arXiv:2301.00540v1 [math.CA] 2 Jan 2023

具有最大对称性的线性微分方程的系数刻画

J.C. Ndogmo

School of Mathematics, University of the Witwatersrand, Private Bag 3, Wits 2050, South Africa

摘要

本文通过一组简洁的条件来刻画标准形式下具有最大对称代数的一般线性方程，这些条件关联了方程的各个系数。由此可知，这种方程的一般形式仅能用两个任意函数表示，并阐明了它与拉盖尔-福赛思形式之间的联系。此外，利用这些刻画条件，还推导出一个无限的半不变量族，其中每个半不变量都对应线性方程的一个任意阶数。最后，本文建立了一种简化拟设，从而能够更轻松地确定该方程三种最一般典范形式的等价变换诱导伪群的无穷小生成元。

关键词：系数刻画、最大对称代数、典范形式、诱导等价群、无穷小生成元 2010年数学学科分类：70G65、34C20

1. 引言

根据李的一项结果 [1], ，已知一般阶数为 n的线性常微分方程（ODE）在可通过点变换化为方程 $y^{(n)} = 0$时，具有维数最大的对称代数d_n；下文将该方程称为线性方程的典范形式。在一篇较新的论文中，Krause 和 Michel [2] 证明了这一结果的逆命题，并且还指出，线性方程是迭代的，当且仅当其对称代数具有最大维数 d_n.（根据李的上述结果

Email address: jean-claude.ndogmo@wits.ac.za（J.C. Ndogmo）

[1]， $d_n = n$+4当 $n \geq 3$）。因此，刻画具有最大维数对称代数的线性方程，也就是刻画可通过点变换化为典范形式的线性方程。关于三阶方程 $y^{(3)} + c_2\, y'' + c_1\, y' + c_0\, y = 0$ 的后一种刻画，归功于李 [3] 和 Laguerre [4]，他们各自独立地证明了该方程可化为典范形式，当且仅当其系数满足方程

$$54c_0 - 18c_1c_2 + 4c_2^3 - 27c_1' + 18c_2c_2' + 9c_2'' = 0. \tag{1}$$

这一特征也显然适用于所有可通过点变换线性化的非线性 ODEs，因为后者不会改变对称代数的维数。

本文将这一特征推广到高阶方程。结果表明，对于每个 n 阶方程，都有 $n - 2$个特征方程；我们仅将特征方程展示到五阶，是因为它们的规模非常庞大。不过，我们描述了推导任意阶方程这一特征的方法。这些特征方程的推导同样基于具有最大对称代数的线性方程的典范标准形；该标准形分别通过对称性方法 [5]和迭代方法 [7] 得出。因此，这些特征方程也推广了 [5] 和 [7]的结果。随后我们推导出，具有最大对称代数的线性方程的最一般形式，可以用仅含两个任意函数的标准形式表示。我们还推导出，线性方程的拉盖尔-福赛思形式当且仅当该方程具有最大对称性时，才会化为典范形式。

虽然我们没有给出每个 n 阶线性方程的特征方程，但值得注意的是，在这 $n - 2$ 个特征方程中，恰有一个表示该方程的半不变量，也就是说，它是一个由方程系数组成的函数，其表达式在因变量变换时保持不变。我们给出了各阶方程中这些半不变量的表达式，并描述了它们的一些性质。

最后，借助一些简化假设和 [8], 方法，我们给出 G_S 的对称生成元 X_n 以及由变换伪群 G_c诱导的 X_n^0 的表达式，并给出一般阶线性方程 $n.$ 的三种最一般典范形式。这里， G_S 表示一般线性方程的对称群，其中任意

函数被视为额外的因变量。

2. 系数刻画

文献 [5] 中提出了一种基于对称性方法的方法，用于刻画具有最大对称代数的线性常微分方程（ODEs）的系数，但仅适用于约化标准形的方程（其中次高阶项为零）。在一篇较新的论文 [7] 中，作者提出了一种基于迭代方法的类似刻画；根据 Krause 和 Michel 的结果 [2] ，具有最大对称性的线性方程可简单地视为迭代方程。所谓迭代方程，是指具有以下形式的方程

$$\Psi^n[y] = 0, \quad y = y(x), \quad n \geq 1 \tag{2a}$$

其中

$$\Psi^1[y] = ry' + sy, \quad \Psi^n[y] = \Psi^{n-1}\left[\Psi[y]\right], \tag{2b}$$

且 $r = r(x)$ 和 $s = s(x)$ 是源方程$\Psi^1[y] = 0$的参数。这种刻画表明，在约化标准形下，一般线性方程仅依赖于一个任意函数 $a = a(x)$。对于三阶至五阶方程，相应的方程如下：

$$y^{(3)} + ay' + \frac{a'}{2}y = 0 \tag{3a}$$

$$y^{(4)} + ay'' + a'y' + \left(\frac{3}{10}a'' + \frac{9}{100}a^2\right)y = 0 \tag{3b}$$

$$y^{(5)} + ay^{(3)} + \frac{3}{2}a'y'' + \left(\frac{9}{10}a'' + \frac{16}{100}a^2\right)y' + \left(\frac{1}{5}a^{(3)} + \frac{16}{100}aa'\right)y = 0. \tag{3c}$$

然而，线性方程不一定以约化标准形出现，而可能采用最一般的标准形式，因此，求得标准形式下方程的相应刻画是有用的。我们将一般线性方程写成如下标准形式：

$$\Delta(x, y_{(n)}; C) \equiv y^{(n)} + c_{n-1}\, y^{(n-1)} + c_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + c_0\, y = 0. \tag{4}$$

其中 $C = (c_0, \ldots, c_{n-1})$。假设这样的方程具有最大维数的对称代数，并将其对应的约化标准形写为

$$y^{(n)} + B_{n-2}\, y^{(n-2)} + B_{n-3}\, y^{(n-3)} + \cdots + B_0\, y = 0, \tag{5}$$

其中，B_j（$j = 0$、.....、$n-2$）是其系数，并且如上所述，它们仅依赖于一个任意函数 $a = B_{n-2}$ 及其导数。令

$$y^{(n)} + A_{n-1}\, y^{(n-1)} + A_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + A_0\, y = 0 \tag{6}$$

作为方程 (5) 对应的标准形式，它可通过如下形式的变换得到：

$$y \mapsto y e^{-\frac{1}{n}\int_{x_0}^{x} A_{n-1} dx}. \tag{7}$$

那么 (4) 和 (6) 必须完全相同，特别是，由变换 (7) 引入的非零系数 A_{n-1} 满足 $A_{n-1} = c_{n-1}$；更一般地，我们有

$$c_j = A_j, \quad \text{for } j = 0, \ldots, n-1. \tag{8}$$

注意，(4) 中的系数 c_j 只是符号，我们希望找出它们之间的关系。鉴于 (5) 中的函数 B_{n-2} 正是标记该方程的任意函数 $a(x)$，可以通过递归过程，甚至对 n 使用归纳法证明

$$A_{n-2} = a + \frac{n-1}{2n}\, c_{n-1}^2 + \frac{n-2}{2}\, c_{n-1}'.$$

因此，求解关于 a 的方程 $c_{n-2} = A_{n-2}$，得到

$$a = c_{n-2} - \left(\frac{n-1}{2n}\, c_{n-1}^2 + \frac{n-2}{2}\, c_{n-1}' \right). \tag{9}$$

因此，具有最大对称代数的标准形式线性方程的特征方程由其余的 $n-2$ 个方程给出

$$c_j = A_j, \quad j = 0, \ldots, n-3, \tag{10}$$

其中，函数 a 及其导数均代入公式（9）所给出的相应表达式。

命题1. 若标准形式 (4) 中的线性方程具有最大对称性，则其一般形式可仅用两个任意函数表示，即函数 c_{n-1} 和 c_{n-2}及其导数。

证明. 该结论可直接由以下事实得出：式 (10) 中的函数 A_j 此时仅依赖于 a 及其导数，而式 (9) 表明，函数a 恰好依赖于 c_{n-1}、 c_{n-2}及其导数。 □

推论1. 对于具有 $c_{n-1} = c_{n-2} = 0$的标准形式(4)线性方程，当且仅当对所有 j都有 $c_j = 0$ 时，该方程具有最大对称代数。换言之，线性方程具有最大对称代数，当且仅当其拉盖尔-福赛思形式对应于典范方程 $y^{(n)} = 0$。

证明. 毕竟，拉盖尔变换也是一种点变换，尽管对于给定方程，它未必总能显式构造出来。由于在点变换下等价的方程具有相似的李代数，因此很容易得出：若一个方程的拉盖尔-福赛思形式为$y^{(n)} = 0$，则该方程具有最大对称代数。该推论的逆命题可直接由命题1得出；此外，在(10)中，c_j 最终是 c_{n-1}、 c_{n-2}及其导数的不含常数项的多项式函数。

□

作为该推论的直接结果，诸如$y^{(3)} + f(x)y = 0$或 $y^{(4)} + f(x)y' = 0$这样的线性方程，当且仅当函数 $f(x)$恒等于零时，才具有最大对称代数。现在，我们利用(10)和(9)，显式推导三阶至五阶方程具有最大对称代数的特征方程。

对于 $n = 3$，很容易发现，在（6）中有

$$A_0 = \frac{1}{54}\left(18ac_2 + 2c_2^3 + 27a' + 18c_2c_2' + 18c_2''\right), \tag{11}$$

而（9）中对应的 a 表达式可化简为

$$a = c_1 - \left(\frac{c_2^2}{3} + \frac{c_2'}{2}\right). \tag{12}$$

将（12）代入（11），并将所得表达式 A_0 代入（10），恰好得到前面提到的李 [3] 和 Laguerre [4] 发现并给出的方程（1）：

$$54c_0 - 18c_1c_2 + 4c_2^3 - 27c_1' + 18c_2c_2' + 9c_2'' = 0.$$

因此，具有最大对称代数的线性三阶方程的最一般形式，可仅用两个任意函数 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 表示为

$$y^{(3)} + c_2\,y'' + c_1\,y' + \frac{1}{54}\left(18c_1c_2 - 4c_2^3 + 27c_1' - 18c_2c_2' - 9c_2''\right)y = 0. \tag{13}$$

当 $c_2 = 0.$ 时，方程 (13) 自然化简为 (3a)

对于 $n = 4$，我们依次得到

$$a = \frac{1}{8}\left(8c_2 - 3c_3^2 - 12c_3'\right) \tag{14a}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(ac_3 + \frac{c_3^3}{16} + a' + \frac{3}{4}c_3c_3' + c_3''\right) \tag{14b}$$

$$\begin{aligned} 6400A_0 &= 576a^2 + 400a(c_3^2 + 4c_3') \\ &\quad + 5\left[5c_3^4 + 120c_3^2c_3' + 320c_3(a' + c_3'')\right] \\ &\quad + 80\left(15c_3'^2 + 24a'' + 20c_3^{(3)}\right). \end{aligned} \tag{14c}$$

将（14a）代入（14b）和（14c），得到以下两个方程

$$8c_1 += 4c_2c_3 - c_3^3 + 8c_2' - 6c_3c_3' - 4c_3'' \tag{15a}$$

$$\begin{aligned} 1600c_0 &= 144c_2^2 - 11c_3^4 + 400c_3c_2' - 288c_3^2c_3' - 336c_3'^2 \\ &\quad - 8c_2(c_3^2 + 4c_3') + 480c_2'' - 560c_3c_3'' - 320c_3^{(3)} \end{aligned} \tag{15b}$$

它们表示四阶方程最大对称代数的特征方程。注意，反过来，任何系数满足（15）的线性四阶方程都必然是迭代的，这也是将（15）这类条件称为特征方程的原因。事实上，如果形式为（4）的四阶方程的系数满足（5），那么在将由（5）用 c_2、c_3 及其导数表示的 c_0 和 c_1 的表达式代入后，其约化标准形式为

$$w^{(4)} + Q_2w'' + Q_1w' + Q_0w = 0 \tag{16a}$$

其中

$$Q_2 = c_2 - \frac{3}{8}(c_3^2 + 4c_3') \tag{16b}$$

$$Q_1 = c_2' - \frac{3}{4}(c_3c_3' + 2c_3'') \tag{16c}$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{3}{6400}(192c_2^2 + 27c_3^4 - 48c_3'^2 - 144c_2(c_3^2 + 4c_3')) \\ &\quad + \frac{3}{6400}(27c_3^4 + 216c_3^2c_3' + 640c_2'' - 480c_3c_3'' - 960c_3'''). \end{aligned} \tag{16d}$$

由此得到的系数 Q_j 显然满足

$$Q_1 = Q_2' \quad \text{and} \quad Q_0 = (\frac{3}{10}Q_2'' + \frac{9}{100}Q_2^2)$$

迭代方程的条件 (3b)，符合要求。

对于阶数为 $n=5$ 的方程，仿照上文对三阶和四阶方程的处理，我们得到以下 $n-2=3$ 特征方程

$$c_2 = (30c_3c_4 - 8c_4^3 + 75c_3' - 60c_4c_4' + 50c_4'')/50 \tag{17a}$$

$$\begin{aligned} 1250\,c_1 = {} & +200c_3^2 - 18c_4^4 + 750c_4c_3' - 580c_4^2c_4' - 850c_4'^2 \\ & - 10c_3(c_4^2 + 5c_4') + 1125c_3'' - 1400c_4c_4'' - 1000c_4^{(3)} \end{aligned} \tag{17b}$$

$$\begin{aligned} 6250\,c_0 = {} & 200c_3^2c_4 + 14c_4^5 - 25c_4^2c_3' + 40c_4^3c_4' \\ & - 125c_3'c_4' - 750c_4c_4'^2 + 1125c_4c_3'' - 850c_4^2c_4'' \\ & - 2750c_4'c_4'' + 1250c_3^{(3)} - 2000c_4c_4^{(3)} - 1250c_4^{(4)} \\ & - 10c_3(11c_4^3 + 100c_3' - 85c_4c_4' - 75c_4''). \end{aligned} \tag{17c}$$

3. 线性方程的半不变量

一般线性方程 (4) 的等价变换群由以下形式的可逆点变换给出

$$x = f(z), \quad y = g(z)w(z), \tag{18}$$

且它们保持方程的线性和齐次性。令

$$w^{(n)} + Q_{n-1}\,w^{(n-1)} + Q_{n-2}\,w^{(n-2)} + \cdots + Q_0\,w = 0 \tag{19}$$

表示 (4) 在 (18) 作用下变换后的形式。我们将 (4) 的半不变量定义为系数的函数 $F = F(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$；当因变量（单独）发生变化时，该函数在变换后的方程中具有相同的表达式。众所周知，在 (18) 下，变换后方程的半不变量表达式与原方程的表达式 [9, 10] 满足等式

$$F(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{\mu} F(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}), \tag{20}$$

其中 μ 是一个整数。在这种情况下，我们称半不变量 F 的指标为 μ. 。对于每个形如 d^kc_j/dx^k的表达式，我们赋予其权$(n-j)+k$，并令此权函数具有乘法性，使得乘积c_pc_q的权为$(n-p)+(n-q)$。众所周知，对于给定的半不变量，其所有项的权都相同，且该权与半不变量 [9, 10] 的指标一致。

仔细考察特征方程(10)可知，其中恰有一个方程对应于该方程的一个半不变量，即关系式 $c_{n-3} = A_{n-3}$，它导出半不变量 $F = A_{n-3} - c_{n-3}$。

首先，利用 [7] 或 [5], 的方法，可以证明 (5) 中的系数 B_{n-3} 满足 $B_{n-3} = \frac{n-2}{2}a'$. 。因此，利用 (9) 中函数 a 的表达式，通过对 n作归纳法可得，(6) 中的系数 A_{n-3} 由下式给出

$$\begin{aligned} A_{n-3} =& \frac{n-2}{n}c_{n-1}c_{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)}{3n^2}c_{n-1}^3 + \frac{n-2}{2}c'_{n-2} \\ & - \frac{(n-1)(n-2)}{2n}c_{n-1}c'_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{12}c''_{n-1}, \end{aligned} \tag{21}$$

因此，相应的不变量函数 I_n 的表达式为

$$\begin{aligned} I_n =& \frac{n-2}{n}c_{n-1}c_{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)}{3n^2}c_{n-1}^3 + \frac{n-2}{2}c'_{n-2} \\ & - \frac{(n-1)(n-2)}{2n}c_{n-1}c'_{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{12}c''_{n-1} - c_{n-3}. \end{aligned} \tag{22}$$

容易验证，(22) 中的函数 $I_n = I_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ 是一个半不变量。首先，该表达式中的每一项的权均为三，而且容易看出

$$I_n(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}) = f'(z)^3 I_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}),$$

这就证明了所述结论。

尽管 (22) 中的不变量函数 I_n 最初仅对 $n \geq 3$定义，但其表达式表明，当 $n = 1$ 或 $n = 2$时，它们恒等于零；令 $c_j = 0$ 即可得到这一点，其中 $j < 0$. 。这一消失现象可以这样理解：所有一阶和二阶线性方程都分别等价于方程 $y' = 0$ 和 $y'' = 0$，且这种等价可通过点变换实现，因此它们没有非平凡的不变量函数。

另一方面，应注意到，特征系统（10）中的其他方程不会产生不变量函数，除非是该方程系统中的值 $j = n - 3$。事实上，分别用 C 和 Q 统称方程（4）和（19）中的系数，并且对于 $n = 4$，用 $J（C） = 1600（c_0 - A_0）$表示由 2.9 结合 $j = 0$ 得到的归一化函数。于是可以看出，尽管 $J（C）$表达式中的每一项都具有权 4，但我们有

$$J(Q) = f'(z)^4 J(C) - 200\frac{h'(z)}{h(z)}f'(z)^3 I_4(C),$$

这清楚地表明，函数 J 不是半不变量。

4. 诱导群作用的无穷小生成元

一般线性方程 (4) 的等价群 G （见 (18)）诱导出另一个李伪群 G_c，它作用于 (4) 的系数 [3]。对于具有最大对称性的线性方程，其最一般形式如前所述只依赖于两个任意函数，而非 n。例如，根据 (15)，具有最大对称代数的四阶线性方程的最一般形式为

$$\begin{aligned} y^{(4)} + c_3 y^{(3)} + c_2 y'' + \frac{1}{8}\Big[4c_2c_3 - c_3^3 + 8c_2' - 6c_3c_3' - 4c_3''\Big] y' \\ + \frac{1}{1600}\Big[144c_2^2 - 11c_3^4 + 400c_3c_2' - 288c_3^2c_3' - 336c_3'^2 \\ - 8c_2\big(c_3^2 + 4c_3'\big) + 480c_2'' - 560c_3c_3'' - 320c_3^{(3)}\Big] y = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

且它完全可以用系数 c_{n-1} 和 c_{n-2} 表示，其中c_3 和 c_2。

尽管方程 (23) 是一般方程 (4) 的一个非常特殊的情形，但其等价群与 (18) 中的同一群 G 相同，因为等价方程具有相似的对称群。因此，(4) 的群 G_c 的无穷小生成元X^0 对于具有最大对称性的方程同样有效。特别地，为了获得仅用两个任意函数表示的具有最大对称性的方程的具体无穷小生成元，只需将特征方程 (10) 代入 X^0 的表达式中即可。

一种求无穷小生成元 X^0 的方法已在 [8] 中提出。若记

$$X = \xi\,\partial_x + \eta\,\partial_y + \phi_{n-1}\,\partial_{c_{n-1}} + \cdots + \phi_0\,\partial_{c_0} \tag{24}$$

(4) 的无穷小生成元，其中系数

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$$

若也将其视为因变量，则 [8] 的方法包括寻找一组最小条件，使得 X 在 (x, y) 空间上的投影 $V = \xi\,\partial_x + \eta\,\partial_y$化简为等价群 G的无穷小生成元 $V^0 = \{\xi^0, \eta^0\}$。将这组最小条件施加于$\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$，可得到函数 $\phi^0 = (\phi_0^0, \phi_1^0, \ldots, \phi_{n-1}^0)$，从而 X^0 的表达式具有以下形式

$$X^0 = \xi^0\,\partial_x + \phi_{n-1}^0\,\partial_{c_{n-1}} + \cdots + \phi_0^0\,\partial_{c_0}. \tag{25}$$

实际上，确定一般线性方程 (4) 的对称生成元 X 在计算上非常繁重。流行的李对称软件 MathLie（见 [11]）由于计算机内存限制（在配备 Intel Core2 Quad CPU 的计算机上）只能计算 X，且仅适用于 $n \leq 4$；而另一款知名的类似李对称软件 SYM [12] 则无法计算诸如 X 这类涉及单个自变量和多个因变量的对称。

因此，我们需要一种高效的简化拟设，以便在阶数高于四阶时手动计算 X^0。为此，我们注意到，将 C 也视为因变量时，方程 (4) 的全对称群应使该方程保持不变。因此，因变量和自变量的变换应保持方程的形式不变，唯一例外是引入一个与 y 无关的常数项；该项应通过随后对系数 C 的变换予以抵消。这意味着在 (24) 中，我们必须有

$$\xi = f(x), \qquad \eta = g(x)y + h(x). \tag{26}$$

对于阶数不高于四阶的方程，可以借助 MathLie 软件通过直接计算验证 (26)；对于阶数高于四阶的方程，则可以通过检验生成元 X 和 X^0 是否分别满足应用于一般线性方程 (4) 的无穷小不变性条件，以及在 (22) 中求得的半不变量 I_n，来验证它们的正确性。回顾一下，方程 (4) 的无穷小生成元 X 的无穷小不变判据为

$$X^{[n]}\left[\Delta(x, y_{(n)}; C)\right] = 0, \quad \text{whenever } \Delta(x, y_{(n)}; C) = 0, \tag{27}$$

其中 $X^{[n]}$ 表示 $X.$ 的第 n次延拓。关于半不变量的无穷小不变性条件的验证，我们注意到，若对某个群元素 $\alpha \in G_c$设定 $Q = \alpha \cdot C$，则 G_c的每个半不变量都满足 $F(\alpha \cdot C) = \mathrm{w}(\alpha) \cdot F(C)$，其中w为某个权函数；当且仅当...
...时， X^0是 G_c 的无穷小生成元

$$X^0 \cdot F = -d\mathbf{w}(e)F,$$

对所有此类函数 F，其中 $\mathrm{w}(e)$ 是 w 在单位元 e 处的微分， $G_c.$ 在 (4) 和 G_c 的实际情形中（它与 G 相同，只是作用于系数空间），对于 (18) 中指定的 $\alpha \equiv (f, g)$，有 $\mathrm{w}(\alpha) = f'(z)^3,$，并且对于找到的每个生成元 $X^0 \equiv X^0(n)$，很容易验证

$$X^0 \cdot I_n = -3f'(x)I_n, \tag{28}$$

如所要求的。

据我们所知，诱导伪群 G_c 的无穷小生成元 X^0 仅针对三阶方程，或针对阶数不超过五阶的低阶方程的标准形式或拉盖尔-福赛思形式进行了计算 [13, 14, 9]。如前所述，这部分是由于计算这些生成元需要大量计算，但也因为 [8] 中提出的用于求取它们的更系统的方法相对较新。

我们在接下来的三个定理中列出 G_S 的无穷小生成元 X_n、G_c 的 X_n^0 以及线性方程的三种最一般典范形式的通式，其中下标 n 表示方程的阶数。

定理 1. 对于处于标准形式 (4) 的 n 阶一般线性方程，G_S 的无穷小生成元 X_n 和 G_c 的 X_n^0 具有如下表达式，其中 f、g 和 h 是 x 的任意函数，δ_0^k 表示克罗内克δ函数。

a)

$$X_n = f\partial_x + (yg + h)\,\partial_y + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k^n \partial_{c_k}, \tag{29a}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi_k^n = &-(n-k)c_k f' + \sum_{j=1}^{n-k} c_{k+j}\left[\binom{k+j}{j+1} f^{(j+1)} - \binom{k+j}{j} g^{(j)}\right] \\ &+ \delta_0^k\left[-c_k\frac{h}{y} + \sum_{j=1}^{n-k} c_{k+j}\binom{k+j}{j}\frac{h^{(j)}}{y}\right], \quad \textit{for } k = 0, \dots, n-1.\end{aligned} \tag{29b}$$

b)

$$X_n^0 = f\partial_x + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k^n \partial_{c_k}, \tag{30a}$$

其中

$$\Phi_k^n = -(n-k)c_k f' + \sum_{j=1}^{n-k}\left[-\binom{k+j}{j} g^{(j)} + \binom{k+j}{j+1} f^{(j+1)}\right] c_{k+j}, \quad for\ k = 0, \ldots, n-1. \tag{30b}$$

证明。我们令生成元 X_n 的形式为

$$X_n = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k^n \partial_{c_k}, \tag{31}$$

其中函数 ξ、 η和 Φ_k^n 待定。根据拟设 (26)，我们知道，对于某些任意函数 f、g 和 h （它们是 x的函数），有 $\xi = f(x)$和 $\eta = g(x)y + h(x)$。关于 $X_n^{[n]}$的延拓公式是众所周知的 [15]。写出该表达式并应用无穷小不变性条件 (27)，即可得到关于系数 ξ、η和 Φ_k^n的常规确定方程。尽管这一过程很繁琐，但多亏拟设 (26)，这些确定方程很容易求解，并导出 (29) 中的表达式。

对于定理的第二部分，注意到，根据前面介绍的用于求出 X_n^0的 [8] 算法，实质上只需找出一组最小条件，使得 X_n 在 (x, y)-空间上的投影 $\{f(x)\ g(x)y + h(x)\}$ 化为等价群的无穷小生成元。由 (18) 中给出的等价变换表达式可知，所需的最小条件组可归结为 $\{h = 0\}$。将这些条件应用于 (29)，并去掉 ∂_y 中的项，即得到所需的表达式 (30)。

□

定理 2. 对于约化标准形的一般线性方程，即形式为 (4) 且满足 $c_{n-1} = 0$ 的方程，G_S 的生成元 X_n 和 G_c 的生成元 X_n^0 可表示为以下形式，其中涉及 x 的任意函数 f 和 h 。

a)

$$X_n = f\partial_x + \left[y\left[\left(\frac{n-1}{2}\right) f' + K_1\right] + h\right]\partial_y + \sum_{k-0}^{n-2} \Phi_k^n \partial_{c_k}, \tag{32a}$$

其中

$$\Phi_k^n = -(n-k)f'c_k + \sum_{j=1}^{n-k} c_{k+j}\left[\binom{k+j}{j+1} - \binom{k+j}{j}\frac{n-1}{2}\right] f^{(j+1)} + \delta_0^k\left[-c_k\frac{h}{y} + \sum_{j=1}^{n-k} c_{k+j}\binom{k+j}{j}\frac{h^{(j)}}{y}\right], \quad for\ k = 0,\dots,n-2. \tag{32b}$$

b)

$$X_n^0 = f\partial_x + \sum_{k=0}^{n-2}\Phi_k^n\partial_{c_k}, \tag{33a}$$

其中

$$\Phi_k^n = -(n-k)c_k f' + \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j}\left[\binom{k+j}{j+1} - \binom{k+j}{j}\frac{n-1}{2}\right] f^{(j+1)}, \quad for\ k = 0,\dots,n-2. \tag{33b}$$

证明。 X_n 和X_n^0 的表达式分别设为式（29）和（30）的形式，因为式（4）的标准形是该方程的一个特例。主要区别在于，标准形的等价变换不再由式（18）给出，而是由限制严格得多的版本给出

$$x = T(z), \quad y = \lambda\left[T'(z)\right]^{\frac{n-1}{2}} w(z) \tag{34}$$

其中 T 是一个任意函数， λ 是一个任意常数。其无穷小生成元为

$$V = f(x)\partial_x + y\left(\frac{n-1}{2}f'(x) + k_1\right)\partial_y, \tag{35}$$

其中， f是任意函数， k_1是任意常数。由于（29）和（30）中的函数 f和 g恰好是等价群无穷小生成元的参数，为了得到（32）和（33），我们只需在后面的表达式中用代换 $g = \frac{n-1}{2}f' + k_1$替换 g，并删去 c_{n-1}中的项。由此得到（32）和（33）。 □

一般线性方程的拉盖尔-福赛思形式，是指（4）式中最高阶的第二阶和第三阶项的系数 c_{n-1} 和 c_{n-2} 均消失的方程形式。原则上，这种变换可以通过如下形式的变量变换来实现：

$$\{z,x\}=\frac{12}{n(n-1)(n+1)}c_{n-2},\quad y=w\exp\left(-\frac{1}{n}\int_{z_0}^{z}c_{n-1}dx\right), \tag{36a}$$

其中

$$\{z,x\}=\left[z'z^{(3)}-(3/2)z''^2\right]z'^{-2} \tag{36b}$$

是施瓦茨导数，因此，$z'=dz/dx$. 式 (4) 的拉盖尔-福赛思形式具有隐式性质，也就是说，式 (36) 并非总能显式地求解出 z。尽管如此，这种形式仍然值得关注，尤其是因为线性方程常以这种形式出现。

定理 3. 对于拉盖尔-福赛思形式的一般线性方程 (4)，X_n G_S 和 X_n^0 G_c 的无穷小生成元具有以下表达式，其中 a_0、a_1、a_2和 k_1 为任意常数，而 h 为任意函数。

a)

$$\begin{aligned}X_n=&(a_2x^2+a_1x+a_0)\partial_x+\Big[y\big[k_1+\frac{n-1}{2}\big(2a_2x+a_1\big)\big]+h\Big]\partial_y\\&+\sum_{k=0}^{n-3}\Big[-(n-k)(2a_2x+a_1)c_k+a_2(k+1)(k+1-n)c_{k+1}\\&+\delta_0^k\big[-c_k\frac{h}{y}+\sum_{j=1}^{n-k}\binom{k+j}{j}\frac{h^{(j)}}{y}\big]\Big]\partial_{c_k}\end{aligned} \tag{37}$$

b)

$$\begin{aligned}X_n^0=&\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)\partial_x\\&+\sum_{k=0}^{n-3}\left[-(n-k)(2a_2x+a_1)c_k+a_2(k+1)(k+1-n)c_{k+1}\right]\partial_{c_k}.\end{aligned} \tag{38}$$

证明。如定理 2 的证明所示，我们只需注意到，拉盖尔-福赛思形式是标准形的特例，因此其生成元X_n 和 X_n^0 应分别采用形式 (32) 和 (33)。更确切地说，我们只需找出与拉盖尔-福赛思形式对应的等价变换参数 f 的具体表达式，并将其代入 (32) 和 (33)，然后在所得表达式中去掉含有 c_{n-2} 的项。众所周知，方程 (4) 的拉盖尔-福赛思形式的等价变换是形式为 (34) 的可逆变换，其中 $T(z)$ 是线性分式变换。因此，相应的无穷小生成元具有形式 (35)，其中 $f(x) = a_2x^2+a_1x+a_0$，且 a_2、a_1和 a_0. 为某些任意常数。这就是待求的 f的表达式，证明完毕。

□

借助拟设（26），我们对阶数不超过七阶的方程，直接计算了 X_n 和 X_n^0，并证实了前三个定理中给出的表达式是有效的。还应注意，与标准形式或标准形中的方程不同，在拉盖尔-福赛思形式下， G_c 的生成元 X_n^0 仅涉及有限个常数参数。这意味着这种一般线性方程形式的不变函数更容易计算，正如福赛思 [10] 所指出的，他通过直接分析得到了这些函数的一个表达式。

如前所述，对于已经仅用两个系数 c_{n-1} 和 c_{n-2}表示且具有最大对称代数的方程，要得到相应的无穷小生成元 X^0，只需将一般线性方程 (4) 中对应的 X_n^0 表达式，代入相应的特征方程；这些特征方程给出了其他系数仅用 c_{n-1} 和 c_{n-2} 表示的表达式。例如，对于$n = 4$，归一化方程 (23) 中对应的 X_n^0 表达式

根据 (15) 和 (29)，其表达式为

$$
\begin{aligned}
\xi &= f\\
\phi_3^0 &= -c_3 f' - 4g' + 6f''\\
\phi_2^0 &= -2c_2 f' - 3c_3 g' + 3c_3 f'' - 6g'' + 4f^{(3)}\\
\phi_1^0 &= \frac{3}{8} f'(c_3^3 - 8c_2' + 6c_3 c_3' + 4c_3'') - 3c_3 g'' + c_3 f^{(3)}\\
&\quad + c_2\left(-\frac{3}{2} c_3 f' - 2g' + f''\right) - 4g^{(3)} + f^{(4)}\\
\phi_0^0 &= -\frac{1}{8} g'(8c_2' - c_3(-4c_2 + c_3^2 + 6c_3') - 4c_3'') - c_2 g'' - c_3 g^{(3)}\\
&\quad - g^{(4)} - \frac{1}{400} f'\Big[144c_2^2 - 11c_3^4 - 288c_3^2 c_3' - 8c_2(c_3^2 + 4c_3')\\
&\quad - 80c_3(5c_2' - 7c_3'') + 16(21c_3'^2 - 30c_2'' + 20c_3^{(3)})\Big].
\end{aligned}
\tag{39}
$$

5. 结论

我们再次强调此前提到的事实：本文得到的线性方程的对称性，也适用于这样一类无限维非线性方程：它们等价于一个给定的、具有最大对称代数的线性方程。例如，在最简单的自由落体方程 $y'' = 0$ 情形下，形如 $x = f(z, w)$ $y = g(z, w)$ 的可逆点变换表明，具有最大对称代数的二阶（线性或非线性）方程的最一般形式为

$$
\begin{aligned}
&f_z g_{z,z} - g_z f_{z,z} + w_z^3 \left(-g_w f_{w,w} + f_w g_{w,w}\right)\\
&+ w_z^2 \left(-g_z f_{w,w} - 2g_w f_{z,w} + f_z g_{w,w} + 2f_w g_{z,w}\right)\\
&+ w_z \left(-2g_z f_{z,w} - g_w f_{z,z} + 2f_z g_{z,w} + f_w g_{z,z}\right) + \left(f_z g_w - f_w g_z\right) w_{z,z} = 0.
\end{aligned}
$$

此外，三阶及以下的 ODE方程 [5, 6], 可以通过点变换进行线性化，这一点对于实际应用十分重要，因为大多数具有物理相关性的 ODE方程都属于这一范围。

具有最大对称性的线性方程最有趣的性质之一是，其解可以通过一个非常简单的叠加公式，从二阶源方程 [2] 的解得到。更具体地说，借助 (7)，这类方程总可以假定为标准约化形式 (5)。特别地，相应的二阶源方程具有形式 $y'' + by = 0$，其中 $b = b(x)$ 是某个函数。如果

令 u 和 v 为该源方程的两个线性无关解，则具有相同源方程且形式为 (5) 的方程的 n 个线性无关解为

$$y_k = u^k v^{n-1-k}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

后一个事实不仅可用于求解非线性方程的解析解，也可用于检验数值格式。事实上，在检验数值格式时，若能找到一组合适的非线性问题，且其中有一个或多个显式解析解，总是很有帮助的 [16, 17]。

第4节中求得的诱导伪群变换 G_c 的无穷小生成元 X_n^0 具有更广泛的意义。它们的主要作用之一是确定方程族的不变量（和半不变量）；这些函数进而可用于对给定方程族进行完整分类 [18, 19], ，从而将每个等价类的研究归结为对典范方程的研究。在更实际且直接的应用中，它们能够非常有效地检验给定函数是否为相关方程族的不变量；此外，方程族的任意给定不变量也可轻易用于检验两个给定方程之间等价条件的某些必要条件。

参考文献

[1] S. Lie, 《常微分方程的分类与积分：关于具有 x、y变换群的方程》。I，Math. Ann. 22 (1888) 213–253.[2] J. Krause, L. Michel, 《具有 $n+4$维对称李代数的 $n>2$阶线性微分方程》，C.R. Acad. Sci. Paris 307 (1988) 905–910.[3]S. Lie, 《变换群理论》，第三部分，第一卷。在 Pr. F. Engel 协助下编写，Teubner，莱比锡，1893.[4] E. Laguerre, 《关于三阶线性微分方程》，C.R. Acad. Sci. Paris 88 (1879) 116–119.
[5] F.M. Mahomed, P.G.L. Leach, 《 n阶常微分方程的对称李代数》，J. Math. Anal. Appl. 151 (1990) 80–107。

[6] N.H. Ibragimov, F. Magri, 《李线性化定理的几何证明》, Nonlinear Dynam. 36 (2004) 41–46.[7]J.C. Ndogmo, F.M. Mahomed, 《线性迭代方程的若干性质》, Cent. Eur. J. Math. 12 no. 4, (2014) 648–657, arXiv:1207.6851.[8] J.C. Ndogmo, 《等价群及其无穷小生成元的一种求法》, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 102001.[9] J.C. Ndogmo, 《线性微分方程相对不变量与绝对不变量的生成》, Int. Math. Forum 4 (2009) 873–886.[10] A.R. Forsyth, 《与线性微分方程相关的不变量、协变量和商导数》, Philos. Trans. R. Soc. Lond. 179 (1888) 377–489.[11] G. Baumann, 《使用 Mathematica 进行微分方程对称性分析》, 施普林格, 纽约, 2000.[12] S. Dimas D. Tsoubelis, 《SYM：一个用于 Mathematica 的新型对称性搜索软件包》, 载于：N.H. Ibragimov, C. Sophocleous, P.A. Damianou（编）, 《第十届现代群分析国际会议论文集》, 拉纳卡, 塞浦路斯, 2004, 第64–70页。[13] N.H. Ibragimov, 《代数方程与微分方程不变量理论中的无穷小方法》, Not. S. Afr. Math. Soc. 29 (1997) 61–70.[14] J.C. Ndogmo, 《微分方程的保结构点变换》, Phys. Lett. A 373 (2009) 1226–1232.[15]P.J. Olver, 《李群在微分方程中的应用》, 施普林格, 纽约, 1986.[16] B. Bradie, 《数值分析友好导论》, Prentice-Hall, 上萨德尔河, 2006.[17] N.J. Higham, 《数值算法的精度与稳定性》, 第二版, SIAM, 费城, 2002.[18] M. Fels, P.J. Olver, 《移动标架。II. 正则化与理论基础》, Acta. Appl. Math. 55 (1999) 127–208.[19] O.I. Morozov, 《线性双曲方程的接触等价问题》, J. Math Sci. (N.Y.) 135 (2006) 2680–2694。