低了 β。

4. Proof of Theorems 3.5 and 3.9

We 在本节余下部分，假设定理 3.5 中的所有条件均成立 .

为证明全局解的存在性，我们需要先证明局部解的存在性和唯一性（引理 4.3）。有了这些局部解后，我们便构造一个全局解的候选解。具体而言，我们将局部解拼接起来，并证明局部存在时间几乎处处趋于无穷（引理 4.9）。为证明局部存在时间几乎处处趋于无穷，我们证明局部解存在一致的 L_p 界。具体来说，我们将局部解分解为噪声主导部分和非线性主导部分。噪声主导部分受方程的随机部分影响，另一部分则受非线性项 $b^i u u_{x^i}$ 影响。处理解的噪声主导部分时，扩散系数的支配函数为局部解的噪声主导部分提供了一致的L_p 界（参见假设 3.3 (p) (iii) 和引理 4.5）。另一部分则通过采用链式法则的一个变体和 Gr¨onwall 不等式来控制（参见引理 4.6、引理 4.8 和定理 4.7）。

Fi首先，我们介绍半线性随机偏微分方程的唯一性与存在性定理。

假设 4.1（τ）。(i) 函数 $f(t,x,u)$ 和 $g^k(t,x,u)$ 是 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-可测函数，满足以下条件:

$$f(t,x,0) \in \mathbb{H}^{\gamma}_p(\tau) \quad and \quad g(t,x,0) = (g^1(t,x,0), g^2(t,x,0), \dots) \in \mathbb{H}^{\gamma+1}_p(\tau, l_2).$$

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 N_ε，使得对任意 $u, v \in \mathbb{H}^{\gamma}_p(\tau)$ ，

$$\|f(u) - f(v)\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma-2}_p(\tau)} + \|g(u) - g(v)\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma-2+c_0}_p(\tau,l_2)} \le \varepsilon \|u - v\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma}_p(\tau)} + N_\varepsilon \|u - v\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma-2}_p(\tau)},$$

其中 c_0 是式 (2.3) 中引入的常数。

引理 4.2. 设 $\tau \le T$ 是一个有界停时。假设假设 4.1（τ）成立。那么，对于初始数据 $u_0 \in U_p^\gamma$，以下方程:

$$\partial_t^\alpha u = Lu + f(u) + \partial_t^\beta \int_0^t g^k(u) dw_t^k, \quad 0 < t \le \tau; \quad u(0,\cdot) = u_0 \tag{4.1}$$

存在唯一解 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$。此外,

$$\|u\|_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)}^p \le N \left(\|u_0\|_{U_p^\gamma}^p + \|f(0)\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)}^p + \|g(0)\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(\tau,l_2)}^p \right), \tag{4.2}$$

其中 $N = N(\alpha, \beta, \gamma, d, p, K, T)$，且 c_0 是 (2.3) 中引入的常数。

证明。 [26] 的定理 5.1 是本证明的动机。情形 $\tau \equiv T$ 可由 [25, 定理 2.18] 得到；因此，我们只考虑情形 $\tau \le T$。

（步骤 1）。（存在性）令

$$\bar{f}(t,u) := 1_{t\le\tau} f(t,u) \quad \text{and} \quad \bar{g}(t,u) := 1_{t\le\tau} g(t,u).$$

此外， $f(u)$ 和 $\bar{g}(u)$ 满足假设 4.1（T）。于是，由 [25, 定理 2.18],，存在唯一解 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$，使得 u 满足方程 (4.1)，其中分别以 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 代替 f 和 g。由于 $\tau \le T$，我们有 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$，且 u 满足方程 (4.1) 和估计 (4.2)，其中分别取 f 和 g。

（步骤 2）。（唯一性）设 $u, v \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$ 是方程 (4.1) 的两个解。于是，由定理 2.18] 可知，存在唯一解 $\bar{v} \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$，满足

$$\partial_t^\alpha \bar{v} = L\bar{v} + \bar{f}(v) + \sum_{k=1}^\infty \partial_t^\beta \int_0^t \bar{g}^k(v) dw_t^k, \quad 0 < t \le T; \quad \bar{v}(0,\cdot) = u_0. \tag{4.3}$$

注意，在 (4.3) 中，使用的是 $f(v)$ 和 $\bar{g}(v)$，而不是 $f(\bar{v})$ 和 $\bar{g}(\bar{v})$。令$\tilde{v} := v - \bar{v}$。那么，对固定的 $\omega \in \Omega$，有

$$\partial_t^\alpha \tilde{v} = L\tilde{v}, \quad 0 < t \le \tau; \quad \tilde{v}(0,\cdot) = 0.$$

由定理 2.18], 的确定性版本可知， $\tilde{v} = 0$ 几乎处处属于 $L_p((0,\tau] \times \mathbb{R}^d)$。此外，这意味着 $v(t,\cdot) = \bar{v}(t,\cdot)$ 几乎处处属于 $L_p((0,\tau] \times \mathbb{R}^d)$。因此，在方程 (4.3) 中，我们可以用 $\bar{f}(\bar{v})$ 和 $\bar{g}(\bar{v})$ 替换 $\bar{f}(v)$ 和 $\bar{g}(v)$。因此， $\bar{v} \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$在 $(0,T]$ 上满足方程 (4.1)，其中分别以 $f, \bar{g}$ 代替 f, g。类似地，逐字照此推导可得，存在 $\bar{u} \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$，使得 $\bar{u}$ 在 $(0,T]$ 上满足方程 (4.1)，其中以$\bar{f}$和 $\bar{g}$代替 f和 g。因此，由 $\mathcal{H}_p^\gamma(T)$ 中的唯一性结论可知， $\bar{u} = \bar{v}$属于$\mathcal{H}_p^\gamma(T)$，这意味着 $u = v$属于 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$。由此，引理得证。□

接下来，我们证明方程（3.1）的局部解的唯一性和存在性。作为辅助函数，我们选取 $\rho(\cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\rho(z) \ge 0$ 在 $z \in (-\infty, \infty)$上， $\rho(z) = 1$在 $|z| \le 1$上， $\rho(z) = 0$ 在 $|z| \ge 2$上，并且 $\frac{d}{dz}\rho(z) \le 0$ 在 $z \ge 0$上。我们定义如下:

$$\rho_m(z) := \rho(z/m). \tag{4.4}$$

引理 4.3. 设 $\tau \le T$为一个有界停时。对于 $m \in \mathbb{N}$，存在 $u_m \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau)$，使得

$$\partial_t^\alpha u_m = Lu_m + \bar{b}^i \left(u_m^2 \rho_m(u_m) \right)_{x^i} + \partial_t^\beta \int_0^t \sigma(t,x,u_m) \eta^k(x) dw_t^k, \ 0 < t \le \tau; \ u_m(0,\cdot) = u_0,$$

其中 ρ_m 是式 (4.4) 中引入的函数。此外，$u_m \in C([0,\tau];\, C(\mathbb{R}^d))$ 几乎处处成立，且

$$\mathbb{E}\sup_{t\le\tau}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|u_m(t,x)|^p \le N\|u_m\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)} < \infty \tag{4.5}$$

几乎处处。

证明。由引理 4.2 和推论 2.18，只需证明假设 4.1（τ）成立。由于对于所有 ω, t, x 和 $h \in \mathbb{L}_p$，$\sigma(t, x, 0) \le h(t,x)$，因此假设 4.1 (i) 成立。

对于假设 4.1 (ii)，注意到对于 $u, v \in \mathbb{R}$，我们有

$$\left|u^2\rho_m(u) - v^2\rho_m(v)\right| \le N_m|u-v|.$$

于是，对于 $u, v \in \mathbb{H}_p^\gamma(\tau)$，由注 2.8 以及引理 2.10 (viii) 和 (iii)，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar{b}^i\left((u(t,\cdot))^2\rho_m(u(t,\cdot)) - (v(t,\cdot))^2\rho_m(v(t,\cdot))\right)_{x^i}\right\|^p_{H_p^{\gamma-2}}\\
&\le N\left\|(u(t,\cdot))^2\rho_m(u(t,\cdot)) - (v(t,\cdot))^2\rho_m(v(t,\cdot))\right\|^p_{H_p^{\gamma-1}}\\
&\le N\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{1-\gamma}(x-y)|\left((u(\cdot))^2\rho_m(\cdot,u(\cdot)) - (v(\cdot))^2\rho_m(\cdot,v(\cdot))\right)(t,y)dy\right)^p dx\\
&\le N_m\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{1-\gamma}(x)|dx\right)^p\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,x)-v(t,x)|^p dx
\end{aligned} \tag{4.6}$$

and

$$\begin{aligned}
&\|\sigma(u)\boldsymbol{\eta} - \sigma(v)\boldsymbol{\eta}\|^p_{H_p^{\gamma-2+c_0}(l_2)}\\
&\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_k\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(x-y)|\left(\sigma(\cdot,u(\cdot)) - \sigma(\cdot,v(\cdot))\right)(t,y)\eta^k(y)dy\right)^2\right)^{p/2}dx\\
&\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(x-y)|^2\left(\sigma(t,y,u(t,y)) - \sigma(t,y,v(t,y))\right)^2 dy\right)^{p/2}dx\\
&\le K^p\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(y)|^2\left(u(t,x-y) - v(t,x-y)\right)^2 dy\right)^{p/2}dx\\
&\le K^p\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(y)|^2 dy\right)^{p/2}\int_{\mathbb{R}^d}|u(t,x)-v(t,x)|^p dx
\end{aligned} \tag{4.7}$$

在几乎每个 $(\omega,t) \in \Omega[\![0,\tau]\!]$ 上。由注 2.8，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d}|R_{1-\gamma}(y)|\,dy + \int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(y)|^2\,dy < \infty.$$

对 (4.6) 和 (4.7) 关于 (ω,t) 进行积分，并利用引理 2.10 (vii) 和杨氏不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar{b}^i\left(u^2\rho_m(u) - v^2\rho_m(v)\right)_{x^i}\right\|^p_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)} + \|\sigma(u)\eta - \sigma(v)\eta\|^p_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(\tau,l_2)}\\
&\le N_m\|u-v\|^p_{\mathbb{L}_p(\tau)}\\
&\le \varepsilon\|u-v\|^p_{\mathbb{H}_p^\gamma(\tau)} + N_m\|u-v\|^p_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

为得到第二个断言，我们采用推论 2.18。引理得证。

□

注 4.4。我们引入一个全局解的候选解。令 $T<\infty$。对于 $m\in\mathbb{N}$，令$u_m\in\mathcal{H}_p^\gamma(T)$为引理 4.3 中引入的解。于是，对于 $R\in\{1,2,\dots,m\}$，定义停时 τ_m^R

$$\tau_m^R:=\inf\left\{t\geq 0:\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_m(t,x)|\geq R\right\}\wedge T. \tag{4.9}$$

注意到

$$\tau_R^R\leq\tau_m^m \tag{4.10}$$

事实上，如果 $R=m$，则（4.10）显然成立。如果 $R<m$，我们有
$u_m\wedge m=u_m\wedge m\wedge R=u_m\wedge R$，对于 $t\leq\tau_m^R$。因此， u_m 和 u_R 是方程的解

$$\partial_t^\alpha u=Lu+\bar{b}^i\left(u^2\rho_R(u)\right)_{x^i}+\sigma(u)\eta^k dw_t^k,\quad 0<t\leq\tau_m^R;\quad u(0,\cdot)=u_0.$$

相反， $u_R\wedge R=u_R\wedge R\wedge m=u_R\wedge m$ 对于 $t\leq\tau_R^R$。因此， u_m 和 u_R 是方程的解

$$\partial_t^\alpha u=Lu+\bar{b}\left(u^2\rho_m(u)\right)_{x^i}+\sigma(u)\eta^k dw_t^k,\quad 0<t\leq\tau_R^R;\quad u(0,\cdot)=u_0.$$

注意到，引理 4.3 中的唯一性和连续性结果表明，对于所有 $t\leq(\tau_m^R\vee\tau_R^R)$，都有 $u_m=u_R$。因此，对于 $t\leq\tau_m^R$，

$$\sup_{s\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_R(s,x)|=\sup_{s\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_m(s,x)|\leq R,$$

这意味着 $\tau_m^R\leq\tau_R^R$。类似地，$\tau_m^R\geq\tau_R^R$；因此，

$$\tau_R^R=\tau_m^R$$

几乎肯定因为 $\tau_m^R\leq\tau_m^m$，且 $m>R$。因此，我们得到 (4.10).
此外，我们定义

$$u(t,x):=u_m(t,x)\quad on\quad t\leq\tau_m^m$$

并令

$$\tau_\infty:=\limsup_{m\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\tau_m^m. \tag{4.11}$$

需要指出的是， $u(t,x)$ 在 $\Omega\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上定义良好，且 u 的非平凡定义域为 $\Omega\times[0,\tau_\infty)\times\mathbb{R}^d$。

为了获得局部解 u_m 的一致 L_p 界，我们将 u_m 分解为噪声主导部分和非线性主导部分。引理 4.5 给出了 u_m 的噪声主导部分的存在性、唯一性及估计。

引理 4.5. 设 $T<\infty$。则存在 $v\in\mathcal{H}_p^\gamma(T)$，使得

$$\partial_t^\alpha v=Lv+\partial_t^\beta\int_0^t\sigma(s,x,u)\eta^k(x)dw_s^k,\quad 0<t\leq T,\quad u(0,\cdot)=u_0$$

此外， $v\in C([0,T];C(\mathbb{R}^d))$ 几乎处处成立，并且

$$\mathbb{E}\sup_{t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|v(t,x)|^p+\mathbb{E}\sup_{t\leq T}\|v(t,\cdot)\|_{L_p}^p\leq N\|v\|_{\mathcal{H}_p^\gamma(T)}^p\leq N\|u_0\|_{U_p^\gamma}^p+N\|h\|_{\mathbb{L}_p(\tau)}^p,$$

其中 $N=N(\alpha,\beta,\gamma,d,p,K,T)$。

证明。与引理 4.3 的证明类似，只需证明假设 4.1 (τ) 成立。令 $\boldsymbol{\eta}=(\eta^1,\eta^2,\dots)$。于是，由注 2.8 可知，对于 $t\le T$

$$\begin{aligned}
&\|\sigma(t,\cdot,u(t,\cdot))\boldsymbol{\eta}\|^p_{H_p^{\gamma-2+c_0}(l_2)}\\
&=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^d}R_{-\gamma+2-c_0}(x-y)\sigma(t,y,u(t,y))\eta^k(y)dy\right)^2\right)^{p/2}dx\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(x)|^2dx\right)^{p/2}\int_{\mathbb{R}^d}|\sigma(t,y,u(t,y))|^pdy\\
&\le\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(x)|^2dx\right)^{p/2}\int_{\mathbb{R}^d}|h(t,y)|^pdy\\
&\le N\|h(t,\cdot)\|^p_{L_p}.
\end{aligned}\tag{4.12}$$

因此，

$$\|\sigma(u)\boldsymbol{\eta}\|^p_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(T,l_2)}\le\mathbb{E}\int_0^T\|\sigma(t,\cdot,u(t,\cdot))\boldsymbol{\eta}\|^p_{H_p^{\gamma-2+c_0}(l_2)}dt\le N\|h\|^p_{\mathbb{L}_p}.$$

因此，由引理 4.2 可证得该引理。 □

接下来，我们控制局部解的非线性主导部分。以下两个引理对于获得一致的 L_p 界至关重要。引理 4.6 起到链式法则的作用，而定理 4.7 则是 Gr¨onwall 不等式的一个版本。

Lemma 4.6。设 $\alpha\in(0,1)$ 和 $k\in\mathbb{N}$。对于任意 $\psi\in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$，我们有 e

$$\partial_t^\alpha(\psi(\cdot,x))^{2^k}(t)\le 2^k\psi(t,x)|\psi(t,x)|^{2^k-2}\partial_t^\alpha\psi(t,x),\tag{4.13}$$

对所有 $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$。

证明。我们采用数学归纳法。结果及其证明受 [8]中的（4.2）启发。

（步骤 1）。首先，我们考虑 $k=1$的情形。尽管证明已见 [8,命题 4.1], 的证明，为使本文完整，我们仍将给出证明。

设 $\psi\in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ 和 $t\in(0,\infty)$，且 $x\in\mathbb{R}^d$。对于 $s\in(0,t]$，令

$$F_1(s):=\frac{1}{2}|\psi(s,x)|^2,\quad F_2(s):=\psi(s,x)\psi(t,x),$$

and

$$F(s):=\frac{1}{2}\left(|\psi(s,x)|^2-|\psi(t,x)|^2\right)-(\psi(s,x)-\psi(t,x))\psi(t,x).$$

此外，

$$F(s)=\frac{1}{2}|\psi(s,x)-\psi(t,x)|^2\ge 0$$

在 $s\le t$ 上，an d 等式对 $s=t$ 成立。注意，分部积分可得

$$\int_0^t(t-s)^{-\alpha}(F_1'(s)-F_2'(s))ds=\int_0^t(t-s)^{-\alpha}F'(s)ds\le 0.$$

然后，根据 ∂_t^α 的定义（定义 2.5），我们得到带有 $k=1$ 的 (4.13)。

（步骤 2）。令 $n \in \mathbb{N}$，并假设对于 $k = 1$、2、.....、$n-1$，结论成立。设 $\tilde{\psi}(t, x) := (\psi(t,x))^2$。由于 $\tilde{\psi}(t,x) \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha (\psi(\cdot,x))^{2^n}(t) &= \partial_t^\alpha (\tilde{\psi}(\cdot,x))^{2^{n-1}}(t)\\ &\le 2^{n-1}\tilde{\psi}(t,x)\left|\tilde{\psi}(t,x)\right|^{2^{n-1}-2}\partial_t^\alpha \tilde{\psi}(t,x)\\ &= 2^{n-1}\left|\psi(t,x)\right|^{2^n-2}\partial_t^\alpha(\psi(t,x))^2\\ &\le 2^n \psi(t,x)\left|\psi(t,x)\right|^{2^n-2}\partial_t^\alpha \psi(t,x).\end{aligned}$$

该引理得证。

□

定理 4.7（ [4]中的定理 8）。设 $\psi(t)$是 $[0,T]$上的非负可积函数。对于常数 N_1，若函数 ψ 满足

$$\psi(t) \le \psi_0 + N_1 I_t^\alpha \psi$$

在 $t \in [0,T]$上，则

$$\psi(t) \le \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_1^k}{\Gamma(k\alpha)} \frac{(\Gamma(\alpha)t^\alpha)^k}{k\alpha}\right)\psi_0$$

在 $t \in [0,T]$上。

我们考虑以下引理来控制局部解 u_m的余项。

引理 4.8. 设 $u_m \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$ 和 $v \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$ 为引理 4.3 和 4.5 中引入的函数，且 τ_m^m 为式 (4.9) 中引入的停时。那么，

$$\begin{aligned}&\|u_m(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L_p}^p\\ &\le N \sup_{t\le T}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|v(t,x)|^p \sup_{t\le T}\|v(s,\cdot)\|_{L_p}^p \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+\sup_{s\le t, x\in\mathbb{R}^d}|v(s,x)|^2\right)^k}{\Gamma(k\alpha)}\frac{(\Gamma(\alpha)T^\alpha)^k}{k\alpha}\right]\end{aligned}$$

对所有 $t \le \tau_m^m$，几乎处处成立，其中 $N = N(p,K)$。

证明。令

$$w_m := u_m - v \quad \text{and} \quad f_m := Lw_m + \bar{b}^i((u_m)^2\rho_m(u_m))_{x^i}.$$

于是，由于 $w_m, u_m \in \mathbb{H}_p^\gamma(T)$ 以及类似于 (4.8) 的估计，我们有 $f_m \in \mathbb{H}_p^{\gamma-}(T)$。此外，$\partial_t^\alpha w_m = f_m$。令 $(\omega,t) \in [\![0,\tau_m^m]\!]$。根据引理 2.9]，，存在 $w_m^n \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$，使得 $w_m^n \to w_m$ 属于 $L_p((0,t);\, H_p^\gamma)$，且 $\partial_t^\alpha w_m^n$ 在 $L_p((0,t);H_p^{\gamma-2})$ 中构成柯西列。定义

$$f_m^n := \partial_t^\alpha w_m^n.$$

此外，当 $n \to \infty$ 时，f_m 是 f_m^n 在 $L_p((0,t);\, H_p^{\gamma-2})$ 中的极限（参见备注 2.9]）。取一个非负函数 $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，使其积分为单位积分，并令 $\zeta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\zeta(x/\varepsilon)$，其中 $\varepsilon > 0$。对于 $h \in L_{1,\,loc}(\mathbb{R}^d)$，令 $h^{(\varepsilon)}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} h(y)\zeta_\varepsilon(x-y)dy$.

接下来，令 $\varepsilon > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$。由于 $w_m^{n(\varepsilon)} \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ 且 $p = 2^k$，由引理 4.6 可得

$$\frac{1}{p}\partial_t^\alpha\left(w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\right)^p(t) \le f_m^{n(\varepsilon)}(t,x)w_m^{n(\varepsilon)}(t,x)\left|w_m^{n(\varepsilon)}(t,x)\right|^{p-2} \tag{4.14}$$

在 $t \in (0,\infty)$ 上。此外，由于 $w_m^n(0,x) = 0$，我们有

$$w_m^{n(\varepsilon)}(0,x) = 0. \tag{4.15}$$

因此，如果我们对 (4.14) 两边取随机积分 I_t^α，便有

$$\frac{1}{p}\left|w_m^{n(\varepsilon)}(t,x)\right|^p \le I_t^\alpha\left[f_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\left|w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\right|^{p-2}\right] \tag{4.16}$$

由于 $\left(w_m^{n(\varepsilon)}\right)^p \in C_c^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$、(4.15) 以及注 2.6。注意，(2.1) 与 $q=\infty$ 和 H¨older 不等式表明

$$\begin{aligned}
&\left\|I_\cdot^\alpha\left[f_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\left|w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\right|^{p-2}-f_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right|^{p-2}\right]\right\|_{L_1((0,t))}\\
&\le\int_0^t\left|f_m^{n(\varepsilon)}(s,x)w_m^{n(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{n(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}-f_m^{(\varepsilon)}(s,x)w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\right|ds\\
&\le N\int_0^t\left|f_m^{n(\varepsilon)}(s,x)-f_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|\left|w_m^{n(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-1}ds\\
&\quad+N\int_0^t\left|f_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left[w_m^{n(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{n(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}-w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\right]\right|ds\\
&\le N\left[A_n\left\|w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)}^2+B_nC_n\left\|f_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)}\right]\left\|w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)}^{p-3},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

其中

$$A_n=\left\|f_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)-f_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)}\quad B_n=\left\|w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)-w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)},$$

and

$$C_n=\left\|w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)}+\left\|w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)}.$$

此外,

$$A_n,B_n\to0\quad\text{and}\quad C_n\to2\left\|w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right\|_{L_p(0,t)}\quad\text{as}\quad n\to\infty \tag{4.18}$$

因为 $w_m^n\to w_m$ 和 $f_m^n\to f_m$ 属于 $L_p((0,t);H_p^\gamma)$。然后，将 (4.18) 应用于 (4.17)，可得

$$\left\|I_\cdot^\alpha\left[f_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\left|w_m^{n(\varepsilon)}(\cdot,x)\right|^{p-2}-f_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right|^{p-2}\right]\right\|_{L_1((0,t))}\to0$$

由于 $n\to\infty$。因此，存在一个序列 n_l，使得 $w^{n_l}{}_{(\varepsilon)m}(\cdot,x)\to w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)$，并且$I_\cdot^\alpha\left[f^{n_l(m}{}^{\varepsilon}\,w^{n_l)}{}_{m}{}^{\varepsilon}\left|w^{n_l)(}{}_{m}{}^{\varepsilon}\right|^{p-2}\right]\to I_\cdot^\alpha\left[f^{)(\varepsilon}{}_m\,w_m^{(\varepsilon)}\left|w_m^{(\varepsilon)}\right|^{p-2}\right]$)在 $[0,t]$ 上几乎处处成立。此外，由于 t 中的连续性，该收敛在 $[0,t]$ 上处处成立。接着，考虑序列 n_l 而非 n，并令 $l\to\infty$ 代入式 (4.16)，可得

$$\frac{1}{p}\left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^p\le I_t^\alpha\left[f_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(\cdot,x)\right|^{p-2}\right].$$

由于 $t \le \tau_m^m$， $\rho_m(u_m) = 1$。对 x 积分可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha)}{p}\int_{\mathbb{R}^d}\left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^p dx\\
&\le \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}(Lw_m(s,\cdot))^{(\varepsilon)}(x)w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dxds\\
&\quad+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\bar{b}^i(s,\bar{x}^i)\left(|w_m(s,\cdot)+v(s,\cdot)|^2\right)_{x^i}^{(\varepsilon)}(x)\right]w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dxds.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

此外，通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left[(Lw_m(s,\cdot))^{(\varepsilon)}(x)+\bar{b}^i\left(|w_m(s,\cdot)+v(s,\cdot)|^2\right)_{x^i}^{(\varepsilon)}(x)\right]w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dx\\
&\le -(p-1)\int_{\mathbb{R}^d}\left(a^{ij}w_m\right)_{x^j}^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)dx\\
&\quad+(p-1)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\left(2a_{x^j}^{ij}-b^i\right)w_m\right)^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)dx\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^d}\left(\left(a_{x^ix^j}^{ij}-b_{x^i}^i+c\right)w_m\right)^{(\varepsilon)}(s,x)w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dx\\
&\quad-(p-1)\int_{\mathbb{R}^d}\bar{b}^i(s,\bar{x}^i)\left((w_m(s,\cdot)+v(s,\cdot))^2\right)^{(\varepsilon)}(x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)dx.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

另外，注意到

$$\begin{aligned}
&\left|\left(a^{ij}w_m\right)_{x^j}^{(\varepsilon)}(s,x)-a^{ij}(s,x)w_{mx^j}^{(\varepsilon)}(s,x)\right|\\
&\quad=\varepsilon^{-1}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(a^{ij}(s,x-\varepsilon y)-a^{ij}(s,x)\right)w_m(s,x-\varepsilon y)\zeta_{y^j}(y)dy\right|\\
&\quad\le N(K)\int_{\mathbb{R}^d}|w_m(s,x-\varepsilon y)||y||\zeta_y(y)|dy,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

并且由 (3.2),

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^d}a^{ij}(s,x)w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)w_{mx^j}^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dx\\
&\quad\le -K^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\left|w_{mx}^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^2dx.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

因此，结合 (4.21) 和 (4.22)

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^d}\left(a^{ij}w_m\right)^{(\varepsilon)}_{x^j}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}w^{(\varepsilon)}_{mx^i}(s,x)dx\\
&\quad=-\int_{\mathbb{R}^d}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}w^{(\varepsilon)}_{mx^i}(s,x)\left[\left(aw_m\right)^{(\varepsilon)}_{x^j}(s,x)-a(s,x)w^{(\varepsilon)}_{mx^j}(s,x)\right]dx\\
&\qquad-\int_{\mathbb{R}^d}a^{ij}(s,x)w^{(\varepsilon)}_{mx^i}(s,x)w^{(\varepsilon)}_{mx^j}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dx\\
&\quad\le N\int_{\mathbb{R}^d}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\left|w^{(\varepsilon)}_{mx^i}(s,x)\right|\int_{\mathbb{R}^d}|w_m(s,x-\varepsilon y)||y||\zeta_y(y)|dydx\\
&\qquad-K^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\left|w^{(\varepsilon)}_{mx}(s,x)\right|^2dx\\
&\quad\le N\int_{\mathbb{R}^d}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|w_m(s,x-\varepsilon y)||y||\zeta_y(y)|dy\right)^2dx\\
&\qquad-\frac{1}{2}K^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\left|w^{(\varepsilon)}_{mx}(s,x)\right|^2dx,
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

其中 $N=N(K)$。此外，

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\left(2a^{ij}_{x^j}-b^i\right)w_m\right)^{(\varepsilon)}(s,x)\right|&=\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(2a^{ij}_{y^j}(s,y)-b^i(s,y)\right)w_m(s,y)\zeta_\varepsilon(x-y)dy\right|\\
&\le K\int_{\mathbb{R}^d}|w_m(s,y)|\zeta_\varepsilon(x-y)dy\\
&=K(|w_m(s,\cdot)|)^{(\varepsilon)}(x)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

and

$$
\left|\left(\left(a^{ij}_{x^ix^j}-b^i_{x^i}+c\right)w_m\right)^{(\varepsilon)}(s,x)\right|\le K(|w_m(s,\cdot)|)^{(\varepsilon)}(x).
\tag{4.25}
$$

因此，将 H¨older 不等式、(4.23)、(4.24) 和 (4.25) 应用于 (4.20)，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left[(Lw_m(s,\cdot))^{(\varepsilon)}(x)+\bar b^i\left(|w_m(s,\cdot)+v(s,\cdot)|^2\right)^{(\varepsilon)}_{x^i}(x)\right]w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dx\\
&\quad\le N\int_{\mathbb{R}}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\left(\int_{\mathbb{R}}|w_m(s,x-\varepsilon y)||y||\zeta_y(y)|dy\right)^2dx\\
&\qquad-\frac{p-1}{4K}\sum_i\int_{\mathbb{R}}\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}\left|w^{(\varepsilon)}_{mx^i}(s,x)\right|^2dx\\
&\qquad+N\sum_i\int_{\mathbb{R}^d}\left((|w_m(s,\cdot)|)^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}dx\\
&\qquad+N\int_{\mathbb{R}^d}(|w_m(s,\cdot)|)^{(\varepsilon)}(x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-1}dx.\\
&\qquad-(p-1)\sum_i\int_{\mathbb{R}^d}\bar b^i(s,\bar x^i)\left((w_m(s,\cdot)+v(s,\cdot))^2\right)^{(\varepsilon)}(x)\left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2}w^{(\varepsilon)}_{mx^i}(s,x)dx,
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

其中 $N = N(K)$。此外，注意到

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^p w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)dx = 0 \quad \text{for} \quad s \le t. \tag{4.27}$$

事实上，取一个非负光滑函数 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，使得 $\phi(x) = 1$ 在 $|x| < 1$ 上，$\phi(x) = 0$ 在 $|x| > 2$ 上，且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\phi'(x)| \le 2$。然后，分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^p w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)\phi(x/n)dx \\
&\quad = -p\int_{\mathbb{R}^d} \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^p w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)\phi(x/n)dx - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^d} \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^p w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\phi'(x/n)dx.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^p w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(s,x)\phi(x/n)dx \right| \le \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n(p+1)} \int_{\mathbb{R}^d} \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p+1} dx = 0 \tag{4.28}$$

并且 (4.28) 推出 (4.27)。然后，由 (4.26) 的最后一项，应用 (4.27) 和 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_i \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \bar{b}^i(s,\bar{x}^i) \int_{\mathbb{R}} \left(|w_m(t,\cdot)+v(t,\cdot)|^2\right)^{(\varepsilon)}(x) \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^{p-2} w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(t,x)dx^i d\bar{x}^i \right| \\
&\quad \le N\sum_i \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(|w_m(t,\cdot)+v(t,\cdot)|^2\right)^{(\varepsilon)}(x) - \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^2 \right| \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^{p-2} \left|w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(t,x)\right| dx \\
&\quad \le N\int_{\mathbb{R}^d} \left(\left(|w_m(t,\cdot)+v(t,\cdot)|^2\right)^{(\varepsilon)}(x) - \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^2 \right)^2 \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^{p-2} dx \\
&\qquad + \frac{1}{8KN}\sum_i \int_{\mathbb{R}^d} \left|w_{mx^i}^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^2 \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^{p-2} dx,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

其中 $N = N(K)$。然后，将 (4.26) 和 (4.29) 应用于 (4.19)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^p dx \\
&\quad \le NI_t^\alpha \int_{\mathbb{R}} \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2} \left(\int_{\mathbb{R}} |w_m(s,x-\varepsilon y)||y||\zeta_y(y)|dy \right)^2 dx \\
&\qquad + NI_t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \left| (|w_m(s,\cdot)|)^{(\varepsilon)}(x) \right|^2 \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-2} + (|w_m(s,\cdot)|)^{(\varepsilon)}(x) \left|w_m^{(\varepsilon)}(s,x)\right|^{p-1} dx \\
&\qquad + NI_t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \left(\left(|w_m(t,\cdot)+v(t,\cdot)|^2\right)^{(\varepsilon)}(x) - \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^2 \right)^2 \left|w_m^{(\varepsilon)}(t,x)\right|^{p-2} dx,
\end{aligned}$$

其中 $N = N(p, K)$。令 $\varepsilon \downarrow 0$，可得

$$
\begin{aligned}
&\|w_m(t,\cdot)\|_{L_p}^p \\
&\le N I_t^\alpha \int_{\mathbb{R}} |w_m(\cdot,x)|^p \, dx + N I_t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \left(|w_m(\cdot,x) + v(\cdot,x)|^2 - |w_m(\cdot,x)|^2 \right)^2 |w_m(\cdot,x)|^{p-2} \, dx \\
&\le N I_t^\alpha \int_{\mathbb{R}} |w_m(\cdot,x)|^p \, dx + N I_t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |v(\cdot,x)|^2 |w_m(\cdot,x)|^p + |v(\cdot,x)|^4 |w_m(\cdot,x)|^{p-2} \, dx \\
&\le N \left(1 + \sup_{s \le t, x \in \mathbb{R}^d} |v(s,x)|^2 \right) I_t^\alpha \|w_m(\cdot,\cdot)\|_{L_p}^p + N \sup_{s \le t} \|v(s,\cdot)\|_{L_{2p}}^{2p}.
\end{aligned}
$$

对所有 $t \le \tau_m^m$ 均成立。于是，由定理 4.7 可得

$$
\|w_m(t,\cdot)\|_{L_p}^p \le N \sup_{s \le t} \|v(s,\cdot)\|_{L_{2p}}^{2p} \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \sup_{s \le t, x \in \mathbb{R}^d} |v(s,x)|^2\right)^k}{\Gamma(k\alpha)} \frac{(\Gamma(\alpha) T^\alpha)^k}{k\alpha} \right]
$$

对所有 $t \le \tau_m^m$ 均成立。引理得证。

□

最后，我们证明全局解候选不会在有限时间内爆炸。

引理 4.9. 对任意 $T < \infty$，有

$$
\lim_{R \to \infty} P\left(\left\{ \omega \in \Omega : \sup_{t \le T, x \in \mathbb{R}^d} |u(t,x)| > R \right\} \right) = 0.
$$

证明。令 v 为引理 4.5 中引入的函数。定义

$$
\tau^1(S) := \inf\left\{ t \ge 0 : \|v(t,\cdot)\|_{L_p} \ge S \right\} \wedge T, \quad \tau^2(S) := \inf\left\{ t \ge 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |v(t,x)| \ge S \right\} \wedge T,
$$

and

$$
\tau_m^0(S) := \tau_m^m \wedge \tau^1(S) \wedge \tau^2(S),
$$

其中 τ_m^m为 (4.9) 中引入的停时。令 $r:=\frac{p}{p-1}$。于是，根据引理 4.2 和 2.10、(viii)、H¨older 不等式以及 Minkowski 不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
&\|u_m\|^p_{\mathcal{H}^\gamma_p(\tau_m^0(S))} - N\|u_0\|^p_{U^\gamma_p} \\
&\quad\le N\left\|\sum_i \bar{b}^i(u_m^2\rho_m(u_m))_{x^i}\right\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma-2}_p(\tau_m^0(S))} + N\|\sigma(u_m)\boldsymbol{\eta}\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma-2+c_0}_p(\tau_m^0(S),l_2)} \\
&\quad\le N\left\|u_m^2\right\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma-1}_p(\tau_m^0(S))} + N\|\sigma(u_m)\boldsymbol{\eta}\|^p_{\mathbb{H}^{\gamma-2+c_0}_p(\tau_m^0(S),l_2)} \\
&\quad\le N\mathbb{E}\int_0^{\tau_m^0(S)}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} R_{1-\gamma}(y)|u_m(s,x-y)|^2dy\right|^p dxds \\
&\qquad + N\mathbb{E}\int_0^{\tau_m^0(S)}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} |R_{-\gamma+2-c_0}(y)|^2\,|u_m(s,x-y)|^2dy\right|^{p/2} dxds \\
&\quad\le N\mathbb{E}\int_0^{\tau_m^0(S)}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} |R_{1-\gamma}(y)|^r\,|u_m(s,x-y)|^r dy\right|^{p/r} dx\int_{\mathbb{R}^d}|u_m(s,x)|^p dxds \\
&\qquad + N\mathbb{E}\int_0^{\tau_m^0(S)}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(x)|^2\,dx\right)^{p/2}\int_{\mathbb{R}^d}|u_m(s,x)|^p dxds \\
&\quad\le N_0\mathbb{E}\int_0^{\tau_m^0(S)}\left[1+\int_{\mathbb{R}^d}|u_m(s,x)|^p dx\right]\int_{\mathbb{R}^d}|u_m(s,x)|^p dxds,
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

其中 $N_0 = N(\alpha,\beta,\gamma,d,p,K,T)\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{1-\gamma}(x)|^r\,dx\right)^{p/r} + \left(\int_{\mathbb{R}^d}|R_{-\gamma+2-c_0}(x)|^2\,dx\right)^{p/2}\right]$。注意，由于 $r<\frac{d}{d+\gamma-1}$ 和注 2.8，$N_0<\infty$。然后，根据引理 4.8 以及 $\tau_1(S)$ 和 $\tau_2(S)$ 的定义，

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}|u_m(t,x)|^p dx \\
&\le N\int_{\mathbb{R}^d}|u_m(t,x)-v(t,x)|^p + |v(t,x)|^p dx \\
&\le N\sup_{s\le t}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|v(t,x)|\sup_{s\le t}\|v(s,\cdot)\|_p^p\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1+\sup_{s\le t,x\in\mathbb{R}^d}|v(t,x)|^2\right)^k}{\Gamma(k\alpha)}\frac{(\Gamma(\alpha)T^\alpha)^k}{k\alpha}\right] \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d}|v(t,x)|^p dx \\
&< N(p,S,K).
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

因此，结合 (4.30) 和 (4.31)，我们得到

$$
\|u_m\|^p_{\mathcal{H}^\gamma_p(\tau_m^0(S))} \le N + N\|u_0\|^p_{U^\gamma_p},
\tag{4.32}
$$

其中 $N = N(\alpha, \beta, \gamma, d, p, S, K, T)$。需要注意的是，(4.32) 的右端与 m 无关。因此，由切比雪夫不等式和引理 4.3，我们得到

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t\le\tau_m^0(S)}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|u(t,x)|>R\right) &\le \frac{1}{R^p}\mathbb{E}\sup_{t\le\tau_m^0,x\in\mathbb{R}^d}|u(t,x)|^p \\ &\le \frac{1}{R^p}\mathbb{E}\sup_{t\le\tau_m^0,x\in\mathbb{R}^d}|u_m(t,x)|^p \\ &\le \frac{1}{R^p}\|u_m\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau_m^0)} \\ &\le \frac{N}{R^p}, \end{aligned}$$

其中 $N = N(u_0, \alpha, \beta, \gamma, d, p, S, K, T)$。相比之下，根据引理 4.5，

$$\begin{aligned} &P\left(\tau^1(S)<T\right)+P\left(\tau^2(S)<T\right) \\ &\le P\left(\sup_{t\le T}\|v(t,\cdot)\|_{L_p}>S\right)+P\left(\sup_{t\le T}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|v(t,x)|>S\right) \\ &\le \frac{1}{S^p}\mathbb{E}\sup_{t\le T}\|v(t,\cdot)\|^p_{L_p}+\frac{1}{S^p}\mathbb{E}\sup_{t\le T,x\in\mathbb{R}^d}|v(t,x)|^p \\ &\le \frac{1}{S^p}N(u_0,h,\alpha,\beta,\gamma,d,p,K,T). \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} &P\left(\sup_{t\le T,x\in\mathbb{R}^d}|u(t,x)|>R\right) \\ &\le \liminf_{m\to\infty}P\left(\sup_{t\le\tau_m^0(S),x\in\mathbb{R}^d}|u(t,x)|>R\right)+P\left(\tau^1(S)<T\right)+P\left(\tau^2(S)<T\right) \\ &\le \frac{N_1}{R^p}+\frac{N_2}{S^p}, \end{aligned}$$

其中 $N_1 = N_1(u_0, \alpha, \beta, \gamma, d, p, S, K, T)$，且 $N_2 = N_2(u_0, h, \alpha, \beta, \gamma, d, p, K, T)$。令 $R \to \infty$ 和 $S \to \infty$ 依次取相应值，即可证明该引理。

□

定理 3.5 的证明。步骤 1。（唯一性）。设 $u, \bar{u} \in \mathcal{H}_p^\gamma{}_{,loc}$ 是方程（3.1）的非负解。根据定义 2.13，存在有界停时 τ_n $(n = 1, 2, \cdots)$，使得

$$\tau_n \uparrow \infty \quad \text{and} \quad u, \bar{u} \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau_n).$$

固定 $n \in \mathbb{N}$。注意，$u, \bar{u} \in C([0, \tau_n]; C(\mathbb{R}^d))$ 几乎处处成立，并且

$$\mathbb{E}\sup_{t\le\tau_n}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|u(t,x)|^p+\mathbb{E}\sup_{t\le\tau_n}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\bar{u}(t,x)|^p<\infty. \tag{4.33}$$

于是，对于 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$\tau_{m,n}^1 := \inf\left\{t \geq 0 : \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u(t,x)| > m\right\} \wedge \tau_n,$$

$$\tau_{m,n}^2 := \inf\left\{t \geq 0 : \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\bar{u}(t,x)| > m\right\} \wedge \tau_n,$$

and

$$\tau_{m,n} := \tau_{m,n}^1 \wedge \tau_{m,n}^2. \tag{4.34}$$

由 (4.33) 可知，$\tau_{m,\ n}^1$ 和 $\tau_{m,\ n}^2$ 均为定义良好的停时；因此，$\tau_{m,\ n}$ 是一个停时。注意到 $u, \bar{u} \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau_{m,\ n})$ 和 $\tau_{m,\ n} \uparrow \tau_n$ 在 $m \to \infty$ 时几乎处处成立。固定 $m \in \mathbb{N}$。注意到 $u, \bar{u} \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau_{m,\ n})$ 是方程的解

$$\partial_t^\alpha v = Lv + \bar{b}^i \left(v^2 \rho_m(v)\right)_{x^i} + \partial_t^\beta \int_0^t \sigma(v) dW_t, \quad 0 < t \leq \tau_{m,n}; \quad v(0,\cdot) = u_0,$$

其中 $Lv = a^{ij} v_{x^i x^j} + b^i v_{x^i} + cv$。根据引理 4.3 中的唯一性结果，我们得出，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，$u = \bar{u}$ 属于 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau_{m,\ n})$。由单调收敛定理可得 $u = \bar{u}$ 属于 $\mathcal{H}_p^\gamma(\tau_n)$，这意味着 $u = \bar{u}$ 属于 $\mathcal{H}_{p,\ loc}^\gamma$。

步骤 2（存在性）。设 $T < \infty$。对于 $m \in \mathbb{N}$，按照注 4.4 定义 τ_m^m 和 u。注意到

$$P\left(\tau_m^m < T\right) \leq P\left(\sup_{t\leq T, x\in\mathbb{R}^d} |u(t,x)| \geq m\right).$$

事实上，若 $\tau_m^m < T$，则 $\sup_{t\leq\tau_m^m,\ x\in\mathbb{R}^d} |u(t,x)| = \sup_{t\leq\tau_m^m,\ x\in\mathbb{R}^d} |u_m(t,x)| = m$ 几乎处处成立。于是，由引理 4.9 可得

$$\limsup_{m\to\infty} P\left(\tau_m^m < T\right) \leq \limsup_{m\to\infty} P\left(\sup_{t\leq T, x\in\mathbb{R}^d} |u(t,x)| \geq m\right) = 0$$

由于 $T < \infty$ 是任意的，$\tau_m^m \to \infty$ 依概率成立。此外，我们得出 $\tau_m^m \uparrow \infty$ 几乎处处成立，因为 τ_m^m 关于 m 单调递增。

最后，令 $\tau_m := \tau_m^m \wedge m$。注意（参见注 4.4）

$$u(t,x) = u_m(t,x) \quad \text{for} \quad t \in [0, \tau_m].$$

注意，对于 $t \in [0,\tau_m]$，$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u_m(t,x)| \leq m$；因此，$u_m$ 几乎处处满足 (3.1)，且 $t \in [0,\tau_m]$ 几乎处处成立。由于对于 $t \in [0,\tau_m]$ 有 $u = u_m$，且 $u_m \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau_m)$，可知 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau_m)$，并且 u 对所有 $t \leq \tau_m$ 几乎处处满足 (3.1)。我们有 $u \in \mathcal{H}_{p\ ,\ loc}^\gamma$，因为当 $m \to \infty$ 几乎处处成立时，$\tau_m \uparrow \infty$。

为了获得 H¨older 正则性，我们采用推论 2.18。该定理的证明 .

□

定理 3.9 的证明。定理 3.9 的证明受到 [26, 推论 5.11] 的启发。由于 $q > p$，根据定理 3.5，存在满足方程（3.1）的唯一解 $\bar{u} \in \mathcal{H}_{q\ ,loc}^\gamma$。根据定义 2.13，存在 τ_n，使得当 $n \to \infty$ 时，$\tau_n \to \infty$ 几乎处处成立，且 $u \in \mathcal{H}_p^\gamma(\tau_n)$ 和 $\bar{u} \in \mathcal{H}_q^\gamma(\tau_n)$。固定 $n \in \mathbb{N}$。由于 $\frac{2+\alpha d}{\alpha\gamma} < p < q$，我们可以按照（4.34）定义 $\tau_{m,n} (m \in \mathbb{N})$。注意，对于任意 $p_0 > p$，有

$$u \in \mathbb{L}_{p_0}(\tau_{m,n})$$

因为

$$\mathbb{E}\int_0^{\tau_{m,n}}\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^{p_0}dxdt \le m^{p_0-p}\mathbb{E}\int_0^{\tau_{m,n}}\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^{p}dxdt<\infty.$$

注意到 $\bar{b}^i u u_{x^i}\in \mathbb{H}_q^{\gamma-2}(\tau_{m,\ n})\subset \mathbb{H}_q^{-2}(\tau_{m,\ n})$。事实上，与 (4.6) 类似，

$$\mathbb{E}\int_0^{\tau_{m,n}}\left\|\frac{1}{2}\bar{b}^i(s,\cdot)\left((u(s,\cdot))^2\right)_{x^i}\right\|_{H_q^{\gamma-2}}^q ds \le N\mathbb{E}\int_0^{\tau_{m,n}}\int_{\mathbb{R}}|u(s,x)|^{2q}dxds<\infty.$$

此外，我们有

$$au_{xx}\in \mathbb{H}_q^{-2}(\tau_{m,n}),\quad bu_x\in \mathbb{H}_q^{-1}(\tau_{m,n}),\quad \text{and}\quad cu\in \mathbb{L}_q(\tau_{m,n}).$$

因此，由于 $\mathbb{L}_q(\tau_{m,\ n})\subset \mathbb{H}_q^{-1}(\tau_{m,\ n})\subset \mathbb{H}_q^{-2}(\tau_{m,\ n})$,

$$a^{ij}u_{x^ix^j}+b^iu_{x^i}+cu+\bar{b}^iuu_{x^i}\in \mathbb{H}_q^{-2}(\tau_{m,n}). \tag{4.35}$$

与 (4.12) 类似，我们有

$$\|\sigma(u)\boldsymbol{\eta}\|^q_{\mathbb{H}_q^{\gamma-2+c_0}(\tau_{m,n},l_2)}\le N\int_0^{\tau_{m,n}}\|h(t,\cdot)\|^q_{L_q}dt<\infty. \tag{4.36}$$

因此，我们有

$$\sigma(u)\boldsymbol{\eta}\in \mathbb{H}_q^{\gamma-2+c_0}(\tau_{m,n},l_2)\subset \mathbb{H}_q^{-2+c_0}(\tau_{m,n},l_2). \tag{4.37}$$

由 (4.35)、(4.37) 和引理 4.2 可知，u 属于 $\mathcal{L}_q(\tau_{m,\ n})$，且 u几乎处处满足 (3.1)，$t\le \tau_{m,\ n}$ 几乎处处成立。另一方面，由于 $\bar{b}^iuu_{x^i}\in \mathbb{H}_q^{\gamma-2}(\tau_{m,\ n})$ 且$\sigma(u)\boldsymbol{\eta}\in \mathbb{H}_q^{\gamma-2+c_0}(\tau_{m,\ n},l_2)$，引理 4.2 表明存在满足下式的 $v\in \mathcal{H}_q^{\gamma}(\tau_{m,\ n})$

$$\partial_t^\alpha v=Lv+\bar{b}^iuu_{x^i}+\partial_t^\alpha\int_0^t\sigma(u)\eta_k dw_t^k,\quad 0<t\le\tau_{m,n};\quad v(0,\cdot)=u_0, \tag{4.38}$$

其中 $Lv=a^{ij}v_{x^ix^j}+b^iv_{x^i}+cv$。在 (4.38) 中，注意这里使用的是 $\bar{b}^iuu_{x^i}$ 和 $\sigma^k(u)$，而不是 $\bar{b}^ivv_{x^i}$和 $\sigma^k(v)$。此外，由于 $u\in\mathcal{L}_q(\tau_{m,\ n})$ 满足方程 (4.38)，$\bar{v}:=u-v\in\mathcal{L}_q(\tau_{m,\ n})$ 满足

$$\partial_t^\alpha\bar{v}=a^{ij}\bar{v}_{x^ix^j}+b^i\bar{v}_{x^i}+c\bar{v},\quad 0<t\le\tau_{m,n};\quad \bar{v}(0,\cdot)=0.$$

根据引理 4.2 的确定性版本，我们有 $\bar{v}=0$ in $\mathcal{L}_q(\tau_{m,n})$；因此，$u=v$ in$\mathcal{L}_q(\tau_{m,n})$。所以，$u$属于 $\mathcal{H}_q^{\gamma}(\tau_{m,n})$。由于 $\bar{u}\in\mathcal{H}_q^{\gamma}(\tau_{m,n})$，且 $\bar{u}$ 满足方程（ 3.1 ），根据引理 4.3，我们有 $u=\bar{u}$ in $\mathcal{H}_q^{\gamma}(\tau_{m,n})$。定理得证。□

5. Proof of Theorem 2.16

本节给出解空间 $\mathcal{H}_p^{\gamma}(\tau)$ 的嵌入定理的证明。考虑以下分数阶扩散方程

$$\partial_t^\alpha u=\Delta u\quad t>0;\quad u(0,\cdot)=u_0(\cdot), \tag{5.1}$$

其中 $\alpha\in(0,1)$，且 $u_0(\cdot)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$。事实证明，存在基本解 $p(t,x)$，使得

$$p(t,\cdot)\in L_1(\mathbb{R}^d)\quad\text{and}\quad \mathcal{F}(p(t,\cdot))(\xi)=E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^2)$$

（例如，[24, 定理 2.1]），而（5.1）的解为

$$u(t,x)=(u_0*p(t,\cdot))(x)=\int_{\mathbb{R}^d}u_0(y)p(t,x-y)dy.$$

为方便起见，定义

$$q_{\alpha,\beta}(t,x) := \begin{cases} I^{\alpha-\beta}p(t,x) & \text{if} \quad \alpha \geq \beta \\ D^{\beta-\alpha}p(t,x) & \text{if} \quad \alpha < \beta. \end{cases}$$

我们收集 r so与 $p(t,x)$ 和 $q_{\alpha,\ \beta}(t,x)$ 相关的一些事实（更多信息请参见 [22, 23, 24]）。

引理 5.1. 设 $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $\beta < \alpha + 1/2$, $\gamma \in [0,2)$, 且 $\sigma \in \mathbb{R}$。

(i) 对所有 $t \neq 0$ 和 $x \neq 0$,

$$\partial_t^\alpha p(t,x) = \Delta p(t,x) \quad and \quad \partial_t p(t,x) = \Delta q_{\alpha,1}(t,x).$$

此外，对每个 $x \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) \to 0$如 $t \downarrow 0$。而且， $\frac{\partial}{\partial t}p(t,x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积，且对任意 $\delta > 0$，在 $t \in [\delta, T]$ 上一致成立。

(ii) 存在常数 $c = c(\alpha,d)$ 和 $N = N(\alpha,d)$，使得如果 $|x|^2 \geq t^\alpha$,

$$|p(t,x)| \leq N|x|^{-d} \exp\left\{-c|x|^{\frac{2}{2-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\}.$$

(iii) 设 $n \in \mathbb{N}$。那么，存在 $N = N(\alpha,\gamma,n)$，使得

$$\left| D_t^\sigma D_x^n (-\Delta)^{\gamma/2} q_{\alpha,\beta}(1,x) \right| \leq N\left(|x|^{-d+2-\gamma-n} \wedge |x|^{-d-\gamma-n} \right).$$

(iv) 缩放性质成立。换言之,

$$q_{\alpha,\beta}(t,x) = t^{-\frac{\alpha d}{2}+\alpha-\beta} q_{\alpha,\beta}(1, xt^{-\frac{\alpha}{2}}),$$

$$(-\Delta)^{\gamma/2} q_{\alpha,\beta}(t,x) = t^{-\frac{\alpha(d+\gamma)}{2}+\alpha-\beta} (-\Delta)^{\gamma/2} q_{\alpha,\beta}(1, xt^{-\frac{\alpha}{2}}).$$

证明。由 [23] 中的定理 2.1 和定理 2.3 可知，(i)、(ii) 和 (iii) 成立。对于 (iv)，参见 [23] 中的 (5.2)。□

注 5.2。为证明定理 2.16，我们定义这些算子。设 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 和 $f \in C_c^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$。取一个满足以下形式的函数 $g = (g^1, g^2, \dots)$

$$g^k(t,x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n 1_{(\tau_{i-1},\tau_i]}(t) g^{ik}(x) & for \quad k = 1,2,\dots,n, \\ 0 & for \quad k = n+1,\dots \end{cases} \tag{5.2}$$

对于某个 $n \in \mathbb{N}$，其中 τ_i 是有界停时，且 $g^{ik} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$。此外，我们 s et

$$T_t^1 \phi(x) := \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x-y)\phi(y)dy, \tag{5.3}$$

$$T_t^2 f(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} q_{\alpha,1}(t-r,x-y) f(r,y) dy ds, \tag{5.4}$$

$$T_t^3 g(t,x) := \sum_k \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} q_{\alpha,\beta}(t-r,x-y) g^k(r,y) dy dw_s^k. \tag{5.5}$$

众所周知， $T_t^1\phi$、 $T_t^2 f$和 $T_t^3 g$分别是以下方程的解

$$\partial_t^\alpha u^1 = \Delta u^1; \quad u^1(0,\cdot) = \phi, \tag{5.6}$$

$$\partial_t^\alpha u^2 = \Delta u^2 + f; \quad u^2(0,\cdot) = 0,$$

$$\partial_t^\alpha u^3 = \Delta u^3 + \partial_t^\beta \int_0^t g^k dw_s^k; \quad u^3(0,\cdot) = 0,$$

（更多信息请参见 [22, 23, 24]）。

首先，我们给出 T_t^1 的平滑效应，这意味着 $T_t^1\phi$ 在 t 中连续。

引理 5.3. 设 $\tau \le T$ 是一个有界停时，且 $\alpha \in (0,1)$。若 $p \in (1,\infty)$, $\theta \in [0,\alpha)$,$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，且 $t \in (0,T)$，则有

$$e^{-t}\left\|T_t^1\phi\right\|_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}}} \le Nt^{-\theta}\|\phi\|_{L_p} \tag{5.7}$$

其中 $N = N(\alpha,\theta,d,p,T)$。

证明. 在 $\theta = 0$ 的情形下，根据 Mink¨owski 不等式，有

$$\|T_t^1\phi\|_{L_p} \le \|p(t,\cdot) * \phi\|_{L_p} \le \|p(t,\cdot)\|_{L_1}\|\phi\|_{L_p} \le \|\phi\|_{L_p}. \tag{5.8}$$

因此，我们得到 (5.7)。对于 $\theta \in (0,\alpha)$，注意到

$$\|e^{-t}T_t^1\phi\|_{H_p^{2\theta/\alpha}} = \|(1-\Delta)^{\theta/\alpha}(e^{-t}T_t^1\phi)\|_{L_p} \le \|e^{-t}T_t^1\phi\|_{L_p} + \|(-\Delta)^{\theta/\alpha}(e^{-t}T_t^1\phi)\|_{L_p},$$

其中，最后一个不等式由引理 2.10 (v) 得出。由于 $e^{-t} \le (Nt^{-\theta} \wedge 1)$，我们有

$$\left\|e^{-t}T_t^1\phi\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}} \le N\left(t^{-\theta}\left\|T_t^1\phi\right\|_{L_p} + \left\|(-\Delta)^{\theta/\alpha}T_t^1\phi\right\|_{L_p}\right). \tag{5.9}$$

由不等式 (5.8)，我们有

$$t^{-\theta}\|T_t^1\phi\|_{L_p} \le t^{-\theta}\|\phi\|_{L_p}. \tag{5.10}$$

另一方面，闵可夫斯基不等式给出

$$\|(-\Delta)^{\theta/\alpha}T_t^1 h\|_{L_p} = \|(-\Delta)^{\theta/\alpha}(p(t,\cdot) * \phi)\|_{L_p} \le \|((-\Delta)^{\theta/\alpha}p)(t,\cdot)\|_{L_1}\|\phi\|_{L_p}. \tag{5.11}$$

此外，引理 5.1 (iv)、(ii) 和 (iii) 可得

$$\begin{aligned}\|((-\Delta)^{\theta/\alpha}p)(t,\cdot)\|_{L_1} &= \int_{\mathbb{R}^d}|((-\Delta)^{\theta/\alpha}p)(t,x)|dx \\ &\le t^{-\theta}\int_{\mathbb{R}^d}|((-\Delta)^{\theta/\alpha}p)(1,x)|dx \\ &\le N(\alpha,\theta,d,p)t^{-\theta}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

然后，将 (5.12) 应用于 (5.11)，我们有

$$\|(-\Delta)^{\theta/\alpha}T_t^1\phi\|_{L_p} \le Nt^{-\theta}\|\phi\|_{L_p}. \tag{5.13}$$

因此，将 (5.10) 和 (5.13) 代入 (5.9)，我们得到 (5.7)。引理得证。 □

为了继续下去，我们介绍 Slobodetskii 空间的一个嵌入定理 es.

引理 5.4. 若 $\mu p > 1$ 和 $p \ge 1$，对于任意连续的 L_p 值函数 ϕ 和 $\gamma \le \rho$，有如下结论:

$$\|\phi(\rho)-\phi(\gamma)\|_{L_p}^p \le N(\rho-\gamma)^{\mu p-1}\int_\gamma^\rho\int_\gamma^\rho 1_{t>s}\frac{\|\phi(t)-\phi(s)\|_{L_p}^p}{|t-s|^{1+\mu p}}dsdt \quad \left(\frac{0}{0} := 0\right), \tag{5.14}$$

其中 $N = N(\mu,p)$。特别地,

$$\mathbb{E}\sup_{0\le s<t\le T}\frac{\|\phi(t)-\phi(s)\|_{L_p}^p}{|t-s|^{\mu p-1}} \le N\int_0^T\int_0^T 1_{t>s}\frac{\mathbb{E}\,\|\phi(t)-\phi(s)\|_{L_p}^p}{|t-s|^{1+\mu p}}dsdt. \tag{5.15}$$

借助引理 5.4，我们得到 $T_t^1\phi$、 $T_t^2 f$ 和 $T_t^3 g$ 在 $t \in [0,T]$ 上的 Hölder 连续性。

引理 5.5。设 $\alpha\in(0,1)$。

(i) 若 $p\in(1,\infty)$、$\theta\in(0,\alpha)$ 和 $\mu\in(0,1)$ 满足

$$p>\frac{1}{\alpha-\theta},\quad \mu\in\left(\frac{1}{\alpha p},\frac{\alpha-\theta}{\alpha}\right) \tag{5.16}$$

且 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$，则对于 $t,s\in(0,T)$，

$$\left\|T_t^1 f-T_s^1 f\right\|^p_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}}\le N|t-s|^{\alpha\mu p-1}\left\|\phi\right\|^p_{L_p}, \tag{5.17}$$

其中 $N=N(\alpha,\theta,d,p,T)$。此外，

$$\sup_{0\le s<t\le T}\frac{\left\|T_t^1\phi-T_s^1\phi\right\|^p_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}}}{|t-s|^{\alpha\mu p-1}}\le N\left\|\phi\right\|^p_{L_p} \tag{5.18}$$

其中 $N=N(\alpha,\theta,d,p,T)$。

(ii) 若 $p\in(1,\infty)$、$\theta\in(0,\alpha)$ 和 $\mu\in(0,1)$ 满足 (5.16)，且 $f\in C_c^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$，则对于 $t,s\in(0,T)$，

$$\left\|T_t^2 f-T_s^2 f\right\|^p_{H_p^{2\theta/\alpha}}\le N|t-s|^{\alpha\mu p-1}\int_0^T\left\|f(r,\cdot)\right\|^p_{L_p}dr \tag{5.19}$$

其中 $N=N(\alpha,\theta,d,p,T)$。此外，

$$\sup_{0\le s<t\le T}\frac{\left\|T_t^2 f-T_s^2 f\right\|^p_{H_p^{2\theta/\alpha}}}{|t-s|^{\alpha\mu p-1}}\le N\int_0^T\left\|f(r,\cdot)\right\|^p_{L_p}dr, \tag{5.20}$$

其中 $N=N(\alpha,\theta,d,p,T)$。

(iii) 令 $\tau\le T$ 为有界停时。若 $\beta<\alpha+\frac{1}{2}$，$p\in[2,\infty)$，$\theta\in(0,\alpha-\beta+1/2)$ 和 $\mu\in(0,1)$ 满足

$$p>\frac{1}{(\alpha-\beta-\theta)\wedge 1/2+1/2},\quad \mu\in\left(\frac{1}{\alpha p},\frac{(\alpha-\beta-\theta)\wedge 1/2+1/2}{\alpha}\right),$$

且 $g=(g^1,g^2,\dots)$ 是一个 (5.2) 型函数，则对于 $t,s\in(0,T)$，有

$$\mathbb{E}\left\|T_{t\wedge\tau}^3 g-T_{s\wedge\tau}^3 g\right\|^p_{H_p^{2\theta/\alpha}(l_2)}\le N|t-s|^{\alpha\mu p-1}\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(\tau,l_2)}, \tag{5.21}$$

其中 $N=N(\alpha,\beta,\theta,d,p,T)$。此外，

$$\mathbb{E}\sup_{0\le s<t\le\tau}\frac{\left\|T_t^3 g-T_s^3 g\right\|^p_{H_p^{2\theta/\alpha}(l_2)}}{|t-s|^{\alpha\mu p-1}}\le N\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(\tau,l_2)}, \tag{5.22}$$

其中 $N=N(\alpha,\beta,\theta,d,p,T)$。

（i）的证明。由（5.14），可得

$$\begin{aligned}\left\|T_\rho^1\phi-T_\gamma^1\phi\right\|^p_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}}&\le N|\rho-\gamma|^{\alpha\mu p-1}\int_0^T\int_0^T 1_{t>s}\frac{\left\|T_t^1\phi-T_s^1\phi\right\|^p_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}}}{|t-s|^{1+\alpha\mu p}}dsdt\\&\le N|\rho-\gamma|^{\alpha\mu p-1}\int_0^T\int_0^{T-t}t^{-1-\alpha\mu p}\left\|T_{t+s}^1\phi-T_s^1\phi\right\|^p_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}}dsdt.\end{aligned} \tag{5.23}$$

由于 $T_t^1\phi$ 是（5.6）的一个解，根据引理 5.3 可得

$$\begin{aligned}
&\left\|T_{t+s}^1\phi - T_s^1\phi\right\|_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}} \\
&\le \left\|(T_{t+s}^1\phi - \phi) - (T_s^1\phi - \phi)\right\|_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}} \\
&\le \left\|\int_0^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}\Delta T_r^1\phi dr - \int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\Delta T_r^1\phi dr\right\|_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}} \\
&\le \int_s^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}\left\|T_r^1\phi\right\|_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}}} dr \\
&\quad + \int_0^s \left|(t+s-r)^{\alpha-1} - (s-r)^{\alpha-1}\right| \left\|T_r^1\phi\right\|_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}}} dr \\
&\le N(2t^\alpha + s^\alpha - (t+s)^\alpha)t^{-\theta}\|\phi\|_{L_p}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

由于 $0 \le 2t^\alpha + s^\alpha - (t+s)^\alpha \le 2t^\alpha$，将 (5.24) 应用于 (5.23)，

$$\begin{aligned}
\left\|T_t^1\phi - T_s^1\phi\right\|_{H_p^{\frac{2\theta}{\alpha}-2}}^p &\le N|\rho-\gamma|^{\alpha\mu p-1}\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p+\alpha p-\theta p}dt\|\phi\|_{L_p}^p \\
&\le N|\rho-\gamma|^{\alpha\mu p-1}\|\phi\|_{L_p}^p.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 (5.17)。

要得到 (5.18)，用 (5.15) 替代 (5.14)，并重复上述证明。

(ii) 的证明。令 $\rho > 0$ 和 $\gamma > 0$。注意到 (5.14) 给出

$$\left\|T_\rho^2 f - T_\gamma^2 f\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}}^p \le N|\rho-\gamma|^{\alpha\mu p-1}\int_0^T\int_0^T 1_{t>s}\frac{\left\|T_t^2 f - T_s^2 f\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}}^p}{|t-s|^{1+\alpha\mu p}}dsdt. \tag{5.25}$$

然后，根据 $T_t^2 f$ 的定义（见 (5.4)），

$$\begin{aligned}
&\left\|T_t^2 f - T_s^2 f\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}} \\
&\le \left\|\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d} q_{\alpha,1}(t-r,y)f(r,\cdot-y)dydr\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}} \\
&\quad + \left\|\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}\left(q_{\alpha,1}(t-r,y) - q_{\alpha,1}(s-r,y)\right)f(r,\cdot-y)dydr\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Set

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_0^T\int_0^T 1_{t>s}\frac{\left\|\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d} q_{\alpha,1}(t-r,y)f(r,\cdot-y)dydr\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}}^p}{|t-s|^{1+\alpha\mu p}}dsdt, \\
I_2 &:= \int_0^T\int_0^T 1_{t>s}\frac{\left\|\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}\left(q_{\alpha,1}(t-r,y) - q_{\alpha,1}(s-r,y)\right)f(r,\cdot-y)dydr\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}}^p}{|t-s|^{1+\alpha\mu p}}dsdt.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

然后，将 (5.26) 和 (5.27) 应用于 (5.25)，

$$\left\|T_t^2 f - T_s^2 f\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}}^p \le |t-s|^{\alpha\mu p-1}(I_1 + I_2). \tag{5.28}$$

为处理 I_1，我们采用闵可夫斯基不等式、变量替换和引理 2.10 (v)。于是，

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left((1-\Delta)^{\theta/\alpha}q_{\alpha,1}\right)(r,y)\right|dydr\right)^p dt\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds \\ &\leq I_{11}+I_{12}, \end{aligned} \tag{5.29}$$

其中

$$\begin{aligned} I_{11} &:= \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,1}(r,y)|\,dydr\right)^p dt\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds, \\ I_{12} &:= \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left(\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,1}\right)(r,y)\right|dydr\right)^p dt\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds. \end{aligned}$$

由于 $\mu<1$，由引理 5.1 (iv) 和 (iii) 可得

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p+\alpha p}dt\left(\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,1}(1,y)|\,dy\right)^p\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds \\ &\leq N\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds. \end{aligned} \tag{5.30}$$

类似地，由于 $\mu<1-\theta/\alpha$,

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p+\alpha p-\theta p}dt\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left(\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,1}\right)(1,y)\right|dy\right)^p\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds \\ &\leq N\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds. \end{aligned} \tag{5.31}$$

因此，将 (5.30) 和 (5.31) 应用于 (5.29)，可得

$$I_1\leq N\int_0^T\|f(s,\cdot)\|_{L_p}^p ds. \tag{5.32}$$

接下来，我们处理 $I_{2\circ}$ 与 I_1 的情形类似，可得

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^T\frac{\int_0^{T-t}\left(\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}\left|(1-\Delta)^{\theta/\alpha}\left(q_{\alpha,1}(t+r,y)-q_{\alpha,1}(r,y)\right)\right|dy\|f(s-r,\cdot)\|_{L_p}dr\right)^p ds}{t^{1+\alpha\mu p}}dt \\ &\leq I_{21}+I_{22}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

其中

$$\begin{aligned} I_{21} &:= \int_0^T\frac{\int_0^{T-t}\left(\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,1}(t+r,y)-q_{\alpha,1}(r,y)|\,dy\|f(s-r,\cdot)\|_{L_p}dr\right)^p ds}{t^{1+\alpha\mu p}}dt, \\ I_{22} &:= \int_0^T\frac{\int_0^{T-t}\left(\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}\left|\Delta^{\theta/\alpha}\left(q_{\alpha,1}(t+r,y)-q_{\alpha,1}(r,y)\right)\right|dy\|f(s-r,\cdot)\|_{L_p}dr\right)^p ds}{t^{1+\alpha\mu p}}dt. \end{aligned}$$

由于 $\mu<1$，由闵可夫斯基不等式和微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}
I_{21} &\leq \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,1}(t+r,y)-q_{\alpha,1}(r,y)|\,dydr\right)^p dt\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}ds\\
&\leq \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\int_r^{t+r}\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,2}(s,y)|\,dydsdr\right)^p dt\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}ds\\
&\leq N\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t} r^{\alpha-1}-(t+r)^{\alpha-1}dr\right)^p dt\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}ds\\
&\leq N\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p+\alpha p}dt\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}ds\\
&\leq N\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}ds.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

此外，由于 $\mu<1-\theta/\alpha$,

$$\begin{aligned}
I_{22} &\leq \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\int_{\mathbb{R}^d}\int_r^{t+r}\left|(\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,2}(s,y)\right|dsdydr\right)^p dt\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p}ds\\
&\leq N\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p+\alpha p-\theta p}dt\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p}ds\\
&\leq N\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p}ds.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

因此，将 (5.34) 和 (5.35) 代入 (5.33)，可得

$$I_2 \leq N\int_0^T \|f(s,\cdot)\|^p_{L_p}ds, \tag{5.36}$$

因此，将 (5.32) 和 (5.36) 结合后代入 (5.28)，可得 (5.19)。

为得到 (5.20)，用 (5.15) 替代 (5.14)，并逐字重复上述证明。

（iii）的证明。由（5.14），可得

$$\mathbb{E}\left\|T^3_\rho g-T^3_\gamma g\right\|^p_{H^{2\theta/\alpha}_p(l_2)}\leq N|\rho-\gamma|^{\alpha\mu p-1}\int_0^T\int_0^T 1_{t>s}\frac{\mathbb{E}\left\|T^3_t g-T^3_s g\right\|^p_{H^{2\theta/\alpha}_p(l_2)}}{|t-s|^{1+\alpha\mu p}}dsdt.$$

No注意到，Burkholder-Davis-Gundy不等式和Minkowski不等式意味着 at

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\|T_t^3 g - T_s^3 g\right\|_{H_p^{2\theta/\alpha}(l_2)}^p \\
&\le N\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\left(\sum_k\left|\int_s^t\int_{\mathbb{R}^d}((1-\Delta)^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta})(t-r,y)g^k(r,x-y)dydw_r^k\right|^2\right)^{p/2} \\
&\quad+\left(\sum_k\left|\int_0^s\int_{\mathbb{R}^d}\left[(1-\Delta)^{\theta/\alpha}\left(q_{\alpha,\beta}(t-r,y)-q_{\alpha,\beta}(s-r,y)\right)\right]g^k(r,x-y)dydw_r^k\right|^2\right)^{p/2}dx \\
&\le N\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\left(\int_0^{t-s}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|((1-\Delta)^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta})(t-s-r,y)\right||g(s+r,x-y)|_{l_2}dy\right)^2dr\right)^{p/2} \\
&\quad+\left(\int_0^s\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|(1-\Delta)^{\theta/\alpha}\left(q_{\alpha,\beta}(t-r,y)-q_{\alpha,\beta}(s-r,y)\right)\right||g(r,x-y)|_{l_2}dy\right)^2dr\right)^{p/2}dx \\
&\le N\mathbb{E}\left(\int_0^{t-s}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|((1-\Delta)^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta})(t-s-r,y)\right|dy\right)^2\|g(s+r,\cdot)\|_{L_p(l_2)}^2dr\right)^{p/2} \\
&\quad+N\mathbb{E}\left(\int_0^s\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|(1-\Delta)^{\theta/\alpha}\left(q_{\alpha,\beta}(t-r,y)-q_{\alpha,\beta}(s-r,y)\right)\right|dy\right)^2\|g(r,\cdot)\|_{L_p(l_2)}^2dr\right)^{p/2}.
\end{aligned}
$$

接着，令

$$
\begin{aligned}
I_3&:=\int_0^T\int_0^T 1_{t>s}|t-s|^{-1-\alpha\mu p}\mathbb{E}\left(\int_0^{t-s}A(t,s,r)\|g(s+r,\cdot)\|_{L_p(l_2)}^2dr\right)^{p/2}dsdt,\\
I_4&:=\int_0^T\int_0^T 1_{t>s}|t-s|^{-1-\alpha\mu p}\mathbb{E}\left(\int_0^{s}B(t,s,r)\|g(r,\cdot)\|_{L_p(l_2)}^2dr\right)^{p/2}dsdt,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A(t,s,r)&=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\left(1-\Delta\right)^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta}(t-s-r,y)|dy\right)^2,\\
B(t,s,r)&=\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|(1-\Delta)^{\theta/\alpha}\left(q_{\alpha,\beta}(t-r,y)-q_{\alpha,\beta}(s-r,y)\right)\right|dy\right)^2.
\end{aligned}
$$

注意到，由闵可夫斯基不等式和引理 2.10 (v) 可知

$$
\begin{aligned}
I_3&\le\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|((1-\Delta)^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta})(t-r,y)\right|dy\right)^2dr\right)^{p/2}dt\|g\|_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}^p \qquad (5.37)\\
&\le I_{31}+I_{32},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_{31}&:=\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,\beta}(r,y)|dy\right)^2dr\right)^{p/2}dt\|g\|_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}^p,\\
I_{32}&:=\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left(\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta}\right)(r,y)\right|dy\right)^2dr\right)^{p/2}dt\|g\|_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}^p.
\end{aligned}
$$

由于 $\frac{1}{\alpha}\left(\alpha-\beta+\frac{1}{2}\right)>\mu$，根据引理 5.1 (iii)，我们有

$$\begin{aligned} I_{31} &= \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,\beta}(r,y)|dy\right)^2 dr\right)^{p/2} dt\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)} \\ &= \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^t r^{2(\alpha-\beta)}dr\right)^{p/2} dt\left(\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,\beta}(1,y)|dy\right)^p \|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)} \\ &= \int_0^T t^{-1+(\alpha-\beta+1/2-\alpha\mu)p}dt\left(\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,\beta}(1,y)|dy\right)^p \|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)} \\ &\le N\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

类似地，当 $\frac{1}{\alpha}\left(\alpha-\beta-\theta+\frac{1}{2}\right)>\mu$ 时，

$$\begin{aligned} I_{32} &\le \int_0^T t^{-1+(-\alpha\mu+\alpha-\beta-\theta+1/2)p}dt\left(\int_{\mathbb{R}^d}|(\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta})(1,y)|dy\right)^p \|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)} \\ &\le N\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

因此，将 (5.38) 和 (5.39) 代入 (5.37)，可得

$$I_3 \le N\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}. \tag{5.40}$$

在 I_4 的情形下，由闵可夫斯基不等式和引理 2.10 (v)，可得

$$I_4 \le I_{41}+I_{42}.$$

进一步，

$$I_{41} := \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\mathbb{E}\int_0^{T-t}\left(\int_0^s\left(\int_{\mathbb{R}^d}|C(t,r,y)|dy\right)^2\|g(s-r,\cdot)\|^2_{L_p(l_2)}dr\right)^{p/2}dsdt,$$

$$I_{42} := \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\mathbb{E}\int_0^{T-t}\left(\int_0^s\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta^{\theta/\alpha}C(t,r,y)|dy\right)^2\|g(s-r,\cdot)\|^2_{L_p(l_2)}dr\right)^{p/2}dsdt,$$

其中

$$C(t,r,y)=q_{\alpha,\beta}(t+r,y)-q_{\alpha,\beta}(r,y).$$

我们来处理 I_{41}。根据闵可夫斯基不等式、微积分基本定理和引理5.1，我们有

$$\begin{aligned} I_{41} &\le N\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,\beta}(t+r,y)-q_{\alpha,\beta}(r,y)|dy\right)^2 dr\right)^{p/2} dt\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)} \\ &\le N\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\left(\int_r^{t+r}\int_{\mathbb{R}^d}|q_{\alpha,\beta+1}(s,y)|dyds\right)^2 dr\right)^{p/2} dt\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)} \\ &\le NH_1\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}, \end{aligned} \tag{5.41}$$

其中

$$H_1 := \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\left(\int_r^{t+r}s^{\alpha-\beta-1}ds\right)^2 dr\right)^{p/2} dt \tag{5.42}$$

且 $N = N(\alpha, \beta, d, p, T)$。接下来，我们断言

$$H_1 < \infty \tag{5.43}$$

为证明 (5.43)，令

$$\chi(t) := \int_0^{T-t} \left(\int_r^{t+r} s^{\alpha-\beta-1} ds \right)^2 dr.$$

此外，

$$H_1 = \int_0^T t^{-1-\alpha\mu p} (\chi(t))^{p/2} dt \tag{5.44}$$

根据 $\alpha - \beta$ 的取值范围，我们考虑以下五种情况。

（情况 1。） $-1/2 < \alpha - \beta < 0$

对于 $t \in (0, T)$，有

$$0 \le \chi(t) \le N \int_0^{T-t} r^{2(\alpha-\beta)} - (t+r)^{2(\alpha-\beta)} dr \le N t^{2(\alpha-\beta)+1}, \tag{5.45}$$

其中 $N = N(\alpha, \beta)$。于是，由于 $\frac{1}{\alpha}(\alpha - \beta + 1/2) > \mu$，结合（5.44）和（5.45），

$$H_1 \le N(\alpha, \beta, p) \int_0^T t^{-1+p(-\alpha\mu+\alpha-\beta+1/2)} dt < \infty.$$

（情形 2。） $\alpha - \beta = 0$

注意到

$$\chi(t) = \int_0^{T-t} \left(\int_r^{t+r} s^{-1} ds \right)^2 dr = \int_0^{T-t} \left(\log\left(\frac{t+r}{r} \right) \right)^2 dr.$$

显然，$\chi(0) = 0$。注意到

$$\chi'(t) \le 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+r} \log\left(\frac{1+r}{r} \right) dr = 2 \int_0^\infty x (e^x - 1)^{-1} dx = \pi^2/3$$

在 $t \in (0, T/2)$ 上。因此，

$$0 \le \chi(t) = \chi(t) - \chi(0) = \int_0^t \chi'(s) ds \le \frac{\pi^2}{3} t \tag{5.46}$$

在 $t \in (0, T/2)$ 上。此外，$\chi(t) \le N$ 在 $t \in (T/2, T)$ 上。因此，

$$H_1 \le N \int_0^{T/2} t^{-1+(-\alpha\mu+1/2)p} dt + N < \infty,$$

其中 $N = N(\alpha, \beta, p)$。

（情形 3。） $0 < \alpha - \beta < 1/2$

注意到 χ 二阶连续可微，且

$$\begin{aligned} \chi'(t) = (\alpha-\beta)^{-2} \left[-T^{2(\alpha-\beta)} - (T-t)^{2(\alpha-\beta)} + 2T^{\alpha-\beta}(T-t)^{\alpha-\beta} \right] \\ + 2(\alpha-\beta)^{-1} \int_0^{T-t} (t+r)^{2(\alpha-\beta)-1} - (t+r)^{\alpha-\beta-1} r^{\alpha-\beta} dr, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\chi''(t) &= 2(\alpha-\beta)^{-1}(T-t)^{2(\alpha-\beta)-1} - 2(\alpha-\beta)^{-1}T^{\alpha-\beta}(T-t)^{\alpha-\beta-1}\\ &\quad + 2(\alpha-\beta)^{-1}T^{\alpha-\beta-1}(T-t)^{\alpha-\beta} - 2(\alpha-\beta)^{-1}t^{2(\alpha-\beta)-1}\\ &\quad - 2(\alpha-\beta)^{-1}(\alpha-\beta-1)\int_0^{T-t}(t+r)^{\alpha-\beta-2}r^{\alpha-\beta}dr.\end{aligned} \tag{5.47}$$

此外， $\chi(0) = \chi'(0) = 0$。然后，利用微积分基本定理和$\alpha-\beta \in (0,1/2)$，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(t) &= \int_0^t\int_0^s \chi''(\rho)d\rho ds\\ &\le 2(\alpha-\beta)^{-1}\int_0^t\int_0^s (T-\rho)^{2(\alpha-\beta)-1}d\rho ds\\ &\quad - 2(\alpha-\beta)^{-1}(\alpha-\beta-1)\int_0^t\int_0^s\int_0^{T-\rho}(\rho+r)^{\alpha-\beta-2}r^{\alpha-\beta}drd\rho ds\\ &\le N\int_0^t\left(T^{2(\alpha-\beta)} - (T-s)^{2(\alpha-\beta)}\right)ds + N\int_0^t\int_0^s\int_0^{T-\rho}(\rho+r)^{2(\alpha-\beta)-2}drd\rho ds\\ &\le N\int_0^t s^{2(\alpha-\beta)}ds + N\int_0^t\int_0^s T^{2(\alpha-\beta)-1}drd\rho ds\\ &\le Nt^{2(\alpha-\beta)+1},\end{aligned} \tag{5.48}$$

其中 $N = N(\alpha,\beta,T)$。因此，

$$H_1 \le N(\alpha,\beta,p,T)\int_0^T t^{-1+p(-\alpha\mu+\alpha-\beta+1/2)}dt < \infty.$$

（情形 4。） $\alpha-\beta = 1/2$

由于 $\chi(0) = \chi'(0) = 0$，根据微积分基本定理，我们有

$$\begin{aligned}\chi(t) &= \int_0^t\int_0^s \chi''(\rho)d\rho ds\\ &\le N\int_0^t\int_0^s (T-\rho)^{1/2} + N\int_0^{T-\rho}(\rho+r)^{-3/2}r^{1/2}drd\rho ds\\ &\le Nt^2(1+|\log t|),\end{aligned}$$

其中 $N = N(T)$。因此，

$$H_1 \le N(p,T)\int_0^T t^{-1+p(-\alpha\mu+1)}(1+|\log t|)^{p/2}dt < \infty.$$

（情形 5。） $\alpha-\beta>1/2$

与之前类似， $\chi(0)=\chi'(0)=0$。此外，如同（5.48）中一样，我们有

$$\begin{aligned}\chi(t)&=\int_0^t\int_0^s\chi''(r)drds\\&\le N\int_0^t\left(T^{2(\alpha-\beta)}-(T-s)^{2(\alpha-\beta)}\right)ds+N\int_0^t\int_0^s\int_0^{T-\rho}(\rho+r)^{2(\alpha-\beta)-2}drd\rho ds\\&\le N\int_0^t sds+N\int_0^t\int_0^s d\rho ds\\&\le Nt^2,\end{aligned}$$

其中 $N=N(\alpha,\beta,T)$。因此，

$$H_1\le N(\alpha,\beta,p,T)\int_0^T t^{-1+p(-\alpha\mu+1)}dt<\infty.$$

因此，我们得到（5.43）。然后，结合（5.43）和（5.41），可得 $I_{41}\le N\|g\|^p_{\mathbb{L}_p\ (T,\ l_2)}$。

接下来，我们处理 I_{42}。由闵可夫斯基不等式、微积分基本定理和引理 5.1 可得

$$\begin{aligned}I_{42}&\le N\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta}(t+r,y)-\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta}(r,y)|dy\right)^2dr\right)^{p/2}dt\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}\\&\le N\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\left(\int_r^{t+r}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_s\Delta^{\theta/\alpha}q_{\alpha,\beta}(s,y)|dyds\right)^2dr\right)^{p/2}dt\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)}\\&\le NH_2\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,l_2)},\end{aligned}$$

其中 $N=N(\alpha,\beta,d,p,T)$ 且 $H_2:=\int_0^T t^{-1-\alpha\mu p}\left(\int_0^{T-t}\left(\int_r^{t+r}s^{\alpha-\beta-\theta-1}ds\right)^2dr\right)^{p/2}dt$。

类似于 H_1 的情形（见（5.42）和（5.43）），我们证明

$$H_2<\infty$$

通过将 $\alpha-\beta-\theta$ 替换为 $\alpha-\beta$考虑五种情况。于是，我们有 $I_{42}\le N\|g\|^p_{\mathbb{L}_p(T,\ l_2)}$。引理得证。

□

定理 2.16 的证明。只需证明该断言对 $\tau=T$成立。事实上，假设结论对 $\mathcal{H}^\gamma_p(T)$成立，并令 $\tau\le T$为一个有界停时，且 $u\in\mathcal{H}^\gamma_p(\tau)$。那么，根据关于 $\varepsilon>0$的定义 2.4，存在 $(f,g)\in\mathbb{H}^{\gamma-2}_p(\tau)\times\mathbb{H}^{\gamma-2+c_0}_p(\tau,l_2)$，使得

$$\partial_t^\alpha u=f+\partial_t^\beta\int_0^t g^k dw_t^k;\quad u(0,\cdot)=u_0(\cdot)$$

and

$$\|u\|_{\mathbb{H}^\gamma_p(\tau)}+\|u_0\|_{U^\gamma_p}+\|f\|_{\mathbb{H}^{\gamma-2}_p(\tau)}+\|g\|_{\mathbb{H}^{\gamma-2+c_0}_p(\tau,l_2)}\le\|u\|_{\mathcal{H}^\gamma_p(\tau)}+\varepsilon.$$

设 $f:=(f-\Delta u)1_{t\le\tau}$ 且 $\bar g:=g1_{t\le\tau}$；因此， u 满足

$$\partial_t^\alpha u=\Delta u+\bar f+\partial_t^\beta\int_0^t\bar g^k dw_t^k,\quad 0<t\le\tau;\quad u(0,\cdot)=u_0(\cdot).\tag{5.49}$$

相比之下，由 [25, 定理 2.18], 可知，存在 $v \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$ 使得 v 满足

$$\partial_t^\alpha v = \Delta v + \bar{f} + \partial_t^\beta \int_0^t \bar{g}^k dw_t^k, \quad 0 < t \le \tau; \quad v(0,\cdot) = u_0(\cdot).$$

此外,

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{H}_p^\gamma(T)} &\le N\left(\|\bar{f}\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(T)} + \|\bar{g}\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(T,l_2)} + \|u_0\|_{U_p^\gamma}\right) \\ &\le N\left(\|u\|_{\mathbb{H}_p^\gamma(\tau)} + \|u_0\|_{U_p^\gamma} + \|f\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)} + \|g\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(\tau,l_2)}\right) \\ &\le N\|u\|_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)} + N\varepsilon, \end{aligned} \tag{5.50}$$

其中 N 与 ε 相互独立。由于 $v \in \mathcal{H}_p^\gamma(T)$, $v \in C^{\alpha\mu-1/p}\left([0,T];\ H_p^{\gamma-2\nu}\right)$ 几乎处处成立，并且

$$\mathbb{E}\|v\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}([0,T];H_p^{\gamma-2\nu})} \le N\|v\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(T)} \tag{5.51}$$

根据该假设。因此，由于 $\tau \le T$，由 (5.50) 和 (5.51) 可得

$$\mathbb{E}\|u\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}([0,\tau];H_p^{\gamma-2\nu})} \le \mathbb{E}\|v\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}([0,T];H_p^{\gamma-2\nu})} \le N\|v\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(T)} \le N\|u\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)} + N\varepsilon, \tag{5.52}$$

其中 N 与 ε 相互独立。注意， $\bar{u} := u - v$ 满足

$$\partial_t^\alpha \bar{u} = \Delta \bar{u}, \quad 0 < t \le \tau; \quad \bar{u}(0,\cdot) = 0.$$

那么，根据 [25, 定理 2.18], 的确定性版本，我们有：对于几乎所有的 $(\omega, t) \in \Omega \times [0,\tau]$, $u(t,\cdot) = v(t,\cdot)$。因此， v 是 $H_p^{\gamma-2\nu}$ 值连续版本的 u。此外，由 (5.52)

$$\mathbb{E}\|u\|^p_{C^{\alpha\mu-1/p}([0,\tau];H_p^{\gamma-2\nu})} \le N\|u\|^p_{\mathcal{H}_p^\gamma(\tau)} + N\varepsilon.$$

此外，由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的且 N 与 ε 无关，我们得到 (2.8)。另外，注意到 (5.50) 使我们能够用 $\|f\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(T)} + \|g\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(T,\ l_2)} + \|u_0\|_{U_p^\gamma}$ 代替 $\|u\|_{\mathcal{H}_p^\gamma(T)}$ 来证明这些断言。

由于引理 2.10 (vi)，我们只考虑 $\gamma = 2\nu$ 的情形，其中 $\nu \in (0,1)$ 满足 (2.7)。此外，通过使用恒等逼近，我们可以假设 u_0 是无穷可微的，并且在 x 中具有紧支集。进一步地，我们还假设 f，且 $g = (g^1, g^2, \dots)$ 表示满足 (5.2) 形式的函数（见 [26, 定理 3.10]）。另外，需要指出的是， u 可以写成

$$u(t,x) = T_t^1 u_0 + T_t^2 f + T_t^3 g$$

因为 u满足

$$\partial_t^\alpha u = \Delta u + f + \partial_t^\beta \int_0^t g^k dw_t^k; \quad u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$$

对于几乎所有的（ω， t） $\in [\![0,\tau]\!]$（见 [22, 23, 24]）。

现在，注意到 $u \in C^{\alpha\mu-1/p}([0,\tau];\ H_p^{\gamma-2\nu})$ 几乎处处成立。事实上，由引理 5.5 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\|T_t^1 f - T_s^1 f\right\|^p_{H_p^{\gamma-2\nu}} &\le N|t-s|^{\alpha\mu p-1}\|\phi\|^p_{H_p^\gamma}, \\ \mathbb{E}\left\|T_t^2 f - T_s^2 f\right\|^p_{H_p^{\gamma-2\nu}} &\le N|t-s|^{\alpha\mu p-1}\|f\|^p_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)}\, dr, \\ \mathbb{E}\left\|T^3_{t\wedge\tau} g - T^3_{s\wedge\tau} g\right\|^p_{H_p^{\gamma-2\nu}(l_2)} &\le N|t-s|^{\alpha\mu p-1}\|g\|^p_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(\tau,l_2)}. \end{aligned}$$

因此，由柯尔莫哥洛夫连续性定理（例如， [28, 定理1.4.8]）以及上述不等式，可再次得到 u 的连续性。

接下来证明 (2.8)。取满足 (2.7) 的 μ 和 ν。注意到，引理 2.10 (vi) 和 (5.17) 连同 $\theta = \alpha - \alpha\nu$ 可推出

$$\mathbb{E} \sup_{0\le s<t\le T} \frac{\|T_t^1 u_0 - T_s^1 u_0\|_{H_p^{\gamma-2\nu}}^p}{|t-s|^{\alpha\mu p-1}} \le N\mathbb{E}\,\|u_0\|_{H_p^\gamma}^p .$$

由于假设 (2.7) 成立，由引理 2.10 (vi) 和 (5.20) 可得 $\theta = \alpha - \alpha\nu$：

$$\mathbb{E} \sup_{0\le s<t\le \tau} \frac{\|T_t^2 f - T_2^2 f\|_{H_p^{\gamma-2\nu}}^p}{|t-s|^{\alpha\mu p-1}} \le N\|f\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2}(\tau)}^p.$$

此外，由 (2.7)、引理 2.10 (vi) 和 (5.22)，结合 $\theta = \alpha(1 - c_0/2) - \alpha\nu$，可得

$$\mathbb{E} \sup_{0\le s<t\le T} \frac{\left\|T_t^3 g - T_s^3 g\right\|_{H_p^{\gamma-2\nu}(l_2)}^p}{|t-s|^{\alpha\mu p-1}} \le N\|g\|_{\mathbb{H}_p^{\gamma-2+c_0}(\tau,l_2)}^p.$$

定理得证。

□

References

[1] Garra, Roberto. 流体饱和多孔岩石中温度波和压力波的分数阶微积分模型。 *Physical Review E*, 84(3):036605, 2011. [2] Keller, Jakob J. 摩擦作用下充气管中简单非线性波的传播。 *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 32 2 170 181, 1981 , ( ): – . [3] Tayyaba Akram, Muhammad Abbas, Muhammad Riaz, Ahmad Ismail, and Norhashidah Ali. 一种求解时间分数阶 Burgers 方程的高效数值方法。 *Alexandria Engineering Journal*, 59 4 2201 2220, 2020 ( ): – . [4] Ricardo Almeida. 一般 Caputo 分数阶算子的 Gronwall 不等式。 *Mathematical Inequalities Applications* 20 4 2017 , ( ), . [5] Ronald Bagley and Peter Torvik. 分数阶微积分在黏弹性阻尼结构瞬态分析中的应用。 *AIAA journal*, 23(6):918–925, 1985. [6] Dumitru Baleanu, Kai Diethelm, Enrico Scalas, and Juan Trujillo. *Fractional calculus: models and numerical methods* 3 2012 , volume . 世界科学出版社, . [7] Zhen-Qing Chen, Kyeong-Hun Kim, and Panki Kim. 分数阶时间随机偏微分方程。 *Stochastic Processes and their Applications*, 125(4):1470–1499, 2015. [8] Hongjie Dong and Doyoon Kim. L_p关于时间系数可测的时间分数阶抛物型方程的估计。 *Advances in Mathematics*, 345:289–345, 2019. [9] Talaat El-Danaf and Adel Hadhoud. 用于求解单个时间分数阶 Burgers 方程的参数样条函数。 *Applied Mathematical Modelling*, 36(10):4557–4564, 2012. [10] Alaattin Esen and Orkun Tasbozan. 时间分数阶 Burgers 方程的数值解。 *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica* 7 2 167 185, 2015 , , ( ): – . [11] Massimiliano Giona and Hector Eduardo Roman. 随机介质中输运现象的分数阶扩散方程。 *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 185(1-4):87–97, 1992. [12] Loukas Grafakos. *Modern fourier analysis*, volume 250. 施普林格, 2009. [13] Istv´an Gy¨ongy. 半线性随机偏微分方程的存在性与唯一性结果。*Stochastic Processes and their Applications*, 73(2):271–299, 1998. [14] Istv ´ ¨ an Gyongy and David Nualart. 关于实数轴上的随机 Burgers 方程。 *The Annals of Probability* 27 2 782 802, 1999 , ( ): – . [15] Beom-Seok Han. L_p带乘性白噪声的半线性随机偏微分方程的正则性理论。 *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, page 126366, 2022. [16] Beom-Seok Han. 乘性时空白噪声驱动的随机广义 Burgers 方程的正则性理论。 *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations*, pages 1–41, 2022. [17] Richard Herrmann. *Fractional calculus: an introduction for physicists*. 世界科学出版社, 2011.

[18] Rudolf Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. 世界科学出版社, 2000. [19] Mitsunojo Ichise, Yutaka Nagayanagi, and Tsugio Kojima. 用于电极过程分析的非整数阶传递函数模拟。 *Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry* 33 2 253 265, 1971 , ( ): – .

[20] Mustafa Inc. 用变分迭代法求解具有初始条件的时空分数阶 Burgers 方程的近似解和精确解。 *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 345 1 476 484, 2008 , ( ): – .

[21] Anatoly Kilbas, Oleg Marichev, and Stefan Samko. 分数阶积分与导数（理论与应用）, 1993。[22] Ildoo Kim, Kyeong-Hun Kim, and Sungbin Lim. 一种针对变系数时间分数阶演化方程的 $L_q(L_p)$ 理论。 *Advances in Mathematics*, 306:123–176, 2017. [23] Ildoo Kim, Kyeong-Hun Kim, Sungbin Lim. 时间分数阶导数随机偏微分方程的 Sobolev 空间理论。 *The Annals of Probability*, 47(4):2087–2139, 2019. [24] Kyeong-Hun Kim and Sungbin Lim. 与时空分数阶微分方程相关的基本解及其导数的渐近行为。 *Journal of the Korean Mathematical Society*, 53 4 929 967, 2015 ( ): – . [25] Kyeong-Hun Kim and Daehan Park. Levy过程驱动的时间分数阶随机偏微分方程的 Sobolev 空间理论。 *arXiv preprint arXiv:2006.05050*, 2020. [26] Nicolai Krylov. 随机偏微分方程的解析方法。 *Stochastic partial differential equations: six perspectives* 64 185 242, 1999 , : – . [27] Nicolai Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces*, volume 96. 美国数学学会, 2008. [28] Nicolai Krylov. *Introduction to the theory of random processes*, volume 43. 美国数学学会, 2002. [29] Peter Lewis and David Nualart. 实数轴上的随机 Burgers 方程：正则性与矩估计。 *Stochastics*, 90(7):1053–1086, 2018. [30] Dongfang Li, Chengjian Zhang, and Maohua Ran. 广义时间分数阶 Burgers 方程的线性有限差分格式。 *Applied Mathematical Modelling*, 40(11-12):6069–6081, 2016. [31] Richard Magin. 生物工程中的分数阶微积分, 第 1 部分。 *Critical Reviews in Biomedical Engineering* 32 1 2004 TM , ( ), . [32] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives fractional differential equations to Methods of their solution and some of their applications* , , . ISS N. Elsevier Science, 1998.[33] Hun H Sun, Banu Onaral, and Yuan-Ying Tso. 正实性原理在金属电极线性极化现象中的应用。 *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 10 664 674, , ( ): – . 1984 [34] Hans Triebel. *Theory of Function Spaces*. Modern Birkh¨auser Classics. 施普林格巴塞尔, 2010.[35] John Walsh. 随机偏微分方程导论。载于 *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984* 265 439 1986 , pages – .

施普林格 , . [36] Guang-an Zou and Bo Wang. 乘性噪声驱动的带分数阶导数的随机 Burgers 方程。 *Computers & Mathematics with Applications*, 74(12):3195–3208, 2017.

Department of Mathematics, Pohang University of Science and Technology, 77, Cheongam-ro, Nam-gu, Pohang, Gyeongbuk, 37673, Republic of Korea*Email address*: hanbeom@postech.ac.kr