arXiv:2301.00569v1 [math.AC] 2 Jan 2023

Elias 理想

Hailong Dao

Abstract. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个一维局部 Cohen-Macaulay 环。若 R 的 I 是一个 $\mathfrak{m}$-主理想，则称其为 Elias 理想，当且仅当 I 的类型与 R/I 的类型相等。典范理想和主理想都是 Elias 理想，并且 Elias 理想在包含关系下封闭。我们给出 Elias 理想的多种刻画以及识别它们的具体判据。我们将 Elias 理想与其他研究充分的定义联系起来：Ulrich、 $\mathfrak{m}$-满、整闭、迹理想等。我们还讨论其在典范理想、导子和 Auslander 指数方面的应用。

Introduction

设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个一维局部 Cohen-Macaulay 环， R 的 $\mathfrak{m}$-主理想为 I。如果 I 的 Cohen-Macaulay 类型与 R/I 的 Cohen-Macaulay 类型相同，则称 I 为 Elias 理想。根据标准事实，主理想或典范理想都是 Elias 理想；我们很快将看到，这一性质孕育出一个相当丰富且有趣的理论。

我们的工作深受[7], 中的一项漂亮结果的影响，Elias 在其中证明，任何理想ω 只要包含在 $\mathfrak{m}$ 的足够高次幂中，且 R/ω 是 Gorenstein 的，就必定是典范理想。尽管文中没有明确说明，但证明表明，任何包含在 $\mathfrak{m}$ 的足够高次幂中的理想，按我们的定义都是 Elias 理想。本工作的另一灵感来源是 [2], ，De Stefani 用我们的术语研究了 Gorenstein 局部环中 $\mathfrak{m}$ 的 Elias 幂，并给出了 Ding 猜想的一个反例（准确的联系见第 4节）。

本文深入研究 Elias 理想。它们有许多不同的刻画，并具有相当有用的性质。例如，它们在包含关系下封闭，且主理想或典范理想都是 Elias 理想。另一方面，导子理想或正则迹理想不是 Elias 理想。当 R 是 Gorenstein 时，它们恰好是 Auslander 指数 $\delta(R/I)$ 为 1 的理想。

我们能够利用生成元的最小个数或赋值等非常易于获取的信息，得到许多判定理想是否为 Elias 的准则。将这些准则结合起来，可以立即得到关于导子或典范理想的精确界和相关信息，而这些结果通常并不容易通过其他方式获得。

将目前的定义和结果推广到高维环或模，有几种显而易见的方法。然而，在本文中，我们选择将重点放在一维情形下的理想上，因为它们本身已经足够有趣，同时也可以使论文保持简洁。我们希望在未来的工作中研究更一般的理论。

现在，我们简要介绍本文的结构和主要结果。

- 在第1 节中，我们给出 Elias 理想的正式定义，并证明若干关键结果。定理 1.2 包含 Elias 理想的若干等价刻画。推论1.3 汇集了重要推论，例如，Elias 理想在理想包含关系下封闭。此外，还给出了利用冒号理想判定 Elias 理想的准则。接下来，

2020年数学学科分类。主要分类：13D02、13H10。次要分类：14B99。

命题 1.4 确立了基本的换环结果，该结果在这一系列论述中经常使用。

- 第 2 节将 Elias 理想与若干研究充分的理想类别联系起来：Ulrich 理想、$\mathfrak{m}$-满理想、满理想、整闭理想等。经过一些基本观察（2.3、2.4、2.5），我们给出定理 2.7 和命题2.14，其中提供了通过生成元个数或赋值等基本信息识别 Elias 理想的具体方法。我们还推导出导子理想或正则迹理想不是 Elias 理想（推论 2.13）。这揭示了一项有用的应用：例如，如果我们知道 $\mathfrak{m}^2$ 是 Elias 理想，那么导子或任何正则迹理想都必须包含一个 $\mathfrak{m}$-进阶数为 1 的元素。

- 基于上一节的内容，自然会想到研究 Elias 指数 eli(R)，也就是使 $\mathfrak{m}$ 成为 Elias 理想的最小次幂；我们将在第 3节进行研究。这里的第一个主要结果是定理 3.2，它将该指数与广义 Lˆoewy 长度以及伴随分次环的正则性联系起来。接着，在定理 3.3中，我们刻画了指数较小的环：eli(R) $= 1$ 当且仅当 R 是正则的；而 eli(R) $= 2$ 加上 R 是 Gorenstein 环，当且仅当 $e(R) = 2$。我们给出一大类 Elias 指数为 2 的非 Gorenstein 环（3.4）。

- 最后，在第 4 节中，我们聚焦于戈伦斯坦环这一特殊情形。在这种情况下，我们发现，Elias 理想恰好是其商环的 Auslander δ不变量为 1 的理想。这使我们能够立即运用已有结果，在 4.1 和4.3中重新得到关于 Auslander 不变量和 Auslander 指数的旧结果。我们举出一个反例，反驳 Ding 的一个定理，并重新考察 [2] 中给出的一个反例（例 4.4 和4.5），该反例针对的是 Ding 的一个猜想。

致谢：谨向 Juan Elias 和 Alessandro Di Stefani 致谢，感谢他们提出的宝贵意见并给予鼓励。作者的部分研究工作得到 Simons 合作基金 FND0077558 的支持。

1. Elias ideals: definitions and basic results

本文中，设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 为一维 Cohen–Macaulay 局部环。对于模 M，定义 type$_R(M)$ $=\dim_k \operatorname{Ext}_R^{\dim M}(k, M)$。令 $Q = Q(R)$ 表示 R 的全分式环。令 $e = e(R)$ 表示 R 的 Hilbert–Samuel 重数。对于元素 $x \in R$， x 的 $\mathfrak{m}$-进阶，记作 ord(x)，是满足 $x \in \mathfrak{m}^a$ 的最小 a。理想 I 的阶记作 ord(I)，即其元素的阶的最小值。

定义 1.1. 如果一个 $\mathfrak{m}$-初等理想 I 满足 type(I) $=$type(R/I)，我们就称它为 Elias 理想。

定理 1.2. 我们总有 type(I) $\geq$type(R/I)。以下命题等价。

(1) type(I) $=$ type(R/I)。(2) 对任意非零因子 $x \in \mathfrak{m}$, $xI : \mathfrak{m} \subseteq (x)$。(3) 对任意非零因子 $x \in \mathfrak{m}$, $xI : \mathfrak{m} = x(I : \mathfrak{m})$。(4) 对某个非零因子 $x \in \mathfrak{m}$, $xI : \mathfrak{m} \subseteq (x)$。(5) 对某个非零因子 $x \in \mathfrak{m}$, $xI : \mathfrak{m} = x(I : \mathfrak{m})$。(6) $I :_Q \mathfrak{m} \subseteq R$。(7) $K \subseteq \mathfrak{m}$ $(K :_Q I)$（假设 R 有一个典范理想 K）。

证明。设 x 是一个非零因子。于是

$$\operatorname{type}(I) = \operatorname{type}(I/xI) = \dim_k \frac{xI : \mathfrak{m}}{xI} \geq \dim_k \frac{x(I : \mathfrak{m})}{xI} = \dim_k \frac{I : \mathfrak{m}}{I} = \operatorname{type}(R/I)$$

因此，type(I) = type(R/I) 当且仅当 $xI : \mathfrak{m} = x(I : \mathfrak{m})$。现在，$xI : \mathfrak{m} \subseteq (x)$ 等价于对某个理想 J，有 $xI : \mathfrak{m} = xJ$，因为 x是非零因子。将其改写为 $xJ\mathfrak{m} \subseteq xI$，这等价于 $J\mathfrak{m} \subseteq I$，我们得到 $J \subseteq I : \mathfrak{m}$。另一方面，$x(I : \mathfrak{m}) \subseteq xI : \mathfrak{m}$，因此$J = I : \mathfrak{m}$。这就证明了前五项的等价性。

注意，对于任意非零因子 $x \in \mathfrak{m}$, $xI : \mathfrak{m} = x(I :_Q \mathfrak{m})$。因此，(6) 等价于 (3)。

设 K 是一个典范理想。对序列 $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ 应用 $\mathrm{Hom}_R(-, K)$，并将 $\mathrm{Hom}_R(I, K)$ 认作 $K :_Q I$，可得 $0 \to K \to K :_Q I \to \mathrm{Ext}^1_R(R/I, K) = \omega_{R/I} \to 0$。由于 type($I$) = $\mu(K :_Q I)$ 且 type(R/I) = $\mu(\omega_{R/I})$，(7) 与 (1) 等价。

□

推论 1.3。我们有：

(1) 如果 I 同构于 R 或 R 的典范模（假设其存在），那么 I 是 Elias。(2) 如果 I 是 Elias，那么对于任意理想 $J \subseteq I$，J 也是 Elias。（Elias 性质在包含下封闭。）(3) 设 K 是 R 的典范理想，且 I 是一个包含 K 的理想。那么 I 是 Elias，当且仅当 $K \subseteq \mathfrak{m}(K :_R I)$。(4) 设 K 是 R 的典范理想，且 I 是满足 $K \subseteq I$ 的理想。那么 $K : I$ 是 Elias，当且仅当 $K \subseteq \mathfrak{m}I$。(5) 假设 I 包含一个典范理想 K，使得 ord(K) = 1。那么 I 是 Elias，当且仅当 $I = K$。

证明。对于第一个断言，$I :_Q \mathfrak{m} \subset I :_Q I = R$。对于第二个断言，我们有 $J :_Q \mathfrak{m} \subset I :_Q \mathfrak{m}$。对于 (3)，首先注意到 $K :_Q I \subset K :_Q K = R$，因此 $K :_Q I = K :_R I$，并且我们可以使用定理1.2的第 (7) 部分。

对于第 (4) 部分，注意到 $K : (K : I) = I$，因此我们可以应用第 (3) 部分。

对于第 (5) 部分，我们再次应用第 (3) 部分：若 $K \subsetneq I,$，则 $\mathfrak{m}(K :_R I) \subseteq \mathfrak{m}^2$，这与 ord($K$) = 1 矛盾。

□

以下换环结果将在后文中频繁使用。

命题 1.4。设 $(R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ 是一个局部平坦环扩张，满足 $\dim S = 1$ 且 S 是诺特的。那么，I 是 R 的 Elias 理想，当且仅当 IS 是 S 的 Elias 理想。

证明。在此假设下，型为$_R(M)$ 型为$_{S/\mathfrak{m}S}(S/\mathfrak{m}S)$ = 型为$_S(M \otimes_R S)$，对任意有限生成的 R-模 M (例如参见 [11])，故结论成立。□

2. Elias ideals and other special ideals

定义 2.1. 设 I 是一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想。

- I 称为 Ulrich（作为一个 R-模），若 $\mu(I) = e(R)$。假设 k 是无限的，则 I 是 Ulrich，当且仅当存在某个 $xI = \mathfrak{m}I$ 使得 $x \in \mathfrak{m}$ （等价地，对于任意满足 $x \in \mathfrak{m}$ 且$\ell(R/xR) = e(R)$的 $x \in \mathfrak{m}$）。

若 • I 满足 $I\mathfrak{m} : x = I$，其中 $x \in \mathfrak{m}$为某个元素，则称 • I 为 $\mathfrak{m}$-满。

若 • I 满足 $I\mathfrak{m} : \mathfrak{m} = I$，则称其为满（或基本满）。

备注 2.2。当 Ulrich 或 $\mathfrak{m}$满理想等特殊理想的定义涉及元素 x时，我们称该性质由 x见证。请注意，成为这样的 x 是一个扎里斯基开条件（对于向量空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$中 x 的像）。关于这些理想的更多内容，请参见 [3, 10, 9, 12]。

命题 2.3。设 I 是一个 $\mathfrak{m}$主理想。设 e 是R的 Hilbert–Samuel 重数。以下各项等价。

(1) I 是 Ulrich。
(2) $\operatorname{type}(I) = e$。

证明。通过作平坦扩张 $R \to R[t]_{(\mathfrak{m},t)}$，我们可以假设 k 是无限的。设 $x \in \mathfrak{m}$ 满足 $\ell(R/xR) = e$。那么 $\ell(I/xI) = e$。注意，$\operatorname{type}(I) = \ell(\operatorname{soc}(I/xI)) \leq \ell(I/xI) = e$，且当且仅当 $\mathfrak{m}(I/xI) = 0$ 时取等号，换言之，I 是 Ulrich。□

命题 2.4。设 I 是一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想。
(1) 假设 k 是无限的。如果 I 是 Ulrich，那么它是 $\mathfrak{m}$-满的。(2) 假设 k 是无限的。如果 I 是整闭的，那么它是 $\mathfrak{m}$-满的。(3) 如果 I 是 $\mathfrak{m}$-满的，那么它是满的。

证明。(1)：我们可以找到一个非零因子 x 使得 $Ix = I\mathfrak{m}$，因此 $I\mathfrak{m} : x = Ix : x = I$。
(2)：见 [8,定理 2。4]。(3)：我们有 $I \subseteq I\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \subseteq I\mathfrak{m} : x$，由此结论显然成立。

□

命题 2.5. 若 I 是 $\mathfrak{m}$-满的，且由非零因子 $x \in \mathfrak{m}$见证。以下条件等价：
(1) I 是 Elias。 (2) 对某个 Ulrich 理想 J，有 $I = xJ$。

证明。假设 I 是 Elias，由非零因子 x见证，因此 $I\mathfrak{m} : x = I$。我们将证明$I \subseteq (x)$。否则， I 中含有一个元素 s，其在 $R/(x)$ 中的像属于底。因此$s\mathfrak{m} \subset I\mathfrak{m} \cap (x) = x(I\mathfrak{m} : x) = xI$，故 $s \in xI : \mathfrak{m} \subset (x)$，矛盾。

由于 $I \subseteq (x)$，我们必有某个 J 使得 $I = xJ$。我们有 $Jx = I = I\mathfrak{m} : x = Jx\mathfrak{m} : x = J\mathfrak{m}$，所以 J 是 Ulrich。

假设 (2)。那么 I 是 Ulrich，且由 2.4 也可知其为满，因此 $xI : \mathfrak{m} = \mathfrak{m}I : \mathfrak{m} = I = xJ \subset (x)$，故 I 是 Elias。□

推论 2.6。若 $e = 2$ 和 k 是无限的，则 I 是 Elias，当且仅当对于某个非零因子 $x \in \mathfrak{m}$， $I \subseteq (x)$。

证明。 由于 $e = 2$，任意理想要么是主理想，要么是 Ulrich 理想，并且 2.4 与 2.5 一起给出所需结论。
□

定理 2.7。以下结论对于 $\mathfrak{m}$ primary 理想 I成立。
(1) 如果 $\mu(I) < e$ 且 $\operatorname{type}(R/I) \geq e - 1$，那么 I 是 Elias。（2）假设 $\mu(\mathfrak{m}I) \leq \mu(I) = e - 1$。那么 $I\mathfrak{m}$ 是 Elias，并且 $I\mathfrak{m} : \mathfrak{m} = I$。（3）此外，假设 $R = S/(f)$ 是一个超曲面，其中 S 是维数为 2 的正则局部环。设 J 是一个由 e 个元素极小生成的 S 理想，其中一个元素是 f。那么 JR 是 Elias。

证明。 由不等式 $\operatorname{type}(I) \geq \operatorname{type}(R/I)$，我们必有 $\operatorname{type}(I)$ 是 e 或 $e - 1$。但如果 $\operatorname{type}(I) = e$，那么 $\mu(I) = e$ 根据 2.3，矛盾。
接下来，我们有：

$$\operatorname{type}(R/I\mathfrak{m}) = \dim_k \frac{I\mathfrak{m} : \mathfrak{m}}{I\mathfrak{m}} \geq \dim_k \frac{I}{I\mathfrak{m}} = \mu(I) \geq e - 1$$

并且根据假设， $I\mathfrak{m}$ 不是 Ulrich。因此 $I\mathfrak{m}$ 是 Elias，且 $\operatorname{type}(I\mathfrak{m}) = e - 1$；由上述链式推导可得 $I\mathfrak{m} : \mathfrak{m} = I$。

对于最后一部分，令 $I = JR$。那么 $\mu_R(I) = e-1$，且 type(R/I) =type$(S/J) = e-1$，因此我们可以应用第一部分。

□

例 2.8. 设 $R = k[[t^4, t^5, t^{11}]] \cong k[[a,b,c]]/(a^4 - bc, b^3 - ac, c^2 - a^3b^2)$。那么 $\mathfrak{m}^2$ 是 Elias：可以直接验证，也可以注意到 $\mu(\mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{m}^2) = 3 = e(R) - 1$ 并使用 2.7。但是$\mathfrak{m}^2$ 不包含于任意一个 (x)，其中 (x)。

例 2.9. 设 $R = k[[t^6, t^7, t^{15}]] \cong k[[a,b,c]]/(a^5 - c^2, b^3 - ac)$。那么希尔伯特函数为 $\{1,3,4,5,5,6,\dots\}$，因此 $\mathfrak{m}^4$ 是 Elias。在这种情况下，$\mathfrak{m}^4 \subseteq (a)$，所以 $\mathfrak{m}^4$ 显然是 Elias。

设 $R \subset S$ 是一个有限双有理扩张。回顾一下，S 在 R中的导子，记为 $c_R(S)$，是 $R:_{Q(R)} S$。

命题 2.10. 设 $R \subset S$ 是一个有限双有理扩张。若 $IS = I$ （即 I 是一个 S-模）且 I 是 Elias，则 $I: \mathfrak{m} \subseteq c_R(S)$。

证明。设 $Q = Q(R)$。我们有 $R \supset I :_Q \mathfrak{m} = IS :_Q \mathfrak{m}S \supset (I:\mathfrak{m})S$，因此 $I:\mathfrak{m} \subseteq R :_Q S = c_R(S)$，如所求。□

注意，若 $IS = I$，则 trace$(I) \subseteq c_R(S)$。因此，自然会想到将 2.10 推广如下：

问题 2.11. 若 I 是 Elias，是否有 $I: \mathfrak{m} \subseteq$ trace(I)?

答案是否定的。在上面的例子 2.8 中，设 $R = k[[t^4, t^5, t^{11}]] \cong k[[a,b,c]]/(a^4 - bc, b^3 - ac, c^2 - a^3b^2)$。可以验证，trace$(\mathfrak{m}^2) = (a^2, ab, b^2, c)$，而 $\mathfrak{m}^2: \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$。

推论 2.12. 假设 $\mathfrak{m}^2$ 是 Elias（例如，若 R 具有极小重数），且是整闭的。若 $\mathfrak{m}^2 \subseteq c_R(\overline{R})$，则 $\mathfrak{m} \subseteq c_R(\overline{R})$。

证明。 应用 2.10 于 $I = \mathfrak{m}^2$。 □

推论 2.13. 假设整闭包 $\overline{R}$ 是有限的。那么 $\overline{R}$ 在R 中的导子不是 Elias。正则迹理想不是 Elias。

证明。 令 $\mathfrak{c} = c_R(\overline{R})$。于是 $\mathfrak{c}$是一个 $\overline{R}$-模，因此若它是 Elias，我们就有 $\mathfrak{c}: \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{c}$，矛盾！任一正则迹理想都必须包含 $\mathfrak{c}$，例如参见 [3]，因此根据 1.3，它也不可能是 Elias。□

下面的结果简单却相当有用，可用于从 Ulrich 理想的极小生成元构造 Elias 理想。参见后续示例。

命题 2.14. 设 $I \subset J$ 是正则理想，且 J 是 Ulrich。设 $x \in \mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$的极小约化。假设对于 J的任一极小生成元都有 $\mathfrak{m}y \not\subseteq xI$。那么 I 是 Elias。

证明。假设意味着 $xI: \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}J = xJ \subset (x)$。 □

例 2.15. 设 $R = k[[a_1, \dots, a_n]]/(a_ia_j)_{1\le i<j\le n}$。应用 2.14，其中 $J = \mathfrak{m}, x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。注意，每个元素 $f \in \mathfrak{m}$ 都具有 $f = \sum \alpha_i a_i^{s_i}$的形式，其中 α_is 是单位元或 0。于是 $a_if = \alpha_i a_i^{s_i+1}$ 且 $xf = \sum \alpha_i a_i^{s_i+1}$。由此容易推出，条件$\mathfrak{m}y \not\subseteq xI$ 对任意极小生成元 y 的 $\mathfrak{m}$ 等价于 $a_i^2 \notin xI$ 对每个 i成立，而这又等价于 $a_i \notin I$ 对每个 i成立。

例如，若 $R = \mathbb{Q}[[a,b,c]]/(ab, bc, ca)$，$I = (a-b, b-c)$ 是 Elias。由于 $R/I = \mathbb{Q}[[a]]/(a^2)$ 是 Gorenstein，I 是一个典范理想。

可以利用赋值，从某个 Ulrich 理想的极小生成集的一部分构造 Elias 理想。

例 2.16. 设 $R = k[[t^n, t^{n+1}, \dots, t^{2n-1}]]$。设 $I = (t^n, \dots, t^{2n-2})$。对 $J = \mathfrak{m}, x = t^n$ 应用 2.14。设 ν 是 R 上的 t-进赋值。注意，对于 $y \in J = \mathfrak{m}$ 的任意极小生成元，$3n-2 \in \nu(y\mathfrak{m})$。另一方面，$3n-2 \notin \nu(xI)$，因此 $y\mathfrak{m} \not\subseteq xI$。由此可得 I，且任何包含于 I 的理想都是 Elias。再次注意，由于 R/I 是 Gorenstein，I 实际上是一个典范理想。

3. Elias index

定义 3.1. 定义如下：

- 设 R 的 Elias 指数记为 eli(R)，它是使得 $\mathfrak{m}^s$ 为 Elias 的最小 s。
- 设 R 的广义 L¨oewy 长度记为 gll(R)，它是满足对某个 $x \in \mathfrak{m}$，$\mathfrak{m}^s \subseteq (x)$ 的 s 的下确界。
- R 的 Ulrich 指数，记作 ulr(R)，是满足 $\mathfrak{m}^s$ 为 Ulrich 的最小 s，也就是说 $\mu(\mathfrak{m}^s) = e$。

定理 3.2。我们有：

(1) eli(R) $\leq$gll(R)。(2) 若剩余域 k 无限，则 gll(R) $\leq$ ulr(R) $+ 1$。(3) 假设伴随分次环 gr$_{\mathfrak{m}}(R)$ 是 Cohen-Macaulay，且剩余域 k 无限。那么 eli(R) $=$ gll(R) $=$ ulr(R) $+ 1$。

证明。若 $\mathfrak{m}^s \subseteq (x)$，则 x 必为非零因子。因此 $\mathfrak{m}^s$ 由 1.3可知是 Elias。第二个结论由定义直接得出。条件 gr$_{\mathfrak{m}}(R)$ 是 Cohen-Macaulay，意味着 $\mathfrak{m}^s$ 对所有 $\mathfrak{m}$都是 $s > 0$-满的，因此最后一个断言由 2.5得出。□

定理 3.3。我们有：

(1) eli(R) $= 1$ 当且仅当 R 是正则的。(2) 假设 R 是 Gorenstein 的，那么 eli(R) $= 2$ 当且仅当 $e(R) = 2$。(3) 设 $(A, \mathfrak{n})$ 是一维 Gorenstein 局部环。假设 $R = \mathfrak{n} : {}_{Q(A)}\mathfrak{n}$是局部的。那么 eli($R$) ≤ 2。

证明。(1)：假设 $\mathfrak{m}$ 是 Elias。为证明 R 是正则的，我们可以作扩张$R \to R[t]_{(\mathfrak{m},t)}$ 并假设 k 是无限的。取一个非零因子 $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$，则有 $\mathfrak{m}^2 : x = \mathfrak{m}$，也就是说 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$-满的，见证元为 x。于是 2.5 表明 $\mathfrak{m} \subset (x)$，因此 $\mathfrak{m}$ 是主理想。

(2)：由 1.4，我们仍可假设 k 是无限的。若 $e = 2$，则对于 $\mathfrak{m}$的一个极小约化 x，有 $\mathfrak{m}^2 \subset (x)$，因此 $\mathfrak{m}^2$ 是 Elias。现在，假设 $\mathfrak{m}^2$ 是 Elias 且 $e \geq 3$，我们要导出矛盾。首先断言，R 的任意 Ulrich 理想 I 都必须包含于 $\mathfrak{m}^2$。取 $\mathfrak{m}$的任意一个极小约化 x。那么 $I\mathfrak{m} = xI \subseteq (x)$，因此 $I \subset (x)$：$\mathfrak{m} \subseteq (x) + \mathfrak{m}^2$（否则，$R' = R/xR$ 的底的阶数为 1；但 R' 是长度至少为 3 的 Gorenstein 环，这不可能)。由于 x 是一般的，在向量空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$中考察可知，$I \subseteq \mathfrak{m}^2$。

集合 $\mathfrak{m}$中的 -初等 Ulrich 理想 R 非空，因为它包含 $\mathfrak{m}$的足够高次幂。因此，我们可以选取该集合中关于包含关系极大的一个元素 I。由最后一个断言可知，$I \subseteq \mathfrak{m}^2$，因此 I 根据 1.3也是 Elias。现在，2.4 和2.5 推出 $I = xJ$，其中 $x \in \mathfrak{m}$是非零因子，因此 J 是一个严格包含 I的 Ulrich 理想，这正是我们所需的矛盾。

（3）：如果 $R = A$，那么 $\mathfrak{n}$ 根据 1.2是 Elias，因此 A 根据第 (1) 部分是正则的。因此 R 也正则，且 eli(R) $= 1$。如果 R严格包含 A，那么 $c_A(R) = A : {}_{Q(A)} R = \mathfrak{n}$，因此

$\mathfrak{n} \cong \mathrm{Hom}_A(R, A) \cong \omega_R$。因此 $\mathfrak{n}$ 是 R的典范理想。另一方面，由于 A 不是正则的， $\mu_A(R) = 2$（对正合列 $0 \to \mathfrak{n} \to A \to A/\mathfrak{n} \to 0$ 取对偶，并将 R 与$\mathfrak{n}^* = \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{n}, A)$等同）。因此 $\ell_A(R/\mathfrak{n}) = 2$，所以 $\ell_R(R/\mathfrak{n}) \leq 2$，这迫使 $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{n}$成立；又由于 $\mathfrak{n}$ 是 Elias，因此 $\mathfrak{m}^2$ 根据 1.3 也是 Elias。

□

例 3.4。我们给出前一定理中第 (3) 项的一些例子。首先，令$A = \mathbb{R}[[t, it]]$ 且满足 $i^2 = -1$。那么 $R = \mathbb{C}[[t]]$。

接下来，令 $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ 为任意对称半群，并令 b为 H的弗罗贝尼乌斯数。令 $A = k[[H]]$ 为 H的完备戈伦斯坦数值半群环。那么$R = k[[\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle]]$ 的 Elias 指数为 2，除非 $H = \langle 2, 3 \rangle$，此时 eli$(R) = 1$。

例如， $R = k[[t^e, t^{e+1}, t^{e^2-e-1}]]$ 对应 $e \geq 3$。对于这样的环，我们有 type$(R) = 2$,$e(R) = e$, gll$(R) = e - 1$, ulr$(R) = e - 1$，但 eli$(R) = 2$。这些例子表明，仅凭 eli(R) 无法得到 gll(R) 或 ulr(R) 的上界。

4. Elias ideals in Gorenstein rings and Auslander index

本节重点讨论戈伦斯坦环。在本节中，设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个一维局部戈伦斯坦环，且 $I \subset R$ an $\mathfrak{m}$ 是一个主理想。回忆一下，对于有限生成模 M， M 的 Auslander δ不变量 $\delta(M)$ 定义为满足存在一个满射 $R^s \oplus N \to M$ 的最小数 s。使得$\delta(R/\mathfrak{m}^s) = 1$ 成立的第一个 s 称为 R 的 Auslander 指数，记作 index(R)。

事实证明，Elias 理想恰好是其商具有 Auslander 不变量 1 的那些理想。我们在此汇集这一事实以及其他一些结果。这些结果大多已为人所知，或可由前几节的结果轻易推出，或两者兼有。

命题 4.1. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个一维局部戈伦斯坦环，且 $I \subset R$an$\mathfrak{m}$ 是一个主理想。我们有：

(1) $\delta(R/I) = 1$ 当且仅当 I 是 Elias 理想。(2) 假设 R 是 Gorenstein 的。那么 I 是 Elias 理想，当且仅当对每个非零因子 $x \in I$，$x \in \mathfrak{m}(x\colon I)$。(3) 假设 R 是 Gorenstein 的。对于非零因子 $x \in I$， $x\colon I$ 是 Elias 理想，当且仅当 $x \in \mathfrak{m}I$。特别地，若 $x \in \mathfrak{m}^2$，则 $x : \mathfrak{m}$ 是 Elias 理想。(4) I 是 Elias 理想，当且仅当 $1 \in \mathfrak{m}I^{-1}$，其中 $I^{-1} = R :_Q I$。若 I 是 Elias 理想，则 $I \subseteq \mathfrak{m}$ 的迹为 I。

证明。 第 (1) 部分是 Ding 的一个结果的特例，[6, 命题 1。2] 以及我们对 Elias 理想的定义。第 (2) 部分和第 (3) 部分分别是1.3中第 (3) 和第 (4) 部分的特例，因为在该情形下（x）与典范模同构。

（4）可[6, 2.4, 2。5], ，这也可由上述结果轻易推出：第一个断言只是对（2）的改写。对于第二个断言，由第一个断言可得 $I \subseteq \mathfrak{m}II^{-1} = \mathfrak{m}$迹$(I)$。□

人们对以下问题颇感兴趣：

问题 4.2。给定一个理想 I，满足 $\delta(R/I) = 1$，何时可以断言，对于某个非零因子 $x \in \mathfrak{m}$，有 $I \subset (x)$?

例如，Ding 提出的一个猜想询问 index(R) = gll(R) 是否总是成立。从我们的角度来看，这当然只是一个关于 Elias 理想和 Elias 指数的问题。因此，我们立即得到以下结果。

推论 4.3. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个一维局部戈伦斯坦环，且 $I \subset R$ an$\mathfrak{m}$-主理想。

(1) 如果 I 包含一个阶数为 1 的非零因子 x，那么 I 是 Elias 理想，当且仅当 $I = (x)$。(2) $\operatorname{index}(R) = \operatorname{eli}(R)$。(3) $\operatorname{index}(R) = \operatorname{gll}(R) = \operatorname{ulr}(R) + 1$，如果 k 是无限的，且 $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ 是 Cohen-Macaulay 的（例如，当 R 是标准分次的，或 R 是超曲面时，就会出现这种情况）。

证明。对于第 (1) 部分，我们应用推论 1.3中的 (5)。第 (2) 部分由 4.1的第 (1) 部分可直接得到。第 (3) 部分是 [5, 定理 2。1], [2, 推论 2。11],的结论，也可由 3.2得到。

□

例 4.4。（Ding 结果的反例）在本例中，我们构造齐次 Elias 理想的例子，这些理想不包含在主理想中。

设 $S = k[[x_1 \dots, x_n]]$，且 J是一个齐次理想，使得 $R = S/J$是 Gorenstein。设 $f \in S$ 是一个不可约元，其次数至少为 2，但小于J的初始次数，并且 f在 R中的像是一个非零因子。则 $I = fR\colon \mathfrak{m}$由 4.1是 Elias 理想，但 I不包含在任何主理想中。因为 f不可约，所以必有 $fR\colon \mathfrak{m} = (f)$，矛盾。

这类例子与 [6], 中的定理 3.1 矛盾。该定理声称，对于 I 在分次 Gorenstein R中的齐次理想，$\delta(R/I) = 1$ (等价地，I 是 Elias 理想) 当且仅当 $I \subseteq (x)$，其中 $x \in \mathfrak{m}$。

具体而言，可以取 $S = \mathbb{Q}[[a, b]]$、$J = (a^3 - b^3)$ 和 $f = a^2 + b^2$。若需要代数闭域，可以取 $S = \mathbb{C}[[a, b, c]]$，其中 J 是两个一般三次式的完全交，而 $f = a^2 + b^2 + c^2$。

[6, 定理 3.1] 中的错误如下。首先，可以推出 $1 = \sum \frac{z_i y_i}{x_i}$，其中$z_i \in \mathfrak{m}$ 且 $\frac{y_i}{x_i} \in I^{-1}$，因此存在 i，使得 $\deg(z_i y_i) = \deg(x_i)$，这是正确的。随后，Ding 声称存在 $u \in k$，使得 $z_i y_i = u x_i$。但这并不正确。在上面的第一个例子中，我们有 $z_1 = y_1 = a, z_2 = y_2 = b, x_1 = x_2 = a^2 + b^2$。

例4.5。（De Stefani 对 Ding 猜想的反例，重访）如上所述，Ding 猜想，当 R 是 Gorenstein 时，$\operatorname{index}(R) = \operatorname{gll}(R)$ 总是成立。De Stefani 在 [2] 中给出了一个巧妙的反例。令 $S = k[x, y, z]_{(x,y,z)}$, $I = (x^2 - y^5, xy^2 + yz^3 - z^5)$。那么 $\operatorname{index}(R) = 5$，但 $\operatorname{gll}(R) = 6$。现在我们将说明，如何利用我们的结果，简化 [2], 中证明的某些部分；该证明相当复杂。

我们注意到，由于 R 的希尔伯特函数为 (1, 3, 5, 6, 7, 7, 8, 8...) 且 $e(R) = 8$，根据定理 2.7 可得 $\mathfrak{m}^5$ 是 Elias。为得出结论，我们需要证明对于任意非零因子 $y \in \mathfrak{m}$，$\mathfrak{m}^5$ 都不包含于 (y) 中。注意，由希尔伯特函数可知，$\mathfrak{m}^6$ 是 Ulrich。我们首先证明可以假设 $\operatorname{ord}(y) = 1$。假设 $\mathfrak{m}^5 \subset (y)$，$\mathfrak{m}^5 = yI$，则 $\mathfrak{m}^5 \cong I$。如果 $\operatorname{ord}(y) \geq 2$，那么$y\mathfrak{m}^3 \subset \mathfrak{m}^5 = yI$，因此 $\mathfrak{m}^3 \subset I$。但由于 $\mathfrak{m}I \cong \mathfrak{m}^6$ 是 Ulrich，对于 $\mathfrak{m}$ 的某个极小约化，我们得到 $\mathfrak{m}^2 I \subset (x)$，从而 $\mathfrak{m}^5 \subset \mathfrak{m}^2 I \subset (x)$。其余部分可以参照 [2]。

References

[1] W. Bruns 和 J. Herzog，Cohen-Macaulay 环，剑桥高等数学研究丛书，**39**，剑桥，剑桥大学出版社，1993。[2] A. De Stefani，Ding 猜想的一个反例，《代数杂志》，**452**，第 324–337 页，2016。[3] H. Dao、S. Maitra、P. Sridhar，关于曲线上的反身 I-Ulrich 模，arXiv:2101.02641，《美国数学会汇刊》，即将发表。[4] H. Dao、T. Kobayashi 和 R. Takahashi，Burch 理想与 Burch 环，《代数与数论》，《代数与数论》**14** (2020)，第 8 期，2121–2150。

[5] S. Ding, 《Gorenstein 局部环的伴随分次环与指标》，美国数学会会刊，120 (4) (1994), 1029–1033。[6] S. Ding, 《Gorenstein 局部环的 Auslander 不变量》，美国数学会会刊，122 (3) (1994), 649–656。[7] J. Elias, 《一维 Cohen-Macaulay 局部环的典范理想》，爱丁堡数学会会刊 (2) 59 (2016), no. 1, 77–90。[8] S. Goto, 《完全交理想的整闭性》，《代数杂志》108 (1987), no. 1, 151–160。[9] W. Heinzer、L.J Ratliff 和 D.E. Rush, 《局部环中的基本满理想》，Journal of Algebra 250 (2002), 371–396。[10] C. Huneke 和 I. Swanson, 《理想、环与模的整闭包》，伦敦数学会讲义丛书 336，剑桥大学出版社，2006。[11] H-B. Foxby 和 A. Thorup, 《平坦基变换下的最小内射分解》，美国数学会会刊，67 (1): 27–31, 1977。[12] J. Watanabe，m-满理想，名古屋数学杂志 106 (1987), 101–111。

Hailong Dao, Department of Mathematics, University of Kansas, 405 Snow Hall, 1460Jayhawk Blvd., Lawrence, KS 66045电子邮箱：hdao@ku.edu