arXiv:2301.00541v1 [math.AP] 2 Jan 2023

临界维数下偶数阶椭圆系统的边界正则性

MING-LUN LIU 和 Yao-Lan Tian*

Abstract. 在这篇短文中，我们研究带有反对称一阶势的偶数阶椭圆系统所对应的狄利克雷问题。对于任意连续的边界数据，我们证明弱解在边界上连续。

关键词：多调和映射、高阶椭圆系统、边界连续性、狄利克雷问题

2010年数学主题分类：35J48，35B65，35G35

1. 引言

本文研究以下关于 $u \in W^{k,2}(\Omega\ \mathbb{R}^m)$ 的偶数阶椭圆系统的狄利克雷问题：

$$\Delta^k u = \sum_{l=0}^{k-1} \Delta^l \langle V_l, du\rangle + \sum_{l=0}^{k-2} \Delta^l \delta(w_l du) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^{2k} \tag{1.1}$$

系数满足以下正则性假设：

$$\begin{aligned} &w_i \in W^{2i+2-k,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^{m\times m}\right) \text{ for } i \in \{0,\dots,k-2\},\\ &V_i \in W^{2i+1-k,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^{m\times m} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^{2k}\right) \text{ for } i \in \{1,\dots,k-1\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

and

$$V_0 = d\eta + F$$

with

$$\eta \in W^{2-k,2}\left(\Omega, so(m)\right) \quad \text{and} \quad F \in W^{2-k,\frac{2k}{k+1},1}\left(\Omega, \mathbb{R}^{m\times m} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^{2k}\right). \tag{1.3}$$

该系统最初由 de Longueville 和 Gastel 提出[2]，，旨在进一步拓展 Rivi`ere [11] (对应于情形$k = 1$) 的二阶理论以及 Lamm-Rivi`ere [7] (对应于情形 $k = 2$) 的四阶理论，并解决 Rivi`ere 提出的一个公开问题。该系统包含许多有趣的几何映射类的欧拉-拉格朗日方程，例如调和映射、双调和映射、多调和映射等；参见 [1, 12, 11, 7, 3, 5, 6]。

该系统的一个显著特点是其临界性。为说明这一点，我们考虑较简单的情形 $k = 1$。此时，系统 (1.1) 化为二阶 Rivi`ere 系统

$$\Delta u = \Omega' \cdot \nabla u, \tag{1.4}$$

通讯作者：Yao-Lan Tian。两位作者均部分获得中国科学技术部青年科学家计划（编号：2021YFA1002200）、国家自然科学基金委员会（编号：12101362）以及山东省自然科学基金（编号：ZR2022YQ01、ZR2021QA003）的资助。

其中 $u \in W^{1,2}(\Omega\ \mathbb{R}^m)$ 且 $\Omega' \in L^2(\Omega\ so(m) \otimes \Lambda^1\mathbb{R}^2)$。由 H¨older 不等式可知，(1.4) 的右端仅属于 L^1 ，因此标准的椭圆方程 L^p 正则性理论在此不适用。在其著名的工作中，[11], Rivi`ere 成功将 (1.4) 改写为一个等价的守恒律，由此可推出弱解的连续性。这些技巧后来被推广到 [7] 中的四阶系统，并最终推广到 [2]中的一般偶数阶系统。

本文将考虑方程（1.1）的狄利克雷边值问题。回顾一下，若 $u \in W^{k,2}(\Omega\ \mathbb{R}^m)$ 满足狄利克雷边值 $g \in C^{k-1}(\Omega\ \mathbb{R}^m)$，则称其

$$\nabla^\alpha u = \nabla^\alpha g \quad \text{on } \partial\Omega$$

对所有满足 $|\alpha| \le k-1$ 的 $2k$ 维多重指标 α ，都以迹的意义成立。类似地，若对所有 $i \in \{0, \cdots, k-1\}$， u 满足纳维边值 $h_i \in C(\Omega\ \mathbb{R}^m)$， $i = 0, \cdots, k-1$，则称其

$$\Delta^i u = h_i \quad \text{on } \partial\Omega.$$

现在，我们可以陈述主要定理。

定理 1.1. 固定 $k \in \mathbb{N}$ ，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{2k}$ 为有界光滑区域。假设 $u \in W^{k,2}(\Omega\ \mathbb{R}^m)$ 是方程（1.1）在（1.2）和（1.3）条件下的一个解。若狄利克雷边值 $g \in C^{k-1}(\Omega\ \mathbb{R}^m)$ 或纳维边值 h_i 适用于 $i = 0, \cdots, k-1$，则$u \in C(\Omega\ \mathbb{R}^m)$.

定理 1.1 可视为对 M¨uller-Schikorra [9] 关于二阶系统的相应边界连续性结果，以及 Guo-Xiang [4] 关于四阶系统的结果的自然推广。作为定理 1.1的一个特例，我们推得，在 Dirichlet 边界值条件下，从单位球 $B^{2k} \subset \mathbb{R}^{2k}$ 到闭流形$N \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ 的每个（外在或内在）多调和映射在边界处连续。这在一定程度上推广了 Lamm-Wang [8]相应的边界连续性结果。

定理 1.1 的证明方法与 Lamm 和 Wang [8], 类似，依赖于内部 H¨older 正则性和边界极大值原理。正如 [4], 中所指出的，这种方法只要求在 $u = g$“$u = h_0$”或“ ∂”意义下，Ω 满足零阶边界条件，其中某个连续函数 g 或 h_0。这一观察也适用于一般的偶数阶系统（1.1）。

我们的记号相当标准。我们用 $B_r(x)$ 表示在 $\mathbb{R}^{2k}$ 中以 x 为中心、半径为 r 的球。记号 C 表示可能因行而异的各种常数。我们有时写作 $A \lesssim B$ ，意即对于某个仅依赖于定量数据的常数 $C > 0$ ，有 $A \le CB$ 。

2. The proof of main result

2.1. 内部正则性。 方程 (1.1) 弱解的连续性最早由 [2] 得到。但要证明边界连续性，我们需要更强的内部 H¨older 正则性。我们首先回顾以下关于方程 (1.1) 的内部 Holder 正则性结果，见 [5, 定理 1。3] 或 [6,定理 1。1]。

定理 2.1 (内部正则性)。 假设 $u \in W^{k,2}(B^{2k}, \mathbb{R}^m)$ 是 (1.1) 的一个解，满足 (1.2) 和 (1.3)。那么存在 $\alpha \in (0,1)$， $C > 0$ 以及 r_0，它们仅依赖于 k, m 以及 (1.2) 和 (1.3) 中的数据，使得 u 局部 α-H¨older 连续，并且

$$\operatorname{osc}_{B_r(x)} u \le C r^\alpha \|u\|_{W^{k,2}(B^{2k})}$$

对所有 $x \in B_{\frac{1}{4}}(0)$ 以及所有 $0 < r < r_0$ 均成立。

在后面的证明中，我们将使用定理 2.1 的以下版本。存在$R_0 > 0$充分小，使得若 $x \in \Omega$ 且 $0 < r < \min\{R_0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)/4\}$，则$u \in C^{0,\alpha}(B_r(x_0) \cap \mathbb{R}^m)$，其中某个 $\alpha \in (0,1)$ 且

$$\operatorname{osc}_{B_{\tau r}(x)} u \lesssim \tau^{\alpha} \|u\|_{W^{k,2}(B_{4r}(x_0))} \quad \text{for } 0 < \tau \leq 1. \tag{2.1}$$

根据 [6, 定理 1。1], 确实可以推断，(2.1) 对所有 $\alpha \in (0,1)$ 都成立。但就我们的目的而言，目前的估计已经足够。

2.2. 边界最大值原理。边界正则性的另一个要素是边界最大值原理，该原理由 Qing [10] 在证明弱调和映射的边界正则性时首次发现，后来由 Lamm-Wang [8]推广到多重调和情形。

对于 $x \in \Omega$ 和 $R > 0$，记 $\Omega_R(x) = \Omega \cap B_R(x)$。我们将证明方程 (1.1) 解的以下边界极大值原理。

命题 2.2（边界最大值原理）。存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意 $x \in \Omega$ 和 $0 < R < R_0/4$，以及任意 $q \in \mathbb{R}^m$，都有

$$\max_{\Omega_R(x)} |u - q| \leq C \left(\max_{\partial\Omega_R(x)} |u - q| + \|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x))} \right). \tag{2.2}$$

为了证明命题 2.2，我们需要以下版本的 Courant-Lebesgue 引理，该引理实质上已在 [8] 中得到证明。由于这里的表述略有不同，为方便读者，我们在此重述其证明。

引理 2.3。存在 $C > 0$，使得对于任意 $R > 0$ 和任意 $x_0 \in \Omega$，都存在$\overline{R}_1 \in (R, 2R)$，使得

$$\operatorname{osc}_{\partial B_{R_1}(x_0) \cap \Omega} u \leq C \|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x_0))}.$$

证明。对于 $x \in B_{2R}(x_0)$，令 $r = |x - x_0| \in [0, 2R]$。根据 Fubini 定理，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{2R}(x_0)} |\nabla u|^{2k} dx &\geq \int_R^{2R} dr \int_{\partial B_r(x_0) \cap \Omega} |\nabla_T u|^{2k} d\mathcal{H}^{2k-1} \\
&\geq \left(\int_R^{2R} \frac{1}{r} dr \right) \inf_{R \leq r \leq 2R} \left(r \int_{\partial B_r(x_0) \cap \Omega} |\nabla_T u|^{2k} d\mathcal{H}^{2k-1} \right) \\
&= \ln 2 \inf_{R \leq r \leq 2R} \left(r \int_{\partial B_r(x_0) \cap \Omega} |\nabla_T u|^{2k} d\mathcal{H}^{2k-1} \right),
\end{aligned}$$

其中，∇_T 表示 $\partial B_r(x_0)$上的梯度算子，$d\mathcal{H}^{2k-1}$ 表示 $\partial B_r(x_0)$上的体积元。于是存在 $R_1 \in (R, 2R)$，使得

$$R_1 \int_{\partial B_{R_1}(x_0) \cap \Omega} |\nabla_T u|^{2k} dH^{2k-1} \leq \frac{1}{\ln 2} \int_{\Omega_{2R}(x_0)} |\nabla u|^{2k} dx.$$

因此 $u(R_1, \cdot) \in W^{1,2k}(\partial B_{R_1}(x_0) \cap \Omega \cap \mathbb{R}^m)$，且 Sobolev 嵌入定理表明 $u(R_1, \cdot) \in C^{\frac{1}{2k}}(\partial B_{R_1}(x_0) \cap \Omega \cap \mathbb{R}^m)$，并且

$$\operatorname{osc}_{\partial B_{R_1}(x_0) \cap \Omega} u \lesssim R_1 \int_{\partial B_{R_1}(x_0) \cap \Omega} |\nabla_T u|^{2k} dH^{2k-1} \lesssim \|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x_0))}.$$

□

命题的证明 2.2。记 $M = \max_{\Omega_R(x)}|u-q|$，这里 $q \in \mathbb{R}^m$ 是固定的。我们可以假设

$$M \geq \|u\|_{W^{k,2}(\Omega_R(x))}. \tag{2.3}$$

选取 $x_0 \in \Omega_R(x)$，使得

$$|u(x_0) - q| \geq \frac{3}{4}M. \tag{2.4}$$

令 $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega_R(x_0))$。注意到 $r_0 \leq R \leq R_0$。因此，(2.1) 表明，对任意 $r \in (0, \frac{r_0}{4})$，我们有

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} u \leq C\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_0} \|u\|_{W^{k,2}(\Omega_R(x))} \leq CM\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_0}. \tag{2.5}$$

在上文中取 $r_1 = r_0/(4C)^{1/\alpha}$，我们得到

$$\operatorname{osc}_{B_{r_1}(x_0)} u \leq \frac{1}{4}M$$

结合 (2.4) 可得

$$\inf_{B_{r_1}(x_0)} |u-q| \geq |u(x_0)-q| - \operatorname{osc}_{B_{r_1}(x_0)} u \geq \frac{1}{2}M. \tag{2.6}$$

由引理 2.3，存在 $r_2 \in (r_0, 2r_0)$，使得

$$\operatorname{osc}_{\partial B_{r_2}(x_0)\cap\Omega_R(x)} u \leq C\|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x))}. \tag{2.7}$$

注意到 $\partial B_{r_2}(x_0) \cap \partial\Omega_R(x) \neq \emptyset$。以 x_0 为中心使用极坐标，我们估计得

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{|u(r_1,\theta) - u(r_2,\theta)| : (r_i,\theta) \in \partial B_{r_i}(x_0) \cap \Omega_R(x), i = 1,2\right\} \\
\leq& C\int_{S^{2k-1}} d\theta \int_{r_1}^{r_2} |u_r| \chi_{[r_1,r_2]\times S^{2k-1}}(r,\theta) dr \\
\leq& \frac{C}{r_1^{2k-1}} \int_{S^{2k-1}} d\theta \int_{r_1}^{r_2} |u_r| \chi_{[r_1,r_2]\times S^{2k-1}}(r,\theta) r^{2k-1} dr \\
\leq& \frac{C}{r_1^{2k-1}} \int_{B_{2r_0}(x)\cap\Omega_R(x)} |u_r| dx \\
\leq& \frac{C}{r_1^{2k-1}} |B_{2r_0}(x)|^{\frac{2k-1}{2k}} \left(\int_{\Omega_R(x)} |\nabla u|^{2k} dx\right)^{\frac{1}{2k}} \\
\leq& C\frac{r_0^{2k-1}}{r_1^{2k-1}} \|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x))} \leq C\|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x))}.
\end{aligned}$$

这意味着存在 $\theta_0 \in \partial B_1(x_0)$，使得

$$|u(r_1,\theta_0) - u(r_2,\theta_0)| \leq C\|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x))}. \tag{2.8}$$

因此，任取 $x^* \in \partial B_{r_2}(x_0) \cap \partial\Omega_R(x)$，由（2.6）、（2.7）和（2.8）可得

$$\begin{aligned}\frac{M}{2} \leq & \inf_{B_{r_1}(x_0)} |u-q| \leq |u(r_1,\theta_0)-q| \\ \leq & |u(r_1,\theta_0)-u(r_2,\theta_0)| + |u(r_2,\theta_0)-u(x^*)| + |u(x^*)-q| \\ \leq & C\|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x))} + \operatorname{osc}_{\partial B_{r_2}(x_0)\cap\Omega_R(x)} u + \sup_{\partial\Omega_R(x)} |u-q| \\ \leq & C\left(\sup_{\partial\Omega_R(x)} |u-q| + \|u\|_{W^{k,2}(\Omega_{4R}(x))}\right).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

2.3. 定理 **1.1** 的证明。 现在我们准备证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 设 $x_0 \in \partial\Omega$，并取 $q = g(x_0) = u(x_0)$，如命题 2.2所述。注意到

$$\begin{aligned}\max_{\partial\Omega_R(x_0)} |u-u(x_0)| &\leq \max_{\partial\Omega_R(x_0)\cap\partial\Omega} |u-u(x_0)| + \operatorname{osc}_{\partial\Omega_R(x_0)\cap\Omega} u \\ &= \max_{\partial\Omega_R(x_0)\cap\partial\Omega} |g-g(x_0)| + \operatorname{osc}_{\partial\Omega_R(x_0)\cap\Omega} u.\end{aligned}$$

第一项趋于 0，因为 $R \to 0$ 由于 $g \in C(\partial\Omega)$。第二项趋于 0，因为$R \to 0$ 根据引理 2.3。这表明 u 连续，证毕。

□

注 2.4。上述证明可推广到以下非齐次椭圆系统的解

$$\Delta^k u = \sum_{l=0}^{k-1} \Delta^l \langle V_l, du\rangle + \sum_{l=0}^{k-2} \Delta^l \delta(w_l du) + f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^{2k} \tag{2.9}$$

其中 $f \in L^p$ 对某个 $p > 1$ 以及 (1.2), (1.3). 事实上，根据 [6, 定理 1。1], 在这种情况下，内部正则性估计 (2.1) 变为

$$\operatorname{osc}_{B_{\tau r}(x)} u \lesssim \tau^\alpha \left(\|u\|_{W^{k,2}(B_{4r}(x_0))} + \|f\|_{L^p(B_{4r}(x_0))}\right) \quad \text{for } 0 < \tau \leq 1. \tag{2.10}$$

此时，边界最大值原理 (2.2) 仍然成立，只需在右端增加一项$\|f\|_{L^p(\Omega_{4R}(x))}$。定理 1.1 的证明稍作显然的修改即可完成。

致谢。作者感谢 Chang-Lin Xiang 教授和 Chang-Yu Guo 教授向他们提出这一问题，并进行了许多有益的交流。

References

[1] S.-Y.A. Chang, L. Wang and P.C. Yang，双调和映射的正则性理论。《纯粹与应用数学通讯》52(9) (1999), 1113-1137.[2] F.L. de Longueville and A. Gastel，多调和映射型偶数阶系统的守恒律。《微积分变分与偏微分方程》60, 138 (2021).[3] A. Gastel and C. Scheven，临界维数下多调和映射的正则性。《分析与几何通讯》17 (2009), no. 2, 185-226.[4] C.-Y. Guo and C.-L. Xiang，借助守恒律证明四阶线性系统解的正则性。《伦敦数学会杂志》(2) 101 (2020), no. 3, 907-922.
[5] C.-Y. Guo and C.-L. Xiang，临界维数下高阶椭圆系统弱解的正则性。《美国数学会会刊》374 (2021), no. 5, 3579-3602。

[6] C.-Y. Guo, C.-L. Xiang and G.-F. Zheng, L^p 具有反对称一阶势的偶数阶椭圆系统的正则性理论。《J. Math. Pures Appl.》165 (2022) 286-324.[7] T. Lamm and T. Rivière, 四维中四阶系统的守恒律。Comm. Partial Differential Equations 33 (2008), 245-262.
[8] T. Lamm and C.Y. Wang, 临界维数下多调和映射的边界正则性。Adv. Calc. Var. 2 (2009), 1-16.[9] F. Müller and A. Schikorra, 通过乌伦贝克-里维埃分解证明边界正则性。Analysis (Munich) 29 (2009), 199-220.[10] J. Qing, 从曲面出发的弱调和映射的边界正则性, 《J. Funct. Anal.》114 (1993) 458-466.[11] T. Rivière, 共形不变变分问题的守恒律。Invent. Math. 168 (2007), 1-22.[12] C.Y. Wang, 从 Rm 到黎曼流形的驻定双调和映射。Comm.Pure Appl. Math. 57 (2004), 419-444。

(Ming-Lun Liu) Research Center for Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Shandong University, Qingdao 266237, P. R. China and Frontiers Science Center for Nonlinear Expectations, Ministry of Education, Qingdao, P. R. China电子邮箱：minglunliu2021@163.com

(Yao-Lan Tian) Center for Optics Research and Engineering, Shandong University,Qingdao 266237, P. R. China电子邮箱：tianylbnu@126.com